

Matemática financiera

Daniel
Herrera
Aráuz



MATERIAL
WEB

Universidad Central del Ecuador

Quito





Sistema Integrado de Bibliotecas

Biblioteca digital UCE

Calle Jerónimo Leyton y Gato Sobral – Cda. Universitaria
+593 2230757 ext: 808 biblioteca.general@uce.edu.ec

BASE LEGAL PARA DIGITALIZACIÓN DE LIBROS CON DERECHOS DE AUTOR

El Sistema Integrado de Bibliotecas de la Universidad Central del Ecuador, digitalizará su acervo bibliográfico siempre y cuando sea para fines educativos y de investigación. No se permite la reproducción y distribución para la comercialización directa e indirecta del mismo.

La digitalización del material bibliográfico se lo realiza de acuerdo al Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación Art. 212 numeral 9, Literal ii “(...) Una biblioteca o archivo podrá, además, realizar los siguientes actos (...) La reproducción electrónica y comunicación pública de obras de su colección para ser consultadas gratuita y simultáneamente hasta por un número razonable de usuarios, sólo en terminales de redes de la respectiva institución o para usuarios de esa institución bajo su control, en condiciones que garanticen que no se puedan hacer copias electrónicas de esas reproducciones” y literal vii “La reproducción, adaptación, traducción, transformación, arreglo, distribución y comunicación de una obra protegida por derechos de autor o una prestación protegida por derechos conexos, en uno o más formatos accesibles para el uso exclusivo de personas con discapacidad”.

Este material se considera un producto intelectual a favor de su autor; por tanto, la titularidad de sus derechos se encuentra protegida por el Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación. La violación a dichos derechos constituye un delito que será responsabilidad del usuario.

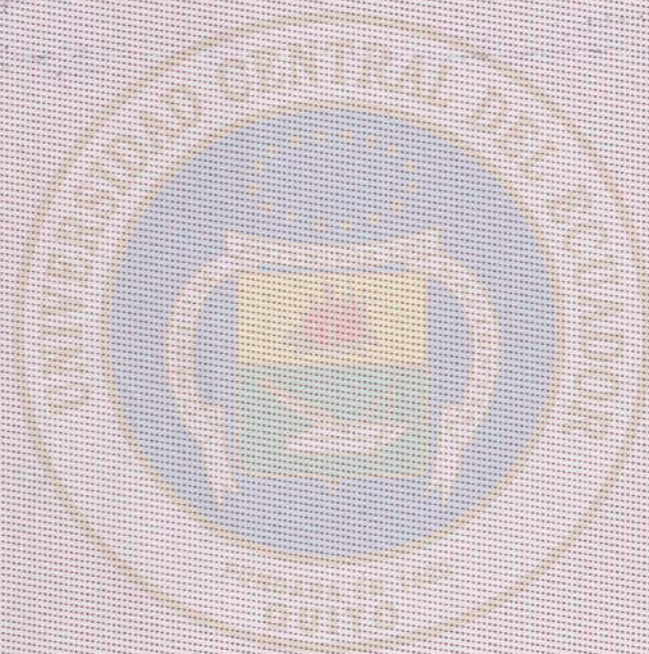
Este libro está disponible físicamente en:

BIBLIOTECA	ADMINISTRACIÓN	PISO	
		ESTANTE	4
		BANDEJA	13
CONVENIO INTERINSTITUCIONAL		UNIVERSIDAD	



SIBUCE





BIBLIOTECA FAC. CIENCIAS ADMINISTRATIVAS
INTERMUNIC

Compra: Donación: ☒ Canje:

Proveedor: Autos

Factura: Fecha: 07-05-2015 Folio:

Nº Inf. Recop: DFA-367 Fecha: 10-05-2015

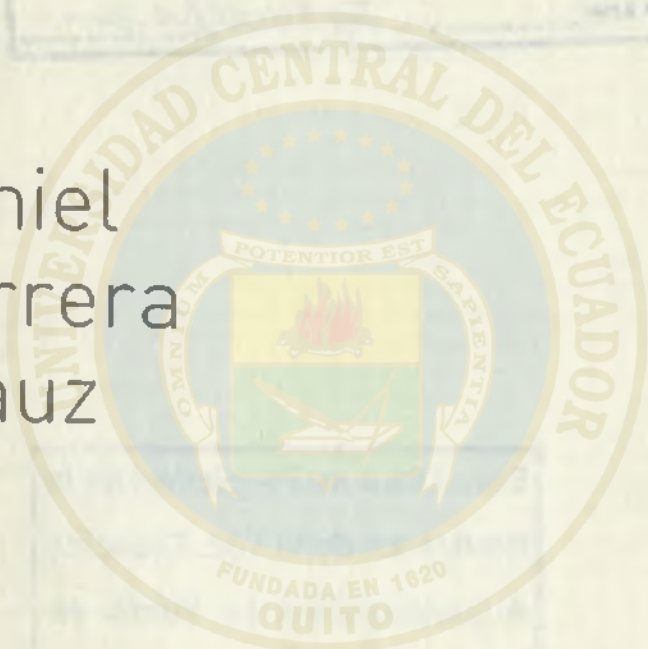
Nº Atto: Ing. # 00028 / 3 Ejemp.



Este Libro es Propiedad de la
Biblioteca de la Fac. Ciencias
Administrativas su Venta es
Penada por la LEY.



Daniel
Herrera
Aráuz



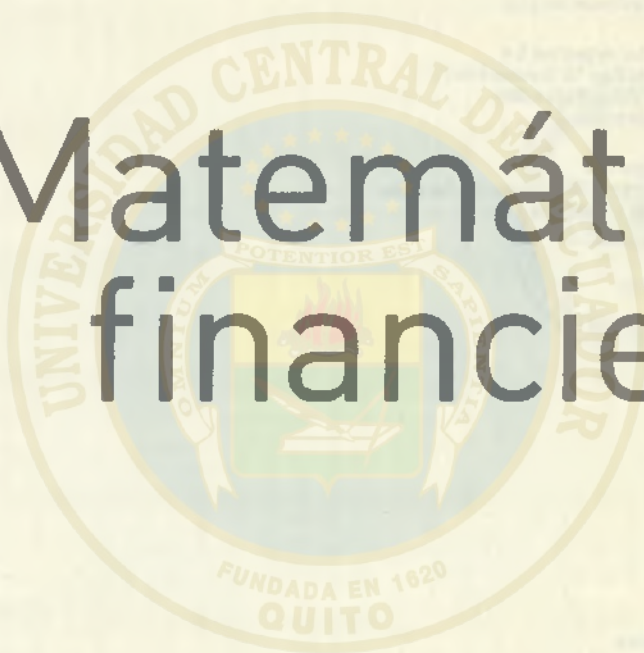
Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapiencia



513.1
H565
E3
ADN
4/13

Matemática financiera



Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapientia

Biblioteca Fac. Ciencias Administrativas

Empresas del Grupo

COLOMBIA

Alfaomega Colombiana S.A.
Calle 62 No. 20-46, Bogotá D.C.
PBX (57-1) 746 0102
Fax (57-1) 210 0122
cliente@alfaomegacolombiana.com

MÉXICO

Alfaomega Grupo Editor S.A. de C.V.
Calle Doctor Olvera N° 74, Colonia Doctores,
Delegación Cuauhtémoc, Ciudad de México
C.P. 06720 • Tel. (52-55) 5089 7740
Fax. (52-55) 5575 2420
Sin costo 01-800-020-4396
libreriapitagoras@alfaomega.com.mx

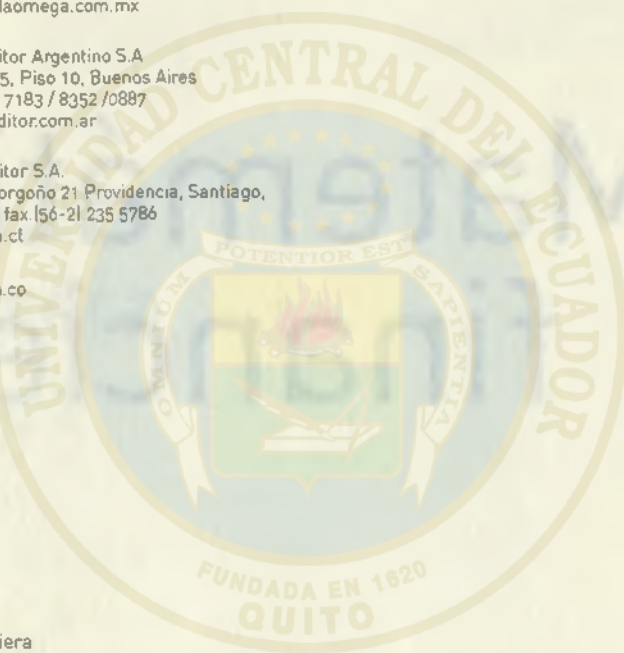
ARGENTINA

Alfaomega Grupo Editor Argentino S.A.
Avenida Córdoba 1215, Piso 10, Buenos Aires
Tel/Fax. (54-11) 4811 7183 / 8352 / 0887
ventas@alfaomegaeditor.com.ar

CHILE

Alfaomega Grupo Editor S.A.
Dr. Manuel Barros Borgoño 21 Providencia, Santiago,
Tel. (56-2) 235 4248 • fax. (56-2) 235 5786
agechile@alfaomega.cl

www.alfaomega.com.co



Matemática financiera
Bogotá, 2017

© Alfaomega Colombiana S. A. 2017
© Daniel Herrera Aráuz

Todos los derechos son reservados. Esta publicación no puede ser reproducida total ni parcialmente. No puede ser registrada por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo y por escrito de la editorial.

Editora: Sara Gallardo M.
Diseño: Ana Paula Santander

ISBN 978-958-778-235-6

Hecho en Colombia
Printed and made in Colombia

A mi madre, a mis hermanos, a mis sobrinos y a
Nilma Martins Rúa, familia comprometida con la
verdad, el conocimiento, la academia y el arte.
A Genoveva, María Lorena y Esteban Daniel, eternos
y brillantes colaboradores, apoyo fundamental en
todos mis proyectos.



Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapiencia

Software didáctico para el estudio de matemática financiera



El software didáctico para el estudio de Matemática financiera (SOFTDIMAFI) es una aplicación informática desarrollada en el programa Excel, como complemento del texto de Matemática Financiera del autor Daniel Herrera Aráuz.

Contenido

Está conformado por 27 plantillas independientes entre sí, que permiten comprobar los resultados de los ejercicios planteados en el texto; por otro lado, es posible en estas plantillas la creación, por parte del usuario, de diversos escenarios financieros al modificar los valores asignados al Capital, al plazo, a la tasa de interés y a la frecuencia de capitalización.

Acceso al programa

Para acceder a las diferentes plantillas, basta accionar los hipervínculos que se encuentran en el archivo 000.- Menú principal, cuya ventana se incluye a continuación:

PROGRAMAS DE CÁLCULO	
INTERÉS SIMPLE	ANUALIDADES
Cálculo de Fechas y Plazos	Anualidades Vencidas
Cálculo de Interés Simple	Anualidades Anticipadas
Elementos financieros a Interés Simple	Anualidades Diferidas
Valor Actual a Interés Simple	Perpetuidades
Ecuaciones de Valor a Interés Simple	Anualidades Generales (Pago Equivalente)
Análisis de Ofertas a Interés Simple	Anualidades Generales (Tasa Equivalente)
DESCUENTO SIMPLE	APLICACIONES DE LAS ANUALIDADES
Descuento Simple	Amortización de Deudas
Liquidación de pagarés	Fondos de Acumulación
Tasa de Interés- Tasa de descuento	Negociación de Bonos
INTERÉS COMPUESTO	GRADIENTE FINANCIERO
Tasas y Periodos a Interés Compuesto	Gradiente Aritmético
Elementos Financieros a Interés Compuesto	Gradiente Geométrico
Ecuaciones de Valor a Interés Compuesto	Depreciación
Análisis de Ofertas a Interés Compuesto	VAN y TIR
Tasas Equivalentes	

A su vez, cada una de las plantillas dispone de un botón de retorno al Menú principal o al Menú del programa.

Regrese al Menú Principal

Ingreso de información

Para el ingreso de la información en cada una de las plantillas de Excel, se debe tener en cuenta que dicha información se alojará en las celdas de fondo amarillo:

Datos de ingreso

Estas celdas están preparadas para recibir información en los siguientes formatos:

- Formato de millares (capital, valor actual, monto o valor futuro, renta, etc.)
- Formato de porcentajes (tasa de interés).
- Formato de fechas (fecha de emisión, fecha de vencimiento, fecha de negociación, etc.)

La información ingresa a estas celdas de la siguiente manera:

- Directamente a través del teclado.
- Mediante selección de lista, sobre todo en lo referente a la frecuencia de capitalización.

Muestra de resultados

Los resultados que se obtienen en las diferentes plantillas están alojados en celdas de color verde, tal como se indica:

Resultado obtenido

Reinicialización del programa

Para resolver un nuevo ejercicio es necesario que el usuario borre los datos del problema anterior, en todas las plantillas existe un botón que borra los datos ingresados:

Reinicialice el programa

Al activar este botón, el programa borra los datos ingresados, permitiendo de esta manera que el usuario introduzca los datos del siguiente problema.

Protección de fórmulas del programa

En todas las plantillas se ha bloqueado la edición de la hoja de cálculo, de manera que el usuario solamente pueda ingresar la información para obtener los resultados. Las fórmulas de las plantillas están ocultas y protegidas para evitar acciones involuntarias que puedan borrarlas e inutilizar al programa.

El lector podrá encontrar los apoyos web en el siguiente vínculo:

http://libroweb.alfaomega.com.mx/book/matematica_financiera

Regístrese como usuario

Ingrese el siguiente código de acceso:

u01MP2

Este código es personal e intransferible. En caso de que el sistema detecte una doble entrada, será bloqueado en forma automática y perderá su validez.

Contenido

x	Lista de gráficos
xiii	Lista de siglas
xiv	El autor
xv	Introducción

CAPÍTULO 1 • Definiciones básicas

2	1.1 Definición de Matemática Financiera
2	1.2 El dinero
2	1.3 Usos del dinero
2	1.4 Inversión
3	1.5 El triángulo financiero
3	1.6 El crédito
3	1.7 El interés
3	1.8 Elementos financieros
4	1.9 El dinero y el tiempo

CAPÍTULO 2 • Interés simple

6	2.1 Introducción
6	2.2 Elementos financieros y cálculo del Interés simple
7	2.3 Monto de una transacción a Interés simple
7	2.4 Valor actual de una transacción a Interés simple
8	2.5 Cálculo de la tasa de interés
8	2.6 Cálculo del tiempo
8	2.7 Ecuaciones de valor
10	2.8 Recomendaciones metodológicas para la solución de problemas
11	2.9 Problemas resueltos
25	2.10 Problemas propuestos

CAPÍTULO 3 • Descuento simple y Amortización simple

30	3.1 Descuento racional
30	3.2 Descuento bancario o Descuento simple
30	3.3 Valor descontado
31	3.4 Aplicación del Descuento bancario en documentos financieros
31	3.5 Relación entre la Tasa de descuento y la Tasa de Interés Simple
32	3.6 Amortización simple
35	3.7 Problemas resueltos
41	3.8 Problemas propuestos

CAPÍTULO 4 • Interés compuesto

44	4.1 Introducción
45	4.2 Elementos financieros del Interés compuesto
47	4.3 Monto a Interés compuesto
48	4.4 Monto a Interés compuesto, si el número de periodos es fraccionario
48	4.5 Valor actual de una transacción a Interés compuesto
49	4.6 Valor actual en periodos fraccionarios
49	4.7 Cálculo del número de periodos y del tiempo

49	4.8 Cálculo de la Tasa periódica a Interés compuesto
50	4.9 Tasa equivalente
50	4.10 Capitalización continua
52	4.11 Problemas resueltos
69	4.12 Problemas propuestos

CAPÍTULO 5 • Introducción al estudio de las anualidades

74	5.1 Definición
74	5.2 Elementos de una anualidad
75	5.3 Clasificación
75	5.4 Combinación de las anualidades

CAPÍTULO 6 • Anualidades vencidas

78	6.1 Definición
78	6.2 Representación gráfica
79	6.3 Valor futuro de una anualidad vencida
79	6.4 Valor presente de una anualidad vencida
80	6.5 Pago periódico de una anualidad vencida
81	6.6 Determinación del número de periodos
81	6.7 Cálculo de la tasa periódica
83	6.8 Problemas resueltos
98	6.9 Problemas propuestos

CAPÍTULO 7 • Anualidades anticipadas

102	7.1 Definición
102	7.2 Representación gráfica
102	7.3 Valor futuro de una anualidad anticipada
103	7.4 Valor presente de una anualidad anticipada
104	7.5 Pago periódico de una anualidad cierta ordinaria anticipada
104	7.6 Determinación del número de periodos
105	7.7 Cálculo de la tasa periódica
106	7.8 Problemas resueltos
120	7.9 Problemas propuestos

CAPÍTULO 8 • Anualidades diferidas

124	8.1 Definición
124	8.2 Representación gráfica
124	8.3 Valor actual de una anualidad diferida
125	8.4 Valor futuro o Monto de una Anualidad diferida
125	8.5 Cálculo de la renta en una Anualidad diferida
125	8.6 Número de periodos y tasa periódica de una Anualidad diferida
126	8.7 Problemas resueltos
140	8.8 Problemas propuestos

CAPÍTULO 9 • Perpetuidades

146	9.1 Definición
146	9.2 Representación gráfica
146	9.3 Valor futuro de una anualidad perpetua
146	9.4 Valor actual de una perpetuidad vencida

147	9.5 Valor actual de una perpetuidad anticipada
148	9.6 Valor actual de una perpetuidad con pagos cada cierto período
149	9.7 Costos adicionales para incremento de la vida útil de un activo
149	9.8 Costos capitalizados
151	9.9 Problemas resueltos
163	9.10 Problemas propuestos

CAPÍTULO 10 • Anualidades generales

168	10.1 Definición
168	10.2 Clasificación
168	10.3 Anualidades equivalentes
168	10.4 Agrupamiento y distribución de los pagos
169	10.5 Pago equivalente
170	10.6 Tasa equivalente
170	10.7 Valor futuro y Valor actual de una anualidad general vencida
171	10.8 Pago periódico de una anualidad general vencida
171	10.9 Valor futuro y Valor actual de una anualidad general anticipada
171	10.10 Pago periódico de una anualidad general anticipada
172	10.11 Problemas resueltos
193	10.12 Problemas propuestos

CAPÍTULO 11 • Amortización

198	11.1 Introducción
198	11.2 Valor del pago periódico
198	11.3 Derechos del acreedor y del deudor
199	11.4 Tabla de amortización
199	11.5 Consideraciones para la elaboración de la tabla de amortización
200	11.6 Problemas resueltos
210	11.7 Problemas propuestos

CAPÍTULO 12 • Fondos de acumulación

214	12.1 Introducción
214	12.2 Valor del depósito periódico
214	12.3 Valor en el fondo luego de un número de depósitos realizados
214	12.4 Tabla del fondo de acumulación
215	12.5 Consideraciones para la creación de la tabla de acumulación
216	12.6 Problemas resueltos
224	12.7 Problemas propuestos

CAPÍTULO 13 • Gradiente financiero

228	13.1 Definición
228	13.2 Clasificación
229	13.3 Gradiente aritmético lineal o uniforme
229	13.4 Valor actual y Valor futuro del Gradiente aritmético
234	13.5 Gradiente geométrico o porcentual
234	13.6 Valor actual y Valor futuro del gradiente geométrico
236	13.7 Problemas resueltos
255	13.8 Problemas propuestos

CAPÍTULO 14 • Amortización variable

- 260 14.1 Introducción
- 260 14.2 La herramienta Buscar objetivo
- 262 14.3 Aplicación de la herramienta de Excel: Buscar objetivo
- 264 14.4 Problemas resueltos
- 275 14.5 Problemas propuestos

CAPÍTULO 15 • Fondos de acumulación variable

- 278 15.1 Introducción
- 278 15.2 Problemas resueltos
- 289 15.3 Problemas propuestos

CAPÍTULO 16 • Depreciación de activos

- 292 16.1 Introducción
- 292 16.2 Variables que intervienen en la depreciación
- 293 16.3 Depreciación del activo
- 293 16.4 Depreciación periódica
- 293 16.5 Valor en libros
- 293 16.6 Métodos de depreciación
- 298 16.7 Problemas resueltos
- 301 16.8 Problemas propuestos

CAPÍTULO 17 • Negociación de bonos

- 304 17.1 Definición
- 304 17.2 Elementos de un bono
- 305 17.3 Valor de redención de un bono
- 305 17.4 Número de cupones y valor de cada cupón
- 306 17.5 Precio de venta de un bono
- 306 17.6 Precio de venta de un bono en fecha de pago de intereses
- 307 17.7 Precio de venta de un bono entre fechas de cupón
- 308 17.8 Problemas resueltos
- 315 17.9 Problemas propuestos

CAPÍTULO 18 • Valor actual neto y Tasa interna de retorno

- 318 18.1 Introducción
- 318 18.2 El flujo de caja
- 318 18.3 Valor actual neto
- 319 18.4 Tasa interna de retorno
- 320 18.5 Problemas resueltos
- 339 18.6 Problemas propuestos

- 345 Anexo N° 1. Número de cada día del año a partir del 1 de enero
- 346 Bibliografía
- 347 Índice analítico



Lista de gráficas

3	Gráfico Texto 1.5	57	Gráfico problema 4.5.f.1
7	Gráfico texto 2.4	57	Gráfico problema 4.5.f.2
14	Gráfico problema 2.10.a	58	Gráfico problema 4.6
14	Gráfico problema 2.10.b	58	Gráfico problema 4.7.a
14	Gráfico problema 2.10.c	59	Gráfico problema 4.7.b
15	Gráfico problema 2.10.d	59	Gráfico problema 4.8
15	Gráfico problema 2.11.a	59	Gráfico problema 4.9
15	Gráfico problema 2.11.b	60	Gráfico problema 4.10
16	Gráfico problema 2.12	60	Gráfico problema 4.11
16	Gráfico problema 2.13	61	Gráfico problema 4.12
17	Gráfico problema 2.14	61	Gráfico problema 4.13
18	Gráfico problema 2.15	62	Gráfico problema 4.14
18	Gráfico problema 2.16	62	Gráfico problema 4.15
19	Gráfico problema 2.17	63	Gráfico problema 4.16
20	Gráfico problema 2.18.a	63	Gráfico problema 4.17
20	Gráfico problema 2.18.b	64	Gráfico problema 4.18
21	Gráfico problema 2.18.c	65	Gráfico problema 4.19.a
21	Gráfico problema 2.19.a	65	Gráfico problema 4.19.b
22	Gráfico problema 2.19.b	65	Gráfico problema 4.19.c
23	Gráfico problema 2.19.c	66	Gráfico problema 4.20.a
23	Gráfico problema 2.20.a	66	Gráfico problema 4.20.b
24	Gráfico problema 2.20.b	66	Gráfico problema 4.20.c
35	Gráfico problema 3.1	78	Gráfico texto 6.2
35	Gráfico problema 3.2	78	Gráfico texto 6.3
36	Gráfico problema 3.4	79	Gráfico texto 6.4
36	Gráfico problema 3.5	82	Gráfico texto 6.7
37	Gráfico problema 3.6	83	Gráfico problema 6.1
37	Gráfico problema 3.7.a	83	Gráfico problema 6.2
37	Gráfico problema 3.7.b	84	Gráfico problema 6.3
38	Gráfico problema 3.8.a	84	Gráfico problema 6.4
38	Gráfico problema 3.8.b	85	Gráfico problema 6.5
45	Gráfico texto 4.1	85	Gráfico problema 6.6
48	Gráfico texto 4.4	86	Gráfico problema 6.7.a
49	Gráfico texto 4.6	86	Gráfico problema 6.7.b
52	Gráfico problema 4.2	87	Gráfico problema 6.8
53	Gráfico problema 4.3.a	87	Gráfico problema 6.9.a
53	Gráfico problema 4.3.b	88	Gráfico problema 6.9.b
53	Gráfico problema 4.3.c	88	Gráfico problema 6.9.c
53	Gráfico problema 4.3.d	89	Gráfico problema 6.10.a
54	Gráfico problema 4.4.a	89	Gráfico problema 6.10.b
54	Gráfico problema 4.4.b	90	Gráfico problema 6.11
55	Gráfico problema 4.5.a	91	Gráfico problema 6.12
55	Gráfico problema 4.5.b	91	Gráfico problema 6.13
55	Gráfico problema 4.5.c	92	Gráfico problema 6.14
56	Gráfico problema 4.5.d	92	Gráfico problema 6.15
56	Gráfico problema 4.5.e.1	93	Gráfico problema 6.16
56	Gráfico problema 4.5.e.2	94	Gráfico problema 6.17.a

94	Gráfico problema 6.17.b	130	Gráfico problema 8.9
95	Gráfico problema 6.18.a	131	Gráfico problema 8.10
95	Gráfico problema 6.18.b	132	Gráfico problema 8.11
95	Gráfico problema 6.18.c	132	Gráfico problema 8.12
96	Gráfico problema 6.19.a	133	Gráfico problema 8.13
96	Gráfico problema 6.19.b	133	Gráfico problema 8.14
96	Gráfico problema 6.19.c	134	Gráfico problema 8.15
97	Gráfico problema 6.20	135	Gráfico problema 8.16
102	Gráfico texto 7.2	135	Gráfico problema 8.17
102	Gráfico texto 7.3	136	Gráfico problema 8.18
103	Gráfico texto 7.4	137	Gráfico problema 8.19
106	Gráfico problema 7.1.a	138	Gráfico problema 8.20
106	Gráfico problema 7.1.b	146	Gráfico texto 9.2
107	Gráfico problema 7.2.a	147	Gráfico texto 9.5.a
107	Gráfico problema 7.2.b	148	Gráfico texto 9.5.b
107	Gráfico problema 7.3	148	Gráfico texto 9.6
108	Gráfico problema 7.4	151	Gráfico problema 9.1
108	Gráfico problema 7.5	151	Gráfico problema 9.2
109	Gráfico problema 7.6	151	Gráfico problema 9.3
109	Gráfico problema 7.7	152	Gráfico problema 9.4
110	Gráfico problema 7.8	152	Gráfico problema 9.5
110	Gráfico problema 7.9	152	Gráfico problema 9.6
111	Gráfico problema 7.10	153	Gráfico problema 9.7
111	Gráfico problema 7.11.a	154	Gráfico problema 9.8
112	Gráfico problema 7.11.b	154	Gráfico problema 9.9.a
112	Gráfico problema 7.12.a	155	Gráfico problema 9.9.b
112	Gráfico problema 7.12.b	155	Gráfico problema 9.10.a
113	Gráfico problema 7.13.a	155	Gráfico problema 9.10.b
113	Gráfico problema 7.13.b	156	Gráfico problema 9.10.c
114	Gráfico problema 7.14.a	156	Gráfico problema 9.11.a
114	Gráfico problema 7.14.b	156	Gráfico problema 9.11.b
115	Gráfico problema 7.15.a	157	Gráfico problema 9.11.c
115	Gráfico problema 7.15.b	157	Gráfico problema 9.12.a
116	Gráfico problema 7.15.c	158	Gráfico problema 9.12.b
116	Gráfico problema 7.16	158	Gráfico problema 9.13.a
117	Gráfico problema 7.17	158	Gráfico problema 9.13.b
117	Gráfico problema 7.18	159	Gráfico problema 9.14.a
118	Gráfico problema 7.19	159	Gráfico problema 9.14.b
119	Gráfico problema 7.20	161	Gráfico problema 9.18.a
124	Gráfico texto 8.2	161	Gráfico problema 9.18.b
124	Gráfico texto 8.3	162	Gráfico problema 9.19.a
126	Gráfico problema 8.1	162	Gráfico problema 9.19.b
126	Gráfico problema 8.2	162	Gráfico problema 9.19.c
127	Gráfico problema 8.3	162	Gráfico problema 9.20.a
127	Gráfico problema 8.4	162	Gráfico problema 9.20.b
128	Gráfico problema 8.5	169	Gráfico texto 10.5.a
129	Gráfico problema 8.6	169	Gráfico texto 10.5.b
129	Gráfico problema 8.7	172	Gráfico problema 10.1.a
130	Gráfico problema 8.8	172	Gráfico problema 10.1.b

172	Gráfico problema 10.1.c	192	Gráfico problema 10.14.c
172	Gráfico problema 10.1.d	192	Gráfico problema 10.15.a
173	Gráfico problema 10.2.a.1	192	Gráfico problema 10.15.b
173	Gráfico problema 10.2.a.2	200	Gráfico problema 11.1
173	Gráfico problema 10.2.a.3	201	Gráfico problema 11.2
174	Gráfico problema 10.2.b.1	202	Gráfico problema 11.3
174	Gráfico problema 10.2.b.2	203	Gráfico problema 11.4
174	Gráfico problema 10.2.b.3	204	Gráfico problema 11.5
175	Gráfico problema 10.2.c.1	205	Gráfico problema 11.6
175	Gráfico problema 10.2.c.2	206	Gráfico problema 11.7
175	Gráfico problema 10.2.c.3	207	Gráfico problema 11.8.a
176	Gráfico problema 10.2.d.1	207	Gráfico problema 11.8.b
176	Gráfico problema 10.2.d.2	208	Gráfico problema 11.9.a
176	Gráfico problema 10.2.d.3	208	Gráfico problema 11.9.b
177	Gráfico problema 10.3.a.1	208	Gráfico problema 11.10.a
178	Gráfico problema 10.3.a.2	209	Gráfico problema 11.10.b
178	Gráfico problema 10.3.b.1	217	Gráfico problema 12.4
179	Gráfico problema 10.3.b.2	218	Gráfico problema 12.5.a
179	Gráfico problema 10.3.c.1	219	Gráfico problema 12.5.b
180	Gráfico problema 10.3.c.2	222	Gráfico problema 12.7
180	Gráfico problema 10.3.d.1	223	Gráfico problema 12.8
181	Gráfico problema 10.3.d.2	228	Gráfico texto 13.1.a
181	Gráfico problema 10.4.a	228	Gráfico texto 13.1.b
181	Gráfico problema 10.4.b	228	Gráfico texto 13.1.c
182	Gráfico problema 10.5	228	Gráfico texto 13.1.d
182	Gráfico problema 10.6.a	229	Gráfico texto 13.4.a
182	Gráfico problema 10.6.b	229	Gráfico texto 13.4.b
183	Gráfico problema 10.6.c	230	Gráfico texto 13.4.c
184	Gráfico problema 10.7.a	231	Gráfico texto 13.4.d
184	Gráfico problema 10.7.b	231	Gráfico texto 13.4.e
185	Gráfico problema 10.8.a	231	Gráfico texto 13.4.f
185	Gráfico problema 10.8.b	236	Gráfico problema 13.1
186	Gráfico problema 10.9.a	237	Gráfico problema 13.2
186	Gráfico problema 10.9.b	238	Gráfico problema 13.3
186	Gráfico problema 10.9.c	239	Gráfico problema 13.4
187	Gráfico problema 10.10.a	240	Gráfico problema 13.5
187	Gráfico problema 10.10.b	240	Gráfico problema 13.6
187	Gráfico problema 10.10.c	241	Gráfico problema 13.7.a
188	Gráfico problema 10.11.a	241	Gráfico problema 13.7.b
188	Gráfico problema 10.11.b	242	Gráfico problema 13.8
188	Gráfico problema 10.11.c	243	Gráfico problema 13.9.a
189	Gráfico problema 10.12.a	243	Gráfico problema 13.9.b
189	Gráfico problema 10.12.b	244	Gráfico problema 13.10
189	Gráfico problema 10.12.c	244	Gráfico problema 13.11
190	Gráfico problema 10.13.a	245	Gráfico problema 13.12
190	Gráfico problema 10.13.b	246	Gráfico problema 13.13.a
190	Gráfico problema 10.13.c	247	Gráfico problema 13.13.b
191	Gráfico problema 10.14.a	247	Gráfico problema 13.14
191	Gráfico problema 10.14.b	248	Gráfico problema 13.15

249	Gráfico problema 13.16	309	Gráfico problema 17.3
250	Gráfico problema 13.17.a	309	Gráfico problema 17.4
250	Gráfico problema 13.17.b	310	Gráfico problema 17.5
251	Gráfico problema 13.18.a	311	Gráfico problema 17.6
251	Gráfico problema 13.18.b	311	Gráfico problema 17.7
252	Gráfico problema 13.19	312	Gráfico problema 17.8.a
253	Gráfico problema 13.20	312	Gráfico problema 17.8.b
260	Gráfico texto 14.2.a	313	Gráfico problema 17.9.a
261	Gráfico texto 14.2.b	313	Gráfico problema 17.9.b
261	Gráfico texto 14.2.c	314	Gráfico problema 17.10.a
262	Gráfico texto 14.2.d	314	Gráfico problema 17.10.b
262	Gráfico texto 14.3	320	Gráfico problema 18.1
283	Gráfico problema 15.6	320	Gráfico problema 18.2
285	Gráfico problema 15.7	321	Gráfico problema 18.3
287	Gráfico problema 15.8	322	Gráfico problema 18.4
294	Gráfico Texto 16.6.a	322	Gráfico problema 18.5
296	Gráfico texto 16.6.b	323	Gráfico problema 18.6
297	Gráfico texto 16.6.c	325	Gráfico problema 18.8.a
304	Gráfico texto 17.1	325	Gráfico problema 18.8.b
308	Gráfico problema 17.1	327	Gráfico problema 18.10.a
308	Gráfico problema 17.2	328	Gráfico problema 18.10.b

Lista de siglas

AC	Abono al capital
FCN	Flujo de Caja Neto
IAP	Interés acreditado en el período
IPV	Interés periódico vencido
SIAP	Saldo Insoluto Antes del Pago
SIDP	Saldo Insoluto Después del Pago
TIR	Tasa Interna de retorno
VAN	Valor Actual Neto
VAP	Valor acreditado en el período
VFAD	Valor en el Fondo antes del depósito
VFDD	Valor en el Fondo después del depósito

Daniel Herrera Aráuz realizó sus estudios secundarios en el Colegio Nacional Mejía; es ingeniero civil y magíster en Docencia Matemática de la Universidad Central del Ecuador; tiene un diplomado superior en Gestión de Proyectos otorgado por la Facultad de Ciencias Económicas de la misma universidad.

Durante 25 años ejerció la ingeniería civil como fiscalizador de obra y de contratos de inversión pública, en la Empresa Metropolitana de Agua Potable y Saneamiento EPMAPS, Quito.

Desde 1993 es profesor de Matemática Financiera, Estadística e Investigación Operativa, en la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador.

Ha sido profesor de Matemática Aplicada, Matemática Financiera, Estadística, y Evaluación de Proyectos, a nivel de posgrado, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central del Ecuador, en el Instituto de Altos Estudios Nacionales (IAEN), en la Universidad Tecnológica Equinoccial (UTE) y en la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Técnica Particular de Loja (UTPL).

Así mismo, ha sido instructor de Excel y Tablas Dinámicas, en el Centro de Educación Continua de la Escuela Politécnica Nacional e Instructor de SPSS y MS Project, en el Centro de Educación Continua de la Universidad Tecnológica Equinoccial.



Introducción

Matemática Financiera nace para los estudiantes universitarios y los profesionales ecuatorianos y del mundo. Contempla un material didáctico desarrollado durante varios años por el autor, Daniel Herrera Aráuz, en el ejercicio práctico de su cátedra en la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador y en otras instituciones de educación superior de ese país, en los niveles de pregrado y posgrado.

El contenido del libro responde a la temática desarrollada en un curso normal de Matemática Financiera e inicia con algunas definiciones básicas sobre la terminología utilizada en esta materia. Incluye material de estudio para el Interés Simple y el Interés Compuesto relacionado con elementos fundamentales para el desarrollo de aplicaciones, tales como: el Descuento Simple, la Amortización Simple, las Anualidades, la Amortización, la Acumulación de Fondos, la Depreciación de Activos y la Negociación de Bonos. El último capítulo se ocupa de las herramientas de Decisión Financiera, mediante el Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR).

Todos los temas que contiene el texto disponen de un marco teórico con las definiciones, fórmulas de cálculo y metodología para la solución de problemas. Así mismo, cada una de las unidades de estudio está acompañada de un número suficiente de problemas resueltos, en los que se ha aplicado en detalle la metodología de las Ecuaciones de Valor.

De igual forma, cada capítulo reúne un grupo de problemas para que el lector los resuelva aplicando los conocimientos y metodologías contenidas en el marco teórico. Después podrá compararlos con las respectivas respuestas del libro.

Otro valor agregado del libro lo conforma un grupo de programas de cálculo desarrollados en *Excel*, una herramienta efectiva para comprobar los resultados obtenidos.

Tales programas responden a la necesidad de disponer de un *software* de carácter didáctico, para desarrollar el proceso de cálculo y garantizar la exactitud de las respuestas. Además de que el usuario pueda establecer diferentes escenarios, mediante la variación de los valores iniciales del problema.

De esa manera, el lector se apoya en la tecnología informática para facilitar los procesos de cálculo, poniendo en práctica su conocimiento y la capacidad de interpretar los resultados obtenidos.



Agradecimientos

A Armando Mora Zambrano y Víctor Hugo Pro Zambrano, catedráticos de la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador, por la revisión del texto y sus recomendaciones, siempre tan objetivas y oportunas.

A Pedro Zapata Sánchez, catedrático de la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador, por su apertura y colaboración desinteresadas en la edición de este libro.

1



DEFINICIONES BÁSICAS

OBJETIVO GENERAL

Establecer el marco teórico en el que se desarrolla la matemática financiera, como también los elementos que intervienen en el cálculo financiero, considerando el criterio de la variación del valor del dinero en el tiempo.

1.1 Definición de Matemática Financiera

La Matemática Financiera consiste en una serie de métodos, procesos y herramientas numéricas que permiten analizar y determinar las variaciones del dinero como elemento fundamental en las transacciones que se presentan en las actividades diarias, sean estas de tipo personal, comercial, o empresarial.

La Matemática Financiera requiere de conocimientos básicos de álgebra y una calculadora. También puede utilizarse algún programa informático, como la Hoja de cálculo Excel.

1.2 El dinero

El dinero es un bien convencionalmente aceptado como medio de pago en la compra de bienes y servicios de toda clase. Permite realizar y llevar a buen término las operaciones de intercambio, entre compradores y vendedores. Por otro lado, pueden considerarse como definiciones del dinero las siguientes:

- Es el elemento comúnmente aceptado en el mercado de bienes y servicios.
- Cualquier bien, ampliamente aceptado, que sirva como medio de pago y como medida y reserva de valor.

1.3 Usos del dinero

Como medio de pago, el dinero es aceptado a cambio de bienes y servicios, y confiere a su poseedor el poder de compra de otros bienes y servicios.

Como medida de valor, el dinero permite la comparación entre todos los bienes y servicios, y relaciona cada uno de ellos con los demás.

1.4 Inversión

En términos generales, La inversión es el empleo productivo de bienes económicos que da como resultado una magnitud mayor que la empleada. Es decir, La Inversión económica es el crecimiento del dinero, tomándolo como un bien económico.

Por otro lado, La Inversión en el contexto empresarial es el acto mediante el cual se invierten ciertos bienes con el ánimo de obtener unos ingresos o rentas, a través del tiempo. La Inversión se refiere al empleo de un capital en algún tipo de actividad o negocio, con el objetivo de incrementarlo.

Dicho de otra manera, consiste en renunciar a un consumo actual y cierto, a cambio de obtener unos beneficios futuros y distribuidos en el tiempo (MASSÉ, 1963).

1.5 El triángulo financiero

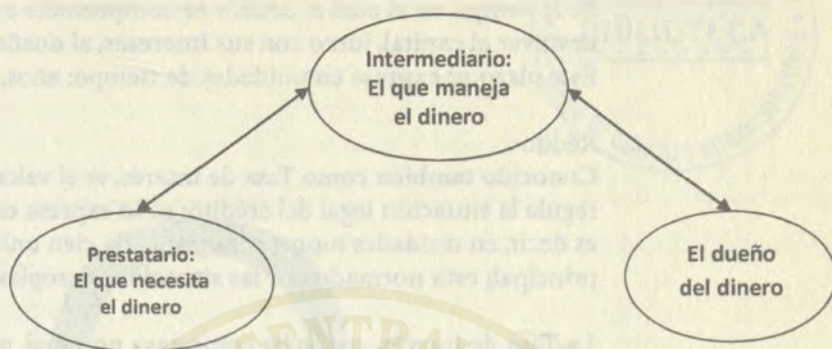


Gráfico Texto 1.5

En este triángulo se puede observar el nexo entre el Prestatario, es decir, quien necesita dinero para una inversión, El dueño del dinero y el Intermediario o quien gana dinero por manejar el dinero ajeno.

El dueño del dinero considera a la acción de prestar dinero como inversión, dado que es una manera en la cual el bien económico en juego (dinero), crecerá.

1.6 El crédito

Es el proceso económico mediante el cual el prestatario puede obtener dinero para realizar una inversión. *Utilizar el dinero ajeno tiene un costo.*

1.7 El interés

Es la cantidad de dinero que el prestamista o acreedor exige en un préstamo como pago por el uso de su dinero. Precisamente, El Interés es el costo que debe pagar el prestatario para usar en una inversión, un dinero que no le pertenece (PORTUS Govinden, 1985).

En resumen: El Interés puede definirse, en una primera aproximación de su concepto, como el precio pagado en dinero por el uso del dinero ajeno.

1.8 Elementos financieros

Existen tres elementos financieros fundamentales en el estudio de la Matemática Financiera, estos elementos son considerados como variables de cálculo en los ejercicios y problemas que se presentan en esta disciplina, su descripción es la siguiente:

a. Capital o principal

Es la cantidad de dinero en juego, es el valor del préstamo solicitado por el prestatario o deudor al dueño del dinero.

b. Plazo

Es el tiempo en el cual el deudor se compromete a retribuir o devolver el capital, junto con sus intereses, al dueño del dinero. Este plazo se expresa en unidades de tiempo: años, meses, días.

c. Rédito

Conocido también como Tasa de interés, es el valor que norma o regula la situación legal del crédito; se lo expresa en porcentajes; es decir, en unidades monetarias por cada cien unidades del principal; está normado por las situaciones propias del mercado.

La Tasa de interés, conocida como tasa nominal, es un porcentaje de dinero expresado en unidades de tiempo. Por ejemplo: 5% trimestral, 8% mensual, etc. Si la unidad de tiempo no está registrada, se asume que es anual.

1.9 El dinero y el tiempo

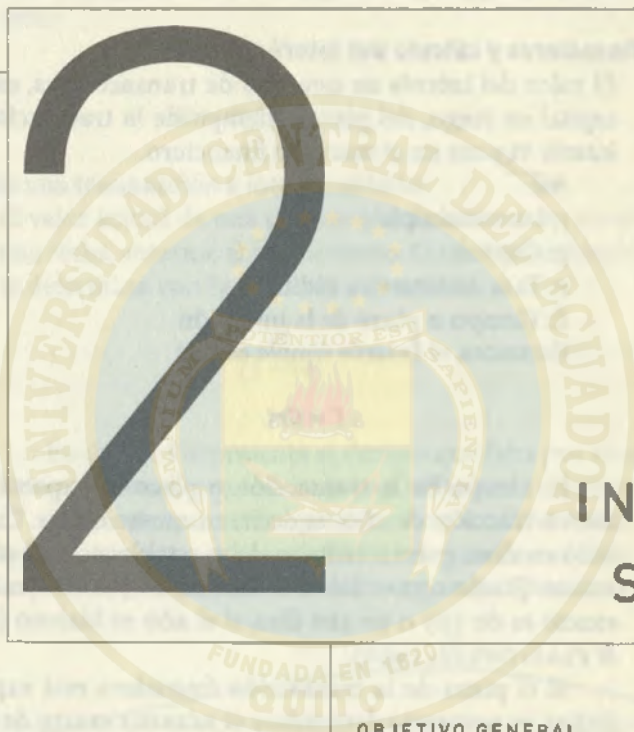
Se definió la Matemática Financiera como una serie de procesos, normas y maneras de calcular la variación del dinero con respecto al tiempo. El dinero y el tiempo son dos variables intrínsecamente relacionadas. De la variación de estas dos variables se determinan algunas definiciones tales como Valor actual y Valor futuro de una inversión.

El dinero, representado como el capital o principal de una transacción, varía conforme varía el tiempo. Por ejemplo, no es lo mismo disponer ahora de \$1,000, que la misma cantidad dentro de un año.

La variación del dinero en función del tiempo responde a dos tipos de factores:

- Factores internos: representados por la propia tasa de interés o rédito de la transacción. No hay que olvidar que esta tasa de interés se expresa como un porcentaje, acompañado por una unidad de tiempo.
- Factores externos: el más importante, La inflación, fenómeno económico cuyo efecto produce la desvalorización del dinero; es decir, la pérdida del poder adquisitivo del mismo.

Las definiciones registradas en este capítulo, serán herramientas cotidianas en el estudio de la Matemática Financiera y de sus aplicaciones en el mundo de los negocios y la administración de recursos, como también en la toma de decisiones empresariales de carácter financiero.



INTERÉS SIMPLE

OBJETIVO GENERAL

Analizar la definición de interés simple y determinar las expresiones matemáticas del cálculo de los elementos financieros que conforman una transacción a interés simple; establecer el método de las ecuaciones de valor para la solución de problemas que involucran el cálculo financiero.

2.1 Introducción

El Interés simple es una transacción financiera en la cual el capital o principal es prestado o invertido en un plazo relativamente corto, normalmente menor a un año. En este tipo de transacciones financieras el costo del dinero en inversión o en préstamo, es decir el interés, se le paga al dueño del mismo, una sola vez. En la mayoría de las ocasiones, al final del plazo; o, en algunos casos, al inicio del mismo.

2.2 Elementos financieros y cálculo del Interés simple

El valor del interés en este tipo de transacciones, está en función del capital en juego, del plazo o tiempo de la transacción, y de la tasa de interés vigente en el mercado financiero.

Así:

I : Interés simple

C : Capital

r : Tasa de interés o rédito

t : Tiempo o plazo de la inversión

Entonces, el Interés simple es:

$$I = Crt$$

El tiempo de la transacción o plazo se expresa normalmente en años o fracción de año, es decir, en meses o días. Cuando está expresado en días, previamente se debe establecer si el año es comercial o exacto. El año comercial se considera de 360 días, mientras que el año exacto es de 365 o de 366 días, si el año es bisiesto (CISSELL, CISSELL, & FLASPOHLER, 1996).

Si el plazo de la transacción financiera está expresado entre dos fechas, es necesario determinar el número exacto de días entre fecha y fecha. Este número se puede calcular de dos maneras, como se explica a continuación.

a. Tabla de cálculo entre fecha y fecha

Al final del texto se incluye el Anexo N° 1 "Numeración de días de un año". En esta tabla se ha asignado en forma secuencial un número a cada día del año, de manera que para establecer el número de días entre dos fechas, se determinará el número correspondiente a cada fecha. La diferencia entre estos dos números, será el número de días entre dos fechas.

b. Programa de cálculo de días entre fechas

En la Hoja electrónica Excel se puede calcular el número de días entre dos fechas. El usuario deberá ingresar en cada celda las fechas y luego, con una operación de resta o sustracción, en forma inmediata el programa entregará como resultado los días transcurridos entre dos fechas.

2.3 Monto de una transacción a Interés simple

El monto de una transacción a Interés simple, está determinado por la suma del capital más el interés generado por esta transacción.

Representando con M al monto se tiene:

$$M = C + I$$

Reemplazando el valor del interés y factorizando la expresión, se tiene:

$$M = C + Crt$$

$$M = C(1 + rt)$$

2.4 Valor actual de una transacción a Interés simple

El valor actual de una transacción financiera, es el valor del dinero en una fecha anterior al vencimiento. Con Interés simple, el Valor Actual se determina con la siguiente expresión:

$$VA = \frac{M}{(1 + rt)}$$

En donde t representa el tiempo que falta por vencerse; es decir, el tiempo entre el pago adelantado y la fecha de vencimiento.

Recuerde que el tiempo debe estar en las mismas unidades en las que se encuentra expresada la tasa de interés o rédito.

Gráficamente, esta situación se puede representar así:

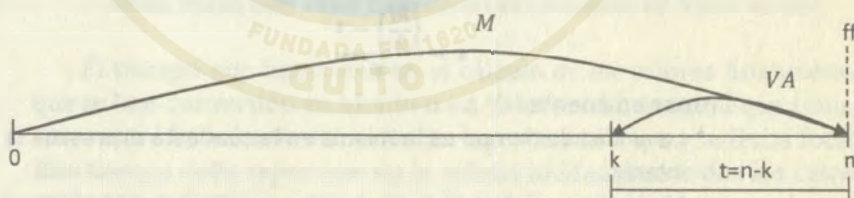


Gráfico texto 2.4

En el gráfico, el lector puede observar:

La Fecha focal se ha ubicado al final del plazo de la transacción; se define a la fecha focal como el punto en la recta de tiempos (o fuera de ella) al cual convergen todos los elementos financieros, conocidos o desconocidos, que intervienen en el problema.

El capital (C) se ubica al inicio de la transacción; luego, este capital se desplaza hacia la derecha, hasta la fecha focal convirtiéndose, teóricamente, en Monto.

El Valor Actual de la transacción, en un tiempo k ; se calcula con la expresión indicada en el párrafo anterior. Tomando en cuenta que el

tiempo que se debe utilizar es el que falta para finalizar la transacción, la ecuación será $t = n - k$.

2.5 Cálculo de la tasa de interés

La tasa de interés o rendimiento del dinero puede calcularse con las siguientes expresiones:

- Cuando el rendimiento o rédito está en función del Interés:

$$r = \frac{I}{Ct}$$

- Cuando el rendimiento o rédito está en función del Monto:

$$r = \frac{\left(\frac{M}{C}\right) - 1}{t}$$

En ambos casos, el valor obtenido deberá multiplicarse por 100 para expresarlo como porcentaje.

2.6 Cálculo del tiempo

Para el cálculo del tiempo en una transacción a Interés simple se pueden utilizar estas dos expresiones:

- Cuando el tiempo está en función del Interés:

$$t = \frac{I}{Cr}$$

- Cuando el tiempo está en función del Monto:

$$t = \frac{\left(\frac{M}{C}\right) - 1}{r}$$

Tomar en cuenta:

- La unidad de tiempo es la misma en la cual está expresada la tasa de interés.
- Mientras no se diga lo contrario, se considera que el año tiene 360 días y se lo denomina como Año Comercial.
- El año calendario, cuando así se lo indique, tiene 365 días o 366 días, si es año bisiesto.
- Cuando el plazo de la transacción está dado entre fechas, el tiempo (en días) se lo determina restando de la fecha final, la fecha inicial.

2.7 Ecuaciones de valor

Muchos problemas de Matemática Financiera pueden resolverse fácilmente planteando una Ecuación de Valor, como en los siguientes casos:

- Que un compromiso financiero (deuda, inversión) se cumpla con un solo pago.
- Que un compromiso financiero se cumpla con varios pagos.

- c. Que varias deudas se cumplan con un solo pago, denominado pago único.
- d. Que varias deudas se cumplan con varios pagos.

Metodología:

1. Trace una recta y en ella ubique el tiempo que transcurre entre los diferentes elementos financieros que intervienen en el problema. Esta recta se denomina recta de tiempo.
2. Ubique la fecha focal, para el caso de problemas de Interés simple, la fecha focal está dada por las condiciones del problema. En la mayoría de los casos, esta fecha focal se ubica al final del plazo de la transacción. En caso del Interés Compuesto, debido a la periodicidad de la capitalización de intereses, la fecha focal puede ubicarse en cualquier punto de la recta de tiempo, inclusive fuera de ella; el resultado siempre será el mismo.
3. Ubique los valores financieros del problema, de manera que los pagos y las deudas se coloquen en cada lado de la recta de tiempo. Ejemplo: las deudas en la parte superior de la recta y los pagos en la parte inferior de la misma, los valores desconocidos se representan con la letra X .
4. Traslade todos los valores financieros, (conocidos y desconocidos) hasta la fecha focal, tomando en cuenta que si el traslado es hacia la derecha de la fecha focal, entonces este valor financiero se convierte en Monto. Si el traslado es hacia la izquierda de la fecha focal, este valor financiero se convierte en Valor actual.

El tiempo que interviene en el cálculo de los valores financieros, que se han convertido en Monto o en Valor actual, es aquel que transcurre entre la fecha de ubicación en la recta de tiempo y la fecha focal. Este tiempo debe expresarse en la misma unidad para todos los casos; esta unidad de tiempo debe coincidir con la unidad que expresa la tasa de interés.

Ahora ya se puede plantear la ecuación de valor, el elemento financiero desconocido se encuentra resolviendo la ecuación planteada.

Se debe tomar en cuenta el redondeo de decimales, esto puede causar dificultades en la exactitud del problema, por lo que es conveniente plantear la ecuación de valor y determinar cada uno de los valores, mediante el uso adecuado de una calculadora electrónica. Se entiende por uso adecuado el uso de decimales, paréntesis, memorias y demás funciones electrónicas de la calculadora, para hacer todo el trabajo numérico en el interior de la misma, de manera que el usuario solamente transcriba el resultado. Las operaciones parciales sin la debida precaución con los decimales, hacen que no se obtenga la solución exacta del problema.

2.8 Recomendaciones metodológicas para la solución de problemas

En este y en todos los capítulos que conforman este libro, se ha incluido un grupo de ejercicios resueltos y un grupo de ejercicios propuestos con su respectiva respuesta. La solución de estos problemas toma en consideración las siguientes recomendaciones metodológicas:

- Lea detenidamente el problema, determine la información numérica y de carácter literal existente; identifique la pregunta y establezca la incógnita para el planteamiento de la ecuación.
- Grafique la información en la recta de tiempo, el gráfico siempre será de extrema utilidad; no obstante, en problemas de fácil interpretación, se puede omitir el gráfico.
- Ubique la fecha focal. Es muy conveniente ubicarla en la incógnita; en el caso del Interés simple, la fecha focal se ubicará de acuerdo con la información existente. En los demás casos puede ubicarla en cualquier parte, obtendrá el mismo resultado.
- Verifique que el tiempo esté expresado en las mismas unidades y de acuerdo con el tiempo que indica la tasa de interés o rédito. No olvide que la tasa de interés, mientras no se diga lo contrario, es anual y que el año tiene 360 días (año comercial).
- Plantee la ecuación de valor. Reemplace los términos de la ecuación por las fórmulas de cálculo y finalmente por los valores conocidos. La ecuación resultante podrá ser resuelta como cualquier ecuación lineal o de primer grado.
- Optimice el uso de la calculadora: fije dos decimales, utilice paréntesis, memorias y todos los demás recursos que dispone su máquina, de manera que evite al máximo el redondeo de operaciones.

2.9 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una Cooperativa paga el 5% sobre los depósitos a plazos. Determinar el pago anual por interés sobre un depósito de \$18,000.

Datos:	Solución:
$C = 1,000$	$I = Crt$
$r = 5\%$	$I = 18,000 \times \frac{5}{100} \times 1$
$t = 1 \text{ año}$	$I = \$ 900.00$
$I = ?$	

2. Un Banco obtiene fondos al costo de 12% y presta a los microempresarios al 18.6% anual, ganándose así el 6.6% bruto. Si los ingresos anuales que obtuvo de esta forma fueron de \$5,000, ¿cuánto dinero prestó?

Datos:	Solución:
$I = 5,000$	$C = \frac{I}{rt}$
$r = 6.6\%$	$C = \frac{I}{rt} = \frac{5,000}{\frac{6.6}{100} \times 1}$
$t = 1 \text{ año}$	
$C = ?$	$C = \$ 75,757.58$

3. Una entidad financiera invirtió \$250,000 al 11.6% en hipotecas locales y ganó \$22,000, determinar el tiempo que estuvo invertido el dinero.

Datos:	Solución:
$C = 250,000$	$t = \frac{I}{Cr}$
$I = 22,000$	$t = \frac{22,000}{250,000 \times \frac{11.6}{100}}$
$r = 11.6\%$	
$t = ?$	$t = 0.758 \text{ años} \approx 9.10 \text{ meses}$
	$t = 9 \text{ meses, } 3 \text{ días}$

4. Si una empresa hipotecaria tiene invertidos \$300,000 durante 2.5 años; - largo plazo, factible a Interés simple - y obtiene en total \$46,250 de ingresos, ¿cuál es la tasa de interés?

Datos:	Solución:
$C = 300,000$	$r = \frac{I}{Ct}$
$I = 46,250$	$r = \frac{46,250}{300,000 \times 2.5}$
$t = 2.5 \text{ años}$	
$r = ?$	$r = 0.0616 \approx 6.17\%$

5. Una persona deposita \$2,500 en una cuenta de ahorros al 9% anual. ¿Cuánto tendrá después de 8 meses?

Datos:	Solución:
$C = 2,500$	$M = C(1 + rt)$
$r = 9\%$	$M = 2,500 \left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{8}{12}\right)$
$t = 8 \text{ meses}$	$M = \$2,650.00$
$M = ?$	

6. Un empleado recibe \$12,800 por concepto de liquidación de su trabajo, los deposita en una libreta de ahorros en un banco al 4.7% anual. Calcular cuánto tendrá al final de 150 días.

Datos:	Solución:
$C = 12,800$	$M = C(1 + rt)$
$r = 4.7\%$	$M = 12,800 \left(1 + \frac{4.7}{100} \times \frac{150}{360}\right)$
$t = 150 \text{ días}$	$M = \$13,050.67$
$M = ?$	

7. Determinar la fecha de vencimiento y el valor al vencimiento o Monto de los siguientes pagarés:

Nº	Valor Nominal	Fecha de Emisión *	Plazo (días)	Tasa de interés
1	\$2,500	15-mar-12	100	4.5%
2	\$4,500	18-jun-12	120	5.2%
3	\$3,500	17-jul-12	90	6.4%

* El año 2012 es bisiesto.

Pagaré N° 1	Valor al vencimiento o Monto:
Fecha de emisión: 15-mar-12 (día 75)	$M = C(1 + rt)$
Fecha de vencimiento: 75+100 = 175	$M = 2,500 \left(1 + \frac{4.5}{100} \times \frac{100}{360} \right)$
Corresponde a: 23-jun-12	$M = \$ 2,531.25$
Pagaré N° 2	Valor al vencimiento o Monto:
Fecha de emisión: 18-jun-12 (día 170)	$M = C(1 + rt)$
Fecha de vencimiento: 170+120 = 290	$M = 4,500 \left(1 + \frac{5.2}{100} \times \frac{120}{360} \right)$
Corresponde a: 16-oct-12	$M = \$ 4,578.00$
Pagaré N° 3	Valor al vencimiento o Monto:
Fecha de emisión: 17-jul-12 (día 199)	$M = C(1 + rt)$
Fecha de vencimiento: 199+90 = 289	$M = 3,500 \left(1 + \frac{6.4}{100} \times \frac{90}{360} \right)$
Corresponde a: 15-oct-12	$M = \$ 3,566.00$

8. Hallar el interés al 5%, y el monto sobre un documento de \$4,000, fechado el 15 de enero de 2011, con vencimiento el 28 de agosto de 2011.

Cálculo del tiempo:	Cálculo del Interés:	Cálculo del Monto:
15-ene-2011 (día 15)	$I = Crt$	$M = C + I$
28-ago-2011 (día 240)		
$t = 240 - 15 = 225 \text{ días}$	$I = 4,000 \times \frac{5}{100} \times \frac{225}{360}$	$M = 4,000 + 125$
$C = \$ 4,000$	$I = \$ 125.00$	$M = \$ 4,125.00$
$r = 5\%$		

9. Hallar el interés al 8%, y el monto sobre un documento de \$5,000, fechado el 15 de noviembre de 2011, con vencimiento el 18 marzo de 2012.

Cálculo del tiempo:	Cálculo del Interés:	Cálculo del Monto:
15-nov-2011 (día 319)	$I = Crt$	$M = C + I$
31-dic-2011 (día 365)		
18-mar-2012 (día 78)	$I = 5,000 \times \frac{8}{100} \times \frac{124}{360}$	$M = 5,000 + 137.78$
(2012 año bisiesto)		
$t = 365 - 319 + 78 = 124$ días	$I = \$ 137.78$	$M = \$ 5,137.78$
$C = \$ 5,000$		
$r = 8\%$		

10. Se debe cubrir una deuda de \$4,500 en nueve meses. ¿Cuál es el pago que se debe realizar, si esta deuda se cancela: a) hoy, b) en tres meses, c) en 6 meses, d) en un año? Considerando que el dinero se negocia al 7%.

a. Pago el día de hoy

Gráfico problema 2.10.a



Sea x el pago a realizar:

$$X = VA$$

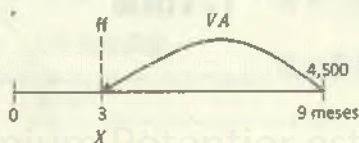
$$X = \frac{M}{(1 + rt)}$$

$$X = \frac{4,500}{\left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{9}{12}\right)}$$

$$X = \$ 4,275.53$$

b. Pago en tres meses

Gráfico problema 2.10.b



Sea x el pago a realizar:

$$X = VA$$

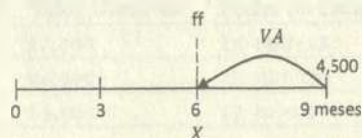
$$X = \frac{M}{(1 + rt)}$$

$$X = \frac{4,500}{\left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{6}{12}\right)}$$

$$X = \$ 4,347.83$$

c. Pago en 6 meses

Gráfico problema 2.10.c



Sea x el pago a realizar:

$$X = VA$$

$$X = \frac{M}{(1 + rt)}$$

$$X = \frac{4,500}{\left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{3}{12}\right)}$$

d. Pago en un año

Sea x el pago a realizar:

$$X = \$4,422.60$$

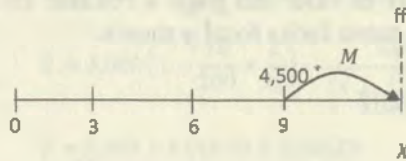
$$X = M$$

$$X = C(1 + rt)$$

$$X = 4,500 \left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{3}{12}\right)$$

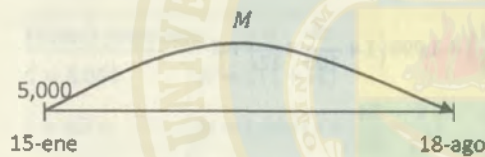
$$X = \$4,578.75$$

Gráfico problema 2.10.d



11. El 15 de enero se contrae una deuda por \$5,000 a pagarse dentro de 215 días, con un interés del 5%; el 26 de abril del mismo año se realiza un pago de \$2,000; ¿cuál debe ser el valor del pago adicional que liquide la deuda, si este pago se realiza el 29 de octubre del mismo año?

Gráfico problema 2.11.a

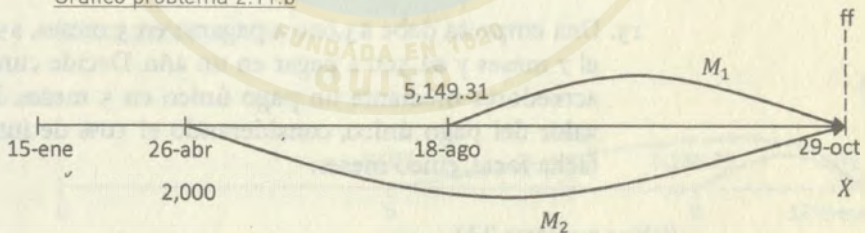


$$M = C(1 + rt)$$

$$M = 5,000 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{215}{360}\right)$$

$$M = \$5,149.31$$

Gráfico problema 2.11.b



$$M_1 = M_2 + X$$

$$C(1 + rt) = C(1 + rt) + X$$

$$5,149.31 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{72}{360}\right) = 2,000 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{186}{360}\right) + X$$

$$5,200.80 = 2,051.67 + X$$

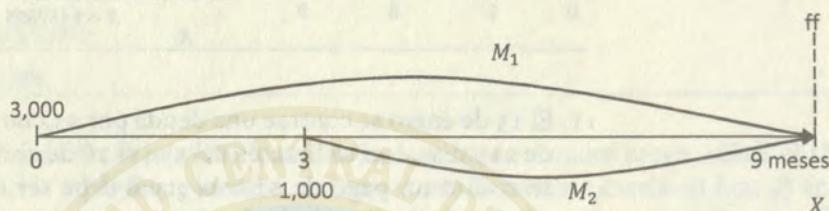
$$X = 5,200.80 - 2,051.67$$

$$X = \$3,149.13$$



12. El día de hoy una comerciante recibe un préstamo por \$3,000, comprometiéndose a pagar \$1,000 dentro de 3 meses y la diferencia en 9 meses. Tomando como tasa de Interés simple el 10%, encuentre el valor del pago a realizar en el plazo establecido. Tómese como fecha focal 9 meses.

Gráfico problema 2.12



$$M_1 = M_2 + X$$

$$C(1 + rt) = C(1 + rt) + X$$

$$3,000 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12} \right) = 1,000 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12} \right) + X$$

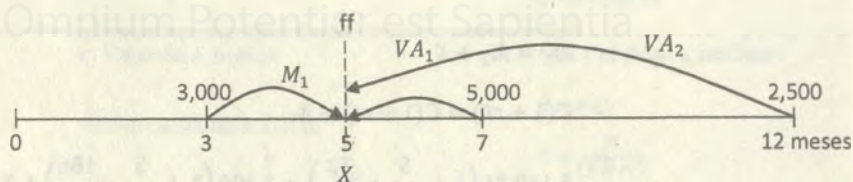
$$3,225 = 1,050 + X$$

$$X = 3,225 - 1,050$$

$$X = \$2,175.00$$

13. Una empresa debe \$3,000 a pagarse en 3 meses, \$5,000 a pagar el 7 meses y \$2,500 a pagar en un año. Decide cumplir con sus acreedores mediante un pago único en 5 meses. Encuentre el valor del pago único, considerando el 10% de interés y como fecha focal, cinco meses.

Gráfico problema 2.13



$$X = M_1 + VA_1 + VA_2$$

$$X = C(1 + rt) + \frac{M}{(1 + rt)} + \frac{M}{(1 + rt)}$$

$$X = 3,000 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{2}{12} \right) + \frac{5,000}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{2}{12} \right)} + \frac{2,500}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{7}{12} \right)}$$

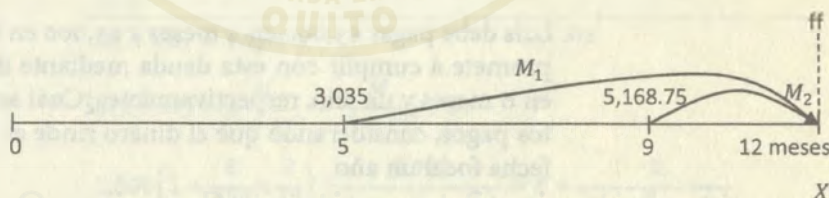
$$X = 3,050 + 4,918,03 + 2,362.20$$

$$X = \$ 10,330.23$$

14. Una persona recibe un préstamo por \$5,000 a pagar en nueve meses con un interés del 4.5%; tres meses más tarde recibe otro préstamo por \$3,000, a pagar en 2 meses con un interés del 7%. Decide liquidar las dos deudas mediante un pago único a realizar en un año. Halle el valor del pago que liquida la deuda, considerando una tasa del 8%; tómese como fecha focal un año.

Primer préstamo		Segundo préstamo	
$C = 5,000$	$M = C(1 + rt)$	$C = 3,000$	$M = C(1 + rt)$
$r = 4.5\%$	$M = 5,000 \left(1 + \frac{4.5}{100} \times \frac{9}{12} \right)$	$r = 7\%$	$M = 3,000 \left(1 + \frac{7}{100} \times \frac{2}{12} \right)$
$t = 9 \text{ meses}$	$M = \$5,168.75$	$t = 2 \text{ meses}$	$M = \$3,035.00$

Gráfico problema 2.14



$$X = M_1 + M_2$$

$$X = C(1 + rt) + C(1 + rt)$$

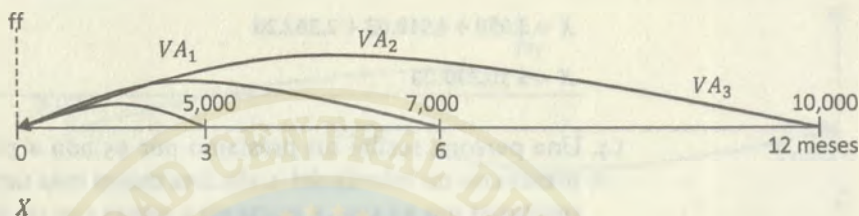
$$X = 3,035 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{7}{12} \right) + 5,168.75 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{3}{12} \right)$$

$$X = 3,176.63 + 5,272.13$$

$$X = \$ 8,448.76$$

15. La empresa ABC debe pagar \$5,000 en 3 meses, \$7,000 en 6 meses y \$10,000 en un año. Considerando un rendimiento del 6%, encuentre el valor del pago único inmediato que liquide las tres deudas.

Gráfico problema 2.15



$$X = VA_1 + VA_2 + VA_3$$

$$X = \frac{M}{(1+rt)} + \frac{M}{(1+rt)} + \frac{M}{(1+rt)}$$

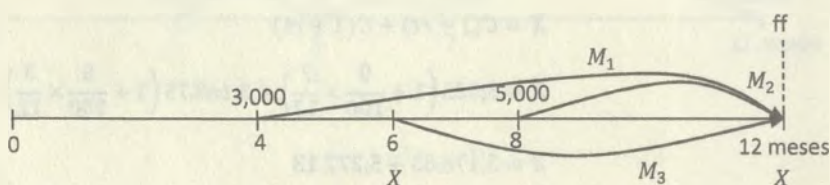
$$X = \frac{5,000}{\left(1 + \frac{6}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{7,000}{\left(1 + \frac{6}{100} \times \frac{6}{12}\right)} + \frac{10,000}{\left(1 + \frac{6}{100} \times \frac{12}{12}\right)}$$

$$X = 4,926.11 + 6,796.12 + 9,433.96$$

$$X = \$21,156.19$$

16. Luis debe pagar \$3,000 en 4 meses y \$5,000 en 8 meses. Se compromete a cumplir con esta deuda mediante dos pagos iguales en 6 meses y un año, respectivamente. ¿Cuál será el valor de estos pagos, considerando que el dinero rinde al 8%? Tome como fecha focal un año.

Gráfico problema 2.16



$$M_1 + M_2 = M_3 + X$$

$$C(1+rt) + C(1+rt) = C(1+rt) + X$$

$$3,000\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{8}{12}\right) + 5,000\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{4}{12}\right) = X\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right) + X$$

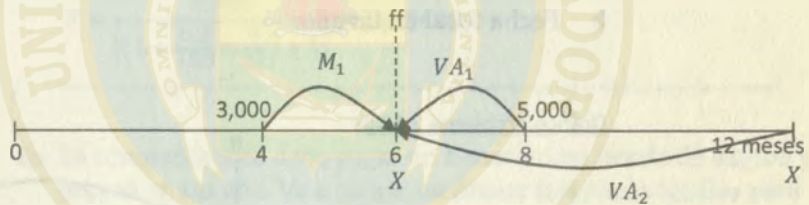
$$3,160 + 5,133.33 = X\left[\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right) + 1\right]$$

$$8,293.33 = X\left[\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right) + 1\right]$$

$$X = \frac{8,293.33}{\left[\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right) + 1\right]} = \$4,065.36$$

17. Repita el ejercicio anterior considerando como Fecha focal 6 meses.

Gráfico problema 2.17



$$M_1 + VA_1 = VA_2 + X$$

$$C(1+rt) + \frac{M}{(1+rt)} = \frac{M}{(1+rt)} + X$$

$$3,000\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{2}{12}\right) + \frac{5,000}{\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{2}{12}\right)} = X + \frac{X}{\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right)}$$

$$3,040 + 4,934.21 = X\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right)}\right]$$

$$X = \frac{7,974.21}{\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{6}{12}\right)}\right]} = \$4,065.28$$

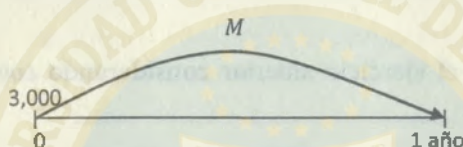
Los resultados obtenidos en los ejercicios 16 y 17 no son iguales, debido a la variación en la Fecha focal. Cuando se trata de Interés

simple, no existe periodicidad en la capitalización de intereses. Más adelante, en el estudio del Interés Compuesto, se observará que la ubicación de la fecha focal es indiferente.

18. Una deuda de \$3,000, adquirida el día de hoy, a un año plazo, con una tasa de interés de 8%, va a cubrirse mediante dos pagos iguales en 6 meses y un año respectivamente. Hallar el valor de dichos pagos, si se toma una tasa de interés del 6.3% y como fecha focal: a) en seis meses, b) en un año.

a. Fecha focal en 6 meses

Gráfico problema 2.18.a



$$M = C(1 + rt)$$

$$M = 3,000 \left(1 + \frac{8}{100} \times 1 \right)$$

$$M = \$3,240.00$$

b. Fecha focal en un año:

Gráfico problema 2.18.b



$$VA_1 = X + VA_2$$

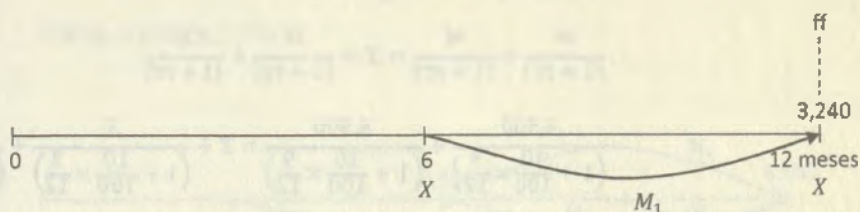
$$\frac{M}{(1 + rt)} = X + \frac{M}{(1 + rt)}$$

$$\frac{3,240}{\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right)} = X + \frac{X}{\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right)}$$

$$3,141.06 = X \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right)} \right]$$

$$X = \frac{3,141.06}{\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right)} \right]} = \$1,594.88$$

Gráfico problema 2.18.c



$$3,240 = M_1 + X$$

$$3,240 = C(1 + rt) + X$$

$$3,240 = X \left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right) + X$$

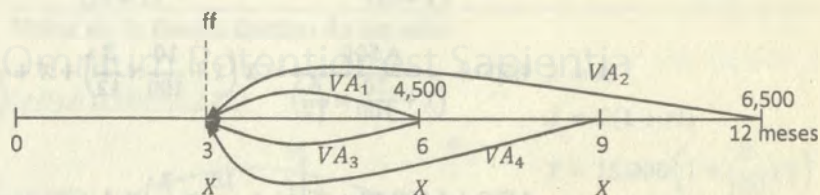
$$3,240 = X \left[\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right) + 1 \right]$$

$$X = \frac{3,240}{\left[\left(1 + \frac{6.3}{100} \times \frac{6}{12} \right) + 1 \right]} = \$1,594.88$$

19. La compañía XYZ debe pagar en 6 meses una deuda de \$4,500 y \$6,500 en un año. Va a cubrir mediante tres pagos iguales realizados en 3, 6 y 9 meses, respectivamente. Encuentre el valor de estos pagos, tomando como tasa de interés el 10% y como fecha focal: a) en tres meses, b) en 6 meses, c) en un año.

- a. Fecha focal en 3 meses:

Gráfico problema 2.19.a



$$VA_1 + VA_2 = X + VA_3 + VA_4$$

$$\frac{M}{(1+rt)} + \frac{M}{(1+rt)} = X + \frac{M}{(1+rt)} + \frac{M}{(1+rt)}$$

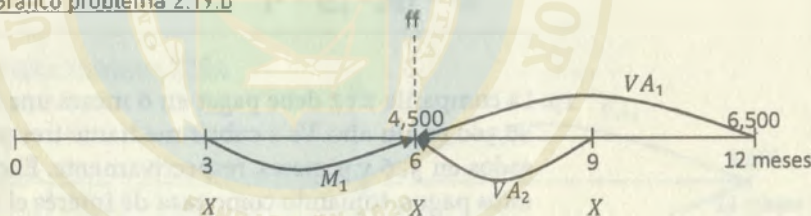
$$\frac{4,500}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{6,500}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right)} = X + \frac{X}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{X}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right)}$$

$$4,390.24 + 6,046.51 = X \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right)} \right]$$

$$X = \frac{1,0436.75}{\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right)} \right]} = \$3,564.48$$

b. Fecha focal en 6 meses:

Gráfico problema 2.19.b



$$4,500 + VA_1 = M_1 + X + VA_2$$

$$4,500 + \frac{M}{(1+rt)} = C(1+rt) + X + \frac{M}{(1+rt)}$$

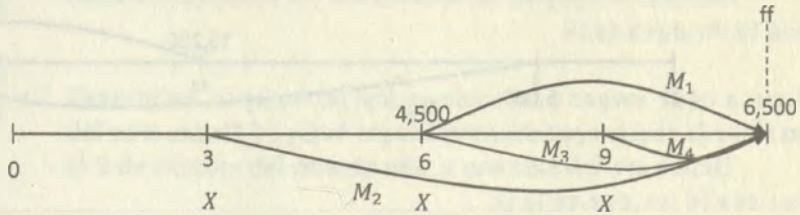
$$4,500 + \frac{6,500}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right)} = X \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12} \right) + X + \frac{X}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)}$$

$$4,500 + 6,190.48 = X \left[\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12} \right) + 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} \right]$$

$$X = \frac{10,690.48}{\left[\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12} \right) + 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)} \right]} = \$3,562.72$$

c. Fecha focal en 1 año:

Gráfico problema 2.19.c



$$M_1 + 6,500 = M_2 + M_3 + M_4$$

$$C(1+rt) + 6,500 = C(1+rt) + C(1+rt) + C(1+rt)$$

$$4,500 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + 6,500 = X \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right) + X \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + X \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right)$$

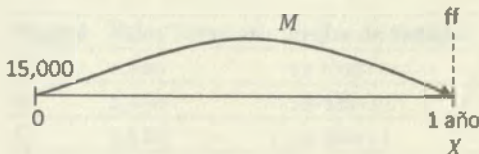
$$4,725 + 6,500 = X \left[\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right) + \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) \right]$$

$$X = \frac{11,225}{\left[\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{9}{12}\right) + \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{6}{12}\right) + \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) \right]} = \$3,563.49$$

20. Una empresa tiene una deuda de \$15,000 a pagar dentro de un año, con interés de 8%; si después de tres meses realiza un pago de \$5,000 y acuerda cubrir el saldo, mediante dos pagos iguales en 15 y 18 meses, encuentre el valor de estos pagos, si para su liquidación se considera una tasa de interés del 9%; ubique la fecha focal en 18 meses.

Valor de la deuda dentro de un año:

Gráfico problema 2.20.a



$$X = M$$

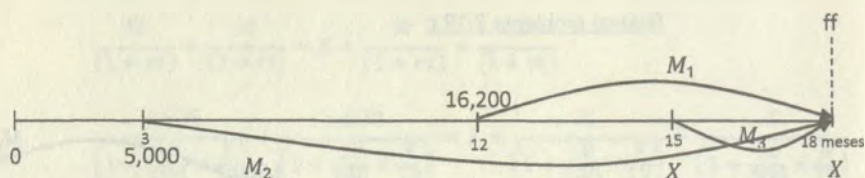
$$X = C(1+rt)$$

$$X = 15,000 \left(1 + \frac{8}{100} \times 1\right)$$

$$X = \$16,200$$



Gráfico problema 2.20.b



$$M_1 = M_2 + M_3 + X$$

$$C(1 + rt) = C(1 + rt) + C(1 + rt) + X$$

$$16,200 \left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{6}{12} \right) = 5,000 \left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{15}{12} \right) + X \left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{3}{12} \right) + X$$

$$16,929 = 5,562.50 + X \left[\left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{3}{12} \right) + 1 \right]$$

$$11,366.50 = X \left[\left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{3}{12} \right) + 1 \right]$$

$$X = \frac{11,366.50}{\left[\left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{3}{12} \right) + 1 \right]} = \$ 5,620.02$$

2.10 PROBLEMAS PROPUESTOS

- Hallar el Interés simple al 4%: a) Sobre un documento de \$14,200, fechado el 14 de enero de 2010, con vencimiento el 28 de agosto de 2010., b) Sobre un documento de \$4,500 a seis meses.
R: a) \$356,58; b) \$90,00
- Determine: a) ¿Qué capital produce en 9 meses \$650 a una tasa del 12% anual?, b) ¿Qué capital produce \$450 desde el 15 de mayo al 8 de octubre del mismo año, a una tasa del 5% anual?
R: a) \$7.222,22; b) \$22.191,78
- Determine: a) El tiempo, expresado en días, para que un capital de \$4,500 a Interés simple al 2% produzca una ganancia de \$420, b) ¿En qué tiempo, expresado en meses, un capital crece el 15%, si la tasa de interés es del 6%?
R: a) 1680 días; b) 30 meses.
- Determine: a) ¿A qué tasa de Interés simple anual un capital de \$3,200 produce \$450 de interés en 9 meses?, b) Determinar la tasa de interés a la que fue pactada una deuda de \$1,750, si en 186 días el interés es \$275.
R: a) 18,75%; b) 30,41%
- Hallar el monto de: a) Una inversión de \$4,000 a Interés simple durante 9 meses con una tasa del 8% anual, b) Una deuda de \$7,400 a Interés simple desde el 18 de mayo al 30 de diciembre mismo año, considerando el 5% de Interés simple
R: a) \$4,240.00 b) \$7,632.28
- Determinar el Monto que se obtiene al invertir \$4,500 a Interés simple durante 4 meses, si la tasa de interés es del 8%.
R: \$4.620,00
- Determinar la fecha de vencimiento y el valor al vencimiento o Monto de los siguientes pagarés:

Pagaré	Valor Nominal	Fecha de Emisión	Plazo (días)	Tasa de interés
A	1,800	12 mar-11	90	6%
B	2,530	18-abr-11	180	4%
C	3,582	26-dic-11	270	3,5%

R: a) 10-jun-11, \$1,827.00; b) 15-oct-11, \$2,580.60, c) 21-sep-12, \$3,676.03

8. Juan debe a Luis \$13,000 pagaderos en 6 meses; al 10% de Interés simple. ¿Cuánto recibiría Luis, si Juan saldara su deuda: a) El día de hoy, b) Dentro de 3 meses, c) Al final del año?

R: a) \$12.380,95; b) \$12.682,93; c) \$13.650,00

9. Una persona debe \$10,000 para pagar en un año con intereses al 7.5%. Conviene pagar \$2,500 al final de seis meses. ¿Qué cantidad tendrá que pagar al final del año para liquidar la deuda, suponiendo un rendimiento del 8.5%? Tomar como fecha focal al final del año.

R: \$8,143.75

10. Se obtiene un préstamo de \$8,500 a un año con interés al 7.15%. ¿Qué cantidad tendrá que pagar como liquidación del préstamo 6 meses después, suponiendo un rendimiento del 5.25%?

R: \$8,874.79

11. ¿Cuál oferta debe aceptar el vendedor de una computadora? Considere el 12% de Interés simple.

- \$350 de entrada, \$400 al final de 3 meses y \$250 al final de 6 meses.
- \$200 de entrada, \$500 al final de 3 meses y \$300 al final de 6 meses.

R: Oferta A: \$974.20; Oferta B: 968.46; Oferta A

12. Un comerciante adquiere artículos para su negocio por un valor de \$8,600, pagando de contado el 30% y el resto con financiamiento directo del proveedor. Dos meses más tarde, realiza un pago de \$2,000, quedando en saldar la deuda mediante un pago final después de 6 meses. Encontrar el valor del pago final, considerando que el dinero se financia al 7%.

R: \$4,184.03

13. Un empresario adquiere una deuda de \$7,500 para pagarse en 10 meses con interés del 8%; tres meses más tarde, realiza un abono de \$3,000, quedando en saldar la deuda mediante un pago final en 2 meses, antes del vencimiento. Encontrar el valor del pago final considerando para la liquidación una tasa del 8.25%. Tómese como fecha focal 8 meses.

R: \$4.788,37

14. Se adquiere una deuda de \$70,000 el día de hoy, si se realiza un pago de \$30,000 dentro de 2 meses y se compromete a cancelar la deuda mediante dos pagos iguales a 4 y 6 meses respectivamente. ¿Cuál debe ser el valor de dichos pagos, si se considera un rendi-

miento del dinero del 11%? Tomar como Fecha focal 6 meses.

R: \$21,180.44

15. Esteban solicita un préstamo de \$1,500 a pagar en 3 meses, con un interés del 10%; otro préstamo de \$5,000, a pagar en 10 meses, con un interés del 9%. De común acuerdo con los acreedores se van a liquidar las deudas mediante un pago único en 5 meses. Hallar el valor del pago único, si en la liquidación se aplica una tasa del 9.5%. Tomar como fecha focal cinco meses.

R: \$6,732.18

16. Una empresa debe \$5,000 con vencimiento en 3 meses, \$2,000 con vencimiento en 6 meses y \$4,800 con vencimiento en 9 meses. Desea liquidar sus deudas mediante dos pagos iguales con vencimiento en 6 meses y 12 meses, respectivamente. Determinar el importe de cada pago, suponiendo para la liquidación un rendimiento del 6% y tomando como fecha focal la fecha de un año.

R: \$5,988.67

17. Una persona compró un automóvil usado en \$6,000 el día 1 de junio, pagando \$2,500 al contado y comprometiéndose a pagar un interés del 10% sobre el saldo. Si el 15 de agosto paga \$1,000, ¿Qué cantidad debería desembolsar el 30 de noviembre para liquidar la deuda? Tomar como fecha focal el 30 de noviembre.

R: \$2,647.22

18. Una compañía tiene tres cuentas por pagar: \$1,800 en 3 meses, \$2,500 en 6 meses y \$3,500 en un año. ¿Cuál debe ser el valor del pago único inmediato mediante el cual la compañía cancele todas sus deudas, considerando una tasa del 8.5%?

R: \$7,386.43

19. Un prestamista adquiere el día de hoy a una compañía dos pagarés: uno por \$7,500 al 10% con vencimiento en 100 días y otro por \$4,500 al 8%, con vencimiento en tres meses. ¿Qué valor deberá entregar a la compañía, si se aplica una tasa del 9%?

R: \$12,009.32

20. Lorena adquiere un préstamo de \$10,000 a pagar en un año al 7%; más tarde negocia con el Banco para pagar esta deuda mediante tres pagos iguales a realizarse en tres, cinco y ocho meses, respectivamente. Encuentre el valor de dichos pagos, si en la negociación se acuerda una tasa del 8%; tómese como fecha focal al final del año.

R: \$3,414.89



DESCUENTO SIMPLE Y AMORTIZACIÓN SIMPLE

OBJETIVO GENERAL

Describir el Descuento simple en términos financieros, establecer la diferencia entre el descuento racional y el descuento bancario y desarrollar los modelos de amortización simple para el cumplimiento del pago una deuda.

3.1 Descuento racional

Dentro del mundo financiero se denomina Descuento racional a la diferencia que existe entre el Monto y el Valor Actual de una inversión, cuando ésta se adelanta a la fecha de vencimiento; a este descuento se lo conoce también como Descuento matemático. Es decir:

$$\text{Descuento racional} = \text{Monto} - \text{Valor actual}$$

Representando con Dr al Descuento Racional, se tiene:

$$Dr = M - VA$$

Recordando que el Valor Actual VA en el Interés Simple está dado por:

$$VA = \frac{M}{1 + rt}$$

Remplazando en la expresión del Descuento racional, se tiene:

$$Dr = M - \frac{M}{1 + rt}$$

Que es igual a:

$$Dr = M \left(1 - \frac{1}{1 + rt} \right)$$

3.2 Descuento bancario o Descuento simple

Es el cobro por adelantado de los intereses de un préstamo a Interés Simple; este valor se denomina también Descuento bancario (Db), que se lo define como el producto del Monto por la tasa de descuento y por el tiempo o plazo que dura la transacción. Es decir:

$$Db = Mdt$$

Donde:

Db : Descuento bancario

M : Monto de la transacción

t : Tiempo o plazo de la deuda

d : Tasa de descuento

En el mundo financiero, muy pocas veces se utiliza el Descuento racional. En la mayoría de los casos se trabaja con el Descuento bancario (AYRES Jr, 1998).

3.3 Valor descontado

Cuando a un préstamo se le aplica el pago de intereses por adelantado, la cantidad que recibe el prestatario es un valor menor al monto solicitado al prestamista. Este valor se conoce como Valor descontado (Vd).

El Valor descontado se define como la diferencia entre el Monto solicitado y el Descuento bancario correspondiente. Es decir:

$$\text{Valor descontado} = \text{Monto} - \text{Descuento bancario}$$

Matemáticamente, este Valor descontado, representado por V_d , es igual a:

$$V_d = M - Db$$

$$V_d = M - Mdt$$

$$V_d = M(1 - dt)$$

3.4 Aplicación del Descuento bancario en documentos financieros

Los documentos financieros, tales como los pagarés, pueden ser negociados o vendidos varias veces antes de su fecha de vencimiento. En cada una de estas negociaciones los involucrados (comprador y vendedor) se ponen de acuerdo en la tasa de descuento correspondiente. Es obvio suponer que, el valor que resulte de la negociación del documento financiero, será siempre menor al valor al vencimiento de dicho documento.

3.5 Relación entre la Tasa de descuento y la Tasa de Interés Simple

De las definiciones anteriores se puede indicar que el Valor Actual de una transacción a Interés Simple está en función de la tasa de interés (r) y que el Descuento bancario está en función de la tasa de descuento (d).

Asumiendo que el Valor descontado es igual al Valor Actual de la transacción, se pueden establecer expresiones de cálculo que permiten determinar la relación existente entre la tasa de interés y la tasa de descuento bancario (MORA Zambrano, 2010).

Expresado matemáticamente:

$$V_d = VA$$

$$M(1 - dt) = \frac{M}{1 + rt}$$

Eliminando M en cada miembro de esta ecuación queda:

$$1 - dt = \frac{1}{1 + rt}$$

De esta expresión se va ahora a despejar la tasa de descuento (d) y luego la tasa de interés (r), estableciéndose la relación existente entre la tasa de descuento en función de la tasa de interés y viceversa; es decir, la tasa de interés en función de la tasa de descuento.

Despejando d se tiene:

$$1 - \frac{1}{1 + rt} = dt$$

$$dt = \frac{1 + rt - 1}{1 + rt}$$

$$dt = \frac{rt}{1 + rt}$$

$$d = \frac{r}{1 + rt}$$

Despejando r se tiene:

$$1 + rt = \frac{1}{1 - dt}$$

$$rt = \frac{1}{1 - dt} - 1$$

$$rt = \frac{1 - 1 + dt}{1 - dt}$$

$$rt = \frac{dt}{1 - dt}$$

$$r = \frac{d}{1 - dt}$$

3.6 Amortización simple

Amortizar es el proceso financiero que consiste en cancelar una deuda y sus intereses, mediante pagos periódicos. Cuando el número de pagos es relativamente corto, el problema se resuelve considerando dos métodos de cálculo. El primero de ellos con pagos iguales (Método Lagarto) y el segundo con pagos variables, conocido como Método de Saldos Deudores.

(<http://csh.izt.uam.mx/cursos/gerardo/uam/matefin/amortización.pdf>, 2015).

3.6.1 Amortización con pagos iguales

En este método, conocido también como Método Lagarto, los pagos conocidos como Abonos tienen el mismo valor. Este abono se determina de la siguiente manera:

$$\text{Abono} = \text{Capital parcial} + \text{Interés parcial}$$

Si la deuda se va a cumplir mediante n pagos periódicos iguales por un tiempo t se tiene:

$$A = \frac{C}{n} + \frac{Crt}{n}$$

Finalmente el Abono parcial, igual para todos los períodos, está dado por:

$$A = \frac{C}{n} (1 + rt)$$

3.6.2 Método de saldos deudores

En este método los pagos son variables, con variación uniforme y decreciente, esto se debe a que el pago realizado disminuye el capital y,

por ende, el valor del interés del siguiente período.

Así:

C : El capital o valor del préstamo

n : Número de pagos para cubrir la deuda

r : Tasa de Interés Simple de la transacción

Al igual que en el método anterior, en cada uno de los pagos se cubrirá la parte proporcional al capital junto con los intereses; en este caso, sobre el saldo deudor. Es decir:

$$A_j = A_0 + I_j \quad j: 1, 2, 3, \dots, n$$

La parte proporcional A_0 se determina con la expresión:

$$A_0 = \frac{C}{n}$$

El interés sobre el Saldo Insoluto antes del Pago (SIAP), en cada período, se determina de la siguiente manera:

$$I_j = [SIAP_j] \times \frac{r}{n} \quad j: 1, 2, 3, \dots, n$$

Entonces, la expresión que determina el pago periódico por el método de Saldos deudores es:

$$A_j = A_0 + [SIAP_j] \times \frac{r}{n} \quad j: 1, 2, 3, \dots, n$$

3.6.3 Tabla de amortización

La tabla de amortización es un registro cronológico de cómo la deuda se va extinguiendo, desde su inicio hasta el final de la misma. En esta tabla se refleja:

- El número de períodos: $1, 2, 3, \dots, n$
- El Saldo Insoluto Antes del Pago (SIAP).
- El pago fijo (A_0).
- El interés sobre el saldo (I_j) para cada uno de los períodos.
- El valor del pago (A_j) realizado en cada uno de los períodos.
- El Saldo Insoluto Después del Pago (SIDP).

PERÍODO	SIAP	A_0	I_j	A_j	SIDP
1	C				
2					
...					
n					0

Para llenar las celdas de la tabla debe empezarse desde el primer renglón y desarrollarlo en sentido horizontal, tomando en cuenta:

- **SIAP:** Saldo insoluto antes del pago.

Para el primer período, es el valor de la deuda C ; para los demás períodos se tiene:

$$SIAP_j = SIDP_{j-1}$$

- **A_0 :** Pago fijo.

El pago fijo A_0 , igual para todos los períodos, se lo determina dividiendo el valor de la deuda por el número de períodos. Es decir:

$$A_0 = \frac{C}{n}$$

- **I_j :** Interés periódico.

El Interés periódico I_j se lo determina multiplicando el Saldo Insoluto Antes del Pago por la tasa de Interés Simple. Es decir:

$$I_j = SIAP_j \times \frac{r}{n}$$

- **SIDP:** Saldo Insoluto Después del Pago.

El Saldo Insoluto Después del Pago, en cada uno de los períodos se obtiene restando del Saldo Insoluto Antes del Pago del valor del Pago fijo. Es decir:

$$SIDP_j = SIAP_j - A_0$$

Luego del cálculo, el Saldo insoluto después del último pago deberá ser igual a cero, con lo cual la deuda queda extinguida. Para la elaboración de la tabla se puede utilizar el programa de Hoja de cálculo Excel, como también la herramienta Buscar objetivo del mismo programa, como se verá más adelante.

3.7 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentre el Descuento Racional de un documento cuyo valor al vencimiento es de \$2,500, si se canceló cinco meses antes de su vencimiento, con una tasa de interés del 6%.

Gráfico problema 3.1



$$Dr = M \left(1 - \frac{1}{1 + rt} \right)$$

$$Dr = 2,500 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{6}{100} \times \frac{5}{12}} \right)$$

$$Dr = \$60.98$$

2. Un préstamo por \$2,000 se cancela 60 días antes de su vencimiento; Encuentre el valor del descuento racional de la transacción, tomando en cuenta una tasa del 8% para su liquidación.

Gráfico problema 3.2



$$Dr = M \left(1 - \frac{1}{1 + rt} \right)$$

$$Dr = 2,000 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{8}{100} \times \frac{60}{360}} \right)$$

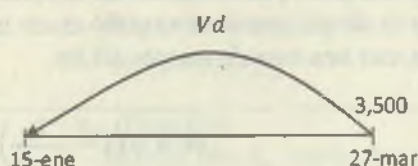
$$Dr = \$26.32$$

3. Calcule, al día de hoy, el descuento bancario y el valor descontado de los siguientes documentos:
- \$3,800 por 44 días con una tasa de descuento del 8%
 - \$4,200 por 3 meses con una tasa de descuento del 10%

a.	b.
Datos:	Datos:
$M = 3,800$	$M = 4200$
$t = 44 \text{ días}$	$t = 3 \text{ meses}$
$d = 8\%$	$d = 10\%$
Solución:	Solución:
$Db = Mdt$	$Db = Mdt$
$Db = 3800 \times \frac{8}{100} \times \frac{44}{360}$	$Db = 4,200 \times \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}$
$Db = \$37.16$	$Db = \$105.00$

4. El 15 de enero se firma un pagaré por \$3,500 que se vence el 27 de marzo del mismo año con una tasa de descuento del 9%. Encontrar el valor del descuento bancario y el valor descontado de dicho documento.

Gráfico problema 3.4



$$Db = Mdt$$

$$Db = 3,500 \times \frac{9}{100} \times \frac{71}{360}$$

$$Db = \$62.13$$

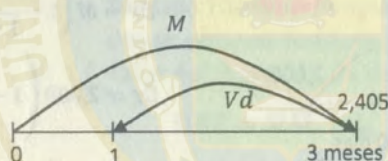
$$Vd = M - Db$$

$$Vd = 3,500 - 62.13$$

$$Vd = \$3,437.87$$

5. Un empresario recibe como parte de pago por la venta de un vehículo, el día de hoy, un pagaré por \$2,000 con vencimiento en tres meses con una tasa de Interés Simple del 9%. Un mes más tarde, negocia este pagaré en una institución financiera que lo descuenta al 12%. Encontrar el valor que entrega la institución financiera al empresario por la compra del pagaré.

Gráfico problema 3.5



$$M = C(1 + rt)$$

$$M = 2,000 \left(1 + \frac{9}{100} \times \frac{3}{12} \right)$$

$$M = \$2,405$$

6. El día de hoy un banco compra los siguientes documentos financieros con una tasa de descuento del 10%: Un pagaré por \$150,000, con vencimiento en tres meses al 8% de Interés Simple; y un pagaré por \$100,000, con vencimiento en 150 días, al 9.5%. Determine el valor que el banco debe pagar por la compra de estos documentos.

Pagaré N° 1

$$C = 150,000 \quad M = C(1 + rt)$$

$$t = 3 \text{ meses} \quad M = 150,000 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{3}{12} \right)$$

$$r = 8\% \quad M = \$153,000$$

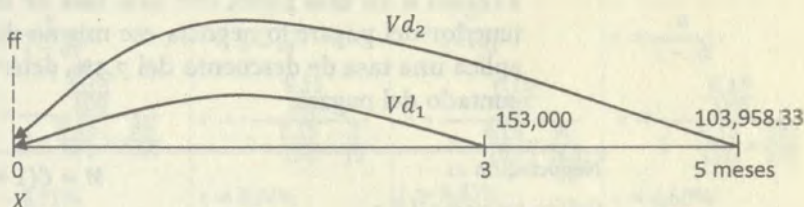
Pagaré N° 2

$$C = 100,000 \quad M = C(1 + rt)$$

$$t = 150 \text{ días} \quad M = 100,000 \left(1 + \frac{9.5}{100} \times \frac{150}{360} \right)$$

$$r = 9.5\% \quad M = \$103,958.33$$

Gráfico problema 3.6



$$X = Vd_1 + Vd_2$$

$$X = M(1 - dt) + M(1 - dt)$$

$$X = 153,000 \left(1 - \frac{10}{100} \times \frac{3}{12}\right) + 103,958.33 \left(1 - \frac{10}{100} \times \frac{150}{360}\right)$$

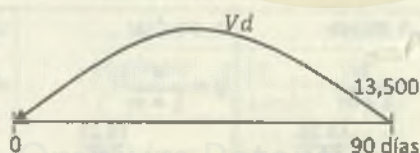
$$X = 149,175 + 99,626.73$$

$$X = \$ 248,801.73$$

7. Juan vende al Banco Comercial un pagaré por \$13,500, 90 días antes de su vencimiento; el banco aplica una tasa de descuento del 4.25%; el mismo día, el Banco Comercial negocia el documento al Banco Federal, con una tasa de descuento del 4%. Determine el valor que el Banco Federal pagó al Banco Comercial por el pagaré de Juan, y cuál fue la ganancia que obtuvo el Banco Comercial en esta transacción.

Negociación con Juan:

Gráfico problema 3.7.a



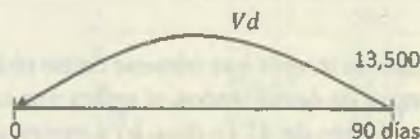
$$VD = M(1 - dt)$$

$$VD = 13,500 \left(1 - \frac{4.25}{100} \times \frac{90}{360}\right)$$

$$VD = \$ 13,356.56$$

Negociación con el Banco Federal:

Gráfico problema 3.7.b



$$VD = M(1 - dt)$$

$$VD = 13,500 \left(1 - \frac{4}{100} \times \frac{90}{360}\right)$$

$$VD = \$ 13,365.00$$

Ganancia del Banco
Comercial: \$8.44

8. Por la compra de un equipo médico se firma un pagaré por \$12,000 a 30 días plazo, con una tasa de interés del 8%. Si el tenedor del pagaré lo negocia ese mismo día en un banco que aplica una tasa de descuento del 7,5%, determinar el valor descontado del pagaré.

Negociación 1:

Gráfico problema 3.8.a



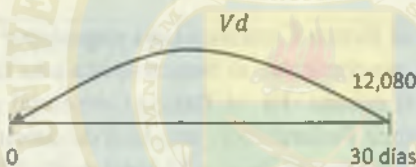
$$M = C(1 + rt)$$

$$M = 12,000 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{30}{360} \right)$$

$$M = \$ 12,080.00$$

Negociación 2:

Gráfico problema 3.8.b



$$VD = M(1 - dt)$$

$$VD = 12,080 \left(1 - \frac{7.5}{100} \times \frac{30}{360} \right)$$

$$VD = \$ 12,004.50$$

9. Un banco desea ganar el 10.25 % de interés en la compra de documentos financieros, ¿cuál debe ser la tasa de descuento, si se compra documentos a: a) 30 días, b) 2 meses, c) 90 días, d) 180 días?

a. 30 días	b. 2 meses	c. 90 días	d. 180 días
$d = \frac{r}{1 + rt}$	$d = \frac{r}{1 + rt}$	$d = \frac{r}{1 + rt}$	$d = \frac{r}{1 + rt}$
$d = \frac{\frac{10.25}{100}}{1 + \frac{10.25}{100} \times \frac{30}{360}}$	$d = \frac{\frac{10.25}{100}}{1 + \frac{10.25}{100} \times \frac{2}{12}}$	$d = \frac{\frac{10.25}{100}}{1 + \frac{10.25}{100} \times \frac{90}{360}}$	$d = \frac{\frac{10.25}{100}}{1 + \frac{10.25}{100} \times \frac{180}{360}}$
$d = 10.16\%$	$d = 10.08\%$	$d = 9.99\%$	$d = 9.75\%$

10. ¿Cuál es la tasa de interés que obtiene como rédito una financiera en la compra de documentos, si aplica una tasa de descuento del 8.15% en plazos de: a) 30 días, b) 2 meses, c) 90 días, d) 180 días?

30 días	2 meses	90 días	180 días
$r = \frac{d}{1 - dt}$	$r = \frac{d}{1 - dt}$	$r = \frac{d}{1 - dt}$	$r = \frac{d}{1 - dt}$
$r = \frac{\frac{8.15}{100}}{1 - \frac{8.15}{100} \times \frac{30}{360}}$	$r = \frac{\frac{8.15}{100}}{1 - \frac{8.15}{100} \times \frac{2}{12}}$	$r = \frac{\frac{8.15}{100}}{1 - \frac{8.15}{100} \times \frac{90}{360}}$	$r = \frac{\frac{8.15}{100}}{1 - \frac{8.15}{100} \times \frac{180}{360}}$
$r = 8,21\%$	$r = 8,26\%$	$r = 8,33\%$	$r = 8,50\%$

11. Se adquiere un electrodoméstico cuyo valor de contado es \$1,200, el mismo que va a pagarse con un proceso de Amortización Simple, por el método Lagarto durante 18 meses. Encuentre el valor del Abono mensual, si se aplica una tasa de interés del 14%.

Datos:

Valor de la deuda $C = 1,200$

Plazo: $t = 18$ meses

Rédito: 14%

$$A = \frac{C}{n} (1 + rt)$$

$$A = \frac{1,200}{18} \left(1 + \frac{14}{100} \times \frac{18}{12} \right) = \$ 80.67$$

12. Para el ejercicio anterior, desarrolle la tabla de amortización aplicando el método de Saldos Deudores.

Datos:

Valor de la deuda $C = 1,200$

Plazo: $t = 18$ meses

Rédito: 14%

$$A_o = \frac{C}{n} = \frac{1,200}{18} = \$ 66.67$$

$$I_1 = SIAP \times \frac{r}{n} = 1,200 \times \frac{14\%}{12} = \$ 14$$

PERÍODO	SIAP	A_o	I_j	A_j	SIDP
1	1,200.00	66.67	14.00	80.67	1,133.33
2	1,133.33	66.67	13.22	79.89	1,066.67
3	1,066.67	66.67	12.44	79.11	1,000.00
4	1,000.00	66.67	11.67	78.33	933.33
5	933.33	66.67	10.89	77.56	866.67
6	866.67	66.67	10.11	76.78	800.00
7	800.00	66.67	9.33	76.00	733.33
8	733.33	66.67	8.56	75.22	666.67
9	666.67	66.67	7.78	74.44	600.00
10	600.00	66.67	7.00	73.67	533.33
11	533.33	66.67	6.22	72.89	466.67
12	466.67	66.67	5.44	72.11	400.00

13	400.00	66.67	4.67	71.33	333.33
14	333.33	66.67	3.89	70.56	266.67
15	266.67	66.67	3.11	69.78	200.00
16	200.00	66.67	2.33	69.00	133.33
17	133.33	66.67	1.56	68.22	66.67
18	66.67	66.67	0.78	67.44	-
$\Sigma =$		1,200.00	133.00	1,333.00	

13. Encuentre el valor del préstamo, mediante Amortización Simple, si se cubre mediante 24 cuotas mensuales de \$120, considerando una tasa del 10%.

Datos:

Valor de la cuota $A = 120$

Plazo: $t = 24$ meses

Rédito: 10%

$$A = \frac{C}{n}(1 + rt)$$

$$C = \frac{A \times n}{(1 + rt)} = \frac{120 \times 24}{\left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{24}{12}\right)} = \$2,400.00$$

14. Desarrolle el método de Saldos deudores para una deuda de \$2,500, pagaderos mediante 12 cuotas mensuales, con una tasa de Interés Simple del 8%.

Datos:

Valor de la deuda $C = 2,500$

Plazo: $t = 12$ meses

Rédito: 8%

$$A_0 = \frac{C}{n} = \frac{2,500}{12} = \$208.33$$

$$I_1 = SIAP \times \frac{r}{n} = 2,500 \times \frac{8\%}{12} = \$16.67$$

PERÍODO	SIAP	A_0	I_j	A_j	SIDP
1	2,500.00	208.33	16.67	225.00	2,291.67
2	2,291.67	208.33	15.28	223.61	2,083.33
3	2,083.33	208.33	13.89	222.22	1,875.00
4	1,875.00	208.33	12.50	220.83	1,666.67
5	1,666.67	208.33	11.11	219.44	1,458.33
6	1,458.33	208.33	9.72	218.06	1,250.00
7	1,250.00	208.33	8.33	216.67	1,041.67
8	1,041.67	208.33	6.94	215.28	833.33
9	833.33	208.33	5.56	213.89	625.00
10	625.00	208.33	4.17	212.50	416.67
11	416.67	208.33	2.78	211.11	208.33
12	208.33	208.33	1.39	209.72	-
$\Sigma =$		2,500.00	108.33	2,608.33	

3.8 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el valor al día de hoy, del descuento realizado a un documento por \$1,500 a 210 días, si se considera: a) 6,35 % de Interés Simple b) 6,35 % de Descuento simple.

R: a) \$53.58; b) \$55.56

2. Un documento por \$1,600 establece 5,2% de Interés Simple por 120 días. Si este documento se descuenta 30 días antes del vencimiento para obtener 4,3% de Interés Simple, ¿cuál es el descuento racional?

R: \$5,81

3. Determinar el descuento bancario y el valor descontado de un capital de \$1,450, 30 días antes de su vencimiento, al 10,5 % de descuento simple.

R: \$12.69; \$1,437.31

4. Un pagaré a 6 meses por \$2,400 dólares, con interés al 5%, es vendido a un banco ochenta días antes de su vencimiento, el cual aplica el 6% de descuento bancario. Hallar el importe de la operación.

R: \$2,427.20

5. Un banco carga el 6.5% de descuento simple en préstamos a corto plazo. Determinar la cantidad recibida por una persona que solicita \$8,000 del 1 de junio al 18 de noviembre del mismo año.

R: \$7,754.44

6. El 30 de marzo del 2006 se firma un pagaré por \$12,500 a 180 días plazo, con una tasa de interés del 7.53%. El 28 de junio del mismo año, el tenedor del documento lo negocia en un banco que aplica una tasa de descuento del 8.45%, determinar el valor del documento que recibe el tenedor del mismo.

R: \$12,696.62

7. Una empresa posee dos pagarés: el primero, por \$14,500 emitido el 24 de abril, al 8.5% de interés con vencimiento en 90 días; y, el segundo, por \$25,600 emitido el 13 de abril, al 8.2 % de interés, con vencimiento en 100 días. Si el 18 de junio del mismo año negocia estos dos documentos en un banco que descuenta el 10.23 %, ¿cuánto recibe la empresa dueña de estos pagarés?

R: \$40,590.98

8. Una compañía comercial dispone de tres pagarés con las siguientes características: \$30,000 con vencimiento el 18 de abril;

\$25,000 con vencimiento el 15 de mayo; y, \$50,000 con vencimiento el 30 de junio. El 3 de marzo vende estos documentos con una tasa del 9,15 %. ¿Cuál es el valor descontado total que recibe por la venta de estos documentos?

R: \$102,673.10

9. Un banco desea ganar el 12,25 % de interés en la compra de documentos financieros, ¿cuál debe ser la tasa de descuento, si se compra documentos a: a) 30 días, b) 2 meses, c) 90 días?

R: a) 12.13%; b) 12.00%; c) 11.89%

10. ¿Cuál es la tasa de interés que aplica una financiera en la compra de documentos, si en esta operación considera una tasa de descuento del 6,35%, en plazos de: a) 20 días, b) 3 meses, c) 100 días?

R: a) 6,37%; b) 6,45%; c) 6,46%

11. ¿Cuál es el valor de contado de una máquina de coser, si se la vendió a plazos por el Método de Amortización Simple y se va a cubrir con 12 abonos mensuales de \$75.80, aplicando una tasa del 9%?

R: \$834.50

12. Aplicando el método Lagarto, encuentre el valor del Abono mensual durante 6 meses, en una compra a plazos por mercadería, cuyo valor de contado es de \$15,000, si se aplica una tasa del 8%.

R: \$2,600.00

13. Aplicando el método de Saldo deudores, resuelva el ejercicio anterior y desarrolle la tabla de amortización hasta la extinción de la deuda. Compruebe que el valor de la primera cuota es igual a la obtenida con el Método Lagarto.

14. El día de hoy se compra un computador, mediante un crédito a Interés Simple, cuyo valor de contado es \$1,350, con el 25 % de cuota inicial y el resto a pagarse en 12 cuotas mensuales y una tasa de interés del 9%. Desarrollando el método de Saldo deudores, encuentre el valor de las cuotas mensuales y elabore la tabla de amortización para todos los pagos.

R: \$91.97



INTERÉS COMPUESTO

OBJETIVO GENERAL

Definir al interés compuesto junto con sus elementos financieros, estableciendo la diferencia con el interés simple, calcular el Monto y el Valor actual de una transacción a interés compuesto, aplicando el método de las ecuaciones de valor.

4.1 Introducción

El Interés compuesto es una modalidad financiera, que acumula al capital, el interés generado en un período de tiempo; formando de esta manera, en cada período, un nuevo capital. Y, sobre este valor, se calculan los intereses para el siguiente período.

Veamos un ejemplo:

Se invierte una suma de \$100 al 10%, con capitalización anual durante 5 años. ¿Cuál será el monto que se obtiene?

- Al final del primer año, el capital de \$100 genera interés del 10%; es decir, \$10. Este valor se suma al capital, que ahora es $\$100 + \$10 = \$110$.
- Al final del segundo año, el capital de \$110 genera un interés del 10%; es decir, \$11; de manera que ahora, el nuevo capital es $\$110 + \$11 = \$121$.
- Al final del tercer período, el capital de \$121 genera un interés del 10%; es decir, \$12.10, de manera que ahora, el nuevo capital es $\$121 + \$12.10 = \$133.10$.
- Al final del cuarto período, el capital de \$133.10 genera un interés del 10 %; es decir, \$13.31, de manera que ahora, el nuevo capital es $\$133.10 + \$13.31 = \$146.41$.
- Finalmente, al final del quinto año, el capital de \$146.41 genera un interés del 10 %; es decir, \$14.64; de manera que ahora el nuevo capital es de $\$146.41 + \$14.64 = \$161.05$.

Se tendrá una apreciación más clara de este ejemplo, si los valores para cada período se ubican en una tabla, tal como se indica:

Período	Capital	Interés Vencido	Nuevo Capital
1	1,000.00	100.00	1110.00
2	1,100.00	110.00	1210.00
3	1,210.00	121.10	1331.10
4	1,331.00	133.10	1464.10
5	1,464.10	146.41	1610.51

En esta tabla se puede observar cómo el capital va creciendo cada vez que se suman los intereses. A este proceso de acumular los intereses al capital, se le denomina en el mundo financiero Capitalización.

Nótese además la diferencia conceptual entre el Interés simple y el Interés compuesto:

En el Interés simple los intereses se calculaban una sola vez, al final del plazo de la inversión; en cambio, en una transacción financiera a Interés compuesto, los intereses van sumándose periódicamente al capital.

A continuación se presenta un gráfico que registra la variación del Interés simple y del Interés compuesto:

Gráfico texto 4.1



El gráfico obtenido presenta las siguientes características:

- El Monto varía con respecto al tiempo.
- Existe una relación lineal para el Interés simple y una relación polinómica para el Interés compuesto.
- Durante el primer año, el valor del Interés simple y el Interés compuesto coinciden; a partir del segundo año, el monto del Interés compuesto crece en proporción geométrica, a razón del 10% anual.

4.2 Elementos financieros del Interés compuesto

Los siguientes son los elementos financieros, que intervienen en el cálculo del monto de una inversión a Interés compuesto:

- Capital
- Tasa nominal
- Frecuencia de capitalización
- Tiempo o plazo
- Tasa por período
- Número de períodos

a. Capital

El Capital o Principal, es el valor financiero en juego durante la inversión; al igual que en el Interés simple, se lo representa con (C).



b. Tasa nominal

Es el valor referencial que indica el costo por el uso del dinero ajeno, se expresa en porcentaje y va acompañada del período de conversión o capitalización de intereses; este valor se lo representa con (f) ejemplo:

- 5 % convertible semestralmente; quiere decir que los intereses se calcularán y se agregarán al capital cada semestre.
- 7 % capitalizable trimestralmente; quiere decir que cada trimestre, los intereses vencidos se sumarán al capital.
- 8 % capitalizable mensualmente, quiere decir que cada mes, los intereses deberán ser calculados y añadidos al capital; formándose, como en los casos anteriores, un nuevo capital.

En ciertas ocasiones, no se indica el período de capitalización, entonces, al igual que en el Interés simple, se asume que la capitalización de intereses es anual. Ejemplo:

- 4 %, quiere decir que los intereses se capitalizarán anualmente.
- 7 %, quiere decir que cada año los intereses se añadirán al capital.

c. Frecuencia de capitalización

La Frecuencia de capitalización se define como el número de veces que los intereses se capitalizan en un año. La Frecuencia de capitalización se la representa con (m) . A continuación, se incluye una tabla con los valores comúnmente más usados:

Período de capitalización	Frecuencia de capitalización (m)
Anual	1
Semestral	2
Trimestral	4
Mensual	12

d. Tiempo o plazo

Representado con (t) , es la duración de la transacción a Interés compuesto, comúnmente, se expresa en años. Sin embargo, puede expresarse en semestres, trimestres, meses, etc. Puede presentarse también en forma combinada. La duración o plazo de la transacción a Interés compuesto puede expresarse entre dos fechas.

El valor del tiempo debe trabajarse con mucho cuidado, toda vez que con este dato, se podrá calcular el número de períodos de capitalización de los intereses.

Si se conoce la tasa nominal y el tiempo o plazo de la transacción, se pueden establecer la tasa por período y el número de capitalizaciones de la transacción.

e. Tasa por período

Es el valor referencial de los intereses por período que se cargan al capital; esta tasa porcentual se calcula con la siguiente expresión:

$$\text{tasa periódica} = \frac{\text{tasa nominal (\%)}}{\text{frecuencia}}$$

Si a la tasa por período se representa con (i), entonces la expresión anterior puede escribirse como:

$$i = \frac{j(\%)}{m}$$

f. Número de períodos

Se define el Número de períodos, como el número de veces en que los intereses se suman al capital, es decir, se capitalizan. Se puede calcular este valor aplicando la siguiente expresión:

$$\text{número de períodos} = \text{tiempo (en años)} \times \text{frecuencia}$$

Representando con (n) al número de períodos de capitalización, la expresión anterior se puede escribir:

$$n = t (\text{en años}) \times m$$

La fórmula anterior se utiliza en muchas de las ocasiones; sin embargo, en algunos ejercicios, dicha expresión no es aplicable.

4.3 Monto a Interés compuesto

El Monto a Interés compuesto de una transacción financiera está dado por:

$$M = C(1 + i)^n$$

Donde M representa el Monto de la transacción a Interés compuesto, C el capital o principal, i la tasa por período y n el número de capitalizaciones.

El lector podrá darse cuenta en forma inmediata, que para encontrar el Monto de una transacción a Interés compuesto es indispensable determinar previamente la tasa por período i , y el número de capitalizaciones n .

4.4 Monto a Interés compuesto, si el número de períodos es fraccionario

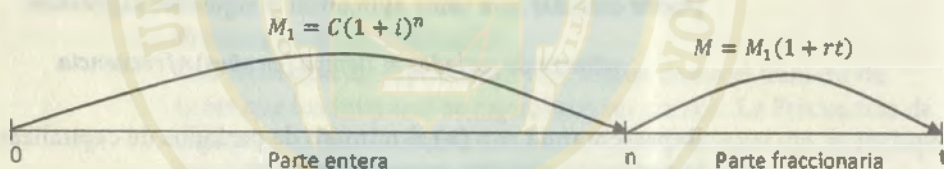
Hasta aquí el valor n que representa el número de capitalizaciones siempre ha sido un número entero. Sin embargo, en algunas ocasiones, esto no sucede. Para calcular el Monto a Interés compuesto, cuando el número de capitalizaciones es fraccionario, se puede realizar de dos maneras:

1. Calcular el Monto con el valor periódico fraccionario, conocido también como Método exacto.
2. Aplicar la Regla Práctica o Regla comercial.

La primera de estas formas casi no se utiliza. La Regla práctica para el cálculo del Monto dice:

Se calcula el monto a Interés compuesto para la parte entera (M_1), y sobre este valor, se calcula a Interés simple para la parte fraccionaria restante. La parte entera es el número entero de períodos de capitalización que se puede obtener del tiempo o plazo de la transacción.

Gráfico texto 4.4



4.5 Valor actual de una transacción a Interés compuesto

Se define al Valor actual, como el valor que toma la inversión cuando se liquida en una fecha anterior al vencimiento. Al Valor actual se le conoce como Capital, o Valor presente de la transacción. Entonces, el Valor actual, en función del Monto, la tasa por período y el número de períodos, está dado por:

$$VA = \frac{M}{(1+i)^n}$$

Donde el número de períodos está definido entre la fecha de liquidación y la fecha de vencimiento.

La fórmula anterior puede reescribirse de la siguiente manera:

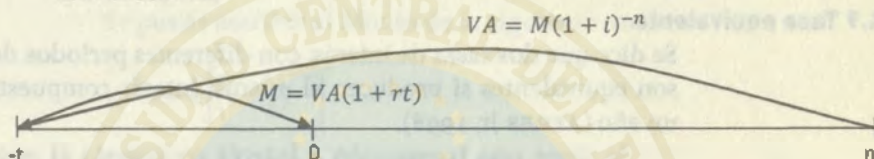
$$VA = M(1+i)^{-n}$$

4.6 Valor actual en períodos fraccionarios

Cuando se requiere el Valor actual de una transacción a Interés compuesto con número de períodos fraccionarios, se aplica la siguiente regla práctica:

Se determina el Valor actual a Interés compuesto, para el número de períodos entero más próximo por exceso; luego, este valor se proyecta a Interés simple, para el tiempo tomado como exceso.

Gráfico texto 4.6



4.7 Cálculo del número de períodos y del tiempo

Para obtener el número de períodos y el tiempo que dura una transacción a Interés compuesto, se debe despejar n de la fórmula general del Interés compuesto. Aplicando logaritmos se tiene:

$$M = C(1+i)^n$$

$$\frac{M}{C} = (1+i)^n$$

$$\log\left(\frac{M}{C}\right) = \log(1+i)^n$$

$$\log\left(\frac{M}{C}\right) = n \times \log(1+i)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)}$$

Entonces, el tiempo está dado por:

$$t = \frac{n}{m}$$

4.8 Cálculo de la Tasa periódica a Interés compuesto

Para determinar la tasa por período y después la Tasa nominal se puede despejar (i) de la fórmula general del monto a Interés compuesto, entonces se tiene:

$M = C(1 + i)^n$ $\frac{M}{C} = (1 + i)^n$ $\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = \sqrt[n]{(1 + i)^n}$	$\sqrt[n]{\frac{M}{C}} = 1 + i$ $i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$	Si a este valor (i) se multiplica por la frecuencia de capitalización (m), se obtiene la tasa nominal (j), de la transacción, es decir: $j = i \times m$
--	--	---

4.9 Tasa equivalente

Se dice que dos tasas de interés, con diferentes períodos de conversión son equivalentes si producen el mismo Interés compuesto al final de un año (AYRES Jr, 1998).

Se tiene una transacción a Interés compuesto al que se le aplica una Tasa nominal j que capitaliza con una frecuencia m . Entonces, la Tasa periódica i de esta transacción será:

$$i = \frac{j}{m}$$

Por otro lado, si se aplica una Tasa nominal j que capitaliza con una frecuencia m' , entonces la Tasa periódica i' de esta transacción será:

$$i' = \frac{j}{m'}$$

Asumiendo que, al final del año, las dos transacciones habrán alcanzado el mismo Interés compuesto se tiene:

$$(1 + i)^m = (1 + i')^{m'}$$

Despejando i' se obtiene:

$$(1 + i)^{\frac{m}{m'}} = (1 + i')^{\frac{m'}{m'}}$$

$$(1 + i)^{\frac{m}{m'}} = 1 + i'$$

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[(1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100$$

4.10 Capitalización continua

Si la frecuencia de capitalización (m) crece sin límite, entonces el período de capitalización es un intervalo de tiempo cada vez más peque-

ño. En este caso, se dice que los intereses capitalizan continuamente y que la tasa nominal (j) es una tasa instantánea (PORTUS Govinden, 1985).

Recordando que el Monto a Interés compuesto, en función de la Tasa nominal (j) y la frecuencia de capitalización (m) está dado por:

$$M = C \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{t \times m}$$

Si:

$$\frac{j}{m} = \frac{1}{\delta}$$

Se puede escribir el Monto de la siguiente manera:

$$M = C \left[\left(1 + \frac{1}{\delta} \right)^{\delta \times j} \right]^t$$

Si $\delta \rightarrow \infty$, entonces: $\left(1 + \frac{1}{\delta} \right)^{\delta} = 2.718281828182 \dots = e$ (base de los logaritmos naturales). Finalmente, el Monto en capitalización continua está dado:

$$M = C \times e^{jt}$$

La expresión obtenida permite calcular el Monto en capitalización continua durante un tiempo t (en años) a la tasa nominal, que se transforma en tasa instantánea, dada.

4.11 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Con los datos registrados en la siguiente tabla, determine la tasa periódica (expresado en fracción) y el número de períodos:

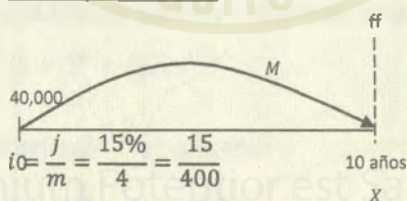
Caso	Tasa nominal	Capitalización	Tiempo	Tasa periódica	Períodos
a)	6%	Anual	5 años	$\frac{6}{100}$	5
b)	18 %	Mensual	7 años	$\frac{18}{1200}$	84
c)	4%	trimestral	3 años	$\frac{4}{400}$	12
d)	12%	semestral	4 años	$\frac{12}{200}$	8

$$\text{Tasa periódica} = \frac{\text{Tasa nominal}}{\text{Frecuencia de capitalización}}$$

$$\text{Número de períodos} = \text{tiempo} \times \text{frecuencia de capitalización}$$

2. Una empresa obtiene un préstamo de \$40,000 a 10 años plazo, con una tasa de interés del 15%, capitalizable trimestralmente. Calcular el monto que debe pagar a la fecha de vencimiento.

Gráfico problema 4.2



Ecuación de Valor:

$$X = M$$

$$X = C(1 + i)^n$$

$$X = 40,000 \left(1 + \frac{15}{400}\right)^{40}$$

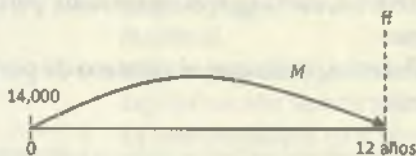
$$X = \$174,415.15$$

$$n = t \times m = 10 \times 4 = 40$$

3. M colocó \$14,000 en una cuenta de ahorro en un banco de la localidad. ¿Cuánto tendrá la cuenta 12 años después, si el banco le paga: a) 3.8% convertible trimestralmente, b) 4.2% convertible semestralmente, 3.7% c) efectivo anual, d) 3.5% convertible mensualmente?

a. 3.8% convertible trimestralmente

Gráfico problema 4.3.a



$$i = \frac{j}{m} = \frac{3.8\%}{4} = \frac{3.8}{400}; n = t \times m = 12 \times 4 = 48$$

Ecuación de Valor:

$$X = M$$

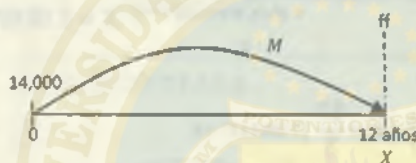
$$X = C(1+i)^n$$

$$X = 14,000 \left(1 + \frac{3.8}{400}\right)^{48}$$

$$X = \$22,041.01$$

b. 4.2% convertible semestralmente

Gráfico problema 4.3.b



$$i = \frac{j}{m} = \frac{4.2\%}{2} = \frac{4.2}{200}; n = t \times m = 12 \times 2 = 24$$

Ecuación de Valor:

$$X = M$$

$$X = C(1+i)^n$$

$$X = 14,000 \left(1 + \frac{4.2}{200}\right)^{24}$$

$$X = \$23,053.98$$

c. 3.7% efectivo anual

Gráfico problema 4.3.c



$$i = \frac{j}{m} = \frac{3.7\%}{1} = \frac{3.7}{100}; n = t \times m = 12 \times 1 = 12$$

Ecuación de Valor:

$$X = M$$

$$X = C(1+i)^n$$

$$X = 14,000 \left(1 + \frac{3.7}{100}\right)^{12}$$

$$X = \$21,650.76$$

d. 3.5% convertible mensualmente

Gráfico problema 4.3.d



$$i = \frac{j}{m} = \frac{3.5\%}{12} = \frac{3.5}{1200}; n = t \times m = 12 \times 12 = 144$$

Ecuación de Valor:

$$X = M$$

$$X = C(1+i)^n$$

$$X = 14,000 \left(1 + \frac{3.5}{1200}\right)^{144}$$

$$X = \$21,294.44$$

4. Hallar el valor acumulado de \$15,000 por 4 años 5 meses, al 5% capitalizable trimestralmente:
 - a. La Regla Teórica, dado que el número de períodos es fraccionario.
 - b. La Regla Práctica, dado que el número de períodos es fraccionario.

a. La regla teórica

Gráfico problema 4.4.a



Ecuación de Valor:

$$X = M$$

$$X = C(1+i)^n$$

$$X = 15,000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{\frac{53}{4}}$$

$$X = \$18,681.14$$

$$n = t \times m = \left(4 + \frac{5}{12}\right) \times 4 = \frac{53}{3} \text{ trimestres}$$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{4} = \frac{5}{400}$$

b. La regla práctica

Gráfico problema 4.4.b



Monto a Interés compuesto para períodos enteros:

$$M_1 = C(1+i)^n$$

$$M_1 = 15,000 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{17} = \$18,527.07$$

Monto a Interés simple parte fraccionaria:

$$M = M_1(1+rt)$$

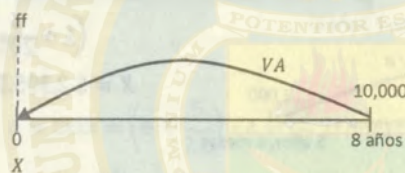
$$M = 18,527.07 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{2}{12}\right)$$

$$M = \$18,681.46$$

5. Hallar el Valor actual de:
 - a. \$10,000 pagaderos dentro de 8 años al 5%, con acumulación anual.
 - b. \$5,000 pagaderos dentro de 7 años al 8%, capitalizable trimestralmente.

- c. \$8,000 pagaderos en 7.5 años al 4 %, capitalizable semestralmente.
- d. \$4,000 pagaderos dentro de 5 años al 7%, con capitalización mensual.
- e. \$3,000 pagaderos en 5 años y 4 meses al 5%, con capitalización semestral.
- f. \$1,200 pagadero en 6 años y 5 meses al 8%, con capitalización trimestral.
- g. \$3,000 pagaderos en 5 años 4 meses, al 5%, con capitalización semestral; dado que el número de periodos es fraccionario, aplique la Regla Teórica y luego la Regla Comercial.
- h. \$1,200 pagadero en 6 años 5 meses, al 8%, con capitalización trimestral.

Gráfico problema 4.5.a



$$i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{1} = \frac{5}{100} \quad n = t \times m = 8 \times 1 = 8$$

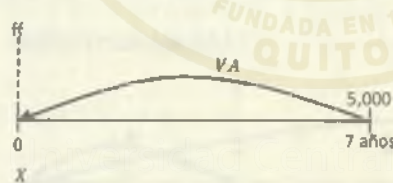
$$X = VA$$

$$X = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = \frac{10,000}{\left(1 + \frac{5}{100}\right)^8}$$

$$X = \$6,768.39$$

Gráfico problema 4.5.b



$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = \frac{8}{400} \quad n = t \times m = 7 \times 4 = 28$$

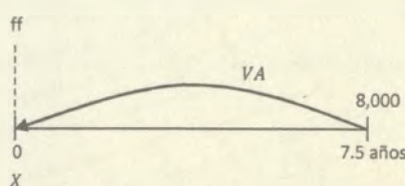
$$X = VA$$

$$X = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = \frac{5,000}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{28}}$$

$$X = \$2,871.87$$

Gráfico problema 4.5.c



$$i = \frac{j}{m} = \frac{4\%}{2} = \frac{4}{200} \quad n = t \times m = 7.5 \times 2 = 15$$

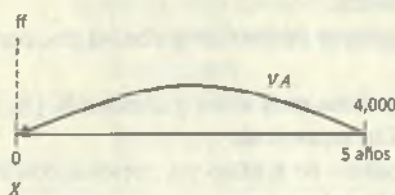
$$X = VA$$

$$X = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = \frac{8,000}{\left(1 + \frac{4}{200}\right)^{15}}$$

$$X = \$5,944.12$$

Gráfico problema 4.5.d



$$i = \frac{j}{m} = \frac{7\%}{12} = \frac{7}{1200} \quad n = t \times m = 5 \times 12 = 60$$

$$X = VA$$

$$X = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = \frac{4,000}{\left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{60}}$$

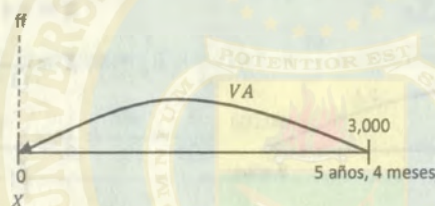
$$X = \$2,821.62$$

Regla Teórica:

$$X = VA$$

$$X = \frac{M}{(1+i)^n}$$

Gráfico problema 4.5.e.1



$$n = t \times m = \left(5 + \frac{4}{12}\right) \times 2 = \frac{32}{3} \text{ semestres}$$

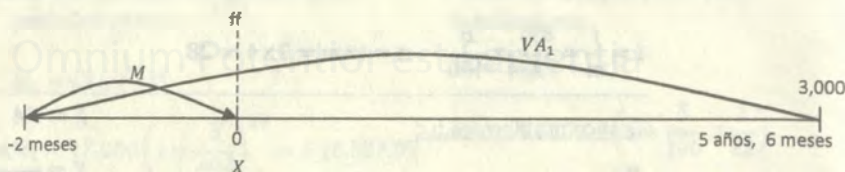
$$i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{2} = \frac{5}{200}$$

$$X = \frac{3000}{\left(1 + \frac{5}{200}\right)^{\frac{32}{3}}}$$

$$X = \$2,305.33$$

Regla Práctica:

Gráfico problema 4.5.e.2



Valor actual para el entero más próximo: Monto a Interés simple parte fraccionaria:

$$VA_1 = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = VA_1(1+rt)$$

$$VA_1 = \frac{3,000}{\left(1 + \frac{5}{200}\right)^{11}} = 2,286.43$$

$$X = 2,286.43 \left(1 + \frac{5}{100} \times \frac{2}{12}\right)$$

$$X = \$ 2,305.49$$

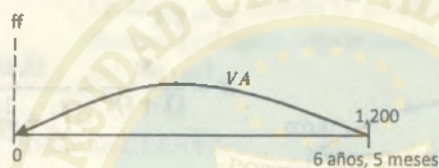
Regla Teórica:

$$X = VA$$

Gráfico problema 4.5.f.1

$$X = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{1,200}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{\frac{77}{3}}}$$

$$X = \$721,84$$

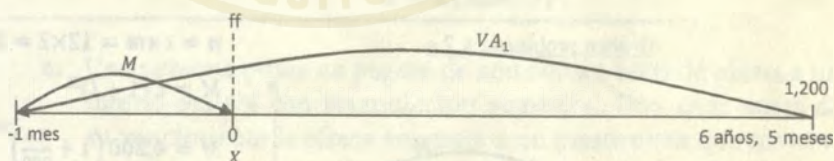


$$n = t \times m = \left(6 + \frac{5}{12}\right) \times 4 = \frac{77}{3} \text{ trimestres}$$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = \frac{8}{400}$$

Regla práctica:

Gráfico problema 4.5.f.2



Valor actual para el entero más próximo:

$$VA_1 = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$VA_1 = \frac{1,200}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{26}} = 717.10$$

Monto a Interés simple parte fraccionaria:

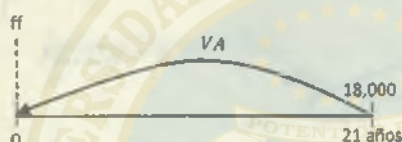
$$X = VA_1(1+rt)$$

$$X = 717.10 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{1}{12}\right)$$

$$X = \$721.88$$

6. Al nacer su hijo, un padre desea invertir una cantidad tal, que acumulada al 3.5% convertible semestralmente importe \$18,000 para cuando el hijo tenga 21 años. ¿Cuánto tendrá que invertir?

Gráfico problema 4.6



$$i = \frac{j}{m} = \frac{3.5\%}{2} = \frac{3.5}{200}$$

$$n = t \times m = 21 \times 2 = 42$$

$$X = VA$$

$$X = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{18,000}{\left(1 + \frac{3.5}{200}\right)^{42}} = \$8,686.14$$

7. ¿Cuál es el Valor presente de un documento por \$4,200, con interés al 5.4%, convertible semestralmente por 12 años, si el rendimiento actual es del 4.5 % efectivo?

Gráfico problema 4.7.a



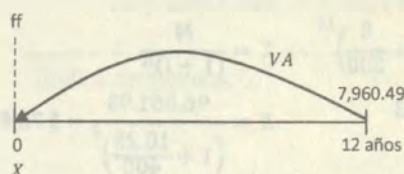
$$i = \frac{j}{m} = \frac{5.4\%}{2} = \frac{5.4}{200}$$

$$n = t \times m = 12 \times 2 = 24$$

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 4,200 \left(1 + \frac{5.4}{200}\right)^{24} = \$7,960.49$$

Gráfico problema 4.7.b



$$n = t \times m = 12 \times 1 = 12$$

$$X = VA$$

$$X = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{7,960.49}{\left(1 + \frac{4.5}{100}\right)^{12}} = \$4,694.01$$

$$i = \frac{j}{m} = \frac{4.5\%}{1} = \frac{4.5}{100}$$

8. El día de hoy, B contrae un compromiso de pagar \$15,000 en 10 años, con interés al 4,25%. ¿Cuál es el valor de la obligación dentro de 6 años, suponiendo para ese entonces un rendimiento del 3,81%?

Gráfico problema 4.8



$$M = C(1+i)^n$$

$$X = VA$$

$$M = 15,000 \left(1 + \frac{4.25}{100}\right)^{10}$$

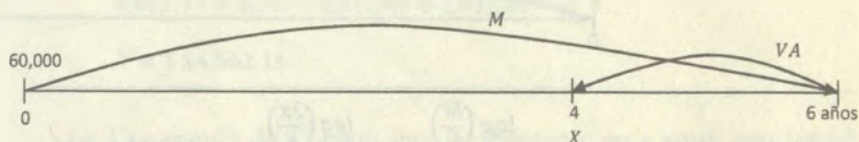
$$X = \frac{M}{(1+i)^n} = \frac{22,743.22}{\left(1 + \frac{3.81}{100}\right)^6}$$

$$M = \$22,743.22$$

$$X = \$19,583.72$$

9. Una persona posee un pagaré de \$60,000 a 6 años de plazo, a un interés del 8% con acumulación semestral. Dos años antes de su vencimiento le ofrece en venta a un prestamista que invierte al 10.25 % con capitalización trimestral. ¿Qué suma le ofrece el prestamista?

Gráfico problema 4.9



$$M = C(1+i)^n$$

$$X = VA$$

$$M = 60,000 \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{12}$$

$$X = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$M = \$96,061.93$$

$$X = \frac{96,061.93}{\left(1 + \frac{10.25}{400}\right)^6} = \$78,458.96$$

10. Sustituir dos deudas de \$1,400 y \$2,800 con vencimiento en 4 y 5 años respectivamente, por 2 pagos iguales con vencimiento en 2 y 3 años, suponiendo un rendimiento de 8% convertible semestralmente.

Gráfico problema 4.10



$$i = \frac{j}{m} = \frac{10\%}{2} = \frac{8}{200}$$

$$VA_1 + VA_2 = M_1 + X$$

$$\frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} = C(1+i)^n + X$$

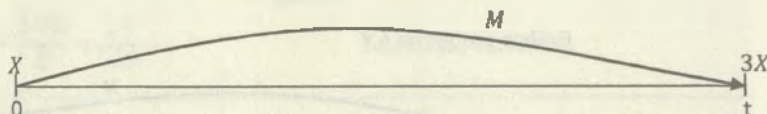
$$\frac{1,400}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2} + \frac{2,800}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^4} = X \left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 + X$$

$$1,294.38 + 2,393.45 = X \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 + 1 \right]$$

$$X = \frac{3,687.83}{\left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 + 1 \right]} = \$1,771.63$$

11. ¿En qué tiempo un estudiante triplicará su capital, si la financiera en la que deposita sus ahorros le reconoce un interés del 12% capitalizable mensualmente?

Gráfico problema 4.11

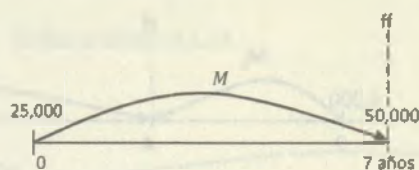


$$n = \frac{\log\left(\frac{M}{C}\right)}{\log(1+i)} = \frac{\log\left(\frac{3X}{X}\right)}{\log\left(1 + \frac{12}{1200}\right)} = 110.41 \text{ meses}$$

$$t = 9.2 \text{ años} \approx 9 \text{ años, 2 meses, 12 días}$$

12. ¿Cuál es la tasa nominal, capitalizable trimestralmente, para que en 7 años una inversión de 25,000 se duplique?

Gráfico problema 4.12



$$n = t \times m = 7 \times 4 = 28$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{M}{C}} - 1$$

$$i = \left[\sqrt[28]{\frac{50,000}{25,000}} - 1 \right] \times 100$$

$$i = 2.51\%$$

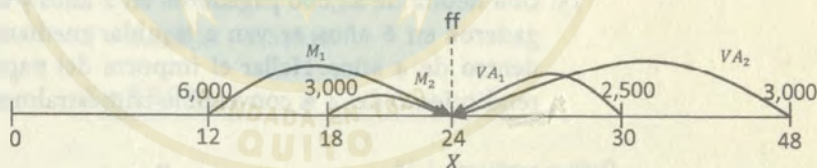
$$j = i \times m$$

$$j = 2.51\% \times 4$$

$$j = 10.03\%$$

13. Por la provisión de un lote de libros, un colegio tiene que cumplir con los siguientes pagos: \$6,000 en un año, \$3,000 en 18 meses, \$2,500 en 30 meses y \$3,000 en 4 años. Con su acreedor conviene efectuar un pago único a los dos años a una tasa del 7 % capitalizable semestralmente. Calcule dicho pago.

Gráfico problema 4.13



$$M_1 + M_2 + VA_1 + VA_2 = X$$

$$C(1+i)^n + C(1+i)^n + \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} = X$$

$$6,000 \left(1 + \frac{7}{200}\right)^2 + 3,000 \left(1 + \frac{7}{200}\right)^1 + \frac{2,500}{\left(1 + \frac{7}{200}\right)^1} + \frac{3,000}{\left(1 + \frac{7}{200}\right)^4} = X$$

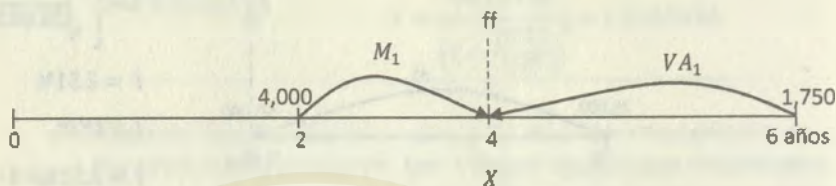
$$6,427.35 + 3,105 + 2,415.46 + 2,614.33 = X$$

$$X = \$ 14,562.14$$

14. Una deuda de \$14,000, con vencimiento en 4 años, con interés al 4% convertible semestral va a ser cubierta mediante un pago de \$5,000, al término de 2 años, y un pago final, al término de 4

años. Hallar el valor del pago final, suponiendo intereses al 5% efectivo.

Gráfico problema 4.14



$$M_1 = M_2 + X$$

$$C(1+i)^n = C(1+i)^n + X$$

$$14,000 \left(1 + \frac{4}{200}\right)^8 = 5,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 + X$$

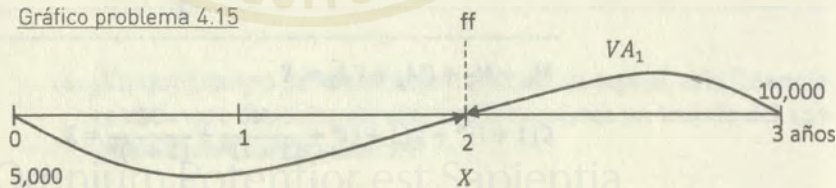
$$16,403.23 = 5,512.50 + X$$

$$X = 16,403.23 - 5,512.50$$

$$X = \$ 10,890.73$$

15. Una deuda de \$4,000 pagaderos en 2 años y otra de \$1,750 pagaderos en 6 años, se van a liquidar mediante un pago único dentro de 4 años. Hallar el importe del pago, suponiendo un rendimiento del 4 % convertible trimestralmente.

Gráfico problema 4.15



$$M_1 + VA_1 = X$$

$$C(1+i)^n + \frac{M}{(1+i)^n} = X$$

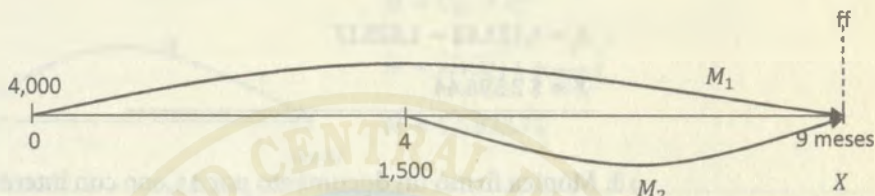
$$4000 \left(1 + \frac{4}{400}\right)^8 + \frac{1,750}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^8} = X$$

$$4,331.43 + 1,616.10 = X$$

$$X = \$ 5,947.53$$

16. Una persona debe \$10,000 pagaderos dentro de 3 años. Si hace el día de hoy un pago de \$5,000. ¿Cuál será el importe del pago que tendrá que hacer en 2 años para liquidar su deuda, suponiendo un rendimiento del 5% convertible semestralmente?

Gráfico problema 4.16



$$VA_1 = M_1 + X$$

$$\frac{M}{(1+i)^n} = C(1+i)^n + X$$

$$\frac{10,000}{\left(1 + \frac{5}{200}\right)^2} = 5,000 \left(1 + \frac{5}{200}\right)^4 + X$$

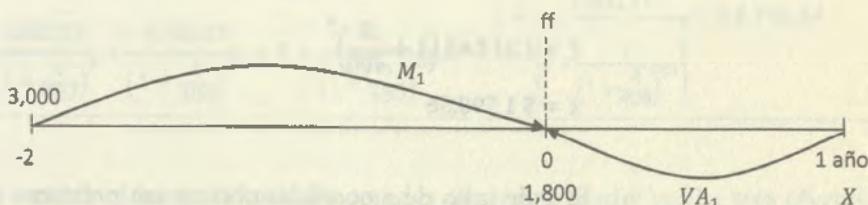
$$9,518.14 = 5,519.06 + X$$

$$X = 9,518.14 - 5,519.06$$

$$X = \$3,999.08$$

17. El día de hoy, un comerciante compra artículos por valor de \$6,500. Paga \$2,500 iniciales y 1,500 al término de 4 meses. Suponiendo un rendimiento del 4% convertible mensualmente, ¿cuál será el importe del pago final que tendrá que hacer, al término de 9 meses?

Gráfico problema 4.17



$$M_1 = M_2 + X$$

$$C(1+i)^n = C(1+i)^n + X$$

$$4,000\left(1 + \frac{4}{1200}\right)^9 = 1500\left(1 + \frac{4}{1200}\right)^5 + X$$

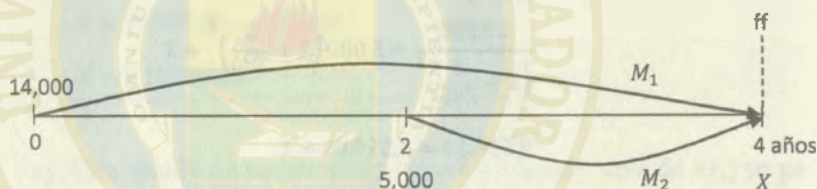
$$4,121.61 = 1,525.17 + X$$

$$X = 4,121.61 - 1,525.17$$

$$X = \$2,596.44$$

18. Mónica firmó un documento por \$3,000 con intereses acumulados por 2 años al 5% convertible trimestralmente, vencido el día de hoy. Paga \$1,800 únicamente y acuerda pagar el resto en un año. Hallar el importe del pago requerido.

Gráfico problema 4.18



$$M_1 = 1,800 + VA_1$$

$$C(1+i)^n = 1,800 + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$3,000\left(1 + \frac{5}{400}\right)^8 = 1,800 + \frac{X}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^4}$$

$$3,313.46 - 1,800 = \frac{X}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^4}$$

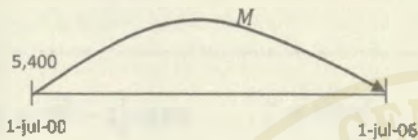
$$X = 1,513.46\left(1 + \frac{5}{400}\right)^4$$

$$X = \$1,590.56$$

19. El 1 de julio de 2,000, Luis obtiene un préstamo de \$5,400 a 6 años, con intereses al 4% efectivo. El 1 de julio de 2003 obtiene otro préstamo de \$5,600 a 5 años con intereses al 4% convertible

semestralmente. ¿Qué pagos iguales hechos el 1 de julio de 2004 y el 1 de julio de 2010 saldarán las deudas, suponiendo intereses al 4% convertible trimestralmente?

Gráfico problema 4.19.a



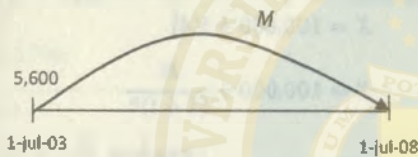
$$i = \frac{j}{m} = \frac{4\%}{1} = \frac{4}{100} \quad n = t \times m = 6 \times 1 = 6$$

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 5,400 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6$$

$$M = \$ 6,832.72$$

Gráfico problema 4.19.b



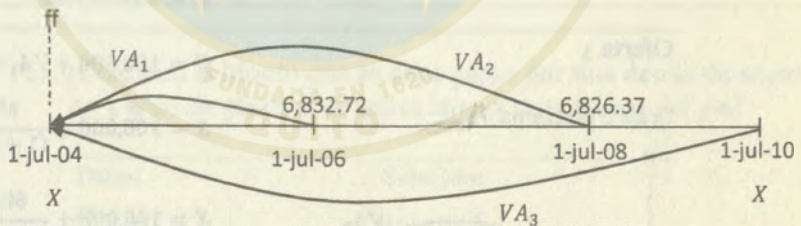
$$i = \frac{j}{m} = \frac{4\%}{2} = \frac{4}{200} \quad n = t \times m = 5 \times 2 = 10$$

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 5,600 \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{10}$$

$$M = \$ 6,826.37$$

Gráfico problema 4.19.c



$$VA_1 + VA_2 = X + VA_3$$

$$\frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} = X + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$\frac{6,832.72}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^8} + \frac{6,826.37}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{16}} = X + \frac{X}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{24}}$$

$$6,309.90 + 5,821.67 = X \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{24}}\right]$$

$$X = \frac{12,131.57}{\left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{24}}\right]} = \$ 6,786.64$$

20. Una persona desea vender una propiedad y recibe tres ofertas: \$200,000 de contado; \$100,000 de contado y \$120,000 a un año plazo; \$100,000 al contado y dos letras de \$60,000 a 6 meses

y 1 año, respectivamente. ¿Cuál de las tres ofertas le conviene aceptar, considerando que el rendimiento del dinero es 12% capitalizable semestralmente?

Sea X el Valor actual de la oferta:

Oferta 1

$$X = 200,000$$

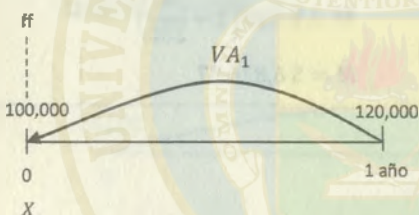
Gráfico problema 4.20.a



Oferta 2

$$X = 100,000 + VA_1$$

Gráfico problema 4.20.b



$$X = 100,000 + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = 100,000 + \frac{120,000}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^2}$$

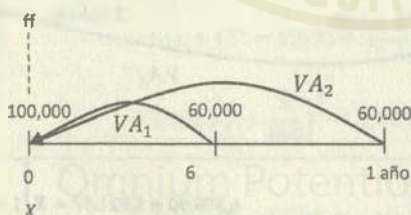
$$X = 100,000 + 106,799.57$$

$$X = \$ 206,799.57$$

Oferta 3

$$X = 100,000 + VA_1 + VA_2$$

Gráfico problema 4.20.c



$$X = 100,000 + \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = 100,000 + \frac{60,000}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^1} + \frac{60,000}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^2}$$

$$X = 100,000 + 56,603.77 + 53,399.79$$

$$X = \$ 210,003.56$$

Decisión: Como se trata de la venta de una propiedad, la persona que va a vender deberá escoger la que ofrece el mayor Valor actual, entonces deberá decidirse por la tercera oferta.

21. Encuentre la Tasa periódica equivalente y la Tasa nominal equivalente en los casos que se indica:

Caso	Tasa nominal	Período de capitalización	Período equivalente	Tasa periódica equivalente (i')	Tasa nominal equivalente (j')
a	15%	Anual	Mensual	1,17%	14,06%
b	8%	Semestral	Trimestral	1,98%	7,92%
c	6%	Trimestral	Semestral	3,02%	6,04%
d	2%	mensual	Anual	2,02%	2,02%

Caso a:

$$i' = \left[(1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{15}{100} \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] \times 100$$

$$i' = 1,17\%;$$

$$j' = i' \times m'$$

$$j' = 1,17\% \times 12$$

$$j' = 14,06\%$$

Caso b:

$$i' = \left[(1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{8}{200} \right)^{\frac{2}{4}} - 1 \right] \times 100$$

$$i' = 1,98\%$$

$$j' = i' \times m'$$

$$j' = 1,98\% \times 4$$

$$j' = 7,92\%$$

Caso c:

$$i' = \left[(1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{6}{400} \right)^{\frac{4}{2}} - 1 \right] \times 100$$

$$i' = 3,02\%$$

$$j' = i' \times m'$$

$$j' = 3,02\% \times 2$$

$$j' = 6,04\%$$

Caso d:

$$i' = \left[(1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1 \right] \times 100$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{2}{1200} \right)^{\frac{12}{1}} - 1 \right] \times 100$$

$$i' = 2,02\%$$

$$j' = i' \times m'$$

$$j' = 2,02\% \times 1$$

$$j' = 2,02\%$$

22. ¿Cuál será el Monto que se debe pagar por una deuda de \$6,500 en 5 años de plazo, si se aplica la tasa instantánea del 3%?

Datos:

$$M = ?$$

$$C = 6,500$$

$$t = 5 \text{ años}$$

$$\text{tasa instantánea } j = 3\%$$

Solución:

$$M = Ce^{jt}$$

$$M = 6,500 \times e^{5 \times \frac{3}{100}}$$

$$M = \$ 7,551.92$$

23. ¿En qué tiempo un capital invertido al 8.52% con capitalización continua crece en 40%?

$$C = x; M = 1,4x; \text{ tasa instantánea } j = 8,52\%$$



$$M = Ce^{jt}$$

$$\ln\left(\frac{M}{C}\right) = j \times t \times \ln e$$

$$\frac{M}{C} = e^{jt}$$

$$\ln\left(\frac{M}{C}\right) = \ln e^{jt}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{j \times \ln e} = \frac{\ln\left(\frac{1,4x}{x}\right)}{\frac{8,52}{100} \times 1} = 3,95 \text{ años}$$

24. En 6 años una deuda, al 5% con capitalización continua, alcanza un monto de \$12,530. ¿Cuál es el valor inicial de la deuda?

Datos:

$C = ?$

$M = 12,530$

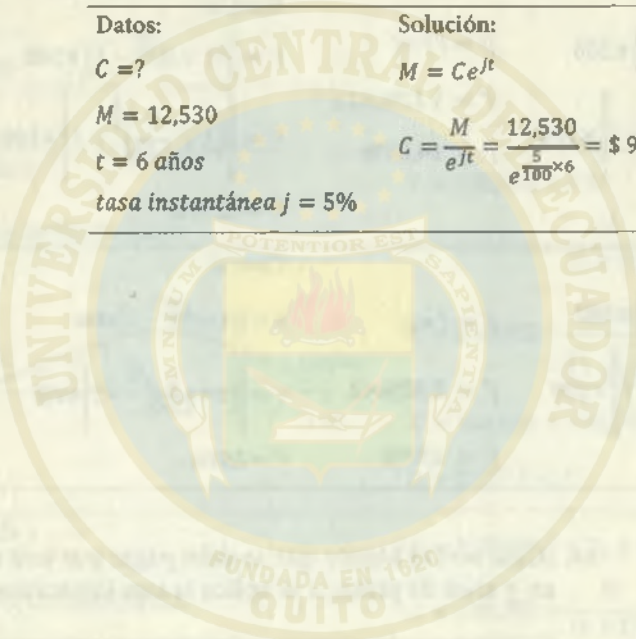
$t = 6 \text{ años}$

tasa instantánea $j = 5\%$

Solución:

$$M = Ce^{jt}$$

$$C = \frac{M}{e^{jt}} = \frac{12,530}{e^{\frac{5}{100} \times 6}} = \$ 9,282.45$$



Universidad Central del Ecuador

Omniū Potentior Est Sapientia



4.12 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Con los datos registrados en la siguiente tabla, determine la Tasa periódica y el número de periodos:

Tasa nominal	Capitalización	Tiempo	Tasa periódica	Periodos
6%	Anual	5 años		
18 %	Mensual	7 años		
4%	Trimestral	2 años		
12%	Semestral	6 años		

R: a) 6/100; b) 18/1200; c) 4/400; d) 12/200; a) 5; b) 84; c) 8; d) 12.

3. Una persona vende una propiedad avaluada en \$120,000 y por ella le ofrecen \$70,000 al contado. ¿Por cuánto debe aceptar un pagaré por el saldo a dos años plazo, si el tipo de interés es del 9%, con capitalización semestral?

R: \$59,625.93

4. Hallar la cantidad que es necesario depositar en una cuenta que paga el 8.25% con capitalización trimestral, para disponer de \$25,000 al cabo de 12 años.

R: \$9,383.44

5. El día de hoy se firma un documento de \$6,500 a 7 años plazo, con una tasa de interés del 12%, capitalizable semestralmente; calcule el valor del documento 3 años antes de su vencimiento a una tasa del 14% capitalizable trimestralmente.

R: \$9,725.49

6. Sustituir dos deudas de \$35,000 y \$48,000, con vencimiento en 4 y 8 años respectivamente, por 2 pagos iguales con vencimiento en 2 y 4 años, suponiendo un rendimiento de 8% convertible trimestralmente.

R: Dos pagos de \$32,217.48

7. El día de hoy Juan obtiene un préstamo de \$10,000 a 5 años, con intereses al 8% efectivo; 3 años más tarde obtiene otro préstamo de \$8,000 a 6 años, con intereses al 8% convertible semestralmente. ¿Qué pagos iguales hechos en 4 y 10 años saldarán las deudas, suponiendo intereses al 8% convertible trimestralmente?

R: \$13,685.40

8. ¿Qué oferta es más conveniente para la venta de una propiedad, si la tasa de interés es el 8%, con capitalización trimestral?

Oferta 1: \$20,000 al contado; \$30,000 en 2 años, \$30,000 en 4 años.

Oferta 2: \$30,000 al contado, \$30,000 en 3 años y \$20,000 en 6 años.

R: VA Oferta 1: \$67,458.09; VA Oferta 2: 66,089.23; La Oferta 1.

9. ¿Cuánto tiempo toma para que un monto de \$3,000 sea \$3,750, al 5% convertido semestralmente?

R: 4,52 años.

10. ¿A qué tasa semestral se convertirá un capital de \$50,000, en un monto de \$78,000, en 9 años y 6 meses?

R: 4,74%.

11. Juan depositó \$4,000 por un año en un banco de la localidad. A los 5 meses hizo un retiro de \$200 y al vencimiento obtuvo un monto de \$4,234.77. ¿Cuál fue la tasa nominal capitalizable mensualmente de los últimos 4 meses, si en los primeros meses la tasa fue del 10% capitalizable mensualmente?

R: 12%

12. Un deudor puede liquidar una deuda pagando (a) \$8,000 a la fecha, (b) \$10,000 dentro de 5 años. ¿Qué opción debe aceptar un rendimiento del 5% convertible semestralmente?

R: La segunda opción

13. Un comerciante compra mercancías y paga \$20,000 el día de hoy, \$40,000 en un pagaré a 3 meses y \$40,000 a 6 meses. Hallar el valor de contado de la mercancía, si la tasa de interés local es del 9%, con capitalización mensual.

R: \$97,359.65

14. En una cuenta de ahorro, que paga el 6% capitalizable mensualmente, se depositó un capital para que en 15 meses se convierta en \$50,000. Ocho meses después, la tasa se establece en el 7% capitalizable mensualmente. ¿Qué retiro debe efectuarse 2 meses antes de su vencimiento, para que el monto al vencimiento siga siendo de \$50,000?

R: \$328.79

15. Una persona posee un pagaré de \$60,000 a 5 años de plazo, a un interés del 8%, con acumulación semestral. Tres años antes de su vencimiento, le ofrece en venta a un prestamista que invierte al 12%, con capitalización trimestral. ¿Qué suma le ofrece el prestamista?

R: \$62,292.81

16. Un comerciante compra \$150,000 en mercancías y paga \$20,000 al contado, \$40,000 mediante un pagaré a 3 meses y \$40,000 a 6 meses. Hallar el valor del nuevo pagaré que liquide la deuda en un año, si la tasa de interés local es del 9%, con capitalización trimestral.

R: \$57,519.38

17. Un acreedor de una sociedad en liquidación acepta que se le pague, en este momento, el 50% del valor de dos pagarés a cargo de la sociedad; uno de \$50,000 está vencido desde hace 18 meses y el otro por \$60,000, vence dentro de 15 meses; si el rendimiento convenido para la liquidación es del 10% con acumulación trimestral:
- Hallar la suma que recibe este momento el acreedor.
 - Si el 50% restante se pagará en un año, determine el valor de este pago.

R: a) \$55,507.96; b) \$61,270.41

18. Una empresa invierte \$10,000 por tres años en una fiduciaria que paga el 8% convertible trimestralmente. Quince meses más tarde, la fiduciaria eleva la tasa al 10% capitalizable trimestralmente. ¿Qué retiro podrá hacer la empresa a los dos años, de manera que al vencimiento del plazo el monto sea el mismo inicial?

R: \$2,830.24

19. Una persona deposita \$12,000 en un banco que reconoce el 4% capitalizable trimestralmente. Al cabo de un año se divide el monto en dos partes, colocando una de ellas al 6%, a Interés simple y, la otra parte al 5% de Interés compuesto, capitalizable mensualmente. Ambas operaciones durante 8 meses. ¿Qué capital corresponde a cada operación, si se desea obtener montos iguales?

R: \$6,225.03 a Interés simple; \$6,262.22 a Interés compuesto.

20. Una persona debe \$100,000 y propone efectuar tres pagos anuales, iguales; con el 7% de interés, hallar el valor de estos pagos.

R: \$38,105.17

21. Carlos Vega debe pagar \$8,000 dentro de 3 años, con interés de 3% capitalizable semestral. ¿Cuál será el valor de los cuatro pagos iguales hoy, en 1, 2 y 3 años que saldarán la deuda?

R: \$1,911.57

22. Aplicando la tasa equivalente encuentre los valores desconocidos en los casos que se indican:

Caso	Tasa nominal	Capitalización	Tasa periódica	Tasa periódica equivalente	Capitalización equivalente	Tasa nominal equivalente
A	5,81%	mensual			trimestral	
B		trimestral	2,50%		anual	
C	12%		6%		mensual	
D	10%	anual			semestral	

R: a) 0,48%, 1,46%, 5,84%; b) 10%, 10,38%, 10,38%;
c) semestral, 0,98%, 11,71%; d) 10%, 4,88%, 9,76%.

23. El día de hoy se deposita \$7,500 en una cuenta que paga el 8% capitalizable trimestralmente, cinco años más tarde el banco aplica la modalidad de capitalización continua, con una tasa del 6%. ¿Cuál será el valor en la cuenta al plazo de 10 años de haber hecho el depósito inicial?

R: \$15,043.64

24. ¿Cuál es la tasa instantánea para que en 8 años un depósito de \$4,500 alcance a \$6,000?

R: 3,60%

25. Pedro recibe hoy un préstamo de \$25,000 en la modalidad de capitalización continua, al 7%, que deberá pagar en 8 años. Cuatro años más tarde hace un abono de \$10,000 y propone liquidar la deuda mediante un pago único, al final del plazo, con el de 7% capitalizable semestralmente. Determine el valor de pago, si el banco acepta la propuesta de Pedro.

R: 28,759.51



INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS ANUALIDADES

OBJETIVO GENERAL

Definir el concepto y los elementos de una anualidad; además, describir los diferentes casos de anualidades que se presentan en el mundo financiero.

5.1 Definición

Una anualidad es una serie definida de pagos iguales, realizados en forma periódica; es decir, anual, semestral, trimestral o mensual y pactada a una tasa de interés capitalizable periódicamente (AYRES Jr, 1998).

En la cotidianidad, a nivel personal y empresarial las anualidades están presentes, se exponen a continuación algunos ejemplos:

- Las compras a crédito de electrodomésticos, vehículos, servicios, etc.
- Los préstamos quirografarios e hipotecarios que conceden los bancos, mutualistas, cooperativas, etc.
- Los créditos educativos y los concedidos por organismos multinacionales para la construcción de la obra pública.

5.2 Elementos de una anualidad

Los elementos financieros que conforman una anualidad son los elementos fundamentales de la Matemática Financiera. Es es decir, Capital o principal, plazo o tiempo y rédito o tasa de interés; en forma particular en una Anualidad se tiene (PORTUS Govinden, 1985):

- a. Pago periódico
Conocido también como Renta (R), es el pago realizado en cada período que conforma la anualidad, son pagos iguales, y de acuerdo con la fecha del período que se lo realiza, genera un grupo de anualidades específico.
- b. Plazo
Es el tiempo (t) que dura la Anualidad normalmente se lo expresa en años. Este tiempo deberá ser transformado en períodos de la anualidad. La definición o no del plazo de la anualidad, genera otro grupo de anualidades.
- c. Tasa de interés
Es la tasa nominal (j) expresada en porcentaje; esta tasa de interés va acompañada de la frecuencia de capitalización de intereses. Recuerde que si tal palabra no aparece, se debe asumir como capitalización anual. La coincidencia entre la capitalización de intereses y el período de pago, genera otro grupo de anualidades.
- d. Tasa periódica y número de períodos
Con la tasa nominal (j) y la frecuencia de capitalización, se podrá entonces determinar la tasa periódica (i). Con el tiempo, expresado en años y la frecuencia de capitalización, se podrá entonces determinar el número de períodos (n) que conforman la anualidad.

5.3 Clasificación

Las anualidades se clasifican en los siguientes grupos (PORTUS Govinden, 1985), así descritos.

5.3.1 Por la definición del tiempo de duración

- Anualidad cierta: Si el tiempo de duración de la Anualidad está perfectamente definido.
- Anualidad incierta: Si el tiempo de duración de la Anualidad no está definido. A este tipo de anualidades se le conoce como perpetuidades o rentas vitalicias.

5.3.2 Por la coincidencia entre la capitalización y el período de pago

- Anualidad ordinaria: Si la frecuencia de capitalización de intereses y el período de capitalización coinciden.
- Anualidad general: Si la frecuencia de capitalización de intereses y el período de capitalización no coinciden.

5.3.3 Por la fecha de pago

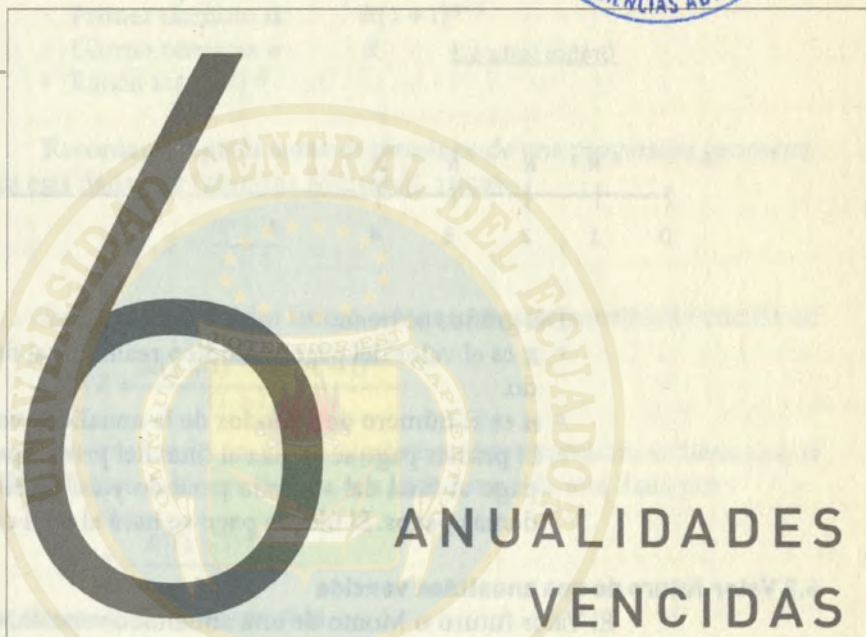
- Anualidad vencida: Si el pago periódico se realiza al final de cada período.
- Anualidad anticipada: Si el pago periódico se realiza al inicio de cada período.
- Anualidad diferida: Cuando el primer pago se realiza luego de haber transcurrido algunos períodos.

5.4 Combinación de las anualidades

Con esta clasificación se podrán combinar varios tipos de Anualidades; de esta manera se establecen las siguientes: (CISSELL, CISSELL, & FLASPOHLER, 1996):

- Anualidades ciertas, ordinarias y vencidas.
- Anualidades ciertas, ordinarias anticipadas.
- Anualidades ciertas ordinarias diferidas.
- Perpetuidades o rentas vitalicias.
- Anualidades Generales.

De cada una de estas anualidades se determinará, en forma particular, el Monto o Valor futuro, el Valor presente o Valor actual y la Renta o Pago periódico (ALVAREZ Arango, 1995).



OBJETIVO GENERAL

Calcular el Valor futuro, el Valor actual y los demás elementos financieros de una anualidad cierta, ordinaria con pagos vencidos.

6.1 Definición

Una anualidad vencida es una serie definida de pagos periódicos iguales realizados al final de cada período, de tal manera que, el período de pago y la capitalización de intereses coincidan.

6.2 Representación gráfica

Las anualidades vencidas tienen la siguiente estructura gráfica:

Gráfico texto 6.2



Del gráfico se tiene:

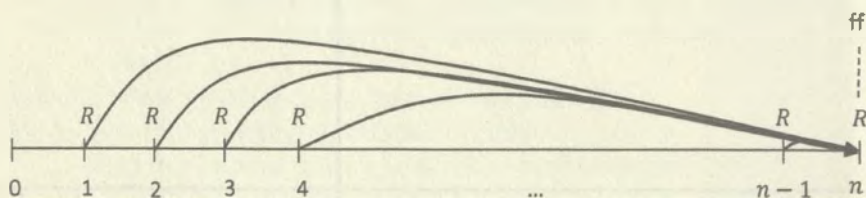
- R es el valor del pago periódico realizado al final de cada período.
- n es el número de períodos de la anualidad vencida.
- El primer pago se realiza al final del primer período, el segundo pago al final del segundo período y así sucesivamente para los demás pagos. El último pago se hará al final del último período.

6.3 Valor futuro de una anualidad vencida

El Valor futuro o Monto de una anualidad vencida, es la suma del Valor futuro o Monto de cada uno de los pagos o depósitos vencidos que conforman la anualidad, previamente trasladados hasta el final de la misma. Es decir:

$$VF = \sum_{i=1}^n M_i$$

Gráfico texto 6.3



El Valor futuro entonces es igual a:

$$VF = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \dots + M_{n-1} + R$$

Es decir:

$$VF = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + R(1+i)^{n-4} \dots + R(1+i)^1 + R$$

En esta ecuación, el miembro de la derecha es la suma de los términos de una progresión geométrica de n términos con las siguientes características:

- Primer término a : $R(1+i)^{n-1}$
- Último término u : R
- Razón r : $(1+i)^{-1}$

Recordando que la suma de términos de una progresión geométrica está dada por (SPIEGEL Murray R, 1990).

$$S = \frac{ur - a}{r - 1}$$

Se tiene que el Valor futuro o Monto de una anualidad vencida es:

$$VF = \frac{R(1+i)^{-1} - R(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{-1} - 1}$$

Desarrollando en forma algebraica esta expresión, se tiene que el Valor futuro o Monto de una anualidad vencida está dada por:

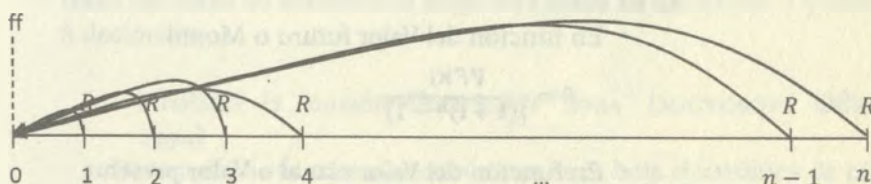
$$VF = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

6.4 Valor presente de una anualidad vencida

El Valor presente o Valor actual de una anualidad vencida, es la suma del Valor actual trasladado a fecha de inicio de los depósitos periódicos que conforman dicha anualidad. Es decir:

$$VA = \sum_{t=1}^n VA_t$$

Gráfico texto 6.4



El Valor actual de la anualidad vencida es entonces:

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 \dots + VA_{n-1} + VA_n$$

Es decir:

$$VA = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4} \dots + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-n}$$

Factorizando R :

$$VA = R[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + (1+i)^{-4} \dots + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}]$$

El interior del paréntesis resulta ser una progresión geométrica de n términos con las siguientes características:

- Primer término a : $(1+i)^{-1}$
- Último término u : $(1+i)^{-n}$
- Razón r : $(1+i)^{-1}$

Recordando que la suma de términos de una progresión geométrica está dada por (SPIEGEL Murray R, 1990).

$$S = \frac{ur - a}{r - 1}$$

Entonces, se tiene que el Valor presente o Valor actual de una Anualidad vencida está dado por:

$$VA = R \left[\frac{(1+i)^{-n}(1+i)^{-1} - (1+i)^{-1}}{(1+i)^{-1} - 1} \right]$$

Desarrollando en forma algebraica esta expresión, el Valor actual o Valor presente de una anualidad cierta ordinaria vencida está dado por:

$$VA = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

6.5 Pago periódico de una anualidad vencida

El Pago Periódico o Renta de una Anualidad vencida se lo determina en función del Valor futuro o Monto o del Valor actual o Valor presente. Es decir:

- En función del Valor futuro o Monto

$$R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^n - 1]}$$

- En función del Valor actual o Valor presente

$$R = \frac{VA \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

6.6 Determinación del número de períodos

Al igual que en el caso del pago en las Anualidades vencidas, para determinar el número de períodos que conforman una anualidad de este tipo, se hará a partir de las expresiones para Valor futuro o Monto y Valor actual o Valor presente, tomando en cuenta que al tratarse n de un exponente será necesario utilizar logaritmos.

- A partir del Valor futuro

$$n = \frac{\log \left[\frac{VF \times i}{R} + 1 \right]}{\log(1 + i)}$$

- A partir del Valor actual

$$n = - \frac{\log \left[1 - \frac{VA \times i}{R} \right]}{\log(1 + i)}$$

6.7 Cálculo de la tasa periódica

Resulta imposible tratar de despejar (i) de la expresión del Valor actual o del Valor futuro de una anualidad. Para determinar la tasa periódica de una anualidad, se requiere conocer el Valor actual o Valor futuro, el número de períodos y el valor de la renta periódica. Con esta información se puede determinar el valor de la tasa periódica de dos maneras.

1. Mediante la lectura de tablas y su aproximación por interpolación

En las tablas de valores, que se encuentran al final de los libros de matemática financiera, con el número de períodos y el factor de la anualidad a Valor futuro o a Valor actual, se lee el valor correspondiente a la tasa periódica.

En contadas ocasiones, como es de suponer, el Factor de la anualidad coincidirá con el de las tablas, por lo que es necesario tomar los valores más cercanos, por defecto y por exceso y establecer el valor aproximado de (i) mediante interpolación.

Para una mejor aproximación de la tasa periódica es conveniente trabajar con el mayor número de decimales posible. Las tablas que traen los libros de matemática financiera están formadas con 5 y hasta 8 decimales.

2. Mediante la función Electrónica "TASA" (MICROSOFT Office, 1994)

Dentro de las funciones electrónicas de la hoja electrónica de cálculo Excel se encuentra la función "TASA". Esta función calcula en forma inmediata la tasa periódica de una anualidad; al activar esta función se activa la siguiente ventana:

Gráfico texto 6.7

Argumentos de función

TASA

Nper = número

Pago = número

Va = número

Vf = número

Tipo = número

Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una inversión. Por ejemplo, use 6%/4 para pagos trimestrales al 6% TPA.

Nper es el número total de períodos de pago de un préstamo o una inversión.

Resultado de la fórmula =

[Ayuda sobre esta función](#)

Aceptar Cancelar

En esta ventana se tiene:

- Nper:** Representa el número total de períodos de pago de la anualidad.
- Pago:** Es el valor del pago periódico o renta de la anualidad.
- VA:** Es el Valor actual de la anualidad.
- VF:** Es el Valor futuro de la anualidad.
- Tipo:** Es un valor lógico: 1 si la anualidad es anticipada, o 0 u omisión si la anualidad es vencida.

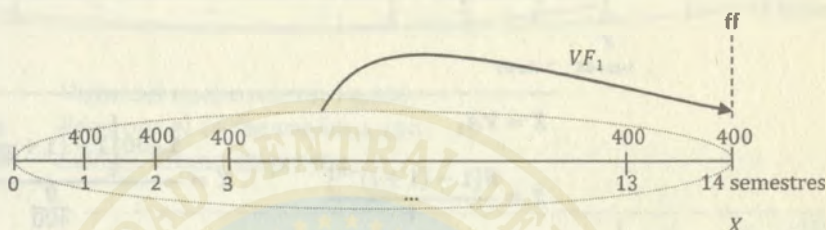
Esta ventana sirve para determinar la tasa periódica en función del Valor actual o del Valor futuro de una anualidad, como también para anualidades vencidas o anualidades anticipadas.

Una vez que los datos han ingresado a la ventana indicada, el usuario deberá hacer un clic en el botón Aceptar y en forma inmediata, en la celda correspondiente, aparecerá la tasa periódica de la anualidad.

6.8 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una persona ahorra \$400 cada seis meses y los invierte al 4 % convertible semestralmente. Hallar el importe de sus ahorros después de 7 años.

Gráfico problema 6.1



$$X = VF_1$$

$$X = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$X = \frac{400 \left[\left(1 + \frac{4}{200}\right)^{14} - 1 \right]}{\frac{4}{200}}$$

$$X = \$6,389.58$$

2. Un empleado invierte \$130 al final de cada trimestre en un fondo que paga 7%, convertible trimestralmente. ¿Cuál será el importe del fondo, precisamente después de 12 depósitos?

Gráfico problema 6.2



$$X = VF_1$$

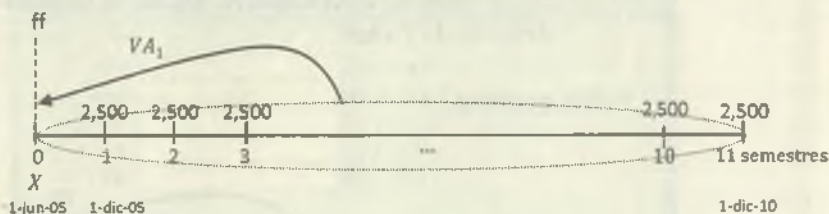
$$X = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$X = \frac{130 \left[\left(1 + \frac{7}{400}\right)^{12} - 1 \right]}{\frac{7}{400}}$$

$$X = \$1,719.26$$

3. ¿Cuál es el Valor presente de \$1,600 depositados en una cuenta al final de cada trimestre durante 4 años, si la tasa de interés es del 8% convertible trimestralmente?

Gráfico problema 6.3



$$X = VA_1$$

$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \quad X = \frac{1,600 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-16} \right]}{\frac{8}{400}}$$

$$X = \$ 21,724.33$$

4. ¿Cuánto debió depositarse el 1 de junio de 2005 en un fondo que pagó el 10% convertible semestralmente, con el objeto de poder hacer retiros semestrales de \$2,500 cada uno, desde el 1 de diciembre de 2005, hasta el 1 de diciembre de 2010?

Gráfico problema 6.4



$$X = VA_1$$

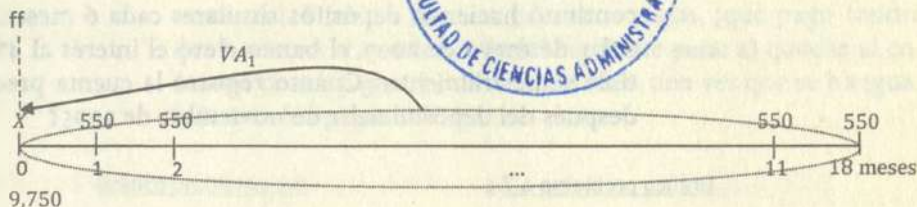
$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \quad X = \frac{2,500 \left[1 - \left(1 + \frac{10}{200} \right)^{-11} \right]}{\frac{10}{200}}$$

$$X = \$ 20,766.04$$

5. Al comprar Carlos un coche nuevo de \$14,000, le reciben su coche usado en \$4,250. ¿Cuánto tendrá que pagar en efectivo el de hoy, si el saldo restante se lo liquidará mediante el pago de \$550 al final de cada mes durante 18 meses, con intereses al 6 % convertible mensualmente?



Gráfico problema 6.5



Valor del coche nuevo: 14,000

Pago por el coche usado: 4,250

Saldo a financiar: 9,750

$$9,750 = X + VA_1$$

$$9,750 = X + \frac{550 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{1200} \right)^{-18} \right]}{\frac{6}{1200}}$$

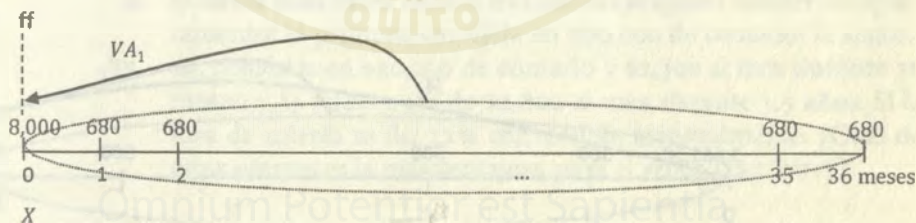
$$9,750 = X + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$9,750 = X + 9,445.02$$

$$X = \$ 304.98$$

6. Un concesionario de automóviles ofrece un auto nuevo con un pago inicial de \$8,000 y 36 pagos mensuales de \$680 cada uno, con interés del 12% capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el valor de contado del auto?

Gráfico problema 6.6



$$X = 8,000 + VA_1$$

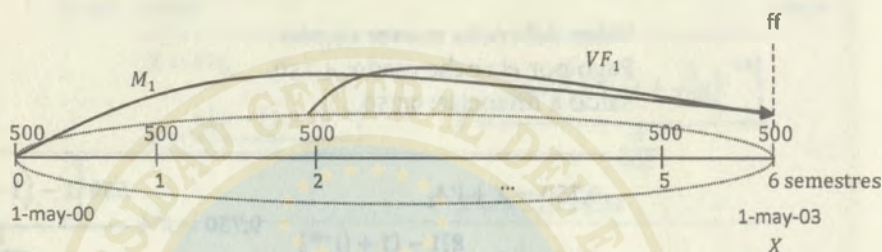
$$X = 8,000 + \frac{680 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-36} \right]}{\frac{12}{1200}}$$

$$X = 8,000 + 20,473.10$$

$$X = \$ 28,473.10$$

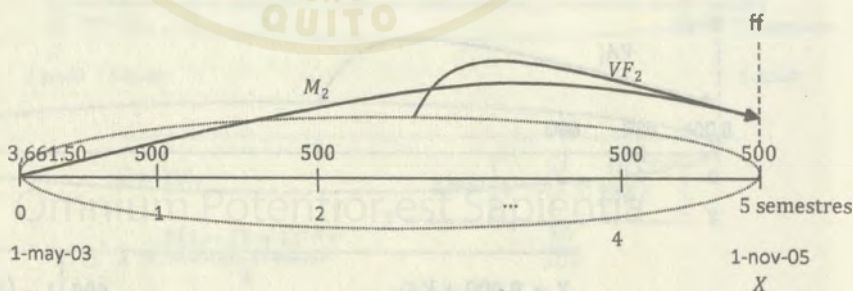
7. El 1 de mayo de 2000, M depositó \$500 en una cuenta de ahorros que paga el 3% convertible semestralmente; y, desde entonces, continuó haciendo depósitos similares cada 6 meses. Después del 1 de mayo de 2003, el banco elevó el interés al 4% convertible semestralmente. ¿Cuánto registró la cuenta precisamente después del depósito del 1 de noviembre de 2005?

Gráfico problema 6.7.a



$$\begin{aligned}
 X &= M_1 + VF_1 \\
 X &= C(1+i)^n + \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} \quad X = 500\left(1 + \frac{3}{200}\right)^6 + \frac{500\left[\left(1 + \frac{3}{200}\right)^6 - 1\right]}{\frac{3}{200}} \\
 X &= 546,72 + 3114,78 \\
 X &= \$3,661.50
 \end{aligned}$$

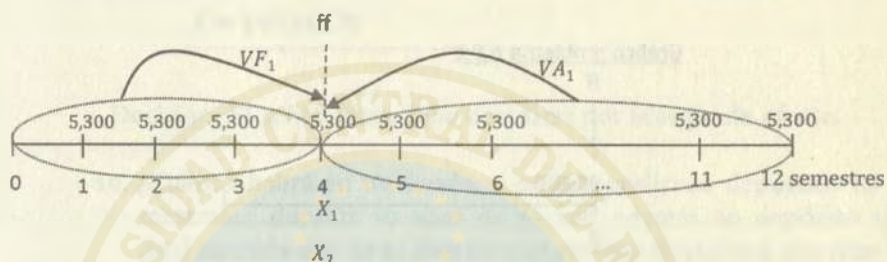
Gráfico problema 6.7.b



$$\begin{aligned}
 X &= M_2 + VF_2 \\
 X &= C(1+i)^n + \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} \quad X = 3,661.50\left(1 + \frac{4}{200}\right)^5 + \frac{500\left[\left(1 + \frac{4}{200}\right)^5 - 1\right]}{\frac{4}{200}} \\
 X &= 4,042.59 + 2,602.02 \\
 X &= \$6,644.61
 \end{aligned}$$

8. Luis Moreta acuerda liquidar una deuda mediante 12 pagos semestrales de \$5,300 cada uno, con intereses al 8% convertible semestral. Si omite los tres primeros pagos, ¿qué pago tendrá que hacer en el vencimiento del siguiente para: a) quedar al corriente de sus pagos, b) saldar su deuda, una vez que se ha igualado con los pagos?

Gráfico problema 6.8



a. Quedar al corriente de sus pagos

$$X_1 = VF_1$$

$$X_1 = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$X_1 = \frac{5,300 \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^4 - 1 \right]}{\frac{8}{200}} = 22,506.26$$

b. Saldar su deuda

$$X_2 = VA_1$$

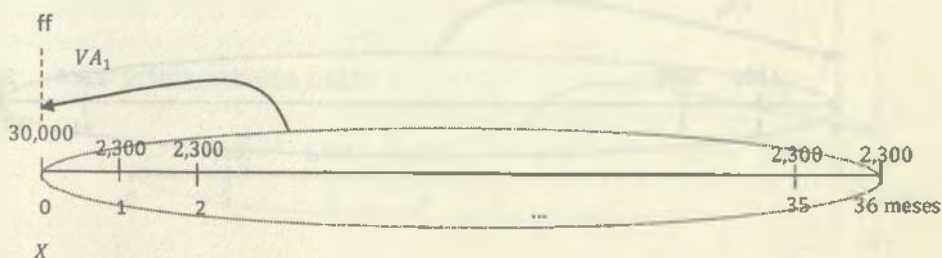
$$X_2 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$X_2 = \frac{5,300 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-8} \right]}{\frac{8}{200}} = 35,683.55$$

9. El señor Juan Pérez recibió tres ofertas al querer vender un apartamento: la primera, consistía en \$90,000 de contado; la segunda, consistía en \$30,000 de contado y \$2,300 al mes durante 36 meses; y, la tercera, era de \$2,800 al mes, durante 3,5 años. Si la tasa de interés es del 12% convertible mensualmente. ¿Cuál de estas ofertas es la más ventajosa para el señor Juan Pérez?

Oferta 1

Gráfico problema 6.9.a



$$X = VA$$

$$X = 90.000.00$$

Oferta 2:

Gráfico problema 6.9.b

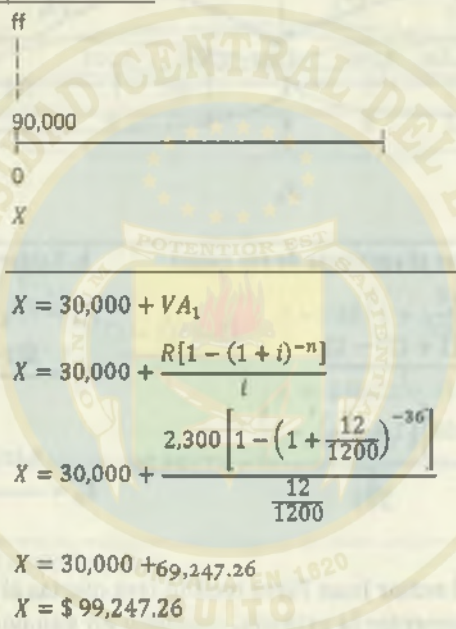
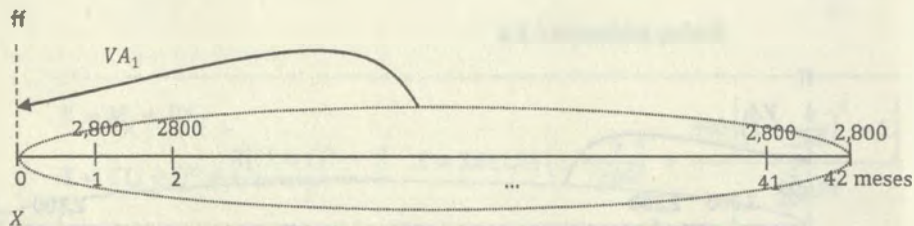
**Oferta 3:**

Gráfico problema 6.9.c



$$X = VA_1$$

$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

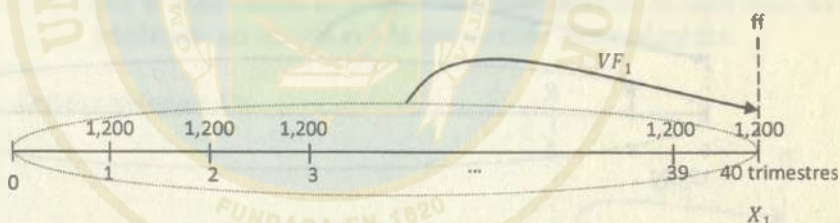
$$X = \frac{2,800 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-42} \right]}{\frac{12}{1200}}$$

$$X = \$ 95,642.70$$

Decisión: El señor Pérez debe decidirse por la segunda oferta.

10. ¿Cuánto habrá en un fondo, si se han realizado depósitos trimestrales, durante 10 años de \$1,200, además un depósito al final de cada año de \$1,600 en una entidad financiera que reconoce el 12% convertible de acuerdo con la periodicidad de cada transacción?

Gráfico problema 6.10.a

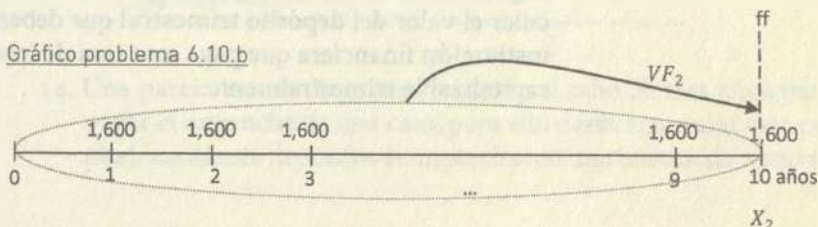


$$X_1 = VF_1$$

$$X_1 = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

$$X_1 = \frac{1,200 \left[\left(1 + \frac{12}{400} \right)^{40} - 1 \right]}{\frac{12}{400}} = 90,481.51$$

Gráfico problema 6.10.b



$$X_2 = VF_2$$

$$X_2 = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{1,600 \left[\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{10} - 1 \right]}{\frac{12}{100}} = 28,077.98$$

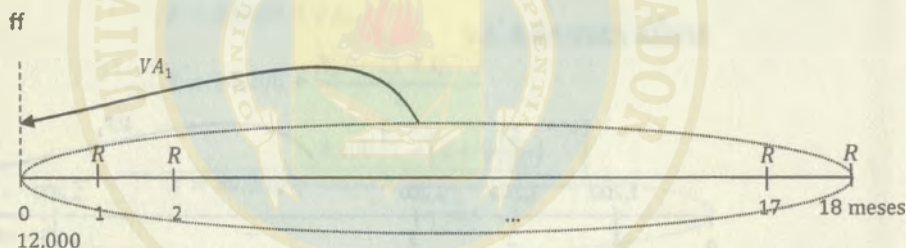
$$X = X_1 + X_2$$

$$X = 90,481.51 + 28,077.98$$

$$X = \$ 118,559.49$$

11. Una máquina que vale \$15,000 de contado se vende a plazos, con una cuota inicial de \$3,000 y saldo en 18 cuotas mensuales, cargando el 16% de interés convertible mensualmente. Calcular el valor de las cuotas.

Gráfico problema 6.11



$$12,000 = VA_1$$

$$12,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

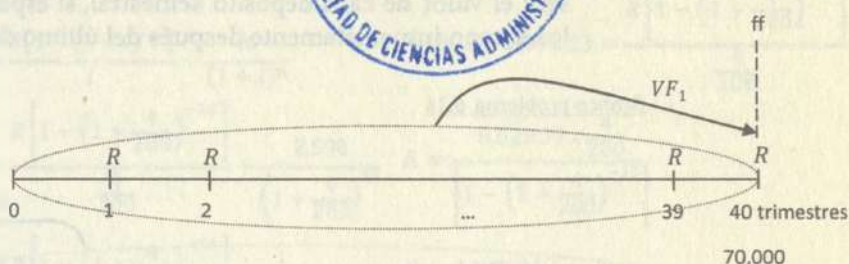
$$R = \frac{12,000 \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{12,000 \times \frac{16}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{16}{1200}\right)^{-18}\right]}$$

$$X = \$ 754.28$$

12. Una empresa necesita construir durante 10 años un fondo de depreciación de \$70,000 para reposición de maquinaria. Calcular el valor del depósito trimestral que deberá realizar en una institución financiera que paga una tasa de interés de 4% anual, capitalizable trimestralmente.

Gráfico problema 6.12



$$70000 = VF_1$$

$$70,000 = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

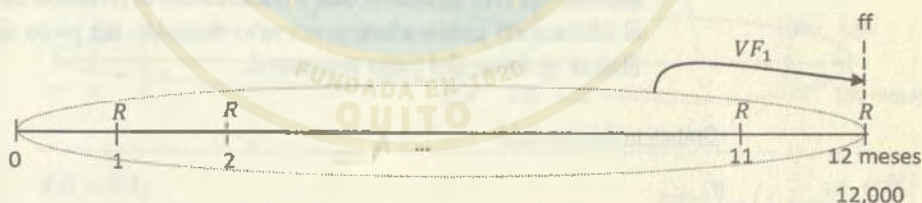
$$R = \frac{70,000 \times i}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$R = \frac{70,000 \times \frac{4}{400}}{\left[\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{40} - 1\right]}$$

$$R = \$1,431.89$$

13. Reemplazar una serie de pagos de \$12,000 al final de cada año por el equivalente en pagos mensuales al final de cada mes, suponiendo un interés al 6 % convertible mensualmente.

Gráfico problema 6.13



$$VF_1 = 12,000$$

$$\frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = 12,000$$

$$R = \frac{12,000 \times i}{[(1+i)^n - 1]}$$

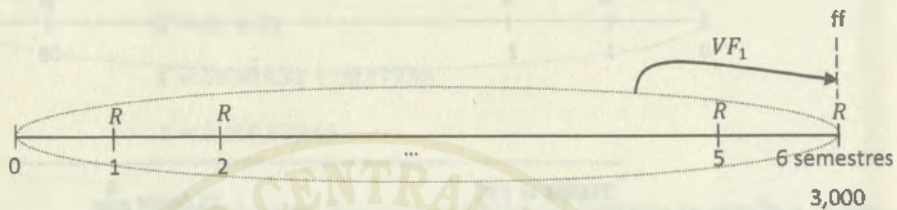
$$R = \frac{12,000 \times \frac{6}{1200}}{\left[\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12} - 1\right]}$$

$$R = \$972.80$$

14. Una pareja espera disponer de \$3,000 al cabo de tres años para pagar el enganche de una casa, para ello desea acumular este capital, mediante depósitos semestrales, en una cuenta de ahorros

que paga el 6% de interés convertible semestralmente. ¿Cuál será el valor de cada depósito semestral, si espera disponer de los \$3,000 inmediatamente después del último depósito?

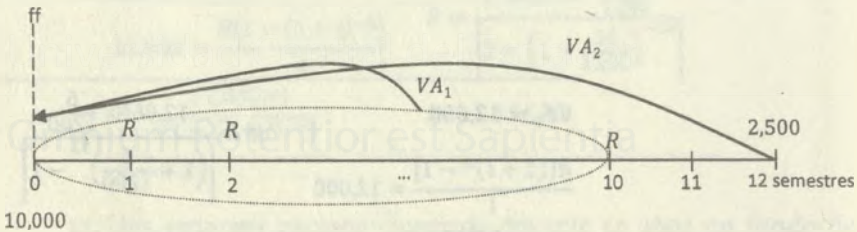
Gráfico problema 6.14



$$\begin{aligned} VF_1 &= 3,000 \\ R &= \frac{3,000 \times \frac{6}{200}}{\left[\left(1 + \frac{6}{200} \right)^6 - 1 \right]} \\ \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} &= 3,000 \\ R &= \frac{3,000 \times i}{[(1+i)^n - 1]} \\ R &= \$463.79 \end{aligned}$$

15. Para liquidar una deuda de \$10,000, con intereses al 4% convertible semestralmente, se acuerda hacer una serie de pagos semestrales. El primero, con vencimiento al término de 6 meses; el último en cinco años; y, un año después, un pago de \$2,500. Hallar el valor del pago semestral.

Gráfico problema 6.15



$$10,000 = VA_1 + VA_2$$

$$10,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$10,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{4}{200} \right)^{-10} \right]}{\frac{4}{200}} + \frac{2,500}{\left(1 + \frac{4}{200} \right)^{12}}$$

$$10,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{4}{200} \right)^{-10} \right]}{\frac{4}{200}} + 1,971.23$$

$$10,000 - 1,971.23 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{4}{200} \right)^{-10} \right]}{\frac{4}{200}}$$

$$R = \frac{8,028.77 \times \frac{4}{200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{4}{200} \right)^{-10} \right]}$$

$$R = \$ 893.81$$

16. Calcular el valor de los depósitos mensuales que durante 10 años deberá hacer una persona en una institución financiera que reconoce una tasa de interés de 18% anual capitalizable mensualmente, a fin de efectuar retiros de \$500 mensuales, durante los 5 años siguientes.

Gráfico problema 6.16



$$VF_1 = VA_1$$

$$\frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$\frac{R \left[\left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{120} - 1 \right]}{\frac{18}{1200}} = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{-60} \right]}{\frac{18}{1200}}$$

$$R = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{-60} \right]}{\left[\left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{120} - 1 \right]}$$

$$R = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{-60} \right]}{\left[\left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{120} - 1 \right]}$$

$$R = \$ 59.44$$

17. Para liquidar una deuda de \$15,000 se va a realizar una serie de depósitos trimestrales de \$1,000, en un banco que reconoce una

tasa del 4% con capitalización trimestral; determinar el número de depósitos necesarios y el valor del depósito adicional, junto con el último depósito para liquidar la deuda.

Gráfico problema 6.17.a

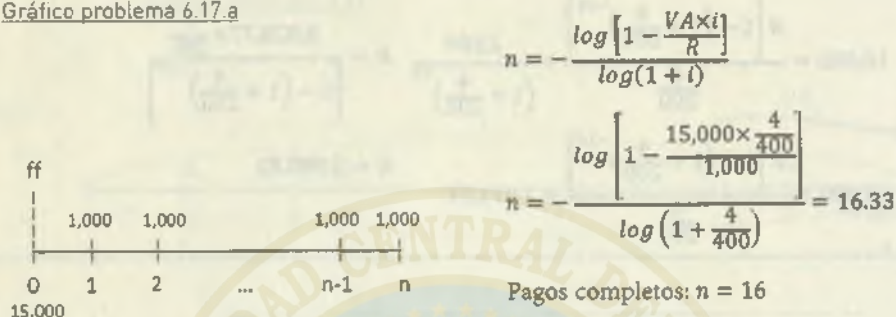
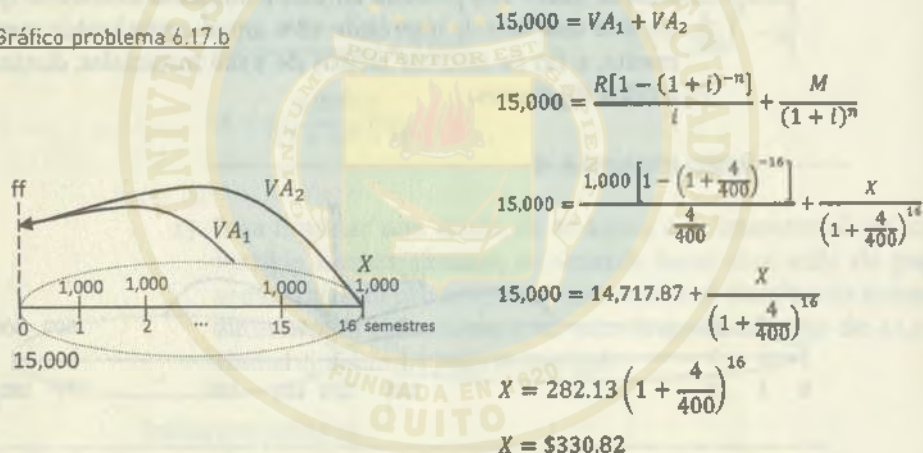


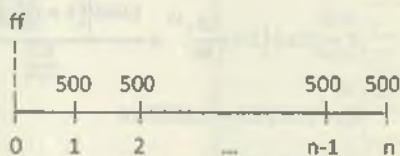
Gráfico problema 6.17.b



18. Como beneficiaria de una póliza de \$10,000 de seguro, una viuda recibirá \$1,000 inmediatamente y, posteriormente, \$500 cada tres meses. Si la compañía paga el 2% convertible trimestralmente:
- ¿Cuántos pagos completos de \$500 recibirá?
 - ¿Con qué suma adicional, pagada en el último pago completo cesará el beneficio del seguro?
 - ¿Con qué suma pagada 3 meses después del último pago completo cesará el beneficio?

a. Número de pagos:

Gráfico problema 6.18.a

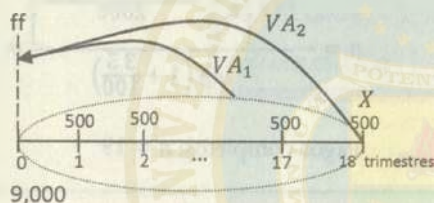


$$n = -\frac{\log \left[1 - \frac{VA \times i}{R} \right]}{\log(1+i)}$$

$$n = -\frac{\log \left[1 - \frac{9,000 \times \frac{2}{400}}{500} \right]}{\log \left(1 + \frac{2}{400} \right)} = 18.91$$

Pagos completos: $n = 18$ **b. Pago adicional con el último pago:**

Gráfico problema 6.18.b



$$9,000 = VA_1 + VA_2$$

$$9,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

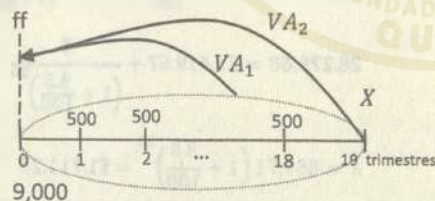
$$9,000 = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{2}{400} \right)^{-18} \right]}{\frac{2}{400}} + \frac{X}{\left(1 + \frac{2}{400} \right)^{18}}$$

$$9,000 = 8,586.38 + \frac{X}{\left(1 + \frac{4}{400} \right)^{18}}$$

$$X = 413.62 \left(1 + \frac{2}{400} \right)^{18} = \$452.47$$

c. Pago adicional 3 meses más tarde:

Gráfico problema 6.18.c



$$9,000 = VA_1 + VA_2$$

$$9,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$9,000 = \frac{500 \left[1 - \left(1 + \frac{2}{400} \right)^{-19} \right]}{\frac{2}{400}} + \frac{X}{\left(1 + \frac{2}{400} \right)^{19}}$$

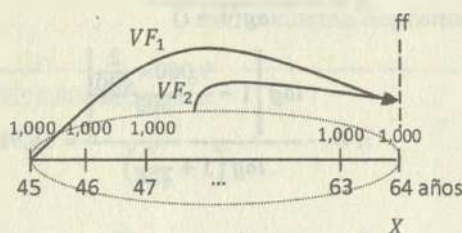
$$9,000 = 8,586.38 + \frac{X}{\left(1 + \frac{4}{400} \right)^{19}}$$

$$X = 413.62 \left(1 + \frac{2}{400} \right)^{19} = \$454.73$$

19. Al cumplir 45 años, una persona depositó \$1,000 en un fondo que paga el 3.5%, y continuó haciendo depósitos similares cada año; el último, al cumplir 64 años. Si esta persona desea hacer retiros anuales de \$2,000:

- ¿Cuántos retiros podrá hacer?
- ¿Con que retiro final, hecho un año después del último retiro completo, se agotará el fondo?

Gráfico problema 6.19.a



$$X = VF_1 + VF_2$$

$$X = C(1+i)^n + \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$X = 1,000\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{19} + \frac{1,000\left[\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{19} - 1\right]}{\frac{3.5}{100}}$$

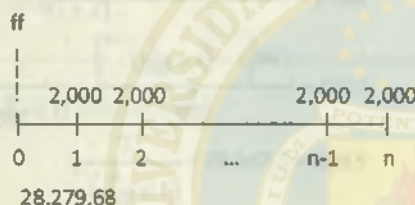
$$X = 1,922.50 + 2,6357.18$$

$$R = \$28,279.68$$

Número de pagos:

$$n = -\frac{\log\left[1 - \frac{VA \times i}{R}\right]}{\log(1+i)}$$

Gráfico problema 6.19.b



$$n = -\frac{\log\left[1 - \frac{28,279.68 \times \frac{3.5}{100}}{2,000}\right]}{\log\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)} = 19.85$$

Pagos completos: $n = 19$

Pago liquidación 1 año más tarde

$$28,279.68 = VA_1 + VA_2$$

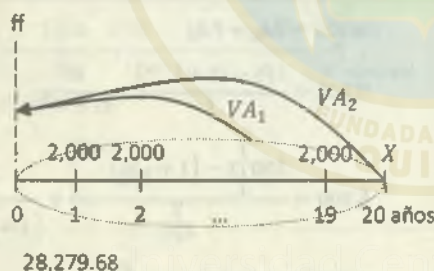
$$28,279.68 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$28,279.68 = \frac{2,000\left[1 - \left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{-19}\right]}{\frac{3.5}{100}} + \frac{X}{\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{20}}$$

$$28,279.68 = 27,419.67 + \frac{X}{\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{20}}$$

$$X = 859.71\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{20} = \$1,711.24$$

Gráfico problema 6.19.c



20. Una máquina puede adquirirse en \$2,500 de contado o mediante una cuota inicial de \$200, seguida de 10 pagos trimestrales de \$280 cada uno. Hallar la Tasa Periódica trimestral y la Tasa Nominal cargada en esta transacción.

$$R = \$280, n = 10$$

$$i = 0.03746 = 3.75\%$$

$$VA = \$2,300, m = 4;$$

$$j = i \times m$$

$$i = ? \quad j = ?$$

$$j = 3.75\% \times 4 = 15\%$$

Gráfico problema 6.20

Argumentos de función

TASA

Nper	10	= 10
Pago	280	= 280
Va	-2300	= -2300
Vf		= número
Tipo		= número

= 0,037463581

Devuelve la tasa de interés por periodo de un préstamo o una inversión. Por ejemplo, use 6%/4 para pagos trimestrales al 6% TPA.

Pago es el pago efectuado en cada periodo y no puede cambiar durante la vigencia del préstamo o la inversión.

Resultado de la fórmula = 3,75%

[Ayuda sobre esta función](#)

Aceptar Cancelar

6.9 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una persona ha depositado \$250 al final de cada mes durante 5 años en una cuenta que paga el 4 % convertible mensualmente. ¿Cuánto tenía en la cuenta al final de dicho período?

R: \$16,574.74

2. El papá de un niño de 12 años empieza a ahorrar para que su hijo pueda estudiar una carrera universitaria. Planea depositar \$1,500 en una cuenta de ahorros al final de cada trimestre, durante los próximos 6 años. Si la tasa de interés es del 7% capitalizable trimestralmente, ¿cuál será el monto de la cuenta al cabo de 6 años?

R: \$44,266.52

3. ¿Qué cantidad debió ser depositada el 1 de junio de 1998 en un fondo que produjo el 5% convertible semestralmente, con el fin de poder hacer retiros semestrales de \$600 cada uno, a partir del 1 de diciembre de 1998 y terminando el 1 de diciembre de 2007?

R: \$8,987.33

4. Con una tasa de interés al 8% convertible semestralmente, ¿qué pago único inmediato es equivalente a 25 pagos semestrales de \$1,000 cada uno, haciéndose el primero al final de seis meses?

R: \$15,622.08

5. Se estima que un terreno boscoso producirá \$18,000 anuales por su explotación en los próximos 20 años y entonces la tierra podrá venderse en \$15,000. Encontrar su valor actual suponiendo un interés al 6.25%.

R: \$206,794.79

6. ¿Qué es más conveniente, comprar un automóvil en \$2,750 de contado o pagar \$500 iniciales y \$200 al final de cada mes, por los próximos 12 meses, suponiendo intereses del 6% convertible mensualmente?

R: La primera opción.

7. Un contrato estipula pagos semestrales de \$400 por los próximos 10 años y un pago adicional de \$2,500 al término de dicho período. Hallar el valor efectivo equivalente del contrato al 8% convertible semestralmente.

R: \$6,577.10

8. El 1 de mayo de 1980, Marianela depositó \$100 en una cuenta de ahorros que paga el 3% convertible semestralmente; y, desde entonces continuó haciendo depósitos similares cada 6 meses.

Después del 1 de mayo de 1992, el banco elevó el interés al 4% convertible semestralmente. ¿Cuánto tuvo en la cuenta precisamente después del depósito del 1 de noviembre de 2000?

R: \$6,210.76

9. Cada trimestre el señor García deposita \$3,200 en su cuenta de ahorros, la cual gana un interés del 3,8% trimestral. Después de tres años, el señor García suspende los depósitos trimestrales y el monto obtenido en ese momento pasa a un fondo de inversión que da el 22% capitalizable cada mes. Si el dinero permaneció 2 años en el fondo de inversión, obtenga el monto final en el fondo.

R: \$62,590.20

10. Una computadora cuesta \$1,050 y el comprador conviene pagar cuotas mensuales durante dos años. Con una tasa del 14.5% anual, convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de cada cuota?

R: \$50.66

11. El día de hoy se contrae una deuda de \$20,000 y se compromete pagarla en cuotas semestrales vencidas durante 5 años. Hallar el valor de la cuota semestral que debe pagarse, si se aplica un interés de 12% anual capitalizable semestralmente.

R: \$2,717.36

12. Sustituir una serie de pagos de \$10,000 al principio de cada año, por el equivalente en pagos mensuales vencidos, con un interés del 8% convertible mensualmente.

R: \$869.88

13. Al 1 de mayo de 2000, se tiene \$2,475.60 en un fondo que paga el 3% convertible trimestralmente. Haciendo depósitos trimestrales iguales en el fondo, el 1 de agosto de 2000 y el último el 1 de noviembre de 2006, tendrá en esta última fecha \$10,000 en el fondo. Hallar el depósito requerido.

R: \$244.61

14. Hoy se depositan \$15,000 en una cuenta de ahorros que abona el 7 % de interés. Transcurridos 3 años, se hacen nuevos depósitos cada final de año, de modo que a los 7 años del depósito inicial tenga \$70,000 al efectuar el último depósito. Hallar el valor de los depósitos anuales.

R: \$7,690.70

15. Para poder adquirir una casa una pareja piensa realizar, al final de cada mes, depósitos mensuales de \$450 en una entidad financie-

ra que abona el 8% de capitalización mensual. ¿Durante cuánto tiempo deberán hacer estos depósitos si desean reunir \$25,000?

R: 3,95 años.

16. Cuántos pagos completos de \$18,000 al final de cada mes son necesarios para cancelar una deuda de \$120,000 considerando una tasa de interés de 15% anual capitalizable mensualmente. ¿Con qué pago final coincidente con el último pago completo se cancelará la citada deuda?

R: 7 pagos completos; \$77.38

17. Se adquiere un auto de \$13,250, con una cuota inicial de \$5,000. Un mes después empezará una serie de pagos mensuales de \$735 cada uno, considerando una tasa del 12% capitalizable mensualmente. ¿Cuántos pagos completos deberá hacer y qué cantidad pagada, un mes después del último pago completo, saldará la deuda?

R: 11 pagos completos; \$709.67

18. Francisco depositó al final de cada mes \$3,500 en una cuenta de ahorros. Al cabo de tres años recibe un monto de \$180,000. ¿Qué tasa nominal capitalizable mensualmente, ha ganado?

R: 23.32%.

19. Determinar la Tasa Periódica y la Tasa Nominal de una serie de 30 pagos mensuales vencidos de \$200, si se acumularon \$6,377.00.

R: 0.42%; 5%.

20. En una deuda de \$20,000 se realizaron 20 pagos trimestrales de \$1,108.31, ¿cuál es la tasa nominal de la transacción?

R: 4%

Ornium Potentior Est Sapientia



7

ANUALIDADES ANTICIPADAS

OBJETIVO GENERAL

Calcular el Valor futuro, el Valor actual y los demás elementos financieros de una anualidad cierta, ordinaria con pagos anticipados.

7.1 Definición

Una anualidad anticipada es una serie definida de pagos periódicos iguales, realizados al inicio de cada período, de tal manera que el período de pago o depósito y la capitalización de intereses, coinciden (PORTUS Govinden, 1985).

7.2 Representación gráfica

Las anualidades anticipadas tienen la siguiente estructura gráfica:

Gráfico texto 7.2



Del gráfico se tiene:

R: Es el valor del pago periódico, realizado al inicio de cada período.

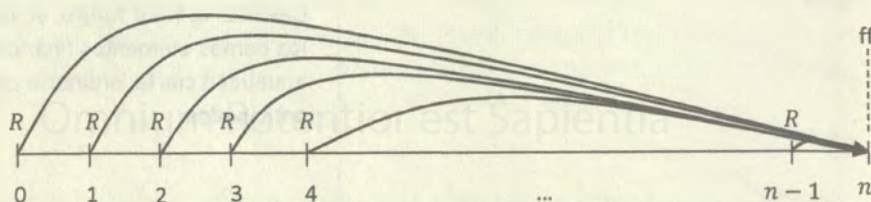
n: Es el número de períodos de la anualidad anticipada.

7.3 Valor futuro de una anualidad anticipada

El Valor futuro o Monto de una anualidad anticipada, es la suma del Valor futuro o Monto de cada uno de los n pagos o depósitos anticipados, trasladados hasta la fecha final, que conforman la anualidad, (PORTUS Govinden, 1985). Es decir:

$$VF = \sum_{i=1}^n M_i$$

Gráfico texto 7.3



El Valor futuro entonces es igual a:

$$VF = M_0 + M_1 + M_2 + M_3 \dots + M_{n-1}$$

Es decir:

$$VF = R(1+i)^n + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} \dots + R(1+i)^1$$

En esta ecuación, el miembro de la derecha es la suma de los términos de una progresión geométrica, con las siguientes características:

En esta ecuación, el miembro de la derecha es la suma de los términos de una progresión geométrica de n términos con las siguientes características:

- Primer término a : $R(1+i)^n$
- Último término u : $R(1+i)$
- Razón r : $(1+i)^{-1}$

Recordando que la suma de términos de una progresión geométrica está dada por (SPIEGEL Murray R, 1990):

$$S = \frac{ur - a}{r - 1}$$

Se tiene que, el Valor futuro o Monto de una anualidad anticipada es:

$$VF = \frac{R(1+i)(1+i)^{-1} - R(1+i)^n}{(1+i)^{-1} - 1}$$

Desarrollando en forma algebraica esta expresión, se tiene que el Valor futuro o monto de una anualidad anticipada está dada por:

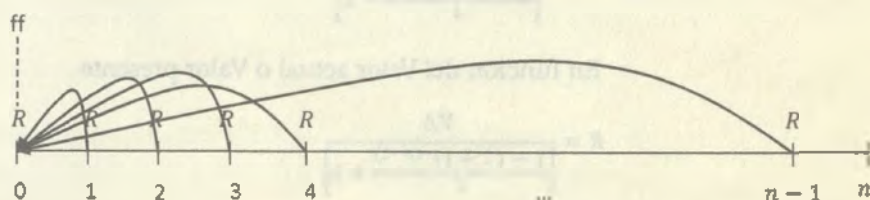
$$VF = R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

7.4 Valor presente de una anualidad anticipada

El Valor presente o Valor actual de una anualidad anticipada, es la suma del Valor actual, trasladado a fecha de inicio, de los pagos periódicos que conforman dicha anualidad. Es decir:

$$VA = \sum_{i=1}^n VA_i$$

Gráfico texto 7.4



Entonces, el Valor actual de la anualidad anticipada es:

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 \dots + VA_{n-1} + VA_n$$

Es decir:

$$VA = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + R(1+i)^{-4} \dots + R(1+i)^{-(n-1)}$$

Que resulta ser una progresión geométrica de n términos con las siguientes características:

- Primer término a : R
- Último término u : $R(1+i)^{-(n-1)}$
- Razón r : $(1+i)^{-1}$

Recordando que la suma de términos de una progresión geométrica está dada por (PORTUS Govinden, 1985):

$$S = \frac{ur - a}{r - 1}$$

Se tiene que el Valor presente o Valor actual de una anualidad anticipada es:

$$VA = \frac{R(1+i)^{-(n-1)}(1+i)^{-1} - R}{(1+i)^{-1} - 1}$$

Desarrollando en forma algebraica esta expresión, el Valor actual o Valor presente, de una anualidad cierta ordinaria anticipada, está dado por:

$$VA = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]$$

7.5 Pago periódico de una anualidad cierta ordinaria anticipada

El Pago Periódico, o Renta de una anualidad cierta ordinaria anticipada, se determina en función del Valor futuro o Monto, o del Valor actual o Valor presente. Es decir:

- En función del Valor futuro o Monto

$$R = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]}$$

- En función del Valor actual o Valor presente

$$R = \frac{VA}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]}$$

7.6 Determinación del número de períodos

Al igual que en el caso de las anualidades vencidas, para determinar el número de períodos que conforman una anualidad anticipada, se hará

a partir de las expresiones para Valor futuro o Monto y Valor actual o Valor presente. Tomando en cuenta que al tratarse n de un exponente, será necesario utilizar logaritmos.

- A partir del Valor futuro

$$n = \frac{\log \left[\left(\frac{VF}{R} + 1 \right) \times i + 1 \right]}{\log(1 + i)} - 1$$

- A partir del Valor actual

$$n = - \left[\frac{\log \left[1 - \left(\frac{VA}{R} - 1 \right) \times i \right]}{\log(1 + i)} - 1 \right]$$

7.7 Cálculo de la tasa periódica

Como se vio en el caso de las anualidades vencidas, la tasa periódica de una anualidad se determina, mediante la lectura e interpolación de tablas; o, en su defecto, mediante el uso de la función electrónica TASA de la Hoja Electrónica de Cálculo Excel.

Universidad Central del Ecuador

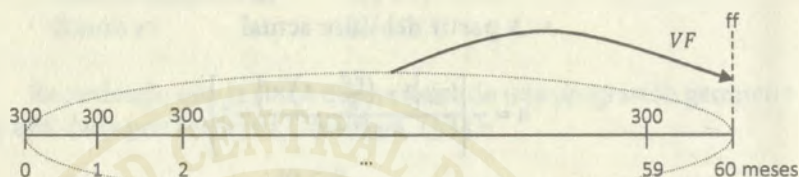
Omnium Potentior est Sapientia

7.8 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el Valor futuro y el Valor actual de la anualidad anticipada: \$300 mensuales durante 5 años al 6% capitalizable mensualmente.

Monto o Valor futuro de la anualidad anticipada:

Gráfico problema 7.1.a



$$VF = R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right] = 300 \left[\frac{\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{60+1} - 1}{\frac{6}{1200}} - 1 \right] = \$21,035.66$$

Valor actual de la anualidad anticipada:

Gráfico problema 7.1.b

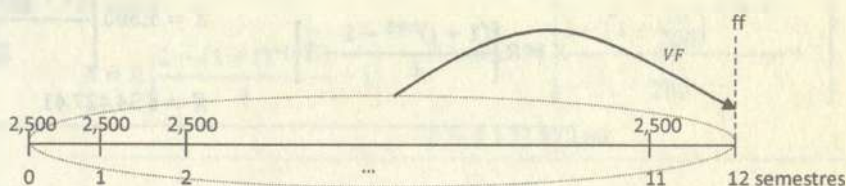


$$VA = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n+1)}}{i} + 1 \right] = 300 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{-(60+1)}}{\frac{6}{1200}} + 1 \right] = \$15,595.26$$

2. Hallar el Valor futuro y el Valor actual de una anualidad anticipada de \$2,500 semestrales, por 6 años al 4% capitalizable semestralmente.

Monto o Valor futuro de la anualidad anticipada:

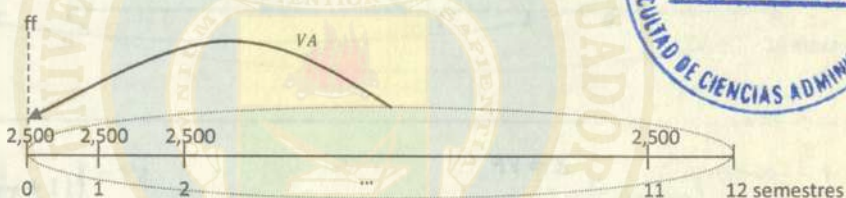
Gráfico problema 7.2.a



$$VF = R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right] = 2,500 \left[\frac{\left(1 + \frac{4}{200}\right)^{12+1} - 1}{\frac{4}{200}} - 1 \right] = \$34,200.83$$

Valor actual de la anualidad anticipada:

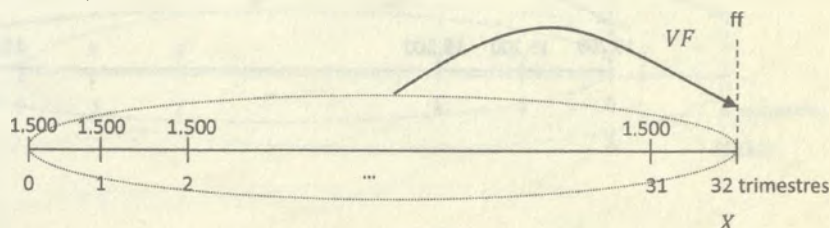
Gráfico problema 7.2.b



$$VA = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n+1)}}{i} + 1 \right] = 2,500 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{-(12+1)}}{\frac{4}{200}} + 1 \right] = \$26,967.12$$

3. Una empresa reserva \$1,500 al principio de cada trimestre para construir un fondo para renovación de activos. Si el fondo acredita el 3% capitalizable trimestralmente, ¿cuál será el monto que dispondrá el fondo después de 8 años?

Gráfico problema 7.3



$$X = VF$$

$$X = R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

$$X = 1,500 \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{400}\right)^{32+1} - 1}{\frac{3}{400}} - 1 \right]$$

$$X = \$54,427.41$$

4. Gina García alquila un edificio en \$25,000 anuales por adelantado e invierte \$18,000 de cada pago en un fondo que reconoce el 6%. Cuál es el importe del fondo después de 10 años.

Gráfico problema 7.4



$$X = VF$$

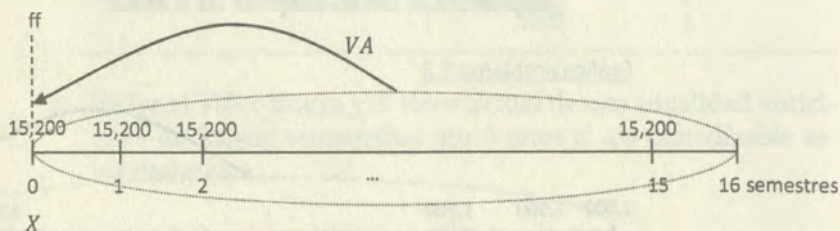
$$X = R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

$$X = 18,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10+1} - 1}{\frac{6}{100}} - 1 \right]$$

$$X = \$251,489.57$$

5. Calcular el valor de contado de una propiedad vendida a 8 años plazo con pagos de \$15,200 semestrales por semestre anticipado, si la tasa de interés es del 10% convertible semestralmente.

Gráfico problema 7.5



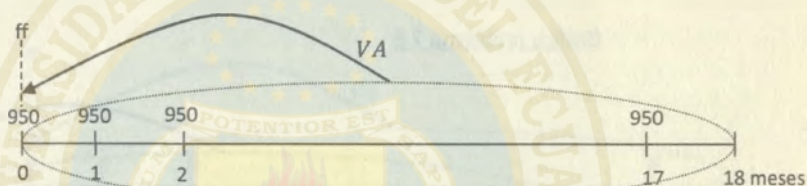
$$X = VA$$

$$X = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] \quad X = 15,200 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{10}{200}\right)^{-(16-1)}}{\frac{10}{200}} + 1 \right]$$

$$X = \$ 172,970.80$$

6. Un auto puede ser adquirido mediante cuotas anticipadas de \$950 mensuales, durante 18 meses, suponiendo intereses al 8% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de contado del auto?

Gráfico problema 7.6



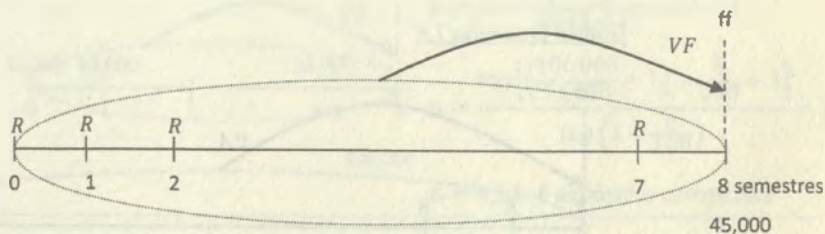
$$X = VA$$

$$X = R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] \quad X = 950 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{-(18-1)}}{\frac{8}{1200}} + 1 \right]$$

$$X = \$ 16,170.59$$

7. Con el fin de disponer de \$4,000 dentro de 4 años, una empresa decide realizar depósitos trimestrales por anticipado, en un fondo que reconoce el 8% con capitalización trimestral. Encontrar el valor del depósito que se debe realizar.

Gráfico problema 7.7



$$R = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]} = \frac{4,000}{\left[\frac{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{16+1} - 1}{\frac{8}{400}} - 1 \right]} = \$ 210.39$$

8. Para reposición de activos, una empresa requiere de \$45,000 dentro de 4 años; decide entonces realizar depósitos semestrales por anticipado en un fondo que reconoce el 10% con capitalización semestral. Encontrar el valor del depósito que se debe realizar.

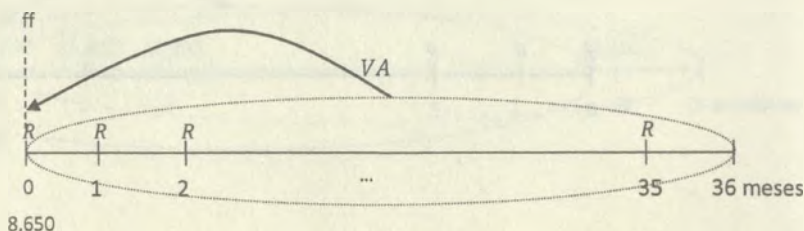
Gráfico problema 7.8



$$R = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]} = \frac{45,000}{\left[\frac{\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{8+1} - 1}{\frac{10}{200}} - 1 \right]} = \$4,488.08$$

9. El valor de contado de un coche usado es de \$8,650, una persona desea pagar en 36 abonos mensuales, venciendo el primero el día de la compra. Si se carga el 15% convertible mensualmente, hallar el importe del pago mensual.

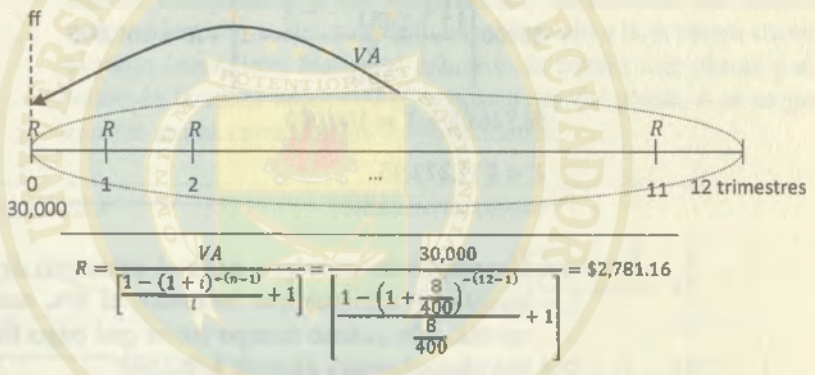
Gráfico problema 7.9



$$R = \frac{VA}{\left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]} = \frac{8,650}{\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{15}{1200}\right)^{-(36-1)}}{\frac{15}{1200}} + 1 \right]} = \$296.15$$

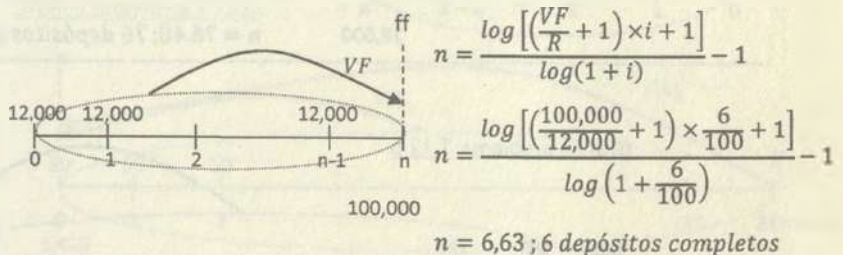
10. Una empresa adquiere una deuda de \$30,000 y propone pagar mediante cuotas trimestrales anticipadas por 3 años. Encontrar el valor de la cuota trimestral anticipada, si se aplica un interés de 8% anual capitalizable trimestralmente.

Gráfico problema 7.10



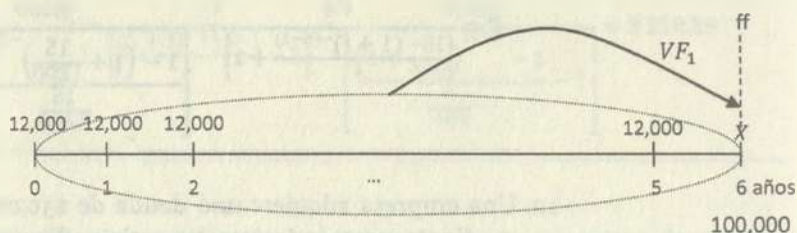
11. Para establecer un fondo de \$100,000 se consigna a principio de cada año \$12,000 en una cuenta de ahorros que paga el 6%. Calcular el tiempo de la transacción, el número de depósitos completos y encontrar el valor del depósito adicional, realizado al vencimiento del plazo.

Gráfico problema 7.11.a



Depósito adicional al vencimiento del plazo:

Gráfico problema 7.11.b



$$VF_1 + X = 100,000$$

$$R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right] + X = 100,000$$

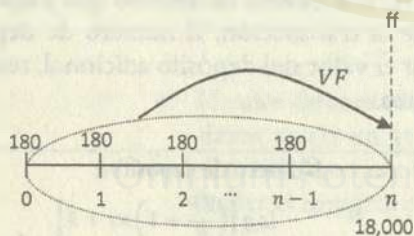
$$12000 \left[\frac{\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{6+1} - 1}{\frac{6}{100}} - 1 \right] + X = 100,000$$

$$88,726.05 + X = 100,000$$

$$X = \$ 11,273.95$$

12. Un empleado consigna \$180 al principio de cada mes en una cuenta de ahorros que reconoce el 8%, convertible mensualmente. ¿En cuánto tiempo y con qué pago final, al vencimiento del plazo, logrará ahorrar \$18,000?

Gráfico problema 7.12.a



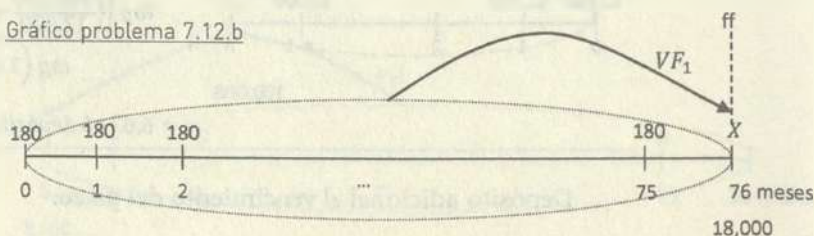
Número de depósitos:

$$n = \frac{\log \left[\left(\frac{VF}{R} + 1 \right) \times i + 1 \right]}{\log(1+i)} - 1$$

$$n = \frac{\log \left[\left(\frac{18,000}{180} + 1 \right) \times \frac{8}{1200} + 1 \right]}{\log \left(1 + \frac{8}{1200} \right)} - 1$$

$$n = 76.48; 76 \text{ depósitos completos}$$

Gráfico problema 7.12.b



$$VF_1 + X = 100,000$$

$$R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right] + X = 18,000$$

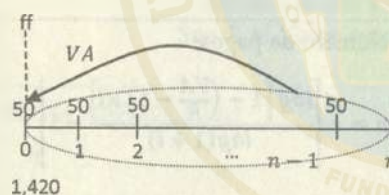
$$180 \left[\frac{\left(1 + \frac{8}{1200}\right)^{76+1} - 1}{\frac{8}{1200}} - 1 \right] + X = 18,000$$

$$17,856.20 + X = 18,000$$

$$X = \$143.80$$

13. Un comerciante estima que puede aumentar sus ventas ofreciendo refrigeradoras que valen \$1,420 de contado, en cuotas mensuales de \$50, sin cuota inicial, obligando a la primera cuota el pago inmediato. Hallar el número de cuotas completas y el valor de la cuota adicional al vencimiento del plazo, si se carga el 18% anual, capitalizable mensualmente.

Gráfico problema 7.13.a



Número de pagos:

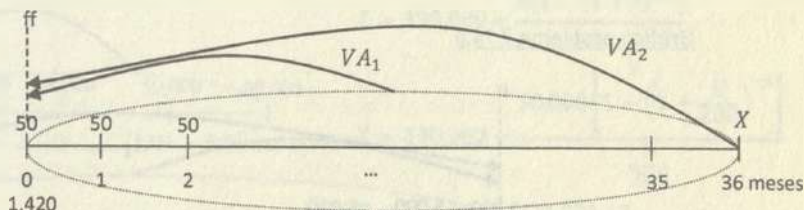
$$n = - \left[\frac{\log \left[1 - \left(\frac{VA}{R} - 1 \right) \times i \right]}{\log(1+i)} - 1 \right]$$

$$n = - \left[\frac{\log \left[1 - \left(\frac{1,420}{50} - 1 \right) \times \frac{18}{1200} \right]}{\log \left(1 + \frac{18}{1200} \right)} - 1 \right]$$

$$n = 36.55; 36 \text{ pagos completos}$$

Depósito adicional al vencimiento del plazo

Gráfico problema 7.13.b



$$VA_1 + VA_2 = 1,420$$

$$R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] + \frac{M}{(1+i)^n} = 1,420$$

$$50 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{-(36-1)}}{\frac{18}{1200}} + 1 \right] + \frac{X}{\left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{36}} = 1,420$$

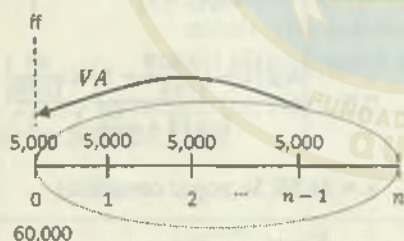
$$1,403.78 + \frac{X}{\left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{36}} = 1,420$$

$$X = 16.22 \times \left(1 + \frac{18}{1200}\right)^{36}$$

$$X = \$27.72$$

14. Una deuda de \$60,000 con interés del 12% capitalizable semestralmente, se acuerda cancelar de inmediato, con pagos semestrales de \$5,000. Hallar el número de pagos y el valor del pago final realizado al vencimiento del plazo.

Gráfico problema 7.14.a



Número de pagos:

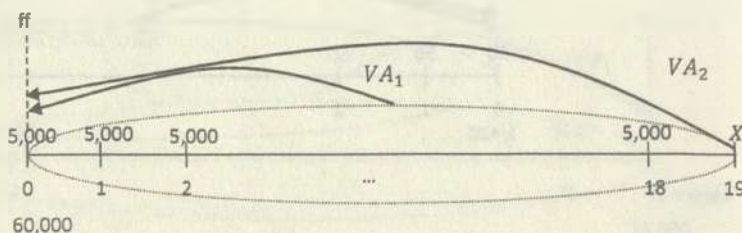
$$n = - \left[\frac{\log \left[1 - \left(\frac{VA}{R} - 1 \right) \times i \right]}{\log (1 + i)} - 1 \right]$$

$$n = - \left[\frac{\log \left[1 - \left(\frac{60,000}{5,000} - 1 \right) \times \frac{12}{200} \right]}{\log \left(1 + \frac{12}{200} \right)} - 1 \right]$$

$$n = 19.51; 19 \text{ pagos completos}$$

Pago adicional al vencimiento del plazo:

Gráfico problema 7.14.b



$$VA_1 + VA_2 = 60,000$$

$$R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] + \frac{M}{(1+i)^n} = 60,000$$

$$5,000 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{200}\right)^{-(19-1)}}{\frac{12}{200}} + 1 \right] + \frac{X}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^{19}} = 60,000$$

$$59,138.02 + \frac{X}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^{19}} = 60,000$$

$$X = 861.98 \times \left(1 + \frac{12}{200}\right)^{19}$$

$$X = \$2,608.01$$

15. Una persona recibe tres ofertas por la compra de su propiedad:
 (a) \$400,000 de contado; (b) \$190,000 de contado y \$50,000
 semestralmente, durante 2.5 años; y, (c) \$20,000 por trimestre
 anticipado durante 3 años y un pago de \$250,000, al finalizar
 el cuarto año. ¿Qué oferta debe preferir, si la tasa nominal de
 interés es del 8%, capitalizable?

Sea X el Valor actual de cada una de las ofertas, entonces:

Gráfico problema 7.15.a

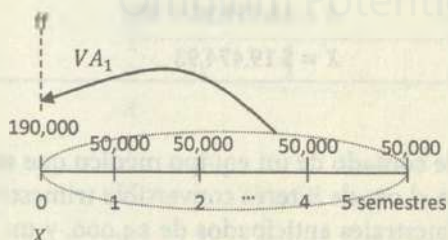


Primera alternativa:

$$X = VA$$

$$X = \$400,000.00$$

Gráfico problema 7.15.b



Segunda Alternativa:

$$X = 190,000 + VA_1$$

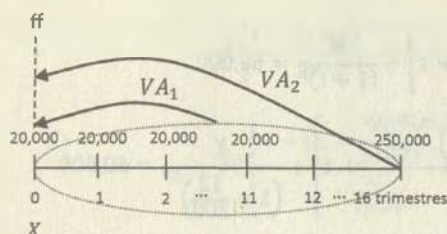
$$X = 190,000 + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$X = 190,000 + \frac{50,000 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-5} \right]}{\frac{8}{200}}$$

$$X = 190,000 + 222,591.12$$

$$X = \$412,591.12$$

Gráfico problema 7.15.c



Tercera Alternativa:

$$X = VA_1 + VA_2$$

$$X = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = 20,000 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{400}\right)^{-(12-1)}}{\frac{8}{400}} + 1 \right] + \frac{250,000}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{16}}$$

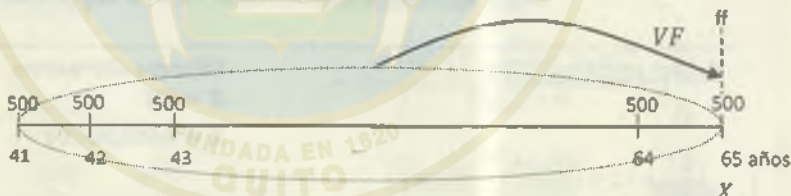
$$X = 215,736.96 + 182,111.45$$

$$X = \$ 397,848.41$$

Decisión: El vendedor deberá escoger la segunda alternativa, dado que presenta el Valor actual más alto.

16. Al cumplir 41 años y terminando de cumplir 65, una persona depositó 500 anuales en un fondo que paga 3.5 % efectivo ¿Cuánto hay en el fondo, inmediatamente después de realizar el depósito en su 65° cumpleaños?

Gráfico problema 7.16



$$X = VF + 500$$

$$X = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] + 500$$

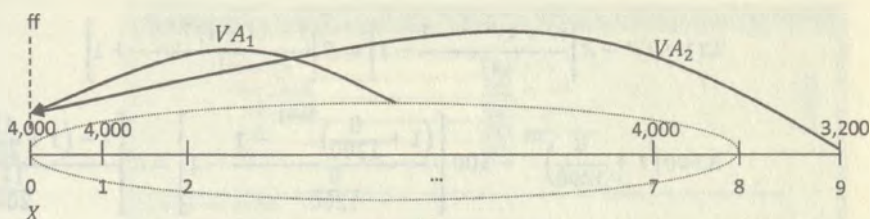
$$X = 500 \left[\frac{\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{24+1} - 1}{\frac{3.5}{100}} - 1 \right] + 500$$

$$X = 18,974.93 + 500$$

$$X = \$ 19,474.93$$

17. Calcular el valor de contado de un equipo médico que se vende a 2 años plazo, con el 9% de interés convertible trimestralmente y con pagos trimestrales anticipados de \$4,000, y un último pago de \$3,200 a los 2 años 3 meses.

Gráfico problema 7.17



$$X = VA_1 + VA_2$$

$$X = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] + \frac{M}{(1+i)^n}$$

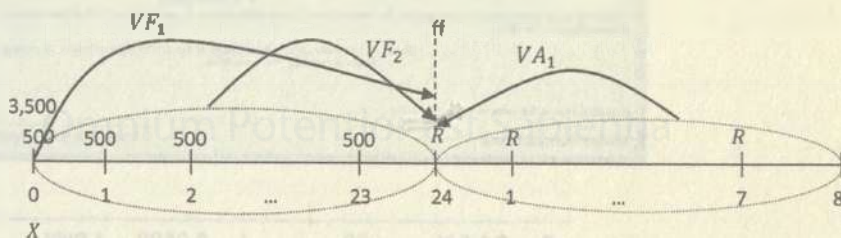
$$X = 4,000 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{9}{400}\right)^{-(8-1)}}{\frac{9}{400}} + 1 \right] + \frac{3,200}{\left(1 + \frac{9}{400}\right)^8}$$

$$X = 29,640.99 + 2,619.27$$

$$X = \$32,260.26$$

18. El día de hoy, Galo Bonilla deposita \$500 en una cuenta cuyo saldo a la fecha del depósito es de \$3,500; y cada mes continúa con dichos depósitos por 2 años, con un interés del 8% capitalizable mensualmente. Al finalizar el segundo año, va a empezar a realizar 8 retiros semestrales, considerando una tasa del 12% capitalizable semestralmente. Encontrar el valor de los retiros semestrales, de manera que la cuenta se liquide.

Gráfico problema 7.18



$$VF_1 + VF_2 = VA_1$$

$$C(1+i)^n + R \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right] = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]$$

$$3,500 \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{24} + 500 \left[\frac{\left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{24+1} - 1}{\frac{8}{1200}} - 1 \right] = R \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{200} \right)^{-(8-1)}}{\frac{12}{200}} + 1 \right]$$

$$4,015.11 + 13,053.04 = R \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{200} \right)^{-(8-1)}}{\frac{12}{200}} + 1 \right]$$

$$R = \frac{17,068.15}{\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{200} \right)^{-(8-1)}}{\frac{12}{200}} + 1 \right]}$$

$$R = \$2,606.68$$

19. ¿A qué tasa nominal, con 30 depósitos semestrales por \$1,500 por semestre anticipado, dará un monto de \$62,000?

Gráfico problema 7.19

Argumentos de función

TASA

Nper 30 = 30

Pago -1500 = -1500

Va = 62000 = 62000

VF 62000 = 62000

Tipo 1 = 1

Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una inversión. Por ejemplo, use 6%/4 para pagos trimestrales al 6% TPA.

Tipo es un valor lógico: para pago al comienzo del período = 1 para pago al final del período = 0 u omitido.

Resultado de la fórmula = 0.019933001

Asistencia sobre esta función

Aceptar Cancelar

$$\begin{aligned} R &= \$1,500; n = 30; & i &= 0.0199 = 1.99\% \\ VF &= \$62,000; m = 2; & j &= i \times m \\ i &= ? & j &= ? & j &= 1.999\% \times 2 = 3.99\% \end{aligned}$$

20. Una deuda de \$15,000 va a pagarse con 10 pagos de \$1,650 por trimestre anticipado. ¿A qué tasa nominal se pactó la transacción?

Gráfico problema 7.20

Argumentos de función

TASA

Nper	10	Fv	= 10
Pago	-1650	Fv	= -1650
Va	15000	Fv	= 15000
Vf		Fv	= 0
Tipo	1	Fv	= 1

Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una inversión. Por ejemplo, use 6%/4 para pagos trimestrales al 6% TPA.

Pago es el pago efectuado en cada período y no puede cambiar durante la vigencia del préstamo o la inversión.

Resultado de la fórmula = 0,021843004

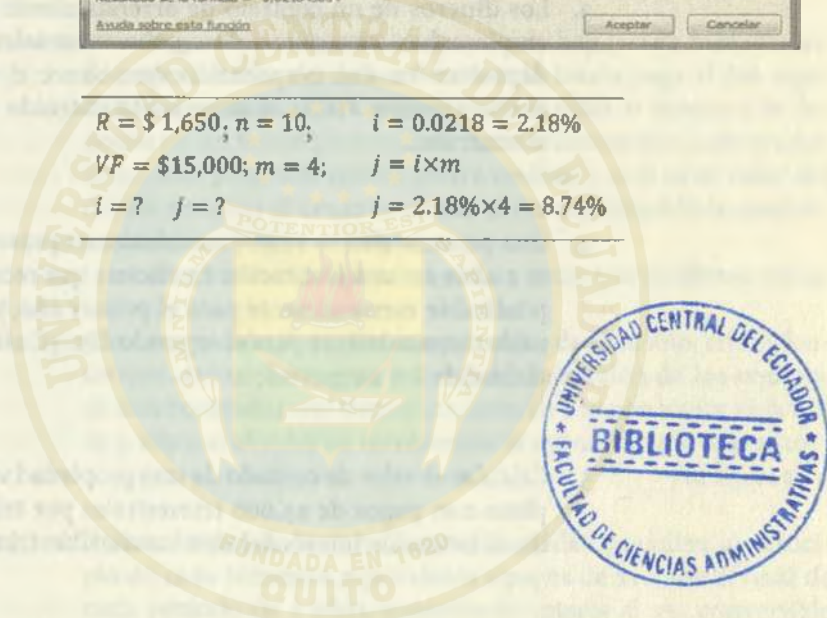
Ayuda sobre esta función

Aceptar Cancelar

$$R = \$ 1,650; n = 10; \quad i = 0.0218 = 2.18\%$$

$$VF = \$15,000; m = 4; \quad j = i \times m$$

$$i = ? \quad j = ? \quad j = 2.18\% \times 4 = 8.74\%$$



Omniūm Potentior est Sapientia

7.9 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el Valor futuro y el Valor actual de la anualidad anticipada: \$1,500 trimestrales, durante 7 años al 7% convertible trimestralmente.

R: \$54,544.94; \$33,557.59

2. Hallar el Valor futuro y el Valor actual de la anualidad anticipada: \$2,500 anuales durante 7 años al 8% efectivo anual.

R: \$24,091.57; \$14,057.20

3. Los dineros de un contrato de arrendamiento por un año, que empieza hoy con canon de \$3,000 mensuales anticipados, se depositan en una corporación que ofrece el 10% convertible mensualmente. Hallar el acumulado obtenido una vez vencido el contrato.

R: \$38,010.84

4. Una persona ahorra \$1,000 mensuales empezando hoy y durante 2 años en una institución financiera que reconoce el 12% capitalizable mensualmente para el primer año, y el 13% capitalizable mensualmente para el segundo año. ¿Cuál es el acumulado al final de los 24 meses?

R: \$27,456.92

5. Calcular el valor de contado de una propiedad vendida a 10 años plazo con pagos de \$3,000 trimestrales por trimestre anticipado; si la tasa de interés del 12% convertible trimestralmente.

R: \$571,424.65

6. Un equipo puede ser adquirido mediante \$150 de cuota inicial y \$150 mensuales por los próximos 12 meses, al 7% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de contado del equipo?

R: \$1,883.57

7. Una persona recibe tres ofertas por la venta de su propiedad: (a) \$500,000 de contado; (b) \$300,000 de contado y \$60,000 semestralmente durante 2 años; y (c) \$25,000 por trimestre anticipado durante 3 años y un pago de \$320,000 al finalizar el cuarto año. ¿Qué oferta debe preferir, si la tasa nominal de interés es del 8%, capitalizable de acuerdo con la transacción?

R: La segunda oferta.

8. El dueño de una propiedad cobra por el alquiler \$4,000 por mes anticipado. Hallar la pérdida que le significa en 2 años, si el

arrendatario le pagó por mes vencido. Tasa nominal 12% capitalizable mensualmente.

R: \$849.73

9. Se adquiere una deuda de \$15,000 para ser pagada mediante cuotas mensuales anticipadas por 2 años, y un pago adicional de \$3,500, al final de los dos años. Encontrar el valor de la cuota mensual anticipada, si se aplica un interés de 15% anual capitalizable mensualmente.

R: \$570.64

10. Juan dispone en su cuenta \$2,500. desde hoy, y cada mes, durante 3 años, realiza depósitos de \$400. El banco paga el 8% capitalizable mensual. Al cumplir tres años retira el dinero y lo deposita en un fondo para realizar retiros semestrales anticipados de \$3,000. ¿Cuántos retiros podrá realizar y cuál es el valor del último retiro, si el fondo reconoce el 8% capitalizable semestralmente?

R: 7 retiros completos; \$976.19 junto con el último retiro.

11. ¿Qué suma debe depositarse a principio de cada año, en un fondo que abona el 6%, para proveer la sustitución de los equipos de una compañía que tienen un costo de \$20,000 y una vida útil de 5 años, si el valor de salvamento se estima el 10% del costo?

R: \$3,012.39

12. Hallar el valor de la renta de una anualidad pagadera al principio de cada trimestre, equivalente a pagos de \$10,000 al final de cada período de 5 años, suponiendo interés al 4% convertible trimestralmente.

R: \$449.66

13. Hallar el valor de la renta de una anualidad pagadera al principio de cada semestre, equivalente a pagos de \$50,000 al principio de cada período de 10 años, suponiendo interés al 4% convertible semestralmente.

R: \$2,997.88

14. Sofía Rodríguez recibe un préstamo de \$5,000 que deberá cubrir mediante 24 pagos mensuales, al principio de cada mes, correspondiendo el primer pago el día de hoy. Si la tasa del préstamo es el 14% convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de los pagos que debe realizar?

R: \$237.30

15. Se va a construir un fondo de \$60,000, para lo cual conviene empezar de inmediato con depósitos semestrales de \$8,000. Si el fondo reconoce el 7% capitalizable semestralmente, hallar el número de depósitos completos y el valor del depósito adicional al vencimiento del plazo para lograr el objetivo.

R: 6 depósitos completos. Depósito adicional de \$5,764.64

16. Se requiere establecer un fondo de \$100,000, se consigna a principio de cada año \$5,000 en una cuenta de ahorros que abona el 6%. Calcular el número de depósitos completos necesarios y el valor del último depósito adicional al vencimiento del plazo para lograr el objetivo propuesto.

R: 12 depósitos completos; Depósito adicional de \$10,589.31

17. Con el fin de incentivar a sus clientes, un comerciante estima que puede aumentar sus ventas, ofreciendo televisores que valen \$750 de contado en cuotas mensuales anticipadas de \$75. Hallar el número de cuotas y el valor adicional al vencimiento del plazo, si se carga el 10% de interés convertible mensualmente.

R: 10 pagos completos. Pago adicional de \$29.65

18. Una deuda de \$35,000 con interés del 8% capitalizable semestralmente, se conviene en cancelar de inmediato, con pagos semestrales de \$2,500. Hallar el número de pagos y el valor del pago adicional realizado en un semestre más tarde para cancelar la deuda.

R: 19 pagos completos. Pago adicional de \$1,866.31

19. ¿A qué tasa nominal, 12 depósitos semestrales por \$2,800 por semestre anticipado dará un monto de \$45,000?

R: 8,84%

20. Una máquina industrial cuyo valor de contado es de \$8,000, puede adquirirse con 10 pagos trimestrales anticipados de \$865 cada uno. Hallar la tasa periódica y la tasa nominal de la transacción.

R: 7,12%



ANUALIDADES DIFERIDAS

OBJETIVO GENERAL

Calcular el Valor futuro, el Valor actual y los demás elementos financieros de una anualidad cierta, ordinaria con pagos diferidos.

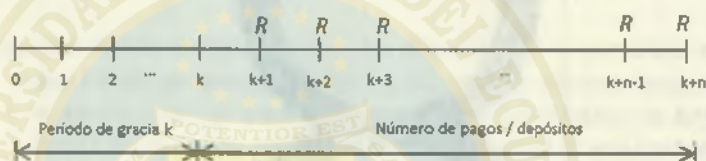
8.1 Definición

Una Anualidad diferida es una serie definida de pagos periódicos iguales, realizados al final de cada período; de manera tal que el primer pago, se realiza luego de haber transcurrido algunos períodos de pago. Al tiempo transcurrido antes del primer pago, se denomina tiempo de gracia (CISELL, CISELL, & FLASPOHLER, 1996).

8.2 Representación gráfica

Salvo lo contrario, las anualidades diferidas se consideran como vencidas. Es decir, el pago se realizará al final de cada período. Gráficamente, las anualidades diferidas tienen la siguiente estructura:

Gráfico texto 8.2



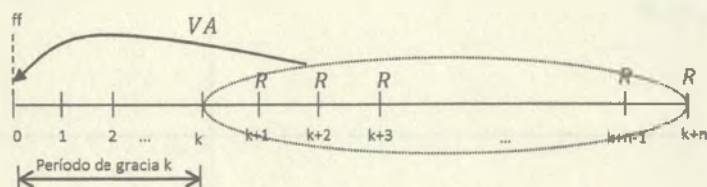
Del gráfico se tiene:

- R es el valor del pago periódico realizado al final de cada período.
- n es el número de períodos de la anualidad vencida.
- k : es el número de períodos antes de realizar el primer pago (período de gracia).
- El primer pago se realiza al final del primer período, el segundo pago al final del segundo período y así sucesivamente para los demás pagos; el último pago se hará al final del último período.

8.3 Valor actual de una anualidad diferida

El Valor actual o Valor presente de una anualidad diferida es el Valor actual considerado como pago único de la anualidad formada para n períodos de pago, proyectado a k períodos. Es decir:

Gráfico texto 8.3



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \times (1 + i)^{-k}$$

Que puede escribirse como:

$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i(1 + i)^k}$$

8.4 Valor futuro o Monto de una Anualidad diferida

El Valor futuro o Monto de una Anualidad diferida es el valor del monto de la Anualidad Vencida. Es decir:

$$VF = \frac{R[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

El lector podrá observar que en el Valor futuro o Monto de una Anualidad diferida, el período de gracia no interviene.

8.5 Cálculo de la renta en una Anualidad diferida

Como se ha visto en el caso de las anualidades anteriores, el valor del pago periódico o Renta se determina en función del Valor actual y del Valor futuro de la Anualidad, entonces:

En términos del Valor actual:

$$R = \frac{VA \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

En términos del Valor futuro:

$$R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$$

8.6 Número de periodos y tasa periódica de una Anualidad diferida

No se presentan con frecuencia casos en los cuales se requiera determinar el número de períodos que conforman una Anualidad diferida, así como tampoco se presentan casos en los que se requiera determinar el período de gracia (PORTUS Govinden, 1985). De ser necesario, para este cálculo se podrá encontrar la expresión correspondiente, mediante el uso de los logaritmos.

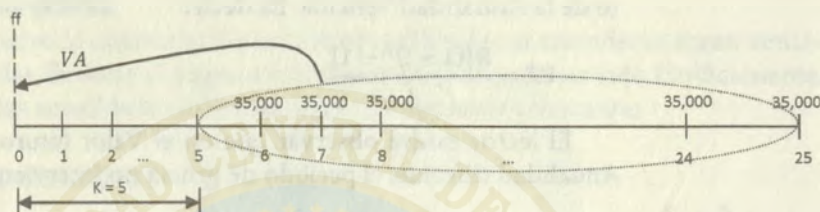
En cuanto a la determinación de la Tasa Periódica y la Tasa Nominal de una anualidad diferida, se realizará el mismo proceso. Es decir, mediante el uso de tablas con factores de equivalencia se podrá usar también la función Tasa, de la hoja electrónica de cálculo Excel.



8.7 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se desea establecer un fondo para que un hospital, que estará terminado dentro de 6 años, reciba una renta anual de \$35,000 por 20 años. Hallar el valor del fondo si gana el 8% de interés.

Gráfico problema 8.1



VA: Valor actual de la anualidad diferida

$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{1} = \frac{8}{100}$$

$$n = 20 \quad k = 5$$

$$R = \$35,000$$

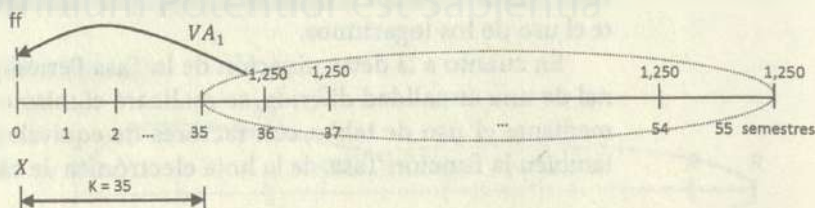
$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$$

$$VA = \frac{35,000 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{100} \right)^{-20} \right]}{\frac{8}{100} \times \left(1 + \frac{8}{100} \right)^5}$$

$$VA = \$233,872.32$$

2. Al nacimiento de su hijo, Marcelo desea depositar en una fiduciaria una cantidad que le proporcione a su hijo pagos de \$1,250 cada 6 meses, durante 10 años, venciendo el primero cuando cumpla 18 años. Si la fiduciaria paga el 3% convertible semestralmente, ¿cuánto tendrá que depositar Marcelo?

Gráfico problema 8.2



$$i = \frac{j}{m} = \frac{3\%}{2} = \frac{3}{200} \quad n = 20 \quad k = 35$$

$$X = VA_1$$

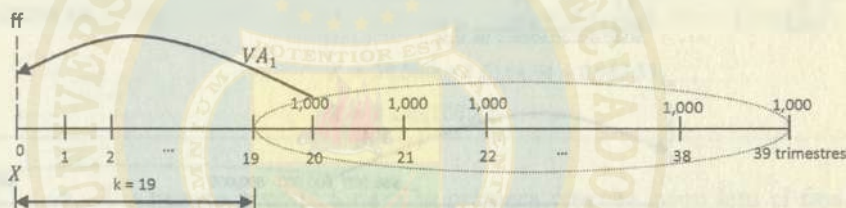
$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$$

$$X = \frac{1,250 \left[1 - \left(1 + \frac{3}{200} \right)^{-20} \right]}{\frac{3}{200} \times \left(1 + \frac{3}{200} \right)^{35}}$$

$$X = \$12,744.84$$

3. Carlos desea depositar una cantidad de dinero suficiente que le permita hacer retiros trimestrales de \$1,000 cada uno, en un fondo que gana el 3% convertible trimestralmente. El primero, al término de 5 años y, el último, al término de 10 años. Hallar el depósito necesario.

Gráfico problema 8.3



$$i = \frac{j}{m} = \frac{3\%}{4} = \frac{3}{400} \quad n = 20, \quad k = 19$$

$$X = VA_1$$

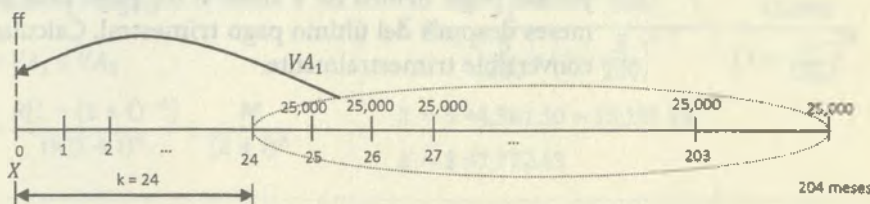
$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$$

$$X = \frac{1,000 \left[1 - \left(1 + \frac{3}{400} \right)^{-20} \right]}{\frac{3}{400} \times \left(1 + \frac{3}{400} \right)^{19}}$$

$$X = \$16,058.46$$

4. Una compañía es concesionaria de la explotación de un hotel por 15 años, contados desde su inauguración. El hotel será puesto en servicio dentro de dos años. Se estima que los ingresos brutos mensuales serán de \$25,000. Hallar con la tasa del 12% convertible mensualmente, el valor actual de los ingresos brutos.

Gráfico problema 8.4



$$i = \frac{j}{m} = \frac{12\%}{12} = \frac{12}{1,200}, \quad n = 180 \quad k = 24$$

$$X = VA_1$$

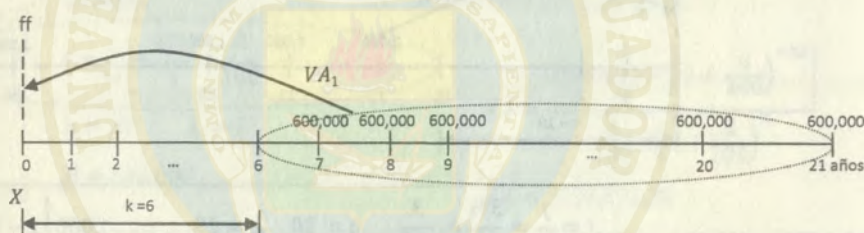
$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$$

$$X = \frac{25,000 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{-180} \right]}{\frac{12}{1,200} \times \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{24}}$$

$$X = \$ 1,640,533.01$$

5. Una compañía adquiere yacimientos de mineral. Los estudios de ingeniería demuestran que los trabajos preparatorios y vías de acceso demorarán 6 años. Se estima que los yacimientos en explotación rendirán una ganancia anual de \$600,000. Suponiendo que la tasa comercial de interés es del 8% y que los yacimientos se agotarán después de 15 años continuos de explotación, hállese el Valor actual de la renta que espera obtenerse.

Gráfico problema 8.5



VA_1 : Valor Actual de la anualidad diferida

$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{1} = \frac{8}{100} \quad n = 15 \quad k = 6$$

Ecuación de valor:

$$X = VA_1$$

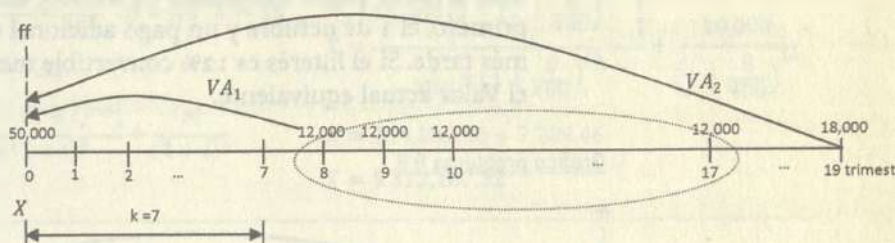
$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k}$$

$$X = \frac{600,000 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{100} \right)^{-15} \right]}{\frac{8}{100} \times \left(1 + \frac{8}{100} \right)^6}$$

$$X = \$ 3,236,354.09$$

6. Hallar el precio de contado de una propiedad comprada así: cuota inicial de \$50,000; 10 pagos trimestrales de \$12,000, el primer pago dentro de 2 años; y, un pago final de \$18,000, 6 meses después del último pago trimestral. Calcular con el 15% convertible trimestralmente.

Gráfico problema 8.6



$$i = \frac{j}{m} = \frac{15\%}{4} = \frac{15}{400} \quad n = 10 \quad k = 7$$

$$X = 50,000 + VA_1 + VA_2$$

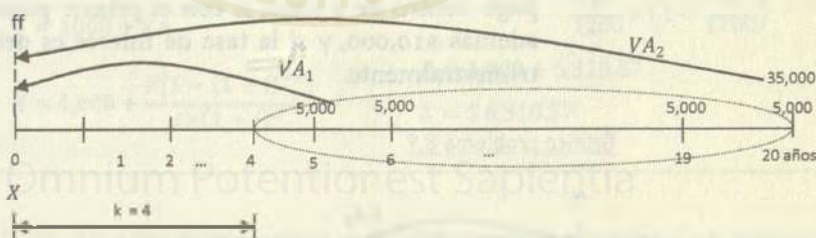
$$X = 50,000 + \frac{12,000 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{400} \right)^{-10} \right]}{\frac{15}{400} \times \left(1 + \frac{15}{400} \right)^7} + \frac{18,000}{\left(1 + \frac{15}{400} \right)^{19}}$$

$$X = 50,000 + 7,6164.94 + 8,943.31$$

$$X = \$135,108.25$$

7. Un huerto proporcionará la primera cosecha completa al final del quinto año y se espera obtener, por las siguientes cosechas, un ingreso anual de \$5,000, durante 20 años en total. Finalmente, se podrá vender el huerto en \$35,000. Hallar el valor en efectivo del huerto suponiendo intereses al 5%.

Gráfico problema 8.7



$$i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{1} = \frac{5}{100} \quad n = 16, \quad k = 4$$

$$X = VA_1 + VA_2$$

$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$$

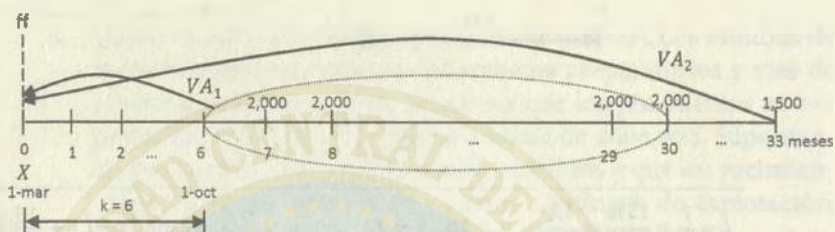
$$X = \frac{5,000 \left[1 - \left(1 + \frac{5}{100} \right)^{-16} \right]}{\frac{5}{100} \times \left(1 + \frac{5}{100} \right)^4} + \frac{35,000}{\left(1 + \frac{5}{100} \right)^{20}}$$

$$X = \$44,581.30 + 13,191.13$$

$$X = \$57,772.43$$

8. Un granjero compró un tractor el 1 de marzo, comprometiéndose a hacer pagos mensuales de \$2,000, durante 24 meses; el primero, el 1 de octubre y un pago adicional de \$1,500, 3 meses más tarde. Si el interés es 12% convertible mensualmente, hallar el Valor actual equivalente.

Gráfico problema 8.8



$$i = \frac{j}{m} = \frac{12\%}{12} = \frac{12}{1200} \quad n = 24, \quad k = 6$$

$$X = VA_1 + VA_2$$

$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$$

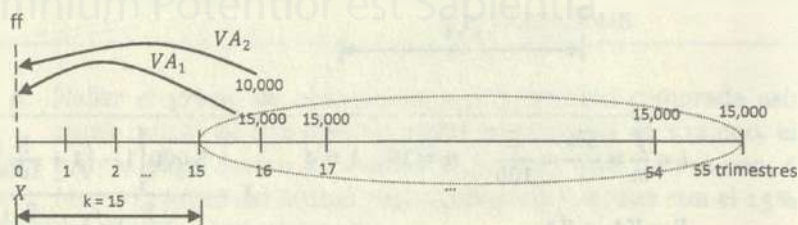
$$X = \frac{2,000 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{-24} \right]}{\frac{12}{1,200} \times \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^6} + \frac{1,500}{\left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{33}}$$

$$X = 40,024.46 + 1,080.15$$

$$X = \$41,104.61$$

9. Con cuánto se puede comprar una renta de \$15,000 trimestrales, pagadera durante 10 años, debiendo comenzar el primer pago dentro de 4 años, si con el primer pago deberá recibirse además \$10,000, y si la tasa de interés es del 8% capitalizable trimestralmente.

Gráfico problema 8.9



$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = \frac{8}{400} \quad n = 40 \quad k = 15$$

$$X = VA_1 + VA_2$$

$$X = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

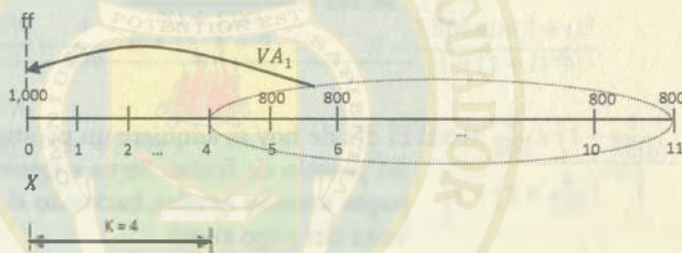
$$X = \frac{15,000 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-40} \right]}{\frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{15}} + \frac{10,000}{\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{15}}$$

$$X = 304,882.86 + 7,284.46$$

$$X = \$ 312,167.32$$

10. Un artículo se compró a plazos con un pago inicial de \$1,000 y 7 cuotas mensuales iguales de \$800 y un interés de financiación del 8% mensual, si la primera cuota se pagó cinco meses después de entregado el artículo, encontrar el valor de contado.

Gráfico problema 8.10



$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{12} = \frac{8}{1200} \quad n = 7 \quad k = 4$$

$$X = 1000 + VA_1$$

$$X = 1,000 + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k}$$

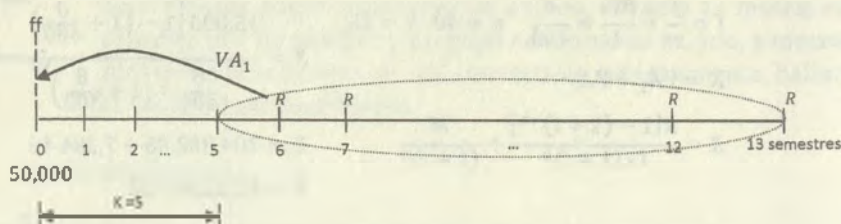
$$X = 1,000 + \frac{800 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-7} \right]}{\frac{8}{1200} \times \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^4}$$

$$X = 1,000 + 5,310.57$$

$$X = \$ 6,310.57$$

11. Una ley de incentivos para la agricultura, permite a un agricultor adquirir equipos por valor de \$50,000, para pagarlos dentro de 3 años, con 8 cuotas semestrales. Si la ley fija para este tipo de préstamos es el 6% de interés, capitalizable semestralmente, hallar el valor de las cuotas semestrales.

Gráfico problema 8.11



$$i = \frac{j}{m} = \frac{6\%}{2} = \frac{6}{200} \quad n = 8, \quad k = 5$$

$$R = \frac{50,000 \times i \times (1+i)^k}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$50,000 = VA_1$$

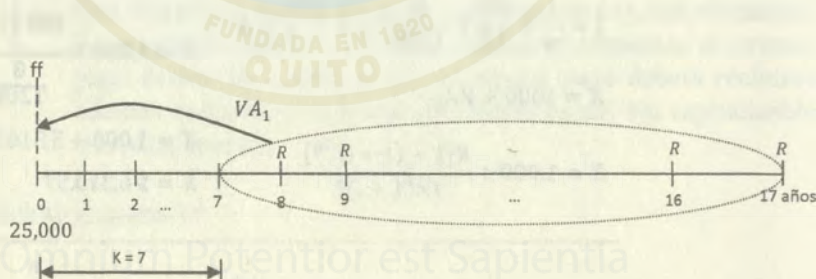
$$R = \frac{50,000 \times \frac{6}{200} \times \left(1 + \frac{6}{200}\right)^5}{\left[1 - \left(1 + \frac{6}{200}\right)^{-8}\right]}$$

$$50,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k}$$

$$R = \$ 8,257.30$$

12. El día de hoy se adquiere un préstamo de \$25,000 para adquirir un plantío de frutas. Se va a liquidar el préstamo al 5% en 10 pagos anuales iguales, haciendo el primero en 8 años. Hallar el valor del pago anual.

Gráfico problema 8.12



$$i = \frac{j}{m} = \frac{5\%}{1} = \frac{5}{100} \quad n = 10 \quad k = 7$$

$$R = \frac{25,000 \times i \times (1+i)^k}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$25,000 = VA_1$$

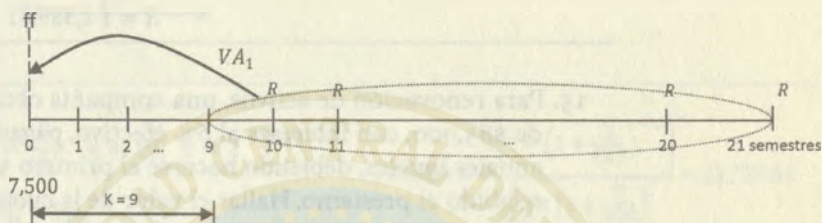
$$R = \frac{25,000 \times \frac{5}{100} \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)^7}{\left[1 - \left(1 + \frac{5}{100}\right)^{-10}\right]}$$

$$25,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k}$$

$$R = \$ 4,555.65$$

13. El día de hoy se depositan \$7,500 en un fondo que gana el 4% convertible semestralmente. Se tiene planeado agotar totalmente el fondo, mediante 12 retiros semestrales iguales, el primero al término de 5 años, a partir de la fecha. Halle el valor del retiro semestral.

Gráfico problema 8.13



$$i = \frac{f}{m} = \frac{4\%}{2} = \frac{4}{200} \quad n = 12 \quad k = 9$$

$$7,500 = VA_1$$

$$7,500 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k}$$

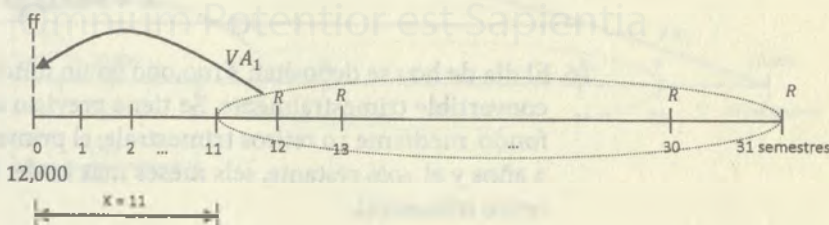
$$R = \frac{7,500 \times i \times (1+i)^k}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{7,500 \times \frac{4}{200} \times \left(1 + \frac{4}{200}\right)^9}{\left[1 - \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{-12}\right]}$$

$$R = \$847.56$$

14. Una persona deposita hoy \$12,000 en un banco que abona el 8% capitalizable semestralmente, para que, dentro de 6 años, se le comience a pagar una renta semestral durante 10 años. Hallar el valor de la renta establecida.

Gráfico problema 8.14



$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{2} = \frac{8}{200} \quad n = 20, \quad k = 11 \quad R = \frac{12,000 \times i \times (1+i)^k}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$12,000 = VA_1$$

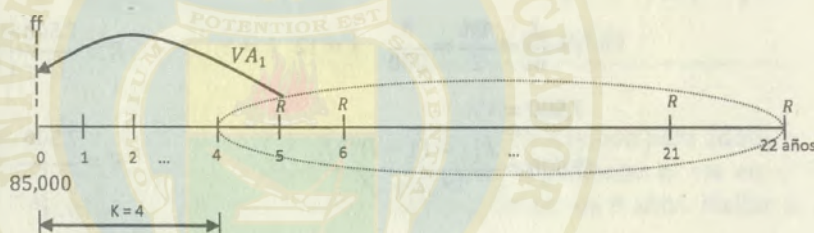
$$12,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k}$$

$$R = \frac{12,000 \times \frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{11}}{\left|1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-20}\right|}$$

$$R = \$ 1,359.31$$

15. Para renovación de activos, una compañía obtiene un préstamo de \$85,000, con intereses al 6% efectivo, pagadero en 18 cuotas anuales iguales, debiendo hacerse el primero 5 años después de recibido el préstamo. Hallar el valor de la cuota anual.

Gráfico problema 8.15



$$i = \frac{j}{m} = \frac{6\%}{1} = \frac{6}{100} \quad n = 18, \quad k = 4 \quad R = \frac{85,000 \times i \times (1+i)^k}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$85,000 = VA_1$$

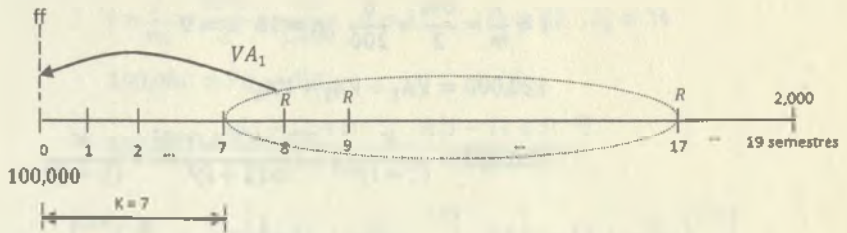
$$12,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k}$$

$$R = \frac{85,000 \times \frac{6}{100} \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^4}{\left|1 - \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{-18}\right|}$$

$$R = \$ 9,910.83$$

16. El día de hoy se depositan \$100,000 en un fondo que gana el 8% convertible trimestralmente. Se tiene previsto agotar el 80% del fondo, mediante 10 retiros trimestrales; el primero, al término de 2 años y el 20% restante, seis meses más tarde. Halle el valor del retiro trimestral.

Gráfico problema 8.16



$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = \frac{8}{400} \quad n = 10, \quad k = 7$$

$$100,000 = VA_1 + VA_2$$

$$100,000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n}$$

$$100,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-10} \right]}{\frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400} \right)^7} + \frac{20,000}{\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{10}}$$

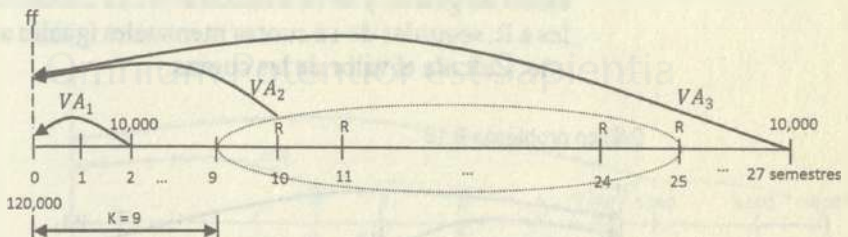
$$100,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-10} \right]}{\frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400} \right)^7} + 13,728.62$$

$$R = \frac{86,271.38 \times \frac{8}{400} \times \left(1 + \frac{8}{400} \right)^7}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{400} \right)^{-10} \right]}$$

$$R = \$11,032.31$$

17. Una persona deposita hoy \$120,000 en un banco que abona el 8 % capitalizable semestralmente, para que dentro de 5 años se le comience a pagar una renta a pagar en forma semestral, durante 8 años, conjuntamente con dos pagos de \$10,000, realizados un año después del depósito inicial y, el otro, un año después de los pagos semestrales. Hallar el valor del pago semestral.

Gráfico problema 8.17



$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{2} = \frac{8}{200} \quad n = 16 \quad k = 9$$

$$120,000 = VA_1 + VA_2 + VA_3$$

$$120,000 = \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$120,000 = \frac{10,000}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2} + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-16}\right]}{\frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^9} + \frac{10,000}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2}$$

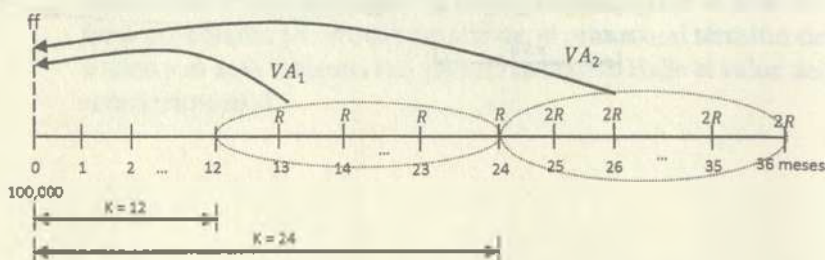
$$120,000 = 9,245.56 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-16}\right]}{\frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^9} + 3,468.17$$

$$107,286.27 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-16}\right]}{\frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^9}$$

$$R = \frac{107,286.27 \times \frac{8}{200} \times \left(1 + \frac{8}{200}\right)^9}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-16}\right]} = \$ 13,104.87$$

18. El Banco Ganadero concede un préstamo de \$100,000 a una tasa del 12% capitalizable mensualmente, con un período de gracia de un año. El préstamo tiene un plazo de 3 años, incluido el período de gracia, y se va a cancelar en 12 cuotas mensuales iguales a R, seguidas de 12 cuotas mensuales iguales a 2R, el segundo año. Calcule el valor de las cuotas.

Gráfico problema 8.18



$$i = \frac{j}{m} = \frac{12\%}{2} = \frac{12}{1,200} \quad n = 12, \quad k_1 = 12, k_2 = 24$$

$$100,000 = VA_1 + VA_2$$

$$100,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k} + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k}$$

$$100,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{-12} \right]}{\frac{12}{1,200} \times \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{12}} + \frac{2R \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{-12} \right]}{\frac{12}{1,200} \times \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{24}}$$

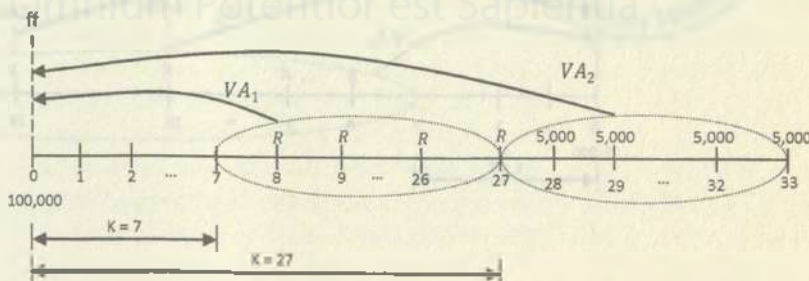
$$100,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{-12} \right]}{\frac{12}{1,200} \times \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{12}} \left[1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{12}} \right]$$

$$R = \frac{100,000 \times \frac{12}{1,200} \times \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{12}}{\left[1 - \left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{-12} \right] \left[1 + \frac{2}{\left(1 + \frac{12}{1,200} \right)^{12}} \right]}$$

$$R = \$3,607.95$$

19. Una empresa ha solicitado al banco un préstamo de \$100,000 para cancelar en 20 pagos trimestrales; el primer pago, exactamente a dos años de haber sido concedido. Seguidamente, se realizarán 6 pagos trimestrales de \$5,000. Calcular el valor del pago trimestral con una tasa del 16% capitalizable trimestralmente.

Gráfico problema 8.19



$$i = \frac{j}{m} = \frac{16\%}{4} = \frac{16}{400} \quad n_1 = 20 \quad n_2 = 6 \quad k_1 = 7, \quad k_2 = 27$$

$$100,000 = VA_1 + VA_2$$

$$100,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n_1}]}{i \times (1+i)^{k_1}} + \frac{R[1 - (1+i)^{-n_2}]}{i \times (1+i)^{k_2}}$$

$$100,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{16}{400} \right)^{-20} \right]}{\frac{16}{400} \times \left(1 + \frac{16}{400} \right)^7} + \frac{5,000 \left[1 - \left(1 + \frac{16}{400} \right)^{-6} \right]}{\frac{16}{400} \times \left(1 + \frac{16}{400} \right)^{27}}$$

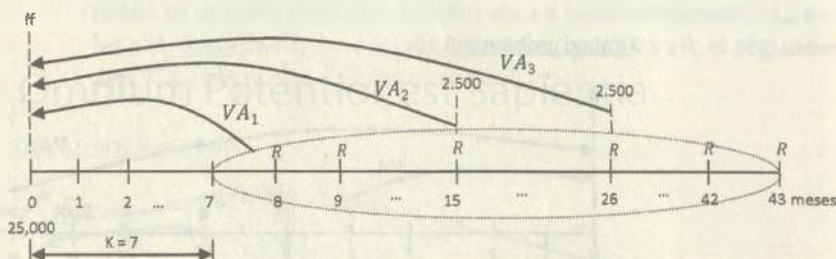
$$100,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{16}{400} \right)^{-20} \right]}{\frac{16}{400} \times \left(1 + \frac{16}{400} \right)^7} + 9,090.30$$

$$R = \frac{90,909.70 \times \frac{16}{400} \times \left(1 + \frac{16}{400} \right)^7}{\left[1 - \left(1 + \frac{16}{400} \right)^{-20} \right]}$$

$$R = \$ 8,802.66$$

20. Se obtiene un préstamo por \$25,000 a pagar en tres años, en cuotas mensuales iguales, debiendo cancelar la primera a los 8 meses y dos pagos adicionales por \$2,500 cada uno, en los meses 15 y 26, considerados desde el inicio del plazo. Sabiendo que la tasa de interés es del 15% capitalizable mensualmente, encuentre el valor de la renta mensual para saldar la deuda.

Gráfico problema 8.20



$$i = \frac{j}{m} = \frac{15\%}{12} = \frac{15}{1,200} \quad n = 36 \quad k = 7$$

$$25,000 = VA_1 + VA_2 + VA_3$$

$$25,000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} + \frac{M}{(1 + i)^n} + \frac{M}{(1 + i)^n}$$

$$25,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{15}{1,200} \right)^{-36} \right]}{\frac{15}{1,200} \times \left(1 + \frac{15}{1,200} \right)^7} + \frac{2,500}{\left(1 + \frac{15}{1,200} \right)^{15}} + \frac{2,500}{\left(1 + \frac{15}{1,200} \right)^{28}}$$

$$25,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{15}{1,200} \right)^{-36} \right]}{\frac{15}{1,200} \times \left(1 + \frac{15}{1,200} \right)^7} + 2,074.98 + 1,809.96$$

$$R = \frac{21,115.06 \times \frac{15}{1,200} \times \left(1 + \frac{15}{1,200} \right)^7}{\left[1 - \left(1 + \frac{15}{1,200} \right)^{-36} \right]}$$

$$R = \$ 798.46$$



8.8 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una compañía frutera sembró cítricos que empezarán a producir dentro de 5 años. La producción anual se estima en \$300,000 y este rendimiento se mantendrá por espacio de 20 años. Con la tasa del 6%, hallar el valor actual de la producción.
R: \$2'725,575.57
2. ¿Qué cantidad depositada el día de hoy en una cuenta que paga el 4% convertible trimestralmente será necesaria para hacer 20 retiros trimestrales de \$500 cada uno, haciendo el primero al término del tercer año?
R: \$8,087.33
3. El señor Dueñas adquiere una lavadora que recibe el 1 de noviembre y que debe pagar en 12 mensualidades de \$125, a partir del 1 de marzo del siguiente año. Si se considera el interés al 14% anual convertible mensualmente, ¿cuál es el valor de contado de la lavadora?
R: \$1,344.57
4. Se compra una máquina que va a cancelarse mediante 10 cuotas trimestrales iguales a \$18,500. La primera de ellas debe cancelarse, exactamente, dentro de 2 años. Reemplazar este compromiso por 20 pagos semestrales vencidos, empezando con el primero, a los seis meses de haber realizado la compra. Considere una tasa de 10% nominal capitalizable, de acuerdo con el período de pago correspondiente.
R: \$10,930.00
5. Una deuda contraída al 5% nominal, debe cancelarse con 8 cuotas semestrales de \$25,000 cada una, y la primera cuota a pagar en dos años. Sustituirla por una obligación equivalente pagadera con 24 cuotas trimestrales, pagando la primera cuota de inmediato.
R: \$7,991.19
6. El 1 de junio de 2008 se compra un negocio con \$10,000 de cuota inicial y 10 pagos trimestrales de \$2,500 cada uno; el primero, con vencimiento el 1 de junio de 2011. ¿Cuál es el valor de contado del negocio, suponiendo intereses al 6% convertible trimestralmente?
R: \$29,572.55
7. El 15 de marzo de 2010 se compra un negocio con \$20,000 de cuota inicial y 20 pagos trimestrales de \$1,800 cada uno, el pri-

mero con vencimiento el 15 de septiembre de 2011. ¿Cuál es el valor de contado del negocio suponiendo intereses al 12% convertible trimestralmente?

R: \$43,100.19

8. Hallar el precio de contado de una propiedad comprada con el siguiente plan: una cuota inicial de \$40,000; 12 pagos trimestrales de \$10,000, debiendo efectuar el primer pago dentro de 4 años; y, un pago final, de \$30,000, 6 meses después del último pago trimestral. Calcular con el 12 % convertible trimestralmente.

R: \$116,621.35

9. Una granja es vendida por \$10,000 de cuota inicial y 8 pagos semestrales de \$2,500 cada uno, venciendo el primero, al término del tercer año y dos pagos finales de \$4,500, realizados uno y dos años después del último pago trimestral. Hallar el valor de contado de la granja, suponiendo intereses al 5% convertible semestralmente.

R: \$31,907.86

10. En esta fecha se adquiere una deuda con intereses al 5% convertible semestral, la cual será pagada mediante desembolsos de \$250, al final de cada seis meses, por los próximos 5 años, seguidos de pagos de \$400 semestrales, por los siguientes 4 años. Hallar el importe de la deuda.

R: \$4,428.54

11. Una persona hereda \$20,000 y los invierte al 10% anual capitalizable semestralmente, conviniéndose que recibirá 20 pagos semestrales iguales, debiendo recibir el pago inicial dentro de 5 años. Encontrar a cuánto asciende el valor del pago semestral.

R: \$2,489.65

12. Una compañía obtiene un préstamo de \$75,000 para pagarlo con intereses, al 6% efectivo en 15 pagos anuales iguales; el primero, 5 años después de la fecha del préstamo. Hallar el pago anual.

R: \$9,749.11

13. Una persona deposita hoy \$150,000 en un banco que abona el 7% capitalizable mensualmente; en 6 años se le comenzará a pagar una renta mensual, durante 10 años. Hallar la renta mensual que recibirá.

R: \$2,632.10

14. Una deuda de \$80,000 se va a cancelar mediante 18 pagos trimestrales. Si el primer pago se efectúa exactamente al año de haberse prestado el dinero, calcular el valor del pago periódico, considerando el 14% capitalizable trimestralmente.

R: \$6,724.76

15. El día de hoy se adquiere un préstamo de \$25,000 y se va liquidar en 10 pagos anuales iguales, con intereses al 5%, haciendo el primero en 3 años. Hallar el valor del pago anual.

R: \$3,569.47

16. Una entidad financiera concede un crédito por tres años a un cliente por valor de \$50,000 con las siguientes condiciones: período de gracia de 6 meses, cuotas mensuales iguales y un pago de \$10,000, al final del plazo. Calcular las cuotas mensuales con la tasa de interés del 14% capitalizable mensualmente.

R: \$1,847.66

17. Luis debe a la fecha \$16,000, desea liquidarlos mediante 5 pagos semestrales de \$2,000. El primero de ellos, seis meses más tarde y 10 pagos trimestrales; el primero, a los 4 años. Hallar el valor del pago trimestral necesario, suponiendo intereses al 4% capitalizable, en el mismo tiempo del período de pago.

R: \$805.71

18. Al comprar una volqueta se quedaron debiendo \$30,000, para pagar en 8 cuotas trimestrales, empezando a los 9 meses. Junto con la última cuota trimestral deberán pagarse \$5,000. Hallar el valor de las cuotas, si el interés de financiación es del 6% capitalizable trimestralmente.

R: \$3,535.73

19. Un vehículo se va a financiar con 36 cuotas mensuales de \$450, a última hora se cambia el financiamiento a la siguiente propuesta: período de gracia de 6 meses, 30 cuotas mensuales ^R y tres cuotas anuales de \$1,000 al final de cada año. Faltando el pago de 12 cuotas, se resuelve cancelar el saldo con un solo pago, 6 meses más tarde. Calcular el valor de ese pago, si la tasa de interés es del 10% capitalizable mensualmente.

R: \$456.22; 6,405.68

20. Un banco concede un préstamo de \$60,000, al 6%, capitalizable trimestralmente. El préstamo se va a cancelar en 12 cuotas trimestrales iguales; la primera, al año de haber recibido el préstamo; un pago adicional, igual al pago trimestral, un año después

de la última cuota trimestral; y, un pago final, igual a dos pagos trimestrales, dos años después de la última cuota. Calcule el valor de la cuota.

R: \$4,760.12



Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapientia



Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapientia



PERPETUIDADES

OBJETIVO GENERAL

Calcular el Valor actual y los demás elementos financieros de una perpetuidad en sus diferentes formas y períodos de pago; además, determinar el costo capitalizado de un activo para su negociación.

9.1 Definición

Una anualidad perpetua o renta perpetua es una serie indefinida de pagos iguales, realizados en cada período. En muchas ocasiones, el período de pago y la capitalización de intereses coinciden (PORTUS Govinden, 1985).

Como rentas perpetuas tenemos los legados a instituciones, como también los costos de mantenimiento en obras públicas, tales como puentes, sistemas de alcantarillado, hospitales, carreteras, entre otros.

Dependiendo de cuándo se realice el primer pago, las anualidades perpetuas pueden ser vencidas o anticipadas.

9.2 Representación gráfica

Las anualidades perpetuas o perpetuidades tienen la siguiente estructura gráfica:

Gráfico texto 9.2



Del gráfico se tiene:

- R es el valor del pago periódico realizado en cada período. Observe que el número de pagos no está definido.

9.3 Valor futuro de una anualidad perpetua

Por constituir una serie indefinida de pagos, no es posible determinar el Valor futuro o Monto de una anualidad perpetua, puesto que:

$$VF = \lim_{n \rightarrow \infty} R \frac{[(1+i)^n - 1]}{i} = \infty$$

9.4 Valor actual de una perpetuidad vencida

El Valor Presente, o Valor actual de una anualidad perpetua, es la suma del Valor actual, trasladado a fecha de inicio de los pagos periódicos que conforman dicha anualidad. Es decir:

$$VA = \sum_{i=1}^{\infty} VA_i$$

Entonces el Valor actual de la anualidad vencida es:

$$VA = VA_1 + VA_2 + VA_3 + \dots + VA_{\infty}$$

Recordando que el Valor actual o Valor presente de una anualidad vencida, está dado por:

$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

Que se puede escribir como:

$$VA = \frac{R}{i} [1 - (1 + i)^{-n}]$$

$$VA = \frac{R}{i} - \frac{R}{i} (1 + i)^{-n}$$

Como el número de períodos (n) crece indefinidamente, el segundo término del segundo miembro se aproxima a cero, por lo que el Valor actual de una anualidad perpetua vencida se obtiene:

$$VA = \frac{R}{i}$$

9.5 Valor actual de una perpetuidad anticipada

Gráfico texto 9.5.a



Tomando en cuenta el esquema financiero de la anualidad perpetua anticipada y como fecha focal el inicio de la anualidad, al aplicar el método de las ecuaciones de valor, se tiene que el Valor actual está dado por:

$$VA = R + \frac{R}{i}$$

Factorizando la expresión anterior se tiene:

$$VA = R \left[1 + \frac{1}{i} \right]$$

Puede presentarse el caso en que el primer pago sea diferente a los pagos periódicos de la anualidad perpetua, tal como se indica en el siguiente esquema financiero:

Gráfico texto 9.5.b



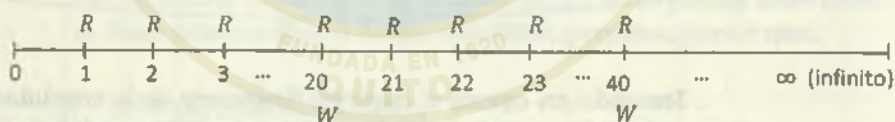
Entonces el Valor actual de este evento financiero está dado por:

$$VA = W + \frac{R}{i}$$

9.6 Valor actual de una perpetuidad con pagos cada cierto período

Es común en la práctica comercial, que los desembolsos periódicos de una anualidad perpetua sean entregados luego de que han transcurrido algunos períodos. Por ejemplo, si se constituye un fondo con capitalización anual para producir el dinero necesario que cubra las operaciones de mantenimiento de una carretera, las mismas que ocurren cada 20 años. En otras palabras, la capitalización del fondo es anual, pero se entrega el dinero cada 20 años. Este caso se representa gráficamente de la siguiente manera:

Gráfico texto 9.6



Recordando que el Valor actual de la Perpetuidad está dado por:

$$VA = \frac{R}{i}$$

Por otro lado, el Valor W , que es el desembolso realizado cada cierto número (k) de períodos, genera un valor futuro, entonces:

$$W = \frac{R[(1+i)^k - 1]}{i}$$

Es decir:

$$R = \frac{Wi}{[(1+i)^k - 1]}$$

Reemplazando este resultado en la expresión del Valor actual de una perpetuidad se tiene:

$$VA = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

Esta última expresión permite calcular el Valor actual de una anualidad perpetua, cuando se realizan desembolsos W , cada k períodos.

9.7 Costos adicionales para incremento de la vida útil de un activo

Es muy frecuente buscar mecanismos para incrementar la vida útil de los activos. Por ejemplo, el uso de algún químico que prolongue la vida útil de los postes de madera, pintura anticorrosiva para prolongar la vida útil de las estructuras de acero, entre otros (PORTUS Govinden, 1985).

El costo adicional de este tratamiento, que prolongará la vida útil del activo, está dado por:

$$X = C \frac{[1 - (1+i)^{-b}]}{[(1+i)^k - 1]}$$

Donde:

X: Costo adicional que se debe pagar por el proceso que prolonga la vida útil del activo.

b: Tiempo, expresado en años, que prolonga la vida útil del activo.

C: Costo del activo, el mismo que deberá renovarse luego de cumplir la vida útil.

k: Tiempo, expresado en años, que representa la vida útil del activo.

i: Tasa periódica.

9.8 Costos capitalizados

Se conoce como costo capitalizado K , a la suma del Costo inicial de un activo más el Valor actual de la anualidad a perpetuidad que conforma renovación del mismo.

Sea C el Costo inicial de un activo, si este activo debe renovarse a un precio W luego de k períodos de vida útil, entonces, considerando una tasa periódica i , el costo capitalizado estará dado por:

$$K = C + \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

Si el costo de renovación W es igual al costo inicial del activo se tiene:

$$K = C + \frac{C}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$K = C \left[1 + \frac{1}{[(1+i)^k - 1]} \right]$$

$$K = C \left[\frac{(1+i)^k - 1 + 1}{[(1+i)^k - 1]} \right]$$

$$K = C \left[\frac{(1+i)^k}{[(1+i)^k - 1]} \right]$$

Dividiendo esta expresión para $(1 + i)^k$, el costo capitalizado, cuando el costo de renovación del activo es igual al costo inicial del mismo, está dado por:

$$K = \frac{C}{[1 - (1 + i)^{-k}]}$$

El criterio del costo capitalizado, es de gran utilidad para tomar decisiones sobre la adquisición de equipos que tienen el mismo rendimiento, pero presentan diferente costo de compra y distinta vida útil (PORTUS Govinden, 1985).

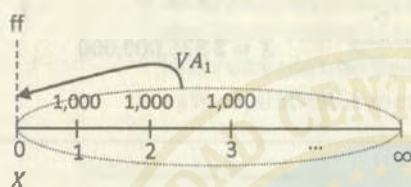


Omniū Potentior est Sapientia

9.9 PROBLEMAS RESUELTOS

1. El testamento del señor Pérez, conocido filántropo, establece que deberá pagarse al asilo de ancianos María Auxiliadora una renta perpetua de \$1,000, pagaderos al final de cada año. ¿Cuál es el valor actual de ese legado, suponiendo que se encuentra invertido a 10% de interés efectivo anual?

Gráfico problema 9.1



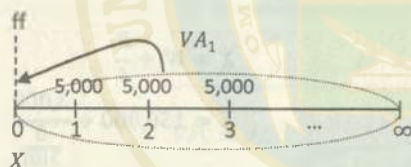
$$X = VA_1$$

$$X = \frac{R}{i} = \frac{1,000}{\left(\frac{10}{100}\right)}$$

$$X = \$ 10,000.00$$

2. Suponiendo que una granja produzca \$5,000 anuales indefinidamente, ¿cuál es su valor actual sobre la base del 10%?

Gráfico problema 9.2



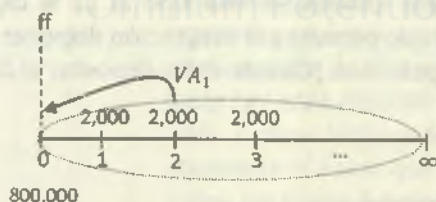
$$X = VA_1$$

$$X = \frac{R}{i} = \frac{5,000}{\frac{10}{100}}$$

$$X = \$ 50,000.00$$

3. ¿Qué interés nominal, capitalizable trimestralmente, le reconocen a una persona que con un depósito de \$800,000 realizado hoy, puede hacer retiros de \$2,000 trimestrales, el primero de ellos dentro de tres meses y en forma indefinida?

Gráfico problema 9.3



$$800,000 = VA_1$$

$$800,000 = \frac{R}{i}$$

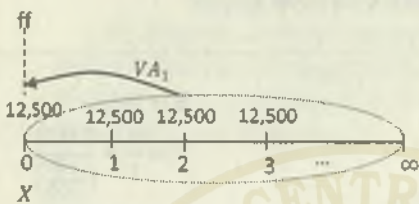
$$i = \frac{R}{800,000} = \frac{2,000}{800,000} = 0.25\%$$

$$j = i \times m$$

$$j = \frac{0.25}{100} \times 4 = 1\% \text{ capitalizable trimestral}$$

4. Establecer una cátedra en una universidad cuesta \$12,500 anuales. Hallar el valor presente del fondo necesario para establecerla, suponiendo intereses de 4%.

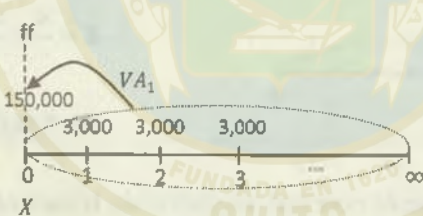
Gráfico problema 9.4



$$X = VA_1$$
$$X = R \left[1 + \frac{1}{i} \right] = 12,500 \left[1 + \frac{1}{\frac{4}{100}} \right]$$
$$X = \$ 325,000,000$$

5. Los exalumnos de una universidad deciden donar un laboratorio y los fondos para su mantenimiento futuro. Si el costo inicial es de \$150,000 y el mantenimiento se estima en \$3,000 anuales, hallar el valor de la donación, si la tasa efectiva de interés es del 6%.

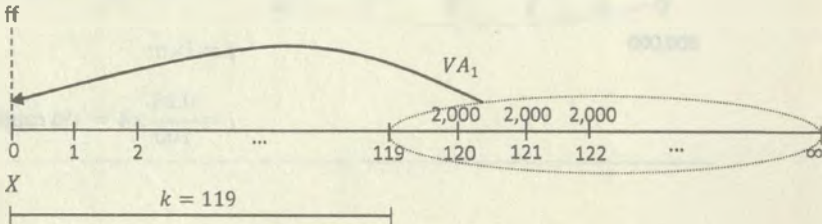
Gráfico problema 9.5



$$X = W + \frac{R}{i}$$
$$X = 150,000 + \frac{3,000}{\frac{6}{100}}$$
$$X = \$ 200,000.00$$

6. Para estudiar en una universidad de prestigio dentro de 10 años, es requisito fundamental, entre otros, depositar el día de hoy una suma de dinero en una institución financiera que paga mensualmente por ahorros de este tipo el 12 % capitalizable mensualmente y que permite a la institución disponer de \$2,000 mensuales a perpetuidad. ¿Cuánto debo depositar el día de hoy?

Gráfico problema 9.6

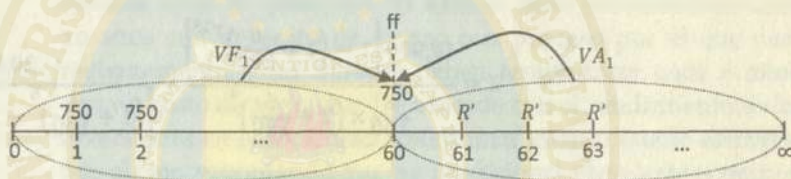


$$X = VA_1$$

$$X = \frac{R}{i(1+i)^k} = \frac{2,000}{\frac{12}{1200} \times \left(1 + \frac{12}{1200}\right)^{119}} = \$61.204,95$$

7. Se propone efectuar una serie de 60 depósitos mensuales iguales de \$750, para poder, al siguiente mes, después del último depósito, hacer retiros mensuales iguales a perpetuidad. ¿Cuál será el valor de cada uno de los retiros, si el banco reconoce una tasa de 12% capitalizable mensualmente?

Gráfico problema 9.7



$$VF_1 = VA_1$$

$$R' = R[(1+i)^n - 1]$$

$$\frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{R'}{i}$$

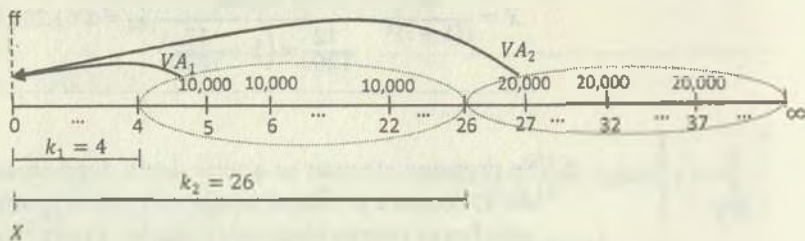
$$R' = 750 \left[\left(1 + \frac{12}{1200}\right)^{60} - 1 \right]$$

$$R' = \$612,52$$

8. El directorio de la empresa, para afrontar los pagos de jubilación de sus empleados, decide crear un fondo dentro de cuatro años y generar un depósito anual de \$10,000, durante 18 años. Cinco años, a partir de entonces, no se realizan pagos y de allí en adelante (27 años después de hoy) pagos a perpetuidad de \$20,000 cada 5 años. Utilizando una tasa de interés 6% efectiva anual encontrar el valor que se deberá depositar hoy, para solventar todos los gastos futuros.



Gráfico problema 9.8



$$X = VA_1 + VA_2$$

$$X = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i(1+i)^{k_1}} + \frac{W}{[(1+i)^k - 1](1+i)^{k_2}}$$

$$X = \frac{10,000 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{-18} \right]}{\frac{6}{100} \times \left(1 + \frac{6}{100} \right)^4} + \frac{20,000}{\left[\left(1 + \frac{6}{100} \right)^5 - 1 \right] \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{26}}$$

$$X = 85,764.76 + 12,997.84$$

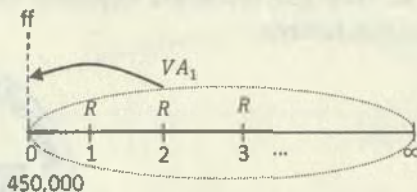
$$X = \$ 98,762.60$$

9. El señor González queda incapacitado de por vida como consecuencia de un accidente laboral; la empresa donde labora le concede una indemnización de \$450,000, con lo cual desea asegurarse una renta mensual a perpetuidad. Si el señor González puede invertir su dinero al 14% capitalizable mensualmente:

- ¿Cuál será su renta mensual si desea conservar intacto su capital?
- ¿Cuál será su renta mensual si el capital se agotará a los 20 años?

a. Capital intacto (perpetuidad)

Gráfico problema 9.9.a



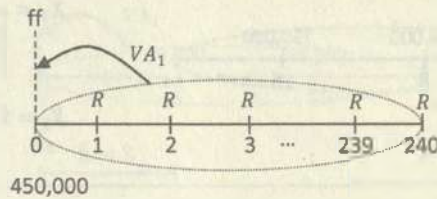
$$450,000 = \frac{R}{i}$$

$$R = 450,000 \times \frac{14}{1200}$$

$$X = \$ 5,250.00$$

b. Capital agotado en 20 años

Gráfico problema 9.9.b



$$450,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$R = \frac{450,000 \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

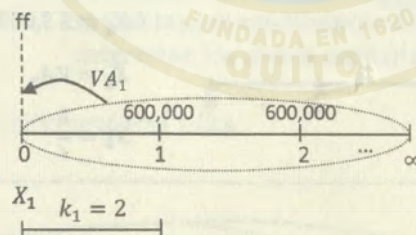
$$R = \frac{450,000 \times \frac{14}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{14}{1200}\right)^{-240}\right]}$$

$$R = \$5,595.84$$

10. En una localidad en que las inversiones tienen un rendimiento del 10% anual con capitalización semestral, alguien ofrece a la venta un cine que tiene una utilidad anual promedio en los últimos años de \$600,000. El edificio debe reconstruirse cada 20 años con un gasto de \$3,500,000, proceso por el que pasó recientemente, y las butacas deben remplazarse cada 8 años, con un costo de \$750,000. De acuerdo con el rendimiento de las inversiones en la localidad, determinar cuánto puede ofrecerse por el cine, suponiendo que las condiciones económicas permanecerán constantes.

Ingresos:

Gráfico problema 9.10.a



$$X_1 = VA_1$$

$$X_1 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

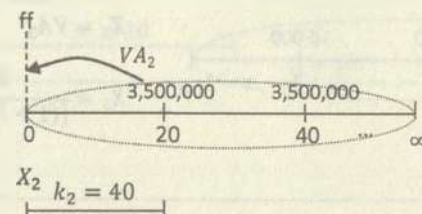
$$X_1 = \frac{600,000}{\left[\left(1 + \frac{10}{200}\right)^2 - 1\right]}$$

$$X_1 = \$5,853,658.54$$

$$X_2 = VA_2$$

Egresos por reconstrucción del edificio:

Gráfico problema 9.10.b



$$X_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

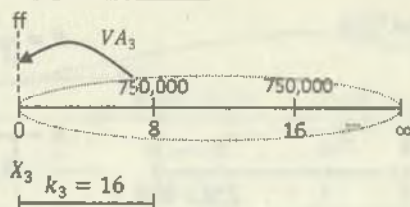
$$X_2 = \frac{3,500,000}{\left[\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{40} - 1\right]}$$

$$X_2 = \$579,471.28$$

$$X_3 = VA_3$$

Egresos por cambio de butacas:

Gráfico problema 9.10.c



$$X_3 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$X_3 = \frac{750,000}{\left[\left(1 + \frac{10}{200}\right)^{16} - 1\right]}$$

$$X_3 = \$634,048.62$$

Valor actual del cine:

$$VA = X_1 - X_2 - X_3$$

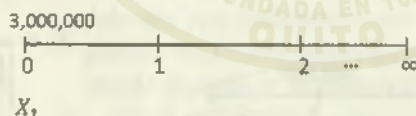
$$VA = 5,853,658.54 - 579,471.28 - 634,048.62$$

$$VA = \$4,640,138.64$$

11. Se espera que el costo inicial de un embalse sea de \$3'000,000. Se estima que el costo de mantenimiento anual sea de \$10,000 por año. Se requiere para cambio de compuertas y válvulas, un desembolso adicional de \$35,000 cada 5 años. Si se espera que el embalse dure para siempre. ¿Cuál será su costo capitalizado (Valor actual) a una tasa de interés del 10% anual?

Costo inicial del embalse:

Gráfico problema 9.11.a



$$X_1 = 3,000,000$$

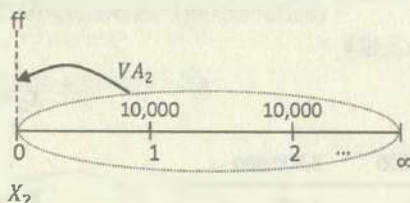
$$X_1 = \$3,000,000$$

$$X_2 = VA_2$$

$$X_2 = \frac{R}{i}$$

Costos de mantenimiento:

Gráfico problema 9.11.b



$$X_2 = \frac{10,000}{\frac{10}{100}}$$

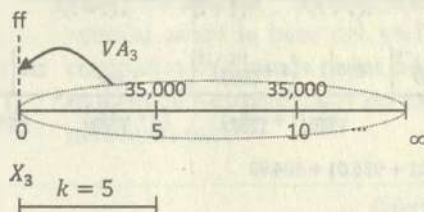
$$X_2 = \$100,000.00$$

$$X_3 = VA_3$$

$$X_3 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

Desembolso adicional quinquenal:

Gráfico problema 9.11.c



$$X_3 = \frac{35,000}{\left[\left(1 + \frac{10}{100} \right)^5 - 1 \right]}$$

$$X_3 = \$ 57,329.12$$

Valor actual del embalse:

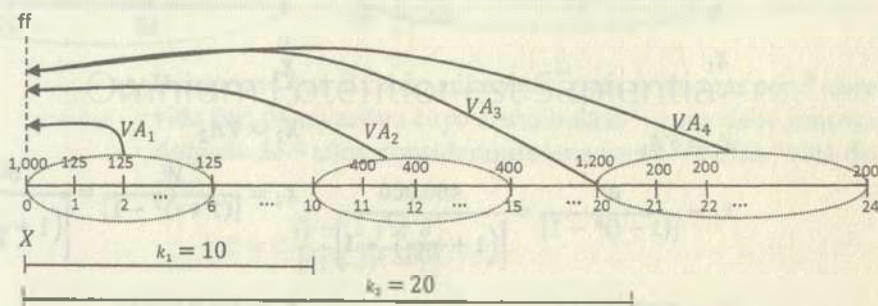
$$VA = X_1 + X_2 + X_3$$

$$VA = 3,000,000 + 100,000 + 57,329.12$$

$$VA = 3,157,329.12$$

12. Los costos operativos mensuales de una empresa tienen un ciclo repetitivo de dos años, que se pueden resumir de la siguiente manera: inicialmente, se invierten \$1,000 y cada gasto mensual subsiguiente durante los próximos seis meses es igual a \$125 cada uno; posteriormente, se invierten \$400 mensuales durante cinco meses siguientes, haciendo el primer desembolso en el mes undécimo (11); finalmente, se vuelve a invertir \$1,200, en el vigésimo mes (20) y un gasto mensual de \$200 desde el mes 21 hasta el mes 24. Si este ciclo se repite infinitamente y se considera una tasa de rendimiento del 15% capitalizable mensualmente, determine los costos capitalizados de la empresa.

Gráfico problema 9.12.a



$$X = 1000 + VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4$$

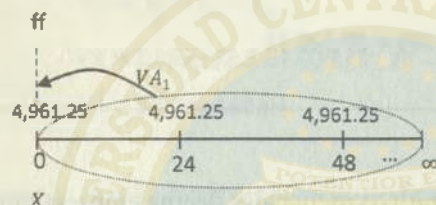
$$X = 1000 + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i(1+i)^k} + \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i(1+i)^k}$$

$$X = 1,000 + \frac{125 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{-4} \right]}{\frac{15}{1200}} + \frac{400 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{-5} \right]}{\frac{15}{1200} \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^4} + \frac{1,200}{\left(1 + \frac{15}{1200} \right)^4} + \frac{200 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{-4} \right]}{\frac{15}{1200} \left(1 + \frac{15}{1200} \right)^4}$$

$$X = 1,000 + 718.25 + 1,702.01 + 936.01 + 604.98$$

$$X = \$4,961.25$$

Gráfico problema 9.12.b



$$X = 4,961.25 + VA_1$$

$$X = 4,961.25 + \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

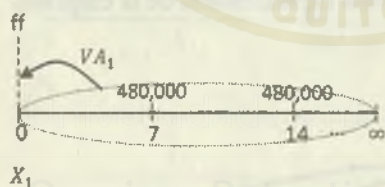
$$X = 4,961.25 + \frac{4961.25}{\left[\left(1 + \frac{15}{1200} \right)^{24} - 1 \right]}$$

$$X = \$19,244.35$$

13. Una industria recibe dos ofertas de cierto tipo de máquinas, ambas de igual rendimiento. La primera oferta es de \$480,000 y las máquinas tienen una vida útil de 7 años; la segunda oferta es de \$600,000, por máquinas que tienen una vida útil de 10 años, ¿al 6%, cuál es la más conveniente?

Oferta I

Gráfico problema 9.13.a



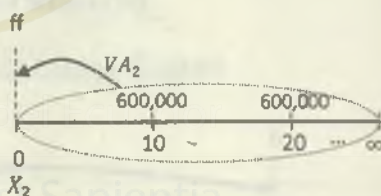
$$X_1 = VA_1$$

$$X_1 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{480,000}{\left[\left(1 + \frac{6}{100} \right)^7 - 1 \right]}$$

$$X_1 = \$953,080.14$$

Oferta II

Gráfico problema 9.13.b



$$X_2 = VA_2$$

$$X_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{600,000}{\left[\left(1 + \frac{6}{100} \right)^{10} - 1 \right]}$$

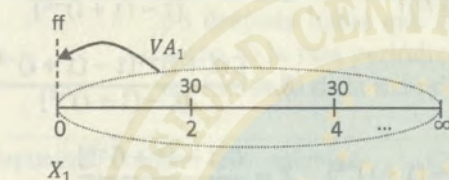
$$X_2 = \$758,679.58$$

Para la compra de máquinas es más conveniente la segunda oferta.

14. La compañía XYZ utiliza baterías que cuestan \$30 con una vida útil de 2 años. Se ofrece otro modelo que cuesta \$40 con una vida probable de 3 años. ¿Cuál de los dos modelos es mejor inversión sobre la base del 5%?, ¿cuál es máximo precio que la compañía XYZ puede pagar por el segundo modelo, de tal forma que el costo capitalizado no exceda al modelo que tiene actualmente en uso?

Oferta I

Gráfico problema 9.14.a



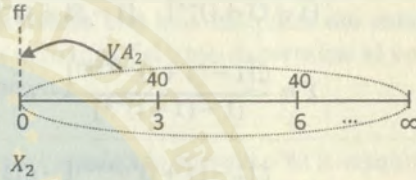
$$X_1 = VA_1$$

$$X_1 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{30}{\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 - 1\right]}$$

$$X_1 = \$292.68$$

Oferta II

Gráfico problema 9.14.b



$$X_2$$

$$X_2 = VA_2$$

$$X_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{40}{\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 - 1\right]}$$

$$X_2 = \$253.77$$

Es más conveniente la segunda oferta.

Máximo precio a pagar:

$$X_1 = X_2$$

$$W = 292.68 \left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 - 1 \right]$$

$$X_1 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$W = \$46.13$$

15. Demuestre que el Costo adicional X para prolongar por b años la vida útil de un activo cuyo costo inicial C y que debe renovarse después de k años, considerando una tasa periódica i está dado por:

$$X = C \frac{[1 - (1+i)^{-b}]}{[(1+i)^k - 1]}$$

Demostración:

Sea C el costo inicial del activo, entonces el costo capitalizado K del mismo, considerando que la renovación luego de k años es igual al costo inicial con una tasa periódica i está dado por:

$$K = \frac{C}{[1 - (1+i)^{-k}]}$$

Por otro lado, el costo capitalizado K' incluyendo el costo adicional X para prolongar su vida útil en b años, con una tasa periódica i está dado por:

$$K' = \frac{C + X}{[1 - (1+i)^{-(k+b)}]}$$

Igualando los costos capitalizados:

$$\frac{C}{[1 - (1+i)^{-k}]} = \frac{C + X}{[1 - (1+i)^{-(k+b)}]}$$

$$X = \frac{C[(1+i)^{-k} - (1+i)^{-(k+b)}]}{[1 - (1+i)^{-k}]}$$

$$X = \frac{C[1 - (1+i)^{-(k+b)}]}{[1 - (1+i)^{-k}]} - C$$

$$X = \frac{C(1+i)^{-k}[1 - (1+i)^{-b}]}{[1 - (1+i)^{-k}]}$$

$$X = \frac{C[1 - (1+i)^{-(k+b)}] - C[1 - (1+i)^{-k}]}{[1 - (1+i)^{-k}]}$$

$$X = \frac{C[1 - (1+i)^{-b}]}{\frac{[1 - (1+i)^{-k}]}{(1+i)^{-k}}}$$

$$X = \frac{C\{[1 - (1+i)^{-(k+b)}] - [1 - (1+i)^{-k}]\}}{[1 - (1+i)^{-k}]}$$

$$X = \frac{C[1 - (1+i)^{-b}]}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$X = \frac{C[1 - (1+i)^{-(k+b)} - 1 + (1+i)^{-k}]}{[1 - (1+i)^{-k}]}$$

16. Las vigas utilizadas en cierta construcción cuestan \$2,000 y duran 12 años; aplicándoles un tratamiento preservativo pueden durar 20 años. ¿Cuánto debería pagarse por el tratamiento, suponiendo intereses de 4%?

Costo inicial $C = 2,000$

Tiempo de renovación $k = 12$ años

Tiempo de prolongación $b = 8$ años

Tasa efectiva anual: $i = 4\%$

Pago adicional $X = ?$

$$X = \frac{C[1 - (1+i)^{-b}]}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$X = \frac{2,000 \left[1 - \left(1 + \frac{4}{100} \right)^{-8} \right]}{\left[\left(1 + \frac{4}{100} \right)^{12} - 1 \right]} = \$ 896.16$$

17. En una zona tropical, las traviesas que usa una compañía ferroviaria le cuestan \$120 cada una y deben remplazarse cada 5 años. Por medio de un tratamiento químico, puede prolongarse la vida de las traviesas en 4 años. ¿Cuánto debe pagarse por el tratamiento químico considerando una tasa efectiva del 6%?

Costo inicial $C = 120$ Tiempo de renovación $k = 5$ añosTiempo de prolongación $b = 4$ añosTasa efectiva anual: $i = 6\%$ Pago adicional $X = i$

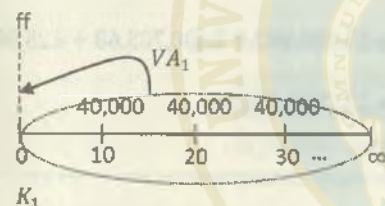
$$X = \frac{C[1 - (1+i)^{-b}]}{[(1+i)^k - 1]}$$

$$X = \frac{120 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{-4} \right]}{\left[\left(1 + \frac{6}{100} \right)^5 - 1 \right]} = \$73.76$$

18. La compra de una máquina asciende a \$40,000 y su operación a \$1,000 anuales. La máquina tiene una vida útil de 10 años, tiempo después habrá que renovarla con una máquina del mismo costo. Si la tasa periódica actual es del 10%, determine el costo capitalizado de la máquina.

Costo capitalizado compra de la máquina

Gráfico problema 9.18.a



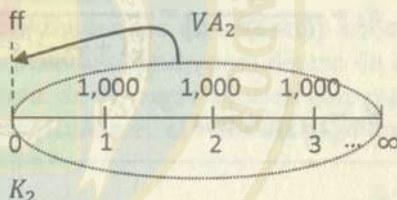
$$K_1 = VA_1$$

$$K_1 = \frac{40,000}{[1 - (1+i)^{-k}]} = \frac{40,000}{[1 - (1 + \frac{10}{100})^{-10}]}$$

$$K_1 = 65,098,16$$

Costo capitalizado operación de la máquina

Gráfico problema 9.18.b



$$K_2 = VA_2$$

$$K_2 = \frac{R}{i} = \frac{1000}{(\frac{10}{100})} = 10,000.00$$

Costo de capitalización total:

$$K = K_1 + K_2$$

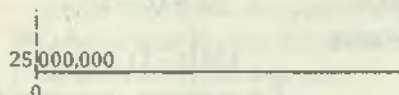
$$K = 65,098,16 + 10,000 = \$75,018.16$$



19. Se espera que el nuevo puente tenga un costo inicial de \$25 millones. Este puente deberá repavimentarse cada cinco años, a un costo de \$1 millón. Los costos anuales de operación e inspección se estiman en \$50,000. Determine el costo capitalizado del puente, considerando que el dinero rinde al 8%.

Costo inicial del puente

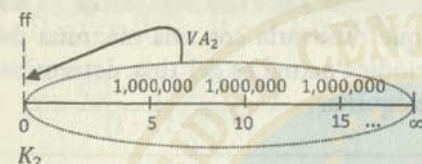
Gráfico problema 9.19.a



$$K_1 = 25,000,000$$

Costo capitalizado del pavimento

Gráfico problema 9.19.b



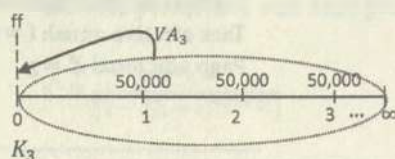
$$K_2 = VA_2$$

$$K_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{1,000,000}{\left[\left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 - 1\right]}$$

$$K_2 = 2,130,705.68$$

Costo capitalizado de mantenimiento

Gráfico problema 9.19.c



$$K_3 = VA_3$$

$$K_3 = \frac{R}{i} = \frac{50,000}{\frac{8}{100}} = 625,000$$

$$K_3 = 625,000.00$$

Costo capitalizado total

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

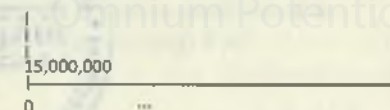
$$K = 25,000,000 + 2,130,705.68 + 625,000$$

$$K = 27,755,705.68$$

20. Una presa para el control de inundaciones tiene un costo inicial de \$15 millones; las compuertas de control de flujo de la presa deben remplazarse cada 10 años, a un costo de \$2 millones. Si la tasa de interés es 5 % anual, ¿cuál es el costo capitalizado de la presa?

Costo inicial de la presa

Gráfico problema 9.20.a



$$K_1 = VA_1$$

Costo de capitalización total

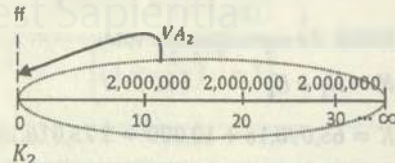
$$K = K_1 + K_2$$

$$K = 15,000,000 + 3,180,183.18$$

$$K = \$18,180,183.18$$

Costo capitalizado del pavimento

Gráfico problema 9.20.b



$$K_2 = VA_2$$

$$K_2 = \frac{W}{[(1+i)^k - 1]} = \frac{2,000,000}{\left[\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{10} - 1\right]}$$

$$K_2 = 3,180,183.18$$

9.10 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se requiere construir un fondo que permita disponer de una renta perpetua de \$500 mensuales. ¿Cuál debe ser el valor en el fondo, si reconoce un rendimiento del 10% capitalizable mensualmente?
R: \$60,000.00
2. Al fallecer una persona deja un legado a un sanatorio estipulado así: \$400,000 para la construcción y adquisición de equipos para la sección de terapia intensiva y \$2000 anuales para su funcionamiento a perpetuidad. Con el 4 % efectivo anual, determine el Valor actual del legado.
R: \$450,000.00
3. Qué cantidad es necesaria para patrocinar una serie de conferencias trimestrales que cuestan \$3,500, si las mismas se llevarán a cabo al principio de cada trimestre y en forma indefinida, suponiendo intereses al 5% convertible trimestralmente.
R: \$283,500.00
4. Se vende una acción con dividendos esperados de \$300 anuales a perpetuidad, con el primer dividendo para dentro de 4 años, a pagarse mediante una serie de 12 pagos anuales, empezando con el primer pago en 2 años. ¿Cuál será el valor del pago anual, si se contemplan intereses al 8%?
R: \$426.62
5. Encontrar el valor de la renta trimestral perpetua de un depósito de \$20,000, si se empieza a pagar luego de 3 años de haber realizado el depósito, tomando el 8% capitalizable trimestralmente.
R: \$497.35
6. Una señora ofrece donar a perpetuidad \$100 mensuales a un orfanato. ¿Cuál será el Valor actual de su ofrecimiento, si el primer pago lo realizará dentro de 5 meses, con una tasa de 8% capitalizable mensualmente?
R: \$14,606.58
7. Una persona quiere construir un fondo para otorgar un premio anual de \$20,000 en forma indefinida. Para ello deposita el día de hoy \$150,000 en una corporación que reconoce el 8% anual. ¿Cuánto tiempo debe dejar el dinero en depósito, antes de empezar la entrega del premio anual indefinido?
R: 7,64 años.

8. Se desea establecer un fondo perpetuo de becas para estudiantes de Auditoría, este fondo concederá una beca anual por la cantidad de \$3,000 y a perpetuidad, empezando hasta dentro de 10 años. Para este fondo se efectúa una serie de 5 depósitos anuales, con el primer depósito en un año, luego de lo cual ya no se realizan más depósitos. Si el fondo gana intereses a la tasa del 12%, ¿cuál será el valor del depósito anual?

R: \$2,500.92

9. Genoveva está evaluando la posibilidad de comprar un equipo dental nuevo, tiene dos opciones. La primera plantea pagar cuotas mensuales en \$200 a perpetuidad y adicionalmente pagos anuales de \$500 a perpetuidad. La segunda opción plantea pagos mensuales de \$200 cada mes, durante los primeros cinco años, y luego pagos a perpetuidad de \$700, cada dos años. Considerando una tasa de interés del 12% anual capitalizable mensualmente, ¿cuál es la mejor opción en términos económicos?

R: Opción 1: \$23,942.44; Opción 2: \$11,586.15;
la segunda opción es la mejor.

10. Un colegio calcula que el nuevo edificio de la sociedad de alumnos requerirá \$1,400 de mantenimiento al final de cada año por los próximos 10 años y, posteriormente, \$1,000 al final de cada año, en forma indefinida. ¿Qué donativo es necesario para asegurar el mantenimiento del edificio, suponiendo intereses de 4%?

R: \$28,244.36

11. Para mantener en buen estado las carreteras vecinales, la junta vecinal decide establecer un fondo para proveer las reparaciones futuras que se estiman en \$350,000 cada 10 años. Hallar el valor del fondo con la tasa efectiva del 6%.

R: \$442,563.09

12. En una localidad en que las inversiones tienen un rendimiento del 8% anual, con capitalización semestral, alguien ofrece a la venta un restaurante que tiene una utilidad anual promedio de \$60,000. Si los costos anuales operación del negocio ascienden a \$25,000 y se debe renovar el mobiliario del restaurante cada 5 años a un costo de \$100,000, determinar, de acuerdo con el rendimiento de las inversiones en la localidad, cuánto puede ofrecerse por el restaurante, suponiendo que las condiciones económicas permanecerán constantes.

R: \$220,694.21

13. Una entidad estatal puede usar el edificio A que requiere \$160,000 cada año como costo de alquiler y \$100,000 cada 5 años para reparaciones; o puede usar el edificio B, que requiere \$158,000 cada año como costo de alquiler y \$25,000 cada 2 años para reparaciones. Suponiendo una tasa del 8% de efectivo anual y que el edificio que se ocupe será por tiempo indefinido, ¿cuál de los dos edificios le resulta más conveniente utilizar?

R: Edificio A: 2, 373,070.57; Edificio B: 2, 283,240.38. El edificio B.

14. El eje de un torno cuesta \$15,000 y tiene que ser remplazado cada tres años al mismo costo; otro que cuesta \$20,000 será remplazado cada 6 años al mismo precio. ¿Al 6% de interés cuál será la oferta más económica?

R: Oferta 1: \$93,527.45; Oferta B: 67,787.54. La segunda opción.

15. Un silo sin tratamiento cuesta \$38,500 y dura 15 años. ¿Cuánto debería uno estar dispuesto a pagar adicionalmente por un silo tratado que dura 25 años, suponiendo intereses al 8% convertible trimestralmente?

R: \$9,234.30

16. Encuentre el Valor actual del siguiente flujo de fondos: \$14,000 el día de hoy, \$55,000 a los 6 años y \$5,000 anuales, al final de cada año de allí en adelante, si la tasa de interés es del 8%.

R: \$88,044.93

17. Repita el problema anterior considerando que la tasa de interés es el 8% anual capitalizable semestralmente.

R: \$86,624.71

18. Un viejo exalumno de una universidad desea establecer una beca permanente con su nombre. Piensa hacer donaciones de \$2,000 anuales durante 10 años, empezando dentro de un año. Y dejar \$100,000 adicionales cuando se muera. Si la tabla actuarial estima que el exestudiante vivirá a lo sumo 15 años a partir de hoy, ¿cuánto dinero podría concederse a cada uno de los cinco becarios dentro de un año, después del fallecimiento del exalumno y a perpetuidad, si la tasa de interés es del 8% anual?

R: \$2,281.14

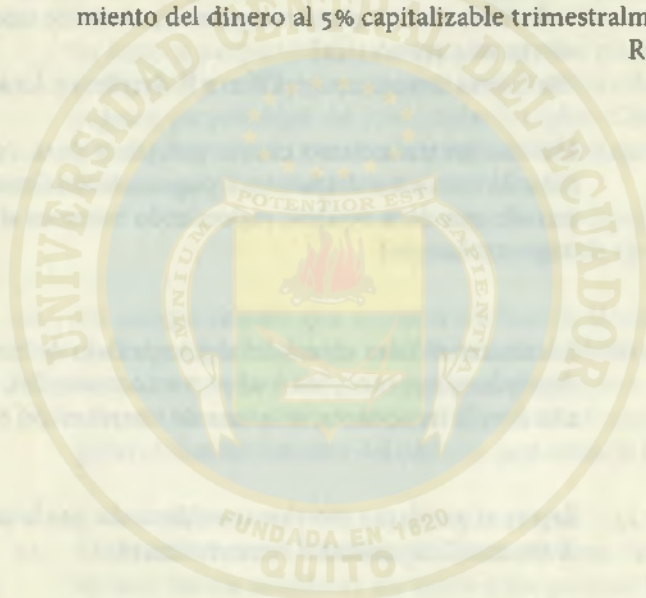
19. El costo inicial de una pequeña represa es de \$300,000. El costo anual de mantenimiento se estima en \$10,000 anuales y un sobre costo adicional de \$35,000 cada 5 años. Si se supone que la represa

tendrá una duración indefinida, ¿cuál será el costo capitalizado, a una tasa del 12% anual?

R: \$429,244.50

20. Una ciudad planea construir un nuevo estadio de fútbol con un costo de \$12 millones. El costo anual de mantenimiento se estima en \$25,000, - valor considerado al principio de cada año -; el césped artificial debe remplazarse cada 10 años, a un costo de \$150,000; la pintura tiene un costo de \$65,000 y debe pintarse cada 5 años. Si la ciudad espera que el estado dure indefinidamente, ¿cuál será el Valor actual de la inversión? Considere el rendimiento del dinero al 5% capitalizable trimestralmente.

R: \$12,979,245.05



www.cesga.com.ec

Omniū Potentior est Sapientia

www.cesga.com.ec

www.cesga.com.ec

www.cesga.com.ec

10

ANUALIDADES GENERALES

OBJETIVO GENERAL

Transformar una anualidad general en una anualidad ordinaria por el método del Pago equivalente o por el método de la Tasa equivalente; además, comprobar la igualdad de resultados que se obtienen al aplicar cualquiera de los métodos mencionados.

10.1 Definición

Una anualidad general es una serie definida de pagos periódicos iguales, realizados al inicio o al final de cada período, de tal manera que el período de pago y la capitalización de intereses no coinciden (AYRES Jr, 1998).

10.2 Clasificación

De acuerdo con la fecha en que se realiza el pago, las anualidades generales pueden ser:

- Anualidades generales vencidas, cuando el pago se realiza al final de cada período.
- Anualidades generales anticipadas, cuando el pago se realiza al inicio de cada período.

10.3 Anualidades equivalentes

Las anualidades generales deben transformarse en anualidades ordinarias; es decir, en anualidades en que los períodos de pago y capitalización de intereses coincidan. Existen dos métodos para transformar una anualidad general en una anualidad ordinaria (AYRES Jr, 1998).

El Criterio del pago equivalente: transforma el pago periódico dado, en un pago que coincida con la capitalización de intereses establecida.

En este texto se desarrollará el Criterio del pago equivalente para transformar las anualidades generales vencidas, en anualidades ordinarias vencidas.

El criterio de la tasa equivalente: transforma la tasa periódica establecida, en una tasa cuyo período de capitalización coincide con el período de pago.

El criterio de la tasa equivalente se puede aplicar en cualquier tipo de anualidad, sea esta anticipada o vencida.

10.4 Agrupamiento y distribución de los pagos

En el criterio del pago equivalente, las anualidades generales se presentan en dos grupos

A. Grupo Agrupamiento

Anualidades que presentan varios pagos por cada período de capitalización. A continuación se presentan dos ejemplos:

- Si se presenta una anualidad con pagos mensuales y capitalización trimestral, entonces habrá tres pagos por cada período de capitalización.
- De una anualidad con pagos semestrales y capitalización anual, se colige que habrá dos pagos por cada período de capitalización.

El pago equivalente agrupará todos los pagos que se presenten en cada período de capitalización; por esta razón, a este grupo se denomina Agrupamiento.

B. Grupo Distribución

Anualidades que presentan un pago por varios períodos de capitalización, a continuación se presentan dos ejemplos:

- Si hay una anualidad con pagos anuales y capitalización trimestral, entonces habrá tres pagos por cada período de capitalización.
- Cuando se presenta una anualidad con pagos semestrales y capitalización mensual, entonces habrá dos pagos por cada período de capitalización.

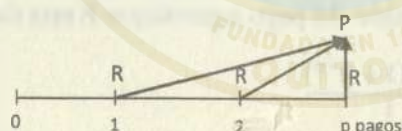
El pago equivalente distribuirá el pago periódico establecido en cada período de capitalización; por esta razón, a este grupo se denomina Distribución.

10.5 Pago equivalente

A continuación se presentan dos esquemas gráficos en los que se describen los grupos que generan el Pago equivalente en las anualidades vencidas:

Agrupamiento

Gráfico texto 10.5.a



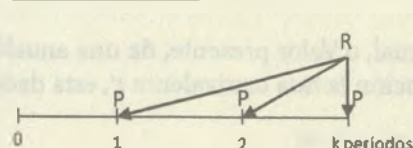
Grupo A: Factor de agrupación

$$P = R \left[\frac{i}{(1+i)^p - 1} \right]$$

En este esquema se puede apreciar cómo varios pagos periódicos se agrupan en un pago equivalente, que coincide con el período de capitalización.

Distribución

Gráfico texto 10.5.b



Grupo B: Factor de distribución

$$P = R \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right]$$

En este esquema se puede apreciar cómo se distribuye el pago periódico R en varios pagos equivalentes, uno para cada período de capitalización.

10.6 Tasa equivalente

Se transforma la anualidad general en anualidad ordinaria, cambiando la tasa de interés dada por una tasa equivalente, en la cual el nuevo período de capitalización coincide con el período de pago:

$$(1 + i)^m = (1 + i')^{m'}$$

Donde:

i, m : Tasa periódica y frecuencia de capitalización dadas

i' : Tasa periódica equivalente

m' : Frecuencia del pago periódico

Al despejar i' (Tasa Equivalente) se tiene:

$$i' = (1 + i)^{m/m'} - 1$$

10.7 Valor futuro y Valor actual de una anualidad general vencida

- El Valor futuro, o Monto, de una anualidad general vencida, en función del pago equivalente P , está dado por:

$$VF = \frac{P[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

- El Valor actual, o Valor presente, de una anualidad general vencida, en función del pago equivalente P , está dado por:

$$VA = \frac{P[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

- Tanto para el cálculo del Valor futuro, como para el del Valor actual, deberá tenerse presente el número de pagos de la anualidad equivalente.
- El Valor futuro, o Monto, de una anualidad general vencida, en función de la tasa equivalente i' , está dado por:

$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'}$$

- El Valor actual, o Valor presente, de una anualidad general vencida, en función la tasa equivalente i' , está dado por:

$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$$

10.8 Pago periódico de una anualidad general vencida

En primer lugar, se encuentra el valor del pago equivalente P , sea en función del Valor futuro o Valor actual de la anualidad general y luego, utilizando la expresión del factor de agrupación o del factor de agrupamiento, se encuentra el valor del pago periódico R .

10.9 Valor futuro y Valor actual de una anualidad general anticipada

- El Valor Futuro, o Monto de una anualidad general anticipada en función de la tasa equivalente i' , esta dado por:

$$VF = R \left[\frac{(1 + i')^{(n+1)} - 1}{i'} - 1 \right]$$

- El Valor actual, o Valor presente de una Anualidad General Anticipada, en función la tasa equivalente i' , está dado por:

$$VA = R \left[\frac{1 - (1 + i')^{-(n+1)}}{i'} + 1 \right]$$

10.10 Pago periódico de una anualidad general anticipada

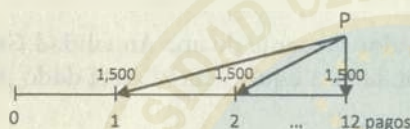
El valor del pago periódico R de una anualidad general anticipada, se determina utilizando las expresiones del Valor futuro y del Valor actual, tal como se hizo en el caso de las anualidades ordinarias.

10.11 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor del pago equivalente en las siguientes anualidades generales:

Caso	Renta	Periodo de pago	Tasa nominal	Capitalización
a	\$1,500	Mensual	3%	Anual
b	\$3,500	Semestral	6%	Trimestral
c	\$2,800	Trimestral	5%	Semestral
d	\$5,000	Anual	10%	Trimestral

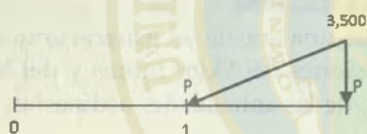
Gráfico problema 10.1.a



Grupo A: Factor de agrupación

$$P = 1,500 \left[\frac{\frac{3}{100}}{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1} \right] = \$ 18,246.18$$

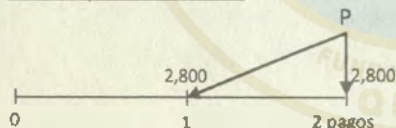
Gráfico problema 10.1.b



Grupo B: Factor de distribución

$$P = 3,500 \left[\frac{\frac{6}{400}}{\left(1 + \frac{6}{400}\right)^2 - 1} \right] = \$ 1,736.97$$

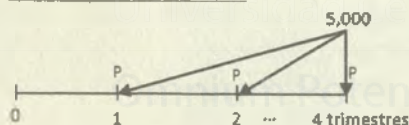
Gráfico problema 10.1.c



Grupo A: Factor de agrupación

$$P = 2,800 \left[\frac{\frac{5}{200}}{\left(1 + \frac{5}{200}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] = \$ 5,634.78$$

Gráfico problema 10.1.d



Grupo B: Factor de distribución

$$P = 5,000 \left[\frac{\frac{10}{400}}{\left(1 + \frac{10}{400}\right)^4 - 1} \right] = \$ 1,204.09$$

2. Aplicando el criterio del pago equivalente, calcular el Valor actual y el Valor futuro de las siguientes anualidades generales:

Caso	Renta	Período de pago	Plazo	Tasa nominal	Capitalización
a	\$1,000	Anual	4 años	3%	Mensual
b	\$2,500	Trimestral	5 años	6%	Semestral
c	\$3,800	Semestral	4 años	5%	Trimestral
d	\$4,500	Mensual	5 años	10%	Anual

- a. Renta de \$1000 anuales a 4 años plazo, con una tasa del 3% capitalizable mensualmente

Gráfico problema 10.2.a.1

Grupo B: Factor de distribución

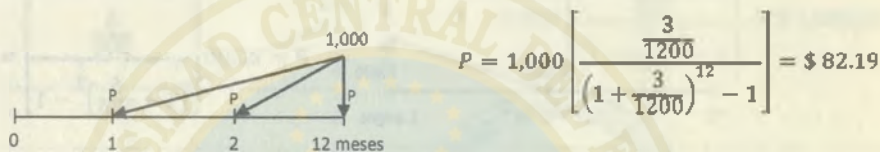
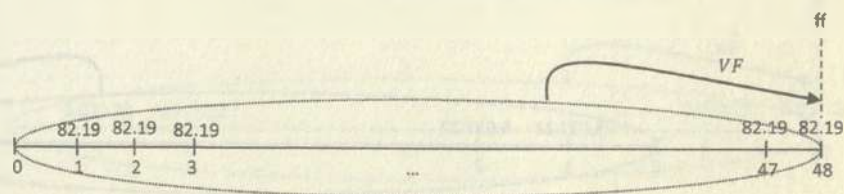


Gráfico problema 10.2.a.2



$$VA = \frac{P[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} = 1,000 \left[\frac{\frac{3}{1200}}{\left(1 + \frac{3}{1200}\right)^{12} - 1} \right] \frac{1 - \left(1 + \frac{3}{1200}\right)^{-48}}{\frac{3}{1200}} = \$ 3,713.40$$

Gráfico problema 10.2.a.3



$$VF = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{i} = 1,000 \left[\frac{\frac{3}{1200}}{\left(1 + \frac{3}{1200}\right)^{12} - 1} \right] \left[\frac{\left(1 + \frac{3}{1200}\right)^{48} - 1}{\frac{3}{1200}} \right] = \$4,186.22$$

- b. Renta de \$2,500 trimestrales a 5 años plazo, con una tasa del 6% capitalizable semestralmente.

Gráfico problema 10.2.b.1

Grupo A: Factor de agrupación

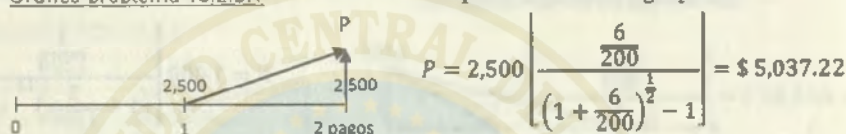


Gráfico problema 10.2.b.2

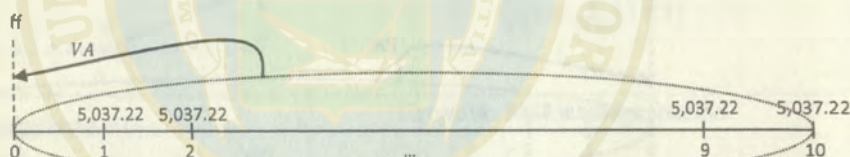


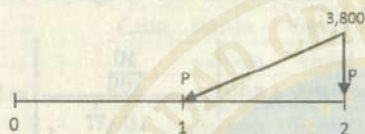
Gráfico problema 10.2.b.3



$$VF = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{i} = 2,500 \left[\frac{\frac{6}{200}}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^2 - 1} \right] \left[\frac{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{10} - 1}{\frac{6}{200}} \right] = \$57,746.12$$

- c. Renta de \$3,800 semestrales a 4 años plazo, con una tasa del 5% capitalizable trimestralmente.

Gráfico problema 10.2.c.1



Grupo B: Factor de distribución

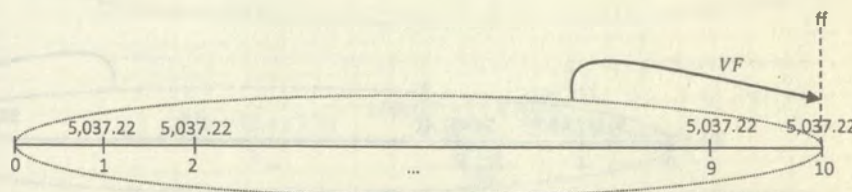
$$P = 3,800 \left[\frac{\frac{5}{400}}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^2 - 1} \right] = \$1,888.20$$

Gráfico problema 10.2.c.2



$$VA = \frac{P[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = 3,800 \left[\frac{\frac{5}{400}}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^2 - 1} \right] \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{-16}}{\frac{5}{400}} \right] = \$27,228.38$$

Gráfico problema 10.2.c.3



$$VF = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{i} = 3,800 \left[\frac{\frac{5}{400}}{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^2 - 1} \right] \left[\frac{\left(1 + \frac{5}{400}\right)^{16} - 1}{\frac{5}{400}} \right] = \$ 33,215.61$$

- d. Renta de \$4,500 mensuales a 5 años plazo, con una tasa del 10% capitalizable anualmente.

Gráfico problema 10.2.d.1

Grupo A: Factor de agrupación

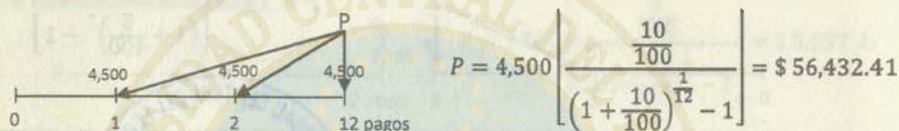
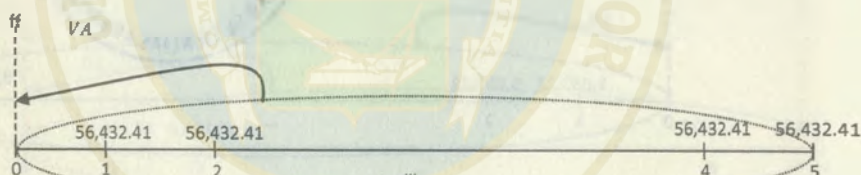
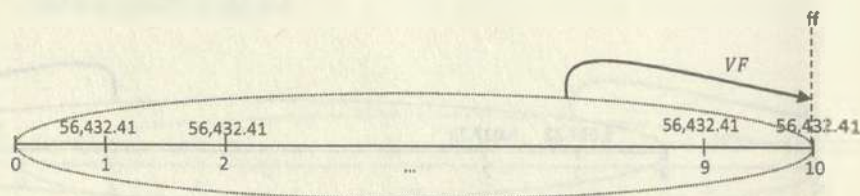


Gráfico problema 10.2.d.2



$$VA = \frac{P[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = 4,500 \left[\frac{\frac{10}{100}}{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1} \right] \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{10}{100}\right)^{-5}}{\frac{10}{100}} \right] = \$ 213,923.25$$

Gráfico problema 10.2.d.3



$$VF = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{i} = 4,500 \left[\frac{\frac{10}{100}}{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1} \right] \left[\frac{\left(1 + \frac{10}{100}\right)^5 - 1}{\frac{10}{100}} \right] = \$ 344,525.54$$

3. Aplicando el criterio de la tasa equivalente, calcular el Valor actual y el Valor futuro de las siguientes anualidades generales.

Sugerencia: Utilice las memorias de la calculadora para almacenar los cálculos parciales.

Caso	Renta	Período de pago	Plazo	Tasa nominal	Capitalización
A	\$1,000	Anual	4 años	3%	Mensual
B	\$2,500	Trimestral	5 años	6%	Semestral
C	\$3,800	Semestral	4 años	5%	Trimestral
D	\$4,500	Mensual	5 años	10%	Anual

- a. Renta de \$1,000 anuales a 4 años plazo, con una tasa del 3% capitalizable mensualmente.

Tasa nominal $j = 3\%$

Tasa Equivalente:

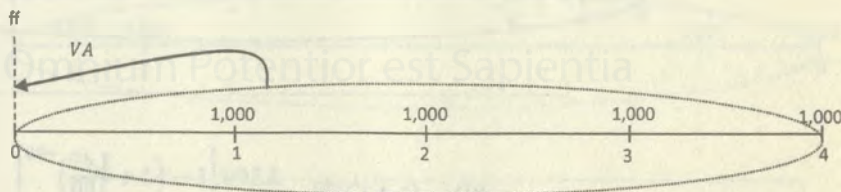
Frecuencia de capitalización $m = 12$ $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$

Frecuencia equivalente $m' = 1$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{3}{1200} \right)^{12/1} - 1 \right] \times 100 = 3,04\%$$

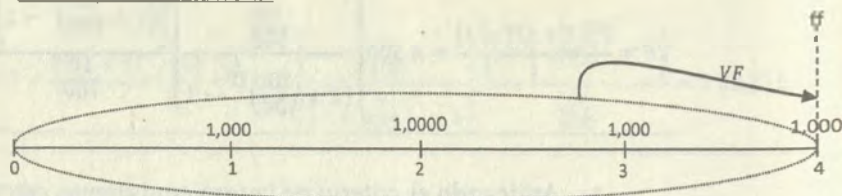
tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{3}{1200}$

Gráfico problema 10.3.a.1



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'} = \frac{1,000 \left[1 - \left(1 + \frac{3,04}{100} \right)^{-4} \right]}{\frac{3,04}{100}} = \$ 3,713.40$$

Gráfico problema 10.3.a.2



$$VF = \frac{R[(1+i')^n - 1]}{i'} = \frac{1,000 \left[\left(1 + \frac{3.04}{100}\right)^4 - 1 \right]}{\frac{3.04}{100}} = \$4,186.22$$

- b. Renta de \$2,500 trimestrales a 5 años plazo, con una tasa del 6% capitalizable semestralmente.

Tasa nominal $j = 6\%$

Frecuencia de capitalización $m = 2$

Frecuencia equivalente $m' = 4$

tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{6}{200}$

Tasa Equivalente:

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

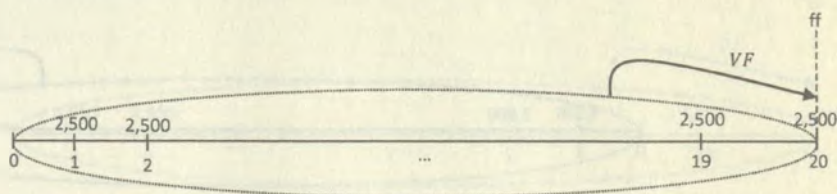
$$i' = \left[\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{2/4} - 1 \right] \times 100 = 1.49\%$$

Gráfico problema 10.3.b.1



$$VA = \frac{R[1 - (1+i')^{-n}]}{i'} = \frac{2,500 \left[1 - \left(1 + \frac{1.49}{100}\right)^{-20} \right]}{\frac{1.49}{100}} = \$42,968.53$$

Gráfico problema 10.3.b.2



$$VF = \frac{R[(1+i')^n - 1]}{i'} = \frac{2,500 \left[\left(1 + \frac{1.49}{100}\right)^{20} - 1 \right]}{\frac{1.49}{100}} = \$57,746.12$$

- c. Renta de \$3,800 semestrales a 4 años plazo, con una tasa del 5% capitalizable trimestralmente.

Tasa nominal $j = 5\%$

Tasa Equivalente:

Frecuencia de capitalización $m = 4$

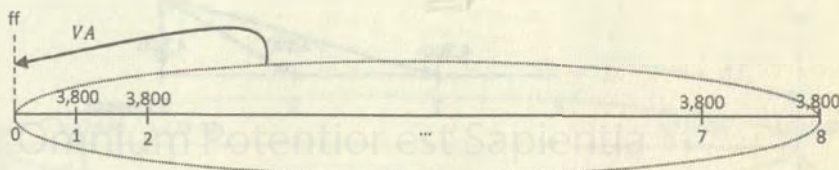
$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

Frecuencia equivalente $m' = 2$

$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{6}{200}$$

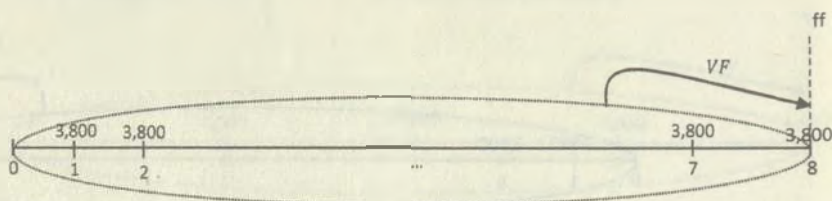
$$i' = \left[\left(1 + \frac{5}{400}\right)^{4/2} - 1 \right] \times 100 = 2,52\%$$

Gráfico problema 10.3.c.1



$$VA = \frac{R[1 - (1+i')^{-n}]}{i'} = \frac{3,800 \left[1 - \left(1 + \frac{2.52}{100}\right)^{-8} \right]}{\frac{2.52}{100}} = \$27,228.38$$

Gráfico problema 10.3.c.2



$$VF = \frac{R[(1+i')^n - 1]}{i'} = \frac{3,800 \left[\left(1 + \frac{2.52}{100}\right)^8 - 1 \right]}{\frac{2.52}{100}} = \$33,215.61$$

- d. Renta de \$4,500 mensuales a 5 años de plazo, con una tasa del 10% capitalizable anualmente.

Tasa nominal $j = 10\%$

Tasa Equivalente:

Frecuencia de capitalización $m = 1$

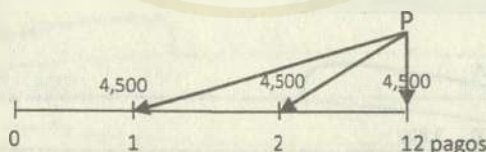
$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

Frecuencia equivalente $m' = 12$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{1/12} - 1 \right] \times 100 = 0,80\%$$

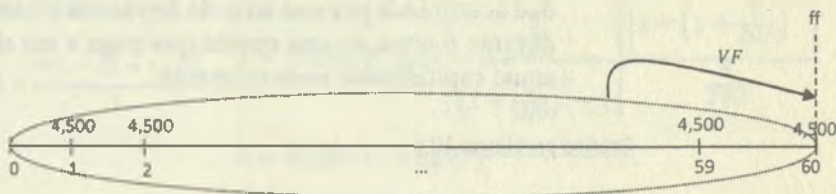
tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{10}{100}$

Gráfico problema 10.3.d.1



$$VA = \frac{R[1 - (1+i')^{-n}]}{i'} = \frac{4,500 \left[1 - \left(1 + \frac{0.80}{100}\right)^{-60} \right]}{\frac{0.80}{100}} = \$213,923.25$$

Gráfico problema 10.3.d.2

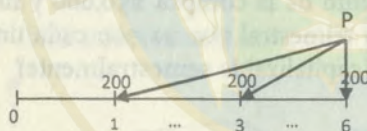


$$VF = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} = \frac{4,500 \left[\left(1 + \frac{0.80}{100}\right)^{60} - 1 \right]}{\frac{0.80}{100}} = \$ 344,525.64$$

4. Al final de cada mes, Juan deposita \$200 en una cooperativa que reconoce el 12% anual capitalizable semestralmente. ¿Cuánto tendrá en su cuenta al final de 5 años? Utilice el criterio del pago equivalente.

Gráfico problema 10.4.a

Grupo A: Factor de agrupación



$$P = 200 \left[\frac{\frac{12}{200}}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^{\frac{1}{6}} - 1} \right] = \$ 1,229.66$$

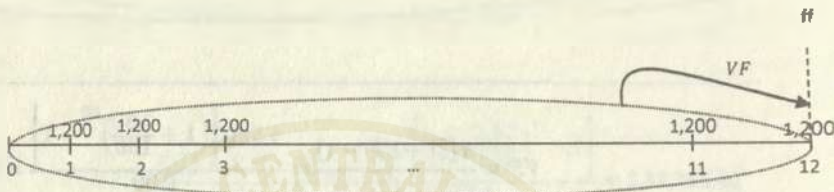
Gráfico problema 10.4.b



$$VF = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{i} = 200 \left[\frac{\frac{12}{200}}{\left(1 + \frac{12}{200}\right)^{\frac{1}{6}} - 1} \right] \frac{\left[\left(1 + \frac{12}{200}\right)^{10} - 1 \right]}{\frac{12}{200}} = \$ 16,207.90$$

5. Aplicando el criterio de la tasa equivalente, determinar la cantidad acumulada por una serie de depósitos semestrales de \$1,200 durante 6 años, en una cuenta que paga a sus ahorristas el 12% anual capitalizable mensualmente.

Gráfico problema 10.5

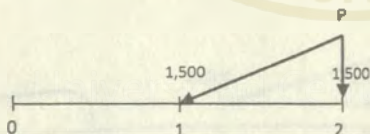


$$VF = \frac{R[(1+i')^n - 1]}{i'} = \frac{1,200 \left[\left(1 + \frac{6.15}{100}\right)^{12} - 1 \right]}{\frac{6.15}{100}} = \$ 20,424.51$$

6. ¿Cuál es el Valor actual de un negocio, por el cual el comprador entrega al momento de la compra \$50,000 y firma 10 pagarés con vencimiento trimestral por \$1,500 cada uno, si la tasa de interés es del 8% capitalizable semestralmente?

Criterio del pago equivalente

Gráfico problema 10.6.a



Grupo A: Factor de agrupación

$$P = 1,500 \left[\frac{\frac{8}{200}}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 - 1} \right] = \$ 3,029.71$$

Gráfico problema 10.6.b



$$X = 50,000 + VA_1$$

$$X = 50,000 + \frac{P[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$X = 50,000 + 1,500 \left[\frac{\frac{8}{200}}{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-5}}{\frac{8}{200}} \right]$$

$$X = 50,000 + 13,487.71$$

$$X = \$63,487.71$$

Criterio de la tasa equivalente

Tasa nominal $j = 8\%$

Tasa equivalente:

Frecuencia de capitalización $m = 2$

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

Frecuencia equivalente $m' = 4$

$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{8}{200}$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{2/4} - 1 \right] \times 100 = 1,98\%$$

Gráfico problema 10.6.c



$$X = 50,000 + VA_1$$

$$X = 50,000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} \quad X = 50,000 + 1,500 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{1.98}{100}\right)^{-10}}{\frac{1.98}{100}} \right]$$

$$X = 50,000 + 13,487.71$$

$$X = \$63,487.71$$

7. Hallar el Monto o Valor futuro y el Valor actual de una serie de depósitos trimestrales por anticipado de \$1,500 durante 5 años, en una cuenta que reconoce el 12 % anual capitalizable mensualmente.

Tasa nominal $j = 12\%$ Frecuencia de capitalización $m = 12$ Frecuencia equivalente $m' = 4$

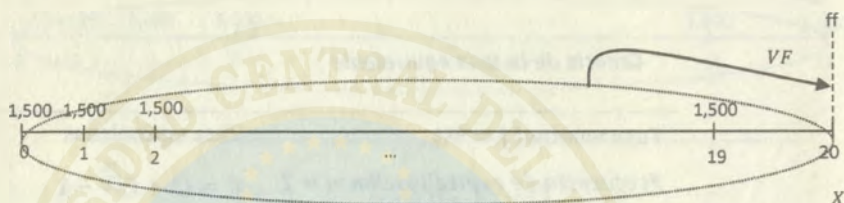
$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{12}{1200}$$

Tasa equivalente:

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

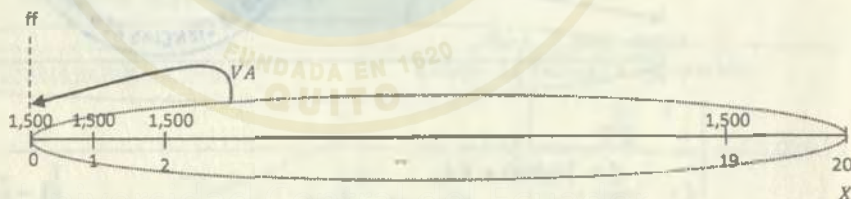
$$i' = \left[\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{12/4} - 1 \right] \times 100 = 3,03\%$$

Gráfico problema 10.7.a



$$VF = R \left[\frac{(1 + i')^{(n+1)} - 1}{i'} - 1 \right] = 1,500 \left[\frac{\left(1 + \frac{3.03}{100} \right)^{(20+1)} - 1}{\frac{3.03}{100}} - 1 \right] = \$ 41,654.24$$

Gráfico problema 10.7.b



$$VA = R \left[\frac{1 - (1 + i')^{-(n+1)}}{i'} + 1 \right] = 1,500 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{3.03}{100} \right)^{-(20+1)}}{\frac{3.03}{100}} + 1 \right] = \$ 22,928.56$$

8. Hallar el Monto o Valor futuro y el Valor actual de una serie de depósitos semestrales por anticipado de \$4,500 durante 8 años, en una cuenta que reconoce el 4 %.

Tasa nominal $j = 4\%$

Tasa Equivalente:

Frecuencia de capitalización $m = 1$ $i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$ Frecuencia equivalente $m' = 2$ tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{4}{100}$

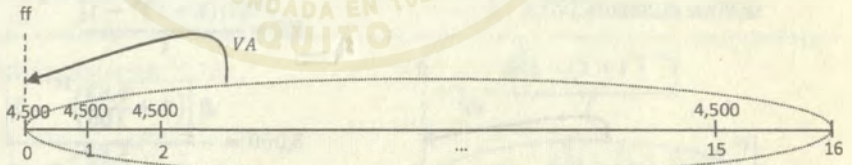
$$i' = \left[\left(1 + \frac{4}{100} \right)^{1/2} - 1 \right] \times 100 = 1,98\%$$

Gráfico problema 10.8.a



$$VF = R \left[\frac{(1 + i')^{(n+1)} - 1}{i'} - 1 \right] = 4,500 \left[\frac{\left(1 + \frac{1,98}{100} \right)^{(16+1)} - 1}{\frac{1,98}{100}} - 1 \right] = \$ 85,407.75$$

Gráfico problema 10.8.b

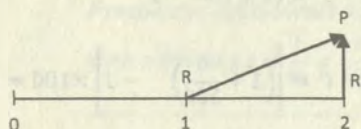


$$VA = R \left[\frac{1 - (1 + i')^{-(n+1)}}{i'} + 1 \right] = 4,500 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{1,98}{100} \right)^{-(16+1)}}{\frac{1,98}{100}} + 1 \right] = \$ 62,406.60$$

9. ¿Qué depósito semestral deberá realizarse durante 8 años en una cuenta que paga el 12%, para luego de ese tiempo disponer de \$5,000?

Criterio del pago equivalente:

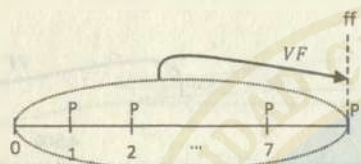
Gráfico problema 10.9.a



Grupo A: Factor de agrupación

$$P = R \left[\frac{\frac{12}{100}}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right]$$

Gráfico problema 10.9.b



$$VF = \frac{P[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$5,000 = R \left[\frac{\frac{12}{100}}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] \left[\frac{(1 + \frac{12}{100})^8 - 1}{\frac{12}{100}} \right]$$

$$R = 5,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^8 - 1} \right] = \$ 197.50$$

Criterio de la tasa equivalente:Tasa nominal $j = 12\%$

Tasa equivalente:

Frecuencia de capitalización $m = 1$

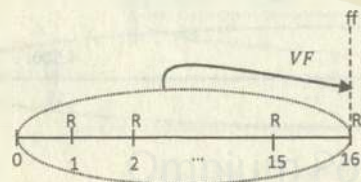
$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

Frecuencia equivalente $m' = 2$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{12}{100}\right)^{1/2} - 1 \right] \times 100 = 5,83\%$$

tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{12}{100}$

Gráfico problema 10.9.c



$$VF = \frac{R[(1+i')^n - 1]}{i'}$$

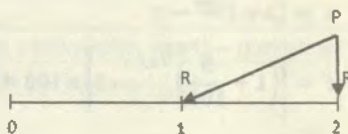
$$5,000 = \frac{R \left[\left(1 + \frac{5.83}{100}\right)^{16} - 1 \right]}{\frac{5.83}{100}}$$

$$R = \frac{5,000 \times \frac{5.83}{100}}{\left[\left(1 + \frac{5.83}{100}\right)^{16} - 1 \right]} = \$ 197.50$$

10. El día de hoy se invierten \$15,000 en una cuenta que reconoce el 8% capitalizable semestralmente. ¿Cuál será el valor del retiro anual que se podrá realizar luego de 1 año, durante 5 años?

Criterio del pago equivalente:

Gráfico problema 10.10.a



Grupo A: Factor de distribución

$$P = R \left[\frac{i}{(1+i)^k - 1} \right]$$

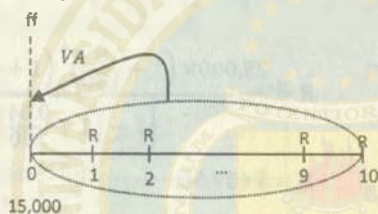
$$VA = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$15,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$\frac{15,000 \times i}{1 - (1+i)^{-n}} = R$$

$$\frac{15,000 \times i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{P[(1+i)^k - 1]}{i}$$

Gráfico problema 10.10.b



$$P = 15,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 - 1}{1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-10}} \right]$$

$$P = \$3,772.70$$

Criterio de la tasa equivalente:Tasa nominal $j = 8\%$ Frecuencia de capitalización $m = 2$ Frecuencia equivalente $m' = 1$

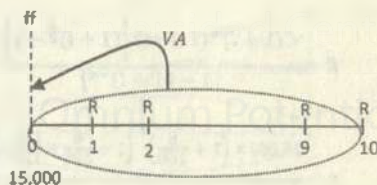
$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{8}{200}$$

Tasa equivalente:

$$i' = (1+i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{8}{200}\right)^{2/1} - 1 \right] \times 100 = 8,16\%$$

Gráfico problema 10.10.c



$$VA = \frac{R[1 - (1+i')^{-n}]}{i'}$$

$$15,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{8.16}{100}\right)^{-5} \right]}{\frac{8.16}{100}}$$

$$R = \frac{15,000 \times \frac{8.16}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{8.16}{100}\right)^{-5} \right]} = \$3,772.70$$

11. El día de hoy se invierten \$25,000 al 8% efectivo anual para proporcionar a Pedro una renta mensual durante 10 años, recibiendo el primer pago en 5 años. Hallar el valor del pago mensual.

Criterio de la tasa equivalente

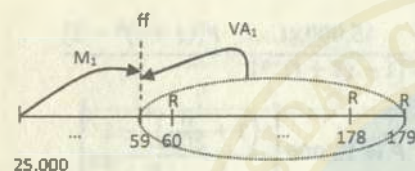
Tasa nominal $j = 8\%$ Frecuencia de capitalización $m = 1$ Frecuencia equivalente $m' = 12$ tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{8}{100}$

Tasa equivalente:

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{8}{100} \right)^{1/12} - 1 \right] \times 100 = 0,64\%$$

Gráfico problema 10.11.a



$$M_1 = VA_1$$

$$C(1+i)^n(1+rt) = \frac{R[1 - (1+i')^{-n}]}{i'}$$

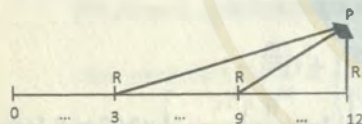
$$R = \frac{C(1+i)^n(1+rt)i'}{[1 - (1+i')^{-n}]}$$

$$R = \frac{25,000 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^4 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{11}{12}\right) \times \frac{0,64}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0,64}{100}\right)^{-120}\right]}$$

$$R = \$437,56$$

Criterio del pago equivalente

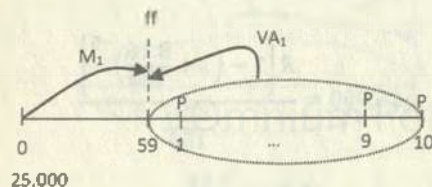
Gráfico problema 10.11.b



Grupo A: Factor de agrupación

$$P = R \left[\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1} \right]$$

Gráfico problema 10.11.c



$$C(1+i)^n(1+rt) = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1} \right]$$

$$R = \frac{C(1+i)^n(1+rt) \left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1 \right]}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{25,000 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^4 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{11}{12}\right) \times \left[\left(1 + \frac{8}{100}\right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right]}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{-12} \right]}$$

$$M_1 = VA_1$$

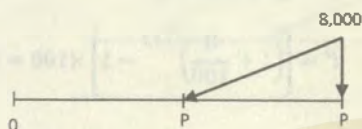
$$R = \$437,56$$

$$C(1+i)^n(1+rt) = R \left[\frac{i}{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1} \right] \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

12. Con intereses al 6% convertible semestralmente, sustituir pagos de \$8,000 al final de cada año, por pagos equivalentes al final de cada mes.

Pago equivalente: anual – semestral

Gráfico problema 10.12.a

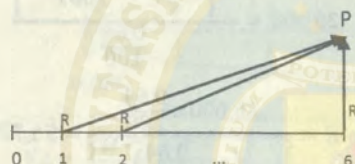


Grupo B: Factor de distribución

$$P = 8,000 \left[\frac{\frac{6}{200}}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^2 - 1} \right] = \$ 3,940.89$$

Pago equivalente: Semestral – mensual, con capitalización semestral.

Gráfico problema 10.12.b



Grupo B: Factor de agrupación

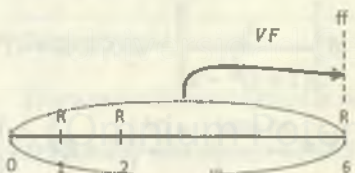
$$P = R \left[\frac{i}{\left(1 + i\right)^{\frac{1}{k}} - 1} \right]$$

$$8,000 \left[\frac{\frac{6}{200}}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^2 - 1} \right] = R \left[\frac{\frac{6}{200}}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{\frac{1}{6}} - 1} \right]$$

$$R = 8,000 \left[\frac{\left[\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{\frac{1}{6}} - 1\right]}{\left(1 + \frac{6}{200}\right)^2 - 1} \right] = \$ 648.75$$

Tasa Equivalente: semestral – mensual

Gráfico problema 10.12.c



$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'}$$

$$3,940.89 = \frac{R \left[\left(1 + \frac{0.49}{100}\right)^6 - 1 \right]}{\frac{0.49}{100}}$$

$$R = \frac{3,940.89 \times \frac{0.49}{100}}{\left[\left(1 + \frac{0.49}{100}\right)^6 - 1 \right]} = \$ 648.75$$

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{6}{200}\right)^{2/12} - 1 \right] \times 100 \approx 0.49\%$$

13. Una deuda de \$20,000 debe amortizarse con 12 pagos mensuales vencidos. Aplicando el criterio de la Tasa Equivalente, hallar el valor de estos pagos a la tasa efectiva del 8%.

Criterio de la tasa equivalente:

Tasa nominal $j = 8\%$

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

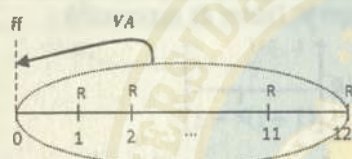
Frecuencia de capitalización $m = 1$

Frecuencia equivalente $m' = 12$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{8}{100} \right)^{1/12} - 1 \right] \times 100 = 0,64\%$$

tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{8}{100}$

Gráfico problema 10.13.a



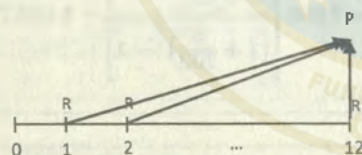
$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$$

$$20,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{0,64}{100} \right)^{-12} \right]}{\frac{0,64}{100}}$$

$$R = \frac{20,000 \times \frac{0,64}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0,64}{100} \right)^{-12} \right]} = \$1,737.19$$

Criterio del pago equivalente:

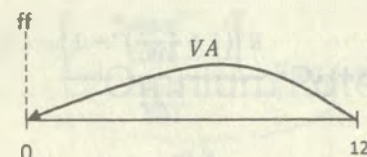
Gráfico problema 10.13.b



Factor de agrupación

$$P = R \left[\frac{i}{(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1} \right]$$

Gráfico problema 10.13.c



$$R \left[\frac{i}{(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1} \right] = 20,000(1 + i)^1$$

$$R = \frac{20,000(1 + i)^1}{i} \left[(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1 \right]$$

$$VA = 20,000$$

$$P(1 + i)^{-1} = 20,000$$

$$P = 20,000(1 + i)^1$$

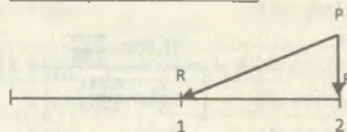
$$R = \frac{20,000 \left(1 + \frac{8}{100} \right)^1 \left[\left(1 + \frac{8}{100} \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right]}{\frac{8}{100}}$$

$$R = \$1,737.19$$

14. Con intereses al 8% capitalizable trimestralmente, ¿qué pagos iguales, hechos al final de cada semestre, por 10 años amorti-

zarán una deuda de \$15,000? Aplique el criterio del pago equivalente y compruebe el resultado mediante el criterio de la tasa equivalente.

Gráfico problema 10.14.a



Grupo B: Factor de Distribución

$$P = R \left[\frac{\frac{8}{400}}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^2 - 1} \right]$$

Gráfico problema 10.14.b



$$VA = \frac{P[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$15,000 = R \left[\frac{\frac{8}{400}}{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^2 - 1} \right] \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{400}\right)^{-40}}{\frac{8}{400}} \right]$$

$$R = \frac{15,000 \left[\left(1 + \frac{8}{400}\right)^2 - 1 \right]}{\left[1 - \left(1 + \frac{8}{400}\right)^{-40} \right]} = \$1,107.64$$

Tasa nominal $j = 8\%$

Tasa equivalente:

Frecuencia de capitalización $m = 4$

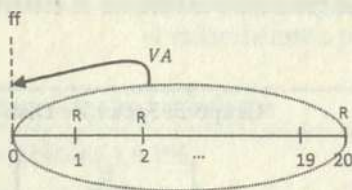
$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

Frecuencia equivalente $m' = 2$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{8}{400}\right)^2 - 1 \right] \times 100 = 4,04\%$$

$$\text{tasa periódica } i = \frac{j}{m} = \frac{8}{400}$$

Gráfico problema 10.14.c



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$$

$$15,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{4.04}{100} \right)^{-20} \right]}{\frac{4.04}{100}}$$

$$R = \frac{15,000 \times \frac{4.04}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{4.04}{100} \right)^{-20} \right]} = \$1,107.64$$

15. Una persona puede ahorrar \$500 trimestrales e invertirlos al 5% semestralmente. Aplicando el criterio de la tasa equivalente, hallar el número de depósitos completos y el pago final junto con el último pago, con el objeto de tener \$15,000 en el fondo.

Tasa nominal $j = 5\%$

Frecuencia de capitalización $m = 2$

Frecuencia equivalente $m' = 4$

tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{5}{200}$

Tasa Equivalente:

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{5}{200} \right)^{\frac{2}{4}} - 1 \right] \times 100 = 1.24\%$$

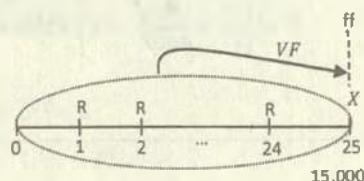
Gráfico problema 10.15.a



$$n = \frac{\log \left[\frac{VF \times i}{R} + 1 \right]}{\log(1 + i)}$$

$$n = \frac{\log \left[\frac{15,000 \times \frac{1.24}{100}}{500} + 1 \right]}{\log \left(1 + \frac{1.24}{100} \right)} = 25.66 \text{ pagos}$$

Gráfico problema 10.15.b



$$VF + X = 15,000$$

$$\frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'} + X = 15,000$$

$$\frac{500 \left[\left(1 + \frac{1.24}{100} \right)^{25} - 1 \right]}{\frac{1.24}{100}} + X = 15,000$$

$$14,553.69 + X = 15,000$$

$$X = \$446.31$$

10.12 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Comprobar el valor del pago equivalente y la tasa equivalente de cada una de las siguientes anualidades generales:

Caso	Pago	Intervalo de pago	Tasa de interés	Pago equivalente	Tasa Equivalente
A	\$500	6 meses	5% convertible trimestral	\$248.45	2,52%
B	\$1,000	1 año	3% convertible mensual	\$82.19	3,04%
C	\$250	1 mes	5% convertible semestral	\$1,515.55	0,41%
D	\$800	3 meses	6% efectivo anual	\$3,271.13	1,47%

2. Encontrar el monto y el Valor actual de 10 pagos trimestrales de \$1,500, si la tasa de interés es del 25% capitalizable cada mes.

R: \$20,128.65; \$10,843.49

3. Una compañía deposita \$1,000 al final de cada mes en un fondo de depreciación que gana un interés del 8% capitalizable cada semestre. ¿Cuánto habrá en el fondo al término de 2 años?

R: \$25,900.19

4. Hallar el valor de contado de un equipo industrial que se ha pagado mediante 12 cuotas trimestrales de \$450, con una tasa de interés del 5.2% capitalizable mensualmente.

R: \$4,968.33

5. El Banco Nacional de Crédito Rural otorga un préstamo a un grupo de campesinos bajo la siguiente forma de pago: \$4,500 trimestrales durante 5 años, debiéndose dar el primer pago en 2 años. Aplicando el criterio de la tasa equivalente, encuentre el valor del préstamo, si la tasa de interés es del 12% con capitalización mensual.

R: \$54,173.29

6. Un automóvil cuyo precio de contado es de \$63,000 es vendido con \$6,300 de enganche y el saldo insoluto a pagar en 24 mensualidades, con una tasa de interés del 30% anual capitalizable cada semestre. Encuentre el valor de los pagos mensuales.

R: \$3,120.29

7. Martín compra una casa en \$234,000 a 20 años de plazo, dando un enganche del 5% del precio al contado y el saldo en pagos mensuales con el 14% de interés capitalizable cada año. Hallar el valor del pago mensual.

R: \$2,632.12

8. Sofía compra un automóvil usado avaluado en US \$13,400. Paga US \$3,400 de cuota inicial y acuerda pagar US \$1,000 al final de cada mes. Aplicando el criterio del pago equivalente hallar el número de pagos completos y el pago final, un mes después del último pago, si la tasa de interés es del 14% capitalizable cada trimestre.

R: 10 pagos completos, pago adicional de \$687.61 (un mes más tarde).

9. Suponiendo una tasa de interés del 9% convertible cada trimestre, ¿qué depósitos iguales hechos al final de cada semestre, durante 4 años y 6 meses, acumularán \$50,000?

R: \$4,619.11

10. Una secretaria deposita cada mes \$180 de su sueldo en una cuenta de ahorros que paga el 12% capitalizable trimestralmente. ¿Cuántos depósitos y cuál es el valor del depósito adicional, realizado junto con el último depósito, para reunir \$2,800?

R: $n = 14$; \$111.21

11. Un vehículo cuyo valor de contado es de \$25,000, se vende con un pago inicial de \$10,000 y el saldo en pagos mensuales de \$1,800. Si la tasa de interés cargada es del 8% capitalizable cada semestre, encuentre el número de pagos completos necesarios y el pago adicional, junto con el último pago, para saldar la deuda.

R: $n = 8$; 1,070.38

12. Se conviene pagar una deuda con abonos de \$1,700 a comienzos de cada trimestre, durante 4 años. Hallar el valor de la deuda con la tasa del 30% capitalizable cada mes.

R: \$16,531.50

13. La compañía Pichincha desea reunir \$100,000 en un Fondo de Acumulación al término de 7 años. ¿Qué depósito hecho al inicio de cada semestre es necesario, si el fondo paga el 5% capitalizable cada año?

R: \$5,919.90

14. Se puede comprar un computador que cuesta \$1,070 mediante 18 pagos mensuales, comenzando con el primer pago al momento de la compra. Determine el valor del pago, si se aplica una tasa de interés del 8% capitalizable trimestralmente.

R: \$62.84

15. ¿Cuántos depósitos semestrales de \$15,000, realizados al principio de cada semestre y con qué pago adicional, al vencimiento del plazo, serán necesarios para obtener un monto de \$200,000, si el dinero se deposita en una cuenta que paga el 12% capitalizable cada mes?

R: $n = 9$; \$15,870.93



Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapiencia



1

1



AMORTIZACIÓN

OBJETIVO GENERAL

Determinar el pago periódico de una deuda y construir la tabla de amortización de la misma para todos los períodos, como una aplicación de las anualidades; además, calcular el valor de los derechos del acreedor, una vez realizado un número determinado de pagos.

11.1 Introducción

Un compromiso financiero adquirido el día de hoy va a ser cubierto por una serie de pagos periódicos que se desglosan en dos partes:

- Una parte cubre el interés vencido de la deuda en ese período.
- La parte restante se convierte en abono al capital.

Es decir, la deuda contraída se extingue mediante una serie definida de pagos periódicos iguales. En cada uno de estos pagos se descuentan el valor del interés periódico vencido y la parte sobrante se abona a capital (CISSELL, CISSELL, & FLASPOHLER, 1996). Este proceso se denomina Amortización.

11.2 Valor del pago periódico

Por tratarse de una anualidad del tipo ordinaria y vencida, el valor del pago periódico se lo determina como:

$$R = \frac{VA \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

Donde:

R: Pago periódico

VA: Valor actual de la anualidad (Valor de la deuda el día de hoy)

i: Tasa periódica, (tasa nominal anual ÷ frecuencia de capitalización)

n: Número de pagos

Si el sistema de amortización está diseñado con pagos anticipados o diferidos, el valor del pago periódico se determinará con las expresiones de cálculo de la Renta para este tipo de anualidades (PORTUS Govinden, 1985), entonces:

Para anualidades anticipadas:

$$R = \frac{VA}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]}$$

Para anualidades diferidas:

$$R = \frac{VA \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

Donde k es el período de gracia.

11.3 Derechos del acreedor y del deudor

Los derechos que el acreedor o el saldo insoluto que tiene sobre la deuda, luego de que el deudor ha realizado un número determinado de pagos (k), es el Valor actual de la deuda, tomando en cuenta los pagos que faltan por hacer; entonces, para el caso de las anualidades vencidas, este valor será:

$$VA_k = \frac{R[1 - (1 + i)^{-(n-k)}]}{i}$$

11.4 Tabla de amortización

La tabla de amortización es un registro numérico de la historia del préstamo. En esta tabla se indican, período a período, los pagos realizados, el desglose para el cubrimiento de los intereses, el abono al capital y el saldo insoluto. Es decir, el valor de la deuda luego de haber realizado el pago (MORA Zambrano, 2010).

La tabla de amortización, tiene tantos períodos como pagos se deben realizar y contempla la siguiente estructura:

Períodos	Saldo Insoluto antes del pago	Interés Periódico Vencido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo Insoluto después del pago

11.5 Consideraciones para la elaboración de la tabla de amortización

- El Saldo Insoluto Antes del Pago (*SIAP*) para el primer pago, es el valor de la deuda al inicio de la transacción.
- El interés periódico vencido (*IPV*), se determina multiplicando el saldo insoluto antes del pago, por la tasa periódica de interés. Es decir:

$$IPV = SIAP \times i$$

- El pago periódico es el valor R , es un valor constante, para todo el proceso de amortización.
- El abono al capital (AC) es la diferencia entre el pago periódico y el interés vencido. Es decir:

$$AC = R - IPV$$

- El Saldo Insoluto Después del Pago (*SIDP*), es la diferencia entre el saldo insoluto antes del pago y el Abono al capital. Es decir:

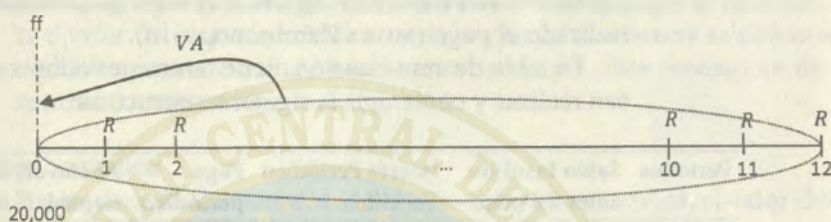
$$SIDP = SIAP - AC$$

- El saldo insoluto antes de un pago, es igual al saldo insoluto de la deuda una vez realizado el pago anterior (efecto zeta).
- El saldo insoluto después del último pago, es igual a cero, con lo cual se habrá extinguido la deuda.

11.6 PROBLEMAS RESUELTOS

- Una deuda de \$20,000 debe amortizarse con 12 pagos mensuales vencidos. Hallar el valor de éstos, a la tasa efectiva del 8% capitalizable mensualmente y elaborar un cuadro de amortización correspondiente.

Gráfico problema 11.1



$$20,000 = VA$$

$$20,000 = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

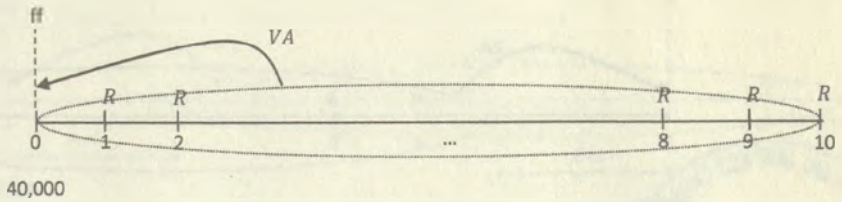
$$R = \frac{20,000 \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{20,000 \times \frac{8}{1200}}{[1 - (1 + \frac{8}{1200})^{-12}]} = \$1,739,77$$

Periodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	20,000.00	133.33	1,739.77	1,606.44	18,393.56
2	18,393.56	122.62	1,739.77	1,617.14	16,776.42
3	16,776.42	111.84	1,739.77	1,627.93	15,148.49
4	15,148.49	100.99	1,739.77	1,638.78	13,509.72
5	13,509.72	90.06	1,739.77	1,649.70	11,860.01
6	11,860.01	79.07	1,739.77	1,660.70	10,199.31
7	10,199.31	68.00	1,739.77	1,671.77	8,527.54
8	8,527.54	56.85	1,739.77	1,682.92	6,844.62
9	6,844.62	45.63	1,739.77	1,694.14	5,150.48
10	5,150.48	34.34	1,739.77	1,705.43	3,445.05
11	3,445.05	22.97	1,739.77	1,716.80	1,728.25
12	1,728.25	11.52	1,739.77	1,728.25	(0.00)

- Una empresa consignó un préstamo de \$40,000, amortizable en pagos semestrales iguales en cinco años, con una tasa de interés de 10% anual capitalizable semestralmente. Calcular la cuota semestral y elaborar la tabla de amortización correspondiente.

Gráfico problema 11.2



$$40,000 = VA$$

$$40,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$R = \frac{40,000 \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

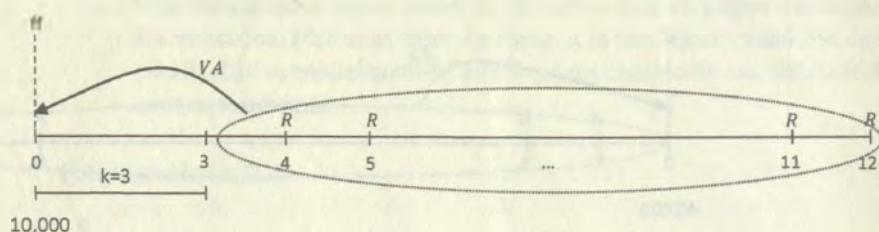
$$R = \frac{40,000 \times \frac{10}{200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{10}{200}\right)^{-10}\right]}$$

$$R = \$ 5,180.18$$

Períodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	40,000.00	2,000.00	5,180.18	3,180.18	36,819.82
2	36,819.82	1,840.99	5,180.18	3,339.19	33,480.62
3	33,480.62	1,674.03	5,180.18	3,506.15	29,974.47
4	29,974.47	1,498.72	5,180.18	3,681.46	26,293.01
5	26,293.01	1,314.65	5,180.18	3,865.53	22,427.48
6	22,427.48	1,121.37	5,180.18	4,058.81	18,368.67
7	18,368.67	918.43	5,180.18	4,261.75	14,106.92
8	14,106.92	705.35	5,180.18	4,474.84	9,632.09
9	9,632.09	481.60	5,180.18	4,698.58	4,933.51
10	4,933.51	246.68	5,180.18	4,933.51	0.00

3. Se adquiere un préstamo por la suma de \$10,000, pagadero en 3 años, con cuotas trimestrales al 6% capitalizable trimestralmente. Elaborar la tabla de amortización, tomando en cuenta que la primera cuota se paga al inicio del cuarto trimestre.

Gráfico problema 11.3



$$VA = 10,000$$

$$\frac{R \times [1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} = 10,000$$

$$R = \frac{10,000 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

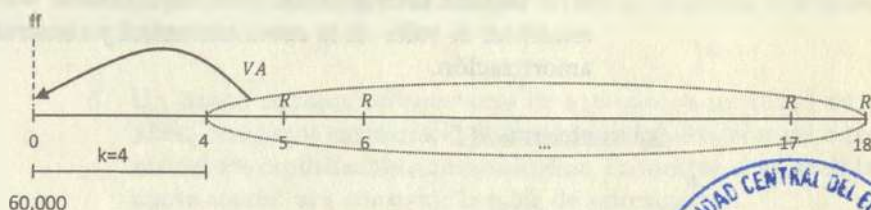
$$R = \frac{10,000 \times \frac{6}{400} \times \left(1 + \frac{6}{400}\right)^3}{\left[1 - \left(1 + \frac{6}{400}\right)^{-9}\right]}$$

$$R = \$1,250.73$$

Períodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	10,000.00	150.00	-	(150.00)	10,150.00
2	10,150.00	152.25	-	(152.25)	10,302.25
3	10,302.25	154.53	-	(154.53)	10,456.78
4	10,456.78	156.85	1,250.73	1,093.88	9,362.90
5	9,362.90	140.44	1,250.73	1,110.29	8,252.61
6	8,252.61	123.79	1,250.73	1,126.94	7,125.67
7	7,125.67	106.88	1,250.73	1,143.85	5,981.82
8	5,981.82	89.73	1,250.73	1,161.01	4,820.81
9	4,820.81	72.31	1,250.73	1,178.42	3,642.39
10	3,642.39	54.64	1,250.73	1,196.10	2,446.29
11	2,446.29	36.69	1,250.73	1,214.04	1,232.25
12	1,232.25	18.48	1,250.73	1,232.25	-

4. Se debe pagar una deuda de \$60,000 en 18 meses con el siguiente plan de pagos: cuotas mensuales iguales, con una tasa de interés del 15%, capitalizable mensualmente, pagaderas a partir del quinto mes. Determine el valor del pago periódico y construya la tabla de amortización hasta cancelar la deuda.

Gráfico problema 11.4



Ecuación de Valor:

$$VA = 60,000$$

$$\frac{R \times [1 - (1 + i)^{-n}]}{i \times (1 + i)^k} = 60,000$$

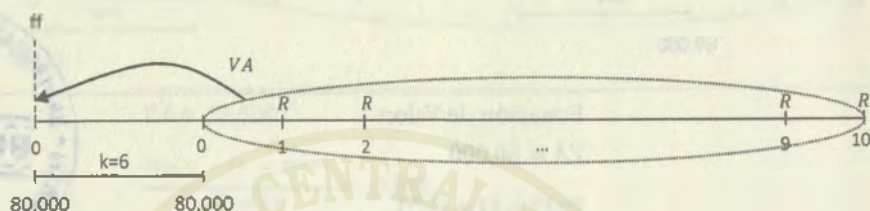
$$R = \frac{60,000 \times i \times (1 + i)^k}{[1 - (1 + i)^{-n}]} = \frac{60,000 \times \frac{15}{1200} \times \left(1 + \frac{15}{1200}\right)^4}{\left[1 - \left(1 + \frac{15}{1200}\right)^{-14}\right]} = \$ 4,937.67$$

Periodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	60,000.00	750.00	-	(750.00)	60,750.00
2	60,750.00	759.38	-	(759.38)	61,509.38
3	61,509.38	768.87	-	(768.87)	62,278.24
4	62,278.24	778.48	-	(778.48)	63,056.72
5	63,056.72	788.21	4,937.67	4,149.46	58,907.26
6	58,907.26	736.34	4,937.67	4,201.32	54,705.94
7	54,705.94	683.82	4,937.67	4,253.84	50,452.10
8	50,452.10	630.65	4,937.67	4,307.01	46,145.08
9	46,145.08	576.81	4,937.67	4,360.85	41,784.23
10	41,784.23	522.30	4,937.67	4,415.36	37,368.87
11	37,368.87	467.11	4,937.67	4,470.55	32,898.31
12	32,898.31	411.23	4,937.67	4,526.44	28,371.88
13	28,371.88	354.65	4,937.67	4,583.02	23,788.86
14	23,788.86	297.36	4,937.67	4,640.30	19,148.55
15	19,148.55	239.36	4,937.67	4,698.31	14,450.25
16	14,450.25	180.63	4,937.67	4,757.04	9,693.21
17	9,693.21	121.17	4,937.67	4,816.50	4,876.71
18	4,876.71	60.96	4,937.67	4,876.71	-

5. Un banco concede un préstamo de \$80,000, a un plazo de 8 años, en los cuales 3 son de gracia, y solamente se pagan intere-

ses. En los 5 años restantes se hacen abonos constantes a capital. Si la tasa de interés es del 10%, capitalizable semestralmente, encontrar el valor de la cuota trimestral y construir la tabla de amortización.

Gráfico problema 11.5



$$VA = 8,000$$

$$\frac{R \times [1 - (1 + i)^{-n}]}{i} = 8,000$$

$$R = \frac{80,000 \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{80,000 \times \frac{10}{200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{10}{200}\right)^{-10}\right]} = \$ 10,360.37$$

Periodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	80,000.00	4,000.00	4,000.00	-	80,000.00
2	80,000.00	4,000.00	4,000.00	-	80,000.00
3	80,000.00	4,000.00	4,000.00	-	80,000.00
4	80,000.00	4,000.00	4,000.00	-	80,000.00
5	80,000.00	4,000.00	4,000.00	-	80,000.00
6	80,000.00	4,000.00	4,000.00	-	80,000.00
7	80,000.00	4,000.00	10,360.37	6,360.37	73,639.63
8	73,639.63	3,681.98	10,360.37	6,678.38	66,961.25
9	66,961.25	3,348.06	10,360.37	7,012.30	59,948.95
10	59,948.95	2,997.45	10,360.37	7,362.92	52,586.03
11	52,586.03	2,629.30	10,360.37	7,731.06	44,854.96
12	44,854.96	2,242.75	10,360.37	8,117.62	36,737.35
13	36,737.35	1,836.87	10,360.37	8,523.50	28,213.85
14	28,213.85	1,410.69	10,360.37	8,949.67	19,264.17
15	19,264.17	963.21	10,360.37	9,397.16	9,867.02
16	9,867.02	493.35	10,360.37	9,867.02	0.00

Nota. Si en los primeros seis períodos se cancelan los intereses vencidos, entonces al inicio de los pagos, el valor de la deuda será igual al capital inicial.

6. Un banco concede un préstamo de \$100,000, a un plazo de 5 años, con pagos semestrales anticipados e iguales, con un interés del 8% capitalizable semestralmente. Encontrar el valor de la cuota semestral y construir la tabla de amortización.

Gráfico problema 11.6



$$VA = 100,000$$

$$R \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] = 100,000$$

$$R = \frac{100,000}{\left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]}$$

$$R = \frac{100,000}{\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{200}\right)^{-(10-1)}}{\frac{8}{200}} + 1 \right]} = \$11,854.90$$

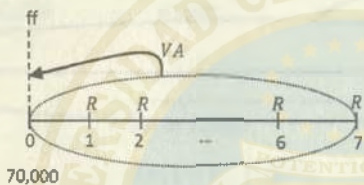
Períodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	100,000.00		11,854.90	11,854.90	88,145.10
2	88,145.10	3,525.80	11,854.90	8,329.09	79,816.01
3	79,816.01	3,192.64	11,854.90	8,662.26	71,153.75
4	71,153.75	2,846.15	11,854.90	9,008.75	62,145.00
5	62,145.00	2,485.80	11,854.90	9,369.10	52,775.90
6	52,775.90	2,111.04	11,854.90	9,743.86	43,032.04
7	43,032.04	1,721.28	11,854.90	10,133.62	32,898.42
8	32,898.42	1,311.94	11,854.90	10,538.96	22,359.46
9	22,359.46	894.38	11,854.90	10,960.52	11,398.94
10	11,398.94	455.96	11,854.90	11,398.94	0.00

7. Un banco concede un préstamo de \$70,000, a un plazo de 7 años para cancelar con pagos anuales iguales. Si la tasa de interés es

del 10% capitalizable semestralmente, determine el valor del pago anual y elabore la tabla de amortización.

Tasa nominal $j = 10\%$	Tasa Equivalente:
Frecuencia de capitalización $m = 2$	$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$
Frecuencia equivalente $m' = 1$	$i' = \left[\left(1 + \frac{10}{200} \right)^{2/1} - 1 \right] \times 100 = 10.25\%$
tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{10}{200}$	

Gráfico problema 11.7



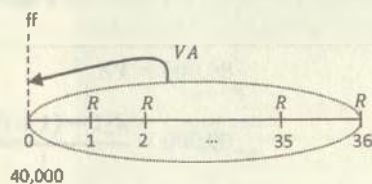
$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$$
$$70,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{10.25}{100} \right)^{-7} \right]}{\frac{10.25}{100}}$$
$$R = \frac{70,000 \times \frac{10.25}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{10.25}{100} \right)^{-7} \right]} = \$ 14,496.94$$

Períodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	70,000.00	7,175.00	14,496.94	7,321.94	62,678.06
2	62,678.06	6,424.50	14,496.94	8,072.44	54,605.62
3	54,605.62	5,597.08	14,496.94	8,899.86	45,705.76
4	45,705.76	4,684.84	14,496.94	9,812.10	35,893.66
5	35,893.66	3,679.10	14,496.94	10,817.84	25,075.82
6	25,075.82	2,570.27	14,496.94	11,926.67	13,149.15
7	13,149.15	1,347.79	14,496.94	13,149.15	0.00

8. Martha adquiere una casa en \$40,000 para pagar en 3 años de plazo, mediante cuotas mensuales, con una tasa de interés del 8% anual capitalizable trimestralmente. Por el método de la Tasa Equivalente, calcular el valor del pago periódico y elaborar la tabla de amortización para los últimos seis meses.

Tasa nominal $j = 8\%$	Tasa Equivalente:
Frecuencia de capitalización $m = 4$	$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$
Frecuencia equivalente $m' = 12$	$i' = \left[\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{4/12} - 1 \right] \times 100 = 0.66\%$
tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{8}{400}$	

Gráfico problema 11.8.a



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'}$$

$$40,000 = \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{0.66}{100} \right)^{-36} \right]}{\frac{0.66}{100}}$$

$$R = \frac{40,000 \times \frac{0.66}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0.66}{100} \right)^{-36} \right]} = \$1,252.48$$

Gráfico problema 11.8.b



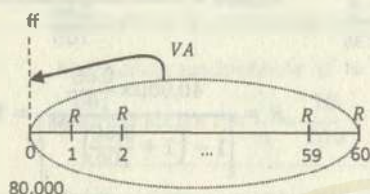
$$SI_k = \frac{R[1 - (1 + i)^{-(n-k)}]}{i} = \frac{1,252.48 \left[1 - \left(1 + \frac{0.66}{100} \right)^{-(36-30)} \right]}{\frac{0.66}{100} SI_k} = \$7,343.73$$

Períodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
30					7,343.73
31	7,343.73	48.64	1,252.48	1,203.85	6,139.88
32	6,139.88	40.66	1,252.48	1,211.82	4,928.06
33	4,928.06	32.64	1,252.48	1,219.84	3,708.22
34	3,708.22	24.56	1,252.48	1,227.92	2,480.30
35	2,480.30	16.43	1,252.48	1,236.06	1,244.24
36	1,244.24	8.24	1,252.48	1,244.24	0.00

9. El día de hoy se adquiere una deuda de \$80,000 para ser paga-
da mediante un sistema de amortización de cuotas mensuales
iguales durante 5 años. Si se considera un rendimiento del 10%
anual, capitalizable mensualmente:
- Calcular el pago periódico mensual.
 - Construir la tabla de amortización para los 3 primeros
meses.

- c. Determinar los derechos del acreedor luego del pago N° 57.
d. Construir la tabla para los tres últimos pagos.

Gráfico problema 11.9.a



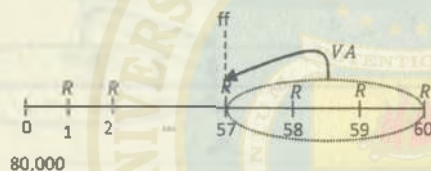
$$80,000 = VA$$

$$80,000 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

$$R = \frac{80,000 \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$R = \frac{80,000 \times \frac{10}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{-60}\right]} = \$1,699.76$$

Gráfico problema 11.9.b



$$SI_k = \frac{R[1 - (1+i)^{-(n-k)}]}{i}$$

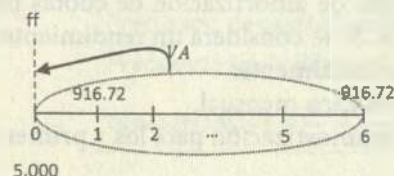
$$SI_{57} = \frac{1,699.76 \left[1 - \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{-(60-57)}\right]}{\frac{10}{1200}}$$

$$SI_{57} = \$5,015.47$$

Períodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	80,000.00	666.67	1,699.76	1,033.10	78,966.90
2	78,966.90	658.06	1,699.76	1,041.71	77,925.20
3	77,925.20	649.38	1,699.76	1,050.39	76,874.81
...	...	...	...	...	...
57					5,015.47
58	5,015.47	41.80	1,699.76	1,657.97	3,357.50
59	3,357.50	27.98	1,699.76	1,671.78	1,685.72
60	1,685.72	14.05	1,699.76	1,685.72	(0,00)

10. Una deuda de \$5,000 se va a cancelar mediante el pago de 6 cuotas mensuales de \$916.72. ¿Qué tasa efectiva mensual se aplicará en el crédito? Elaborar la tabla de amortización.

Gráfico problema 11.10.a



$$VA = 5,000$$

$$n = 6$$

$$R = 916.72$$

$$m = 12$$

Gráfico problema 11.10.b

Argumentos de función

TASA

Nper 6 = 6

Pago -916,72 = -916,72

Va 5000 = 5000

Vf = número

Tipo = número

= 0,027948034

Devuelve la tasa de interés por período de un préstamo o una inversión. Por ejemplo, use 6%/4 para pagos trimestrales al 6% TPA.

Nper es el número total de periodos de pago de un préstamo o una inversión.

Resultado de la fórmula = 2,79%

[Ayuda sobre esta función](#)

Aceptar Cancelar

Períodos	SIAP	IPV	PAGO R	AC	SIDP
1	5,000.00	139.75	916.72	776.98	4,223.02
2	4,223.02	118.03	916.72	798.69	3,424.33
3	3,424.33	95.71	916.72	821.02	2,603.32
4	2,603.32	72.76	916.72	843.96	1,759.35
5	1,759.35	49.17	916.72	867.55	891.80
6	891.80	24.93	916.72	891.80	(0,00)

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

FUNDADA EN 1820

QUITO

Omnia Potentior est Sapientia

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR

FUNDADA EN 1820

QUITO

Omnia Potentior est Sapientia

11.7 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Encuentre el valor del pago periódico y elabore la tabla de amortización para un préstamo de \$90,000 que se cancelará en 4 años con cuotas trimestrales iguales, si la tasa de interés es del 8% capitalizable trimestralmente.

R: cuotas de \$6,628.51

2. Una empresa de servicios de informática obtiene un préstamo de \$30,000, a tres años de plazo, con una tasa de interés del 17.5% anual capitalizable trimestralmente, que pagará mediante cuotas trimestrales. Calcular la cuota trimestral y elaborar la tabla de amortización hasta la extinción de la deuda.

R: cuotas de \$3,266.50

3. Un préstamo de \$38,000 y con interés de financiación al 3% mensual se debe cancelar en un año, con cuotas mensuales iguales, pagando la primera 3 meses después de concedido el préstamo. Construir la tabla de amortización.

R: cuotas de \$3,871.73

4. Una deuda de \$200,000 se va a cancelar con 12 cuotas trimestrales iguales y una tasa de interés del 9% capitalizable trimestralmente. Elaborar la tabla de amortización, si hay un período de gracia de 9 meses, considerando que los intereses que se causan en el período de gracia se abonan puntualmente en cada trimestre.

R: cuotas de \$20,529.10

5. Hallar el valor de la cuota semestral y elaborar una tabla para amortizar la suma de \$60,000 en pagos semestrales iguales durante 6 años, con un período de gracia de 2 años, en el cual sólo se pagan intereses y una tasa del 12% capitalizable semestralmente.

R: cuotas de \$9,662.16

6. La empresa QBI Cía. Ltda. obtiene un préstamo de \$100,000 a 10 años, plazo para amortizarlo mediante pagos semestrales, el primero de los cuales debe hacerlo luego de haber transcurrido 6 meses. Si se considera una tasa del 14% anual capitalizable semestralmente, calcular el saldo insoluto luego de haber pagado la cuota 15 y construya la tabla de amortización para los últimos 5 pagos.

R: a) cuotas de \$9,439.29; b) Saldo insoluto de \$38,702.96

7. Un préstamo de \$30,000 se debe cancelar en 4 años con cuotas iguales a fin de mes. Si el interés de financiación es del 7% capitalizable mensualmente:
- Calcular el pago periódico mensual.
 - Construir la tabla de amortización para los 3 primeros meses.
 - Determinar los derechos del acreedor luego del pago N° 45.
 - Construir la tabla para los tres últimos pagos.

R: a) Cuotas de \$718.39; c) \$2,130.26

8. Una deuda de \$60,000 se financia a 18 meses a una tasa de interés del 8% capitalizable mensualmente. Luego de 6 meses, la tasa de interés se modifica al 7% capitalizable mensualmente. Al cabo de 1 año, la tasa de interés varía al 9% capitalizable mensualmente. Encontrar el valor del pago periódico en cada variación de la tasa y elaborar la tabla de amortización correspondiente.

R: \$3,548.42; \$3,559.29; \$3,549.98

9. Calcular la tasa periódica, como también la tasa nominal capitalizable trimestralmente, a la cual se está amortizando una deuda de \$30,000, mediante cuotas trimestrales de \$1,850 durante 5 años. Construir la tabla de amortización correspondiente.

R: 2,09%; 8,34%

10. Un banco concede un préstamo de \$60,000 a 4 años para pagar en cuotas semestrales y con un interés del 12% capitalizable anualmente. Encuentre, por el método de la Tasa Equivalente, el valor de la cuota y elabore la tabla de amortización.

R: Tasa $i' = 5,83\%$; cuota semestral de \$9,597.27

Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapientia



12

FONDOS DE ACUMULACIÓN

OBJETIVO GENERAL

Determinar el depósito periódico para la creación de un Fondo de acumulación y construir la tabla de acumulación del Fondo para todos los períodos, como una aplicación de las anualidades.

12.1 Introducción

Con el fin de disponer de una cantidad de dinero a futuro, para inversiones o renovación de equipos, se crea un Fondo de acumulación, mediante el ahorro periódico de una cantidad de dinero previamente determinada, en una entidad financiera que, a su vez, reconoce con la misma frecuencia de los depósitos, el interés que ha ganado el Fondo (PORTUS Govinden, 1985).

Al final, luego de haber realizado el último depósito, junto con los intereses ganados, existe en el fondo la cantidad de dinero previamente establecida.

En otras palabras, la creación de un fondo de acumulación, es un proceso inverso de la extinción de una deuda mediante pagos periódicos.

12.2 Valor del depósito periódico

El valor del depósito periódico, que se debe realizar en un fondo de acumulación está dado por:

$$R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$$

Donde:

R: Depósito periódico

VF: Valor futuro de la anualidad

i: Tasa periódica

n: Número de pagos

12.3 Valor en el fondo luego de un número de depósitos realizados

Luego de haber realizado un número determinado de depósitos (k), es conveniente saber cuál es el valor acumulado en el Fondo. Este valor es igual al Valor Futuro de la anualidad, luego de haber realizado dicho número de depósitos (ALVAREZ Arango, 1995):

$$VF = \frac{R[(1 + i)^k - 1]}{i}$$

12.4 Tabla del fondo de acumulación

Al igual que el proceso de extinción de una deuda, se crea una tabla de registro del crecimiento del Fondo de Acumulación. En esta tabla, período a período, se van registrando los depósitos realizados, y el interés periódico que el Fondo ha ganado. Al final del último período, queda registrado el valor previamente establecido (AYRES Jr, 1998). La estructura de la tabla del Fondo de Acumulación es la siguiente:

12.6 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encuentre el valor del depósito periódico anual y construya una tabla para acumular \$6,000 al término de los próximos cuatro años, en un Fondo de Acumulación que produce el 2.5 % efectivo.

$R = ?$	$i = \frac{j\%}{m} = \frac{2.5\%}{1} = \frac{2.5}{100}$	Depósito periódico:
$VF = \$6,000$		$R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^n - 1]}$
$t = 4 \text{ años}$	$n = t \times m$	
$j = 2.5\% \text{ anual}$	$n = 4 \times 1$	
$m = 1$	$n = 4$	$R = \frac{6,000 \times \frac{2.5}{100}}{\left[\left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^4 - 1\right]} = \$1,444.91$

Períodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
1	-	-	1,444.91	1,444.91	1,444.91
2	1,444.91	36.12	1,444.91	1,481.03	2,925.94
3	2,925.94	73.15	1,444.91	1,518.06	4,443.99
4	4,443.99	111.10	1,444.91	1,556.01	6,000.00

2. Calcular el valor del depósito anual necesario para acumular \$20,000 en cinco años, considerando una tasa de interés de 13% anual. Elaborar la tabla del Fondo de Acumulación correspondiente.

$R = ?$	$i = \frac{j\%}{m} = \frac{13\%}{1} = \frac{13}{100}$	Depósito periódico:
$VF = \$20,000$		$R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^n - 1]}$
$t = 5 \text{ años}$	$n = t \times m$	
$j = 13\% \text{ anual}$	$n = 5 \times 1$	
$m = 1$	$n = 5$	$R = \frac{20,000 \times \frac{13}{100}}{\left[\left(1 + \frac{13}{100}\right)^5 - 1\right]} = \$3,086.29$

Períodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
1	-	-	3,086.29	3,086.29	3,086.29
2	3,086.29	401.22	3,086.29	3,487.51	6,573.80
3	6,573.80	854.59	3,086.29	3,940.88	10,514.68
4	10,514.68	1,366.91	3,086.29	4,453.20	14,967.88
5	14,967.88	1,945.82	3,086.29	5,032.12	20,000.00

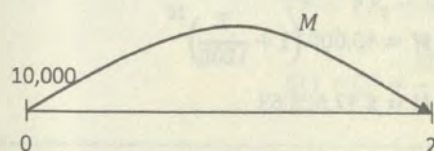
3. Una empresa desea acumular un fondo para reposición de activos por un valor de \$120,000 durante 10 años en una entidad financiera que le reconoce una tasa del 14% anual capitalizable mensualmente. Calcular el valor del depósito mensual, el valor en el fondo luego de realizar 115 depósitos y construir la tabla de Acumulación para los últimos 5 periodos.

$n = t \times m$	$R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^n - 1]}$	$VF_k = \frac{R[(1+i)^k - 1]}{i}$
$n = 10 \times 12$		
$n = 120$	$R = \frac{120,000 \times \frac{14}{1200}}{\left[\left(1 + \frac{14}{1200}\right)^{120} - 1\right]}$	$VF_k = \frac{463.20 \left[\left(1 + \frac{14}{1200}\right)^{115} - 1\right]}{\frac{14}{1200}}$
$i = \frac{j\%}{m} = \frac{14\%}{12} = \frac{14}{1200}$	$R = \$463.20$	$VF_k = \$111,001.40$

Períodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
115	-	-	-	-	111,001.40
116	111,001.40	1,295.02	463.20	1,758.21	112,759.61
117	112,759.61	1,315.53	463.20	1,778.73	114,538.34
118	114,538.34	1,336.28	463.20	1,799.48	116,337.82
119	116,337.82	1,357.27	463.20	1,820.47	118,158.29
120	118,158.29	1,378.51	463.20	1,841.71	120,000.00

4. Dos hermanos han decidido iniciar su propio negocio y para ello han obtenido un préstamo de \$10,000, pagaderos en su totalidad en dos años, con una tasa del 16% capitalizable semestralmente. Para pagar la deuda, deciden constituir un fondo de amortización mediante depósitos mensuales vencidos a una tasa del 12% capitalizable mensualmente. Dada la información encuentre el valor del depósito mensual, el valor acumulado el fondo luego de 12 depósitos y construya la tabla del Fondo de Acumulación para el siguiente año.

Gráfico problema 12.4



Valor de la deuda a pagar en dos años:

$$M = C(1+i)^n$$

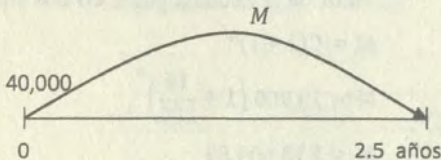
$$M = 10,000 \left(1 + \frac{16}{200}\right)^4$$

$$M = \$13,604.89$$

$n = t \times m$ $n = 2 \times 12$ $n = 24$ $i = \frac{j\%}{m} = \frac{12\%}{12} = \frac{12}{1200}$	$R = \frac{VF \times i}{[(1 + i)^n - 1]}$ $R = \frac{1,604.89 \times \frac{12}{1200}}{\left[\left(1 + \frac{12}{1200}\right)^{24} - 1\right]}$ $R = \$504.38$	$VF_k = \frac{R[(1 + i)^k - 1]}{i}$ $VF_k = \frac{504.38 \left[\left(1 + \frac{12}{1200}\right)^{12} - 1\right]}{\frac{12}{1200}}$ $VF_k = \$ 6,396.81$			
Periodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
12		-	-	-	6,396.81
13		63.97	504.38	568.35	6,965.16
14		69.65	504.38	574.03	7,539.19
15		75.39	504.38	579.77	8,118.96
16		81.19	504.38	585.57	8,704.53
17		87.05	504.38	591.43	9,295.96
18		92.96	504.38	597.34	9,893.30
19		98.93	504.38	603.31	10,496.61
20		104.97	504.38	609.35	11,105.96
21		111.06	504.38	615.44	11,721.40
22		117.21	504.38	621.59	12,342.99
23		123.43	504.38	627.81	12,970.80
24		129.71	504.38	634.09	13,604.89

5. Un Centro de Capacitación pide un préstamo de \$40,000 al 7% anual capitalizable mensualmente para la ampliación de unas aulas. Para ello crea un fondo de acumulación con depósitos trimestrales, de tal manera que, en dos años y medio (momento en que tiene que cancelar la deuda junto con su interés) pueda cancelar el préstamo. Si la tasa del fondo es del 4% convertible trimestralmente determinar:
- a. El valor del depósito periódico y la tabla de acumulación para los primeros 5 trimestres.

Gráfico problema 12.5.a



Valor de la deuda a pagar en 2.5 años:

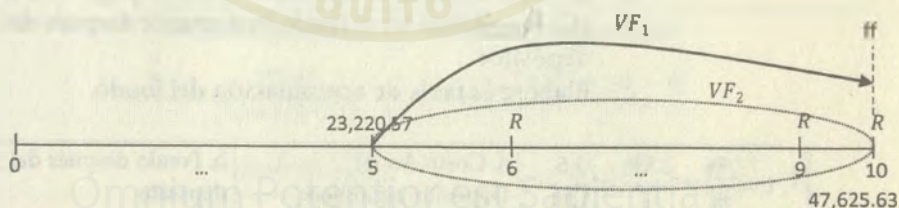
$$M = C(1 + i)^n$$
$$M = 40,000 \left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{30}$$
$$M = \$47,625.63$$

$n = t \times m$	$R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^n - 1]}$	$VF_k = \frac{R[(1+i)^k - 1]}{i}$
$n = 2.5 \times 4$		
$n = 10$	$R = \frac{47,625.63 \times \frac{4}{400}}{\left[\left(1 + \frac{4}{400}\right)^{10} - 1\right]}$	$VF_k = \frac{4552.16 \left[\left(1 + \frac{4}{400}\right)^5 - 1\right]}{\frac{4}{400}}$
$i = \frac{j\%}{m} = \frac{4\%}{4} = \frac{4}{400}$	$R = \$4,552.16$	$VF_k = \$23,220.57$

Períodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
1	-	-	4 552.16	4,552.16	4,552.16
2	4,552.16	45.52	4 552.16	4,597.68	9,149.83
3	9,149.83	91.50	4 552.16	4,643.65	13,793.49
4	13,793.49	137.93	4 552.16	4,690.09	18,483.58
5	18,483.58	184.84	4,552.16	4,736.99	23,220.57

- b. Si al iniciar el sexto trimestre (finalizando el quinto trimestre) y para los demás períodos la tasa de interés sube al 5% capitalizable trimestralmente, encuentre el valor del nuevo pago periódico y construya la tabla de acumulación para los últimos cinco trimestres.

Gráfico problema 12.5.b



$$VF_1 + VF_2 = 47,625.63$$

$$C(1+i)^n + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = 47,625.63$$

$$23,220.38 \left(1 + \frac{5}{400}\right)^5 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{-5}\right]}{\frac{5}{400}} = 47,625.63$$

$$24,708.34 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{-5}\right]}{\frac{5}{400}} = 47,625.63$$

$$R = \frac{22,916.89 \times \frac{5}{400}}{\left[1 - \left(1 + \frac{5}{400}\right)^{-5}\right]} = 4,470.24$$

Períodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
6	23,220.57	290.25	4,470.24	4,760.50	27,981.08
7	27,981.08	349.76	4,470.24	4,820.01	32,801.08
8	32,801.08	410.01	4,470.24	4,880.26	37,681.34
9	37,681.34	471.01	4,470.24	4,941.26	42,622.60
10	42,622.60	532.78	4,470.24	5,003.03	47,625.63

6. Una empresa obtiene un préstamo de \$50,000 a 10 años, acordando pagar intereses del 5% al final de cada año y, al mismo tiempo, establecer un fondo de amortización para el pago del capital. Hallar:
- El costo anual de la deuda, si el fondo paga un 3.5%.
 - ¿Cuánto habrá en el fondo justamente después del 7o. depósito?
 - Elabore la tabla de acumulación del fondo.

$i = \frac{j\%}{m} = \frac{3.5\%}{1} = \frac{3.5}{100}$ $n = t \times m$ $n = 10 \times 1$ $n = 10$	a. Costo Anual Depósito periódico: $R = \frac{VF \times i}{\left[(1 + i)^n - 1\right]}$ $R = \frac{50,000 \times \frac{3.5}{100}}{\left[\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^{10} - 1\right]}$ $R = \$4,262.07$	b. Fondo después del 7mo depósito $VF_k = \frac{R[(1 + i)^k - 1]}{i}$ $VF_7 = \frac{4,262.07 \left[\left(1 + \frac{3.5}{100}\right)^7 - 1\right]}{\frac{3.5}{100}}$ $VF_7 = \$33,156.37$
--	--	---

Interés anual:	Costo anual de la deuda:
$I = C \times r \times t$	$\text{Costo anual} = \text{Depósito anual} + \text{Interés anual}$
$I = 50,000 \times \frac{5}{100} \times 1$	$\text{Costo anual} = 4,262.07 + 2,500.00$
$I = \$2,500.00$	$\text{Costo anual} = \$6,762.07$

d. Tabla de amortización

Períodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
1	-	-	4,262.07	4,262.07	4,262.07
2	4,262.07	149.17	4,262.07	4,411.24	8,673.31
3	8,673.31	303.57	4,262.07	4,565.63	13,238.94
4	13,238.94	463.36	4,262.07	4,725.43	17,964.37
5	17,964.37	628.75	4,262.07	4,890.82	22,855.20
6	22,855.20	799.93	4,262.07	5,062.00	27,917.20
7	27,917.20	977.10	4,262.07	5,239.17	33,156.37
8	33,156.37	1,160.47	4,262.07	5,422.54	38,578.91
9	38,578.91	1,350.26	4,262.07	5,612.33	44,191.24
10	44,191.24	1,546.69	4,262.07	5,808.76	50,000.00

7. Para cancelar una deuda de \$80,000 a cinco años de plazo, se establecen reservas anuales en un fondo que abona el 6%; transcurridos dos años, el fondo eleva sus intereses al 7%. Hallar el valor de las reservas anuales y hacer un cuadro del fondo.

Depósito periódico:

Depósito acumulado:

$$R = \frac{VF \times i}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$VF_k = \frac{R[(1+i)^k - 1]}{i}$$

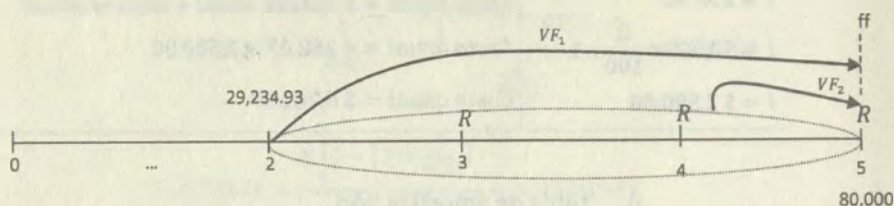
$$R = \frac{80,000 \times \frac{6}{100}}{\left[\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 - 1 \right]}$$

$$VF_2 = \frac{14,191.71 \left[\left(1 + \frac{6}{100}\right)^2 - 1 \right]}{\frac{6}{100}}$$

$$R = \$14,191.71$$

$$VF_2 = \$29,234.93$$

Gráfico problema 12.7



$$VF_1 + VF_2 = 80,000$$

$$C(1+i)^n + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} = 80,000$$

$$29,234.93 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^3 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]}{\frac{7}{100}} = 80,000$$

$$35,814.05 + \frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]}{\frac{7}{100}} = 80,000$$

$$R = \frac{44,185.95 \times \frac{7}{100}}{\left[1 - \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{-3}\right]} = 13,744.12$$

Períodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
1	-	-	14,191.71	14,191.71	14,191.71
2	14,191.71	851.50	14,191.71	15,043.21	29,234.93
3	29,234.93	2,046.44	13,744.12	15,790.56	45,025.49
4	45,025.49	3,151.78	13,744.12	16,895.90	61,921.39
5	61,921.39	4,334.50	13,744.12	18,078.61	80,000.00

8. Determinar el depósito semestral por adelantado, necesario para disponer en 3 años de \$60,000, si el fondo reconoce el 3% capitalizable mensualmente.

Tasa nominal $j = 3\%$

Frecuencia de capitalización $m = 12$

Frecuencia equivalente $m' = 2$

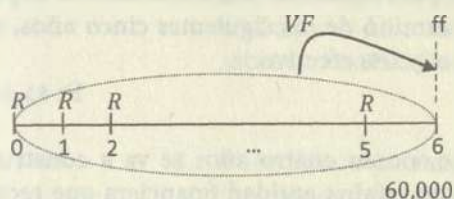
tasa periódica $i = \frac{j}{m} = \frac{3}{1200}$

Tasa Equivalente:

$$i' = (1+i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{3}{1200}\right)^{12/2} - 1 \right] \times 100 = 1.51\%$$

Gráfico problema 12.8



Depósito periódico:

$$R = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i')^{n+1} - 1}{i'} - 1 \right]}$$

$$R = \frac{60,000}{\left[\frac{(1 + \frac{1,51}{100})^7 - 1}{\frac{1,51}{100}} - 1 \right]} = \$ 9,486.06$$

Períodos	VFAD	IAP	Depósito Periódico	VAP	VFDD
0	-	-	9,486.06	9,486.06	9,486.06
1	9,486.06	143.18	9,486.06	9,629.24	19,115.30
2	19,115.30	288.53	9,486.06	9,774.59	28,889.89
3	28,889.89	436.07	9,486.06	9,922.13	38,812.02
4	38,812.02	585.83	9,486.06	10,071.89	48,883.91
5	48,883.91	737.86	9,486.06	10,223.92	59,107.82
6	59,107.82	892.18	-	892.18	60,000.00

12.7 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Construir una tabla para acumular \$8,000, mediante depósitos anuales iguales, al término de los siguientes cinco años, en un fondo que produce el 3.2 % efectivo.

R: \$1,500.82

2. Para disponer de 50,000 en cuatro años se va a construir un fondo de acumulación en una entidad financiera que reconoce el 10% capitalizable semestralmente. Encuentre el valor del pago semestral y construya la tabla de acumulación correspondiente.

R: \$5,236.09

3. El dueño de una tienda de abarrotes piensa reunir en 8 años \$30,000 para poder jubilarse, si el banco otorga un interés de 6% capitalizable semestralmente, encuentre el valor del depósito semestral que debe realizar, el valor en el fondo luego de realizar 13 depósitos y construya a tabla de amortización para los últimos 3 depósitos.

R: \$1,488.33; \$23,813.21

4. Lucía ha decidido emprender un negocio con un préstamo de \$40,000 el cual será pagado en su totalidad en 4 años, con una tasa de interés del 12% capitalizable semestralmente. Para pagar la deuda decide constituir un fondo de amortización, mediante depósitos trimestrales vencidos a una tasa de interés del 10% capitalizable trimestralmente. Encuentre el valor del depósito periódico trimestral y elabore Tabla del fondo de acumulación correspondiente.

R: \$3,289.64

5. Para disponer de 50,000 en cinco años se va a construir un fondo de acumulación en una entidad financiera que reconoce el 10%. Transcurridos 2 años se realiza un pago extra de \$10,000. Encuentre el valor del pago periódico y construya la tabla de amortización correspondiente.

R: \$6,009.73

6. Para obtener \$100,000 en 4 años, se van a realizar depósitos semestrales en un fondo financiero que reconoce el 8% con capitalización semestral, a partir del quinto período, la tasa de interés varía al 9% con capitalización semestral. Determinar el valor del depósito periódico para los primeros 4 semestres y el valor del depósito periódico para los siguientes semestres. Elaborar la tabla del Fondo de Acumulación.

R: \$10,852.78; \$10,528.20

7. Un artesano necesita reemplazar cada tres años todas sus herramientas, cuyo valor es de \$10,000. ¿Qué depósito semestral por adelantado debe hacer en un fondo que abona el 8% capitalizable semestral? Construya la tabla de acumulación del fondo.

R: \$1,449.63

8. Se establece un fondo con depósitos de \$5,000 semestrales en una entidad financiera que abona el 6% capitalizable trimestral. Hallar el valor acumulado en tres años y elaborar el cuadro del fondo.

R: \$32,360.33



Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapientia



13

GRADIENTE FINANCIERO

OBJETIVO GENERAL

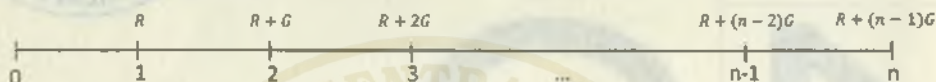
Calcular el Valor futuro, el Valor actual y los demás elementos financieros de una serie de pagos o depósitos con variación uniforme en forma de progresión aritmética o en progresión geométrica.

13.1 Definición

Se denomina Gradiente financiero a una serie de pagos periódicos variables cuya variación se fundamenta en el principio matemático de las progresiones aritméticas y geométricas. Es decir, que la variación puede ser lineal o exponencial, en forma creciente o decreciente; gráficamente podemos indicar:

Gradiente aritmético, lineal o uniforme:

Gráfico texto 13.1.a



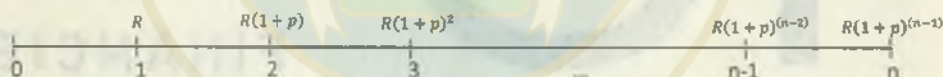
Si $R = 100, G = 20, n = 10$

Gráfico texto 13.1.b



Gradiente geométrico, porcentual o exponencial:

Gráfico texto 13.1.c



Si $R = 100, p = 10\%, n = 10$

Gráfico texto 13.1.d



Donde:

G : Gradiente aritmético o variación lineal o uniforme, expresado en unidades monetarias.

p : Gradiente geométrico o variación exponencial expresada en porcentaje.

13.2 Clasificación

De acuerdo con la fecha del pago, el gradiente financiero, aritmético o geométrico, puede ser:

1. Gradiente vencido, si el pago periódico se realiza al final de cada período.

2. Gradiente anticipado, si el pago periódico se realiza al inicio de cada período.
3. Gradiente diferido, si el primer pago se realiza luego de que han transcurrido algunos períodos.
4. Gradiente perpetuo, si los pagos se realizan en forma indefinida.
5. Gradiente general, si el período de capitalización no coincide con el período de pago.

13.3 Gradiente aritmético lineal o uniforme

El gradiente aritmético, lineal o uniforme es una serie de pagos variables, en la que el valor de un pago cualquiera se obtiene sumando al pago anterior, una cantidad constante llamada gradiente; este valor se puede determinar con la siguiente expresión:

$$R_n = R + (n - 1)G$$

Donde:

R : Valor del primer pago o pago inicial.

n : Número de pagos que conforman el Gradiente financiero.

G : Gradiente aritmético.

El valor de G es positivo cuando el gradiente financiero es creciente y negativo cuando el gradiente financiero es decreciente.

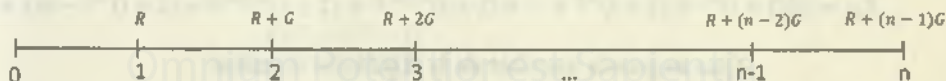
13.4 Valor actual y Valor futuro del Gradiente aritmético

De cada uno de los gradientes se deberá determinar el Valor actual o Valor presente y el Valor futuro. A continuación se obtienen las expresiones de cálculo correspondientes.

- a. Valor actual del Gradiente aritmético vencido

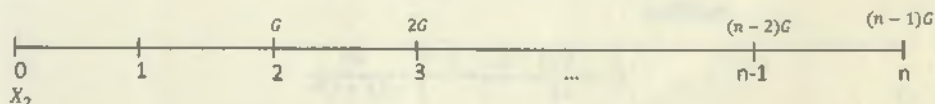
Se tiene el siguiente gradiente aritmético con pagos vencidos:

Gráfico texto 13.4.a



Al gradiente vencido se lo separa en dos partes: el primero de ellos formado por los pagos uniformes R , tal como se indica a continuación:

Gráfico texto 13.4.b

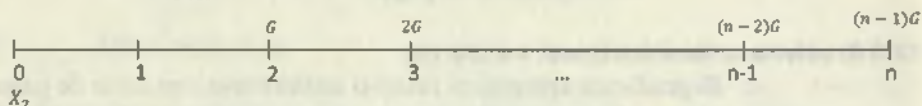


El Valor actual X_1 de esta anualidad vencida está dado por:

$$X_1 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

La segunda parte está formada por el gradiente propiamente dicho. Es decir:

Gráfico texto 13.4.c



El Valor actual X_2 de esta anualidad vencida está dado por:

$$X_2 = G(1+i)^{-2} + 2G(1+i)^{-3} + \dots + (n-2)G(1+i)^{-(n-1)} + (n-1)G(1+i)^{-n}$$

Que se puede escribir como:

$$X_2 = G[(1+i)^{-2} + 2(1+i)^{-3} + \dots + (n-2)(1+i)^{-(n-1)} + (n-1)(1+i)^{-n}] \quad (1)$$

Factorizando el segundo miembro y simplificando se tiene:

$$X_2 = G(1+i)^{-1}[(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + \dots + (n-2)(1+i)^{-(n-2)} + (n-1)(1+i)^{-(n-1)}]$$

$$X_2(1+i) = G[(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + \dots + (n-2)(1+i)^{-(n-2)} + (n-1)(1+i)^{-(n-1)}]$$

$$X_2 + X_2i = G[(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + \dots + (n-2)(1+i)^{-(n-2)} + (n-1)(1+i)^{-(n-1)}]$$

$$X_2i = G[(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + \dots + (n-2)(1+i)^{-(n-2)} + (n-1)(1+i)^{-(n-1)}] - X_2 \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) y simplificando se obtiene ahora:

$$X_2i = G[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n} - n(1+i)^{-n}]$$

Que se puede escribir de la siguiente manera:

$$X_2 = \frac{G}{i} [(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \dots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)} + (1+i)^{-n}] - \frac{Gn}{i(1+i)^n}$$

Los términos en el interior de corchete conforman la suma de términos de una progresión geométrica, entonces la expresión anterior se escribe:

$$X_2 = \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] - \frac{Gn}{i(1+i)^n}$$

Finalmente:

$$X_2 = \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Por lo anterior, el Valor actual del gradiente aritmético vencido, está dado por:

$$VA = X_1 + X_2$$

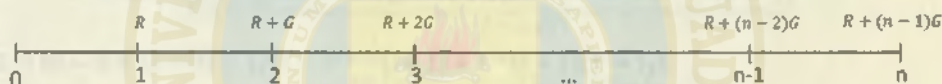
Es decir:

$$VA = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

b. Valor futuro de gradiente aritmético vencido

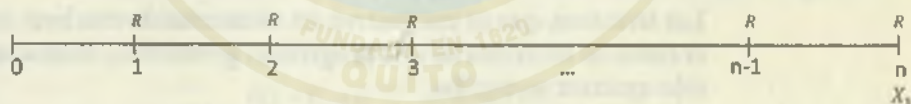
Se tiene el siguiente gradiente aritmético con pagos vencidos:

Gráfico texto 13.4.d



Al gradiente vencido se lo separa en dos partes: el primero de ellos formado por los pagos uniformes R, tal como se indica a continuación:

Gráfico texto 13.4.e

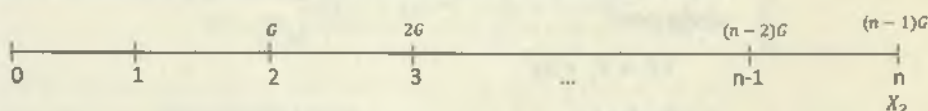


El Valor futuro X_1 de esta anualidad vencida está dado por:

$$X_1 = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i}$$

La segunda parte está formada por el gradiente propiamente dicho. Es decir:

Gráfico texto 13.4.f



El Valor futuro X_2 de esta anualidad vencida está dado por:

$$X_2 = G(1+i)^{n-2} + 2G(1+i)^{n-3} + \dots + (n-2)G(1+i) + (n-1)G$$

Que se puede escribir como:

$$X_2 = G[(1+i)^{n-2} + 2(1+i)^{n-3} + \dots + (n-2)(1+i) + (n-1)] \quad (1)$$

Factorizando el segundo miembro y simplificando se tiene:

$$X_2 = G(1+i)^{-1}[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \dots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)]$$

$$X_2(1+i) = G[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \dots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)]$$

$$X_2 + X_2i = G[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \dots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)]$$

$$X_2i = G[(1+i)^{n-1} + 2(1+i)^{n-2} + \dots + (n-2)(1+i)^2 + (n-1)(1+i)] - X_2 \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) y simplificando se obtiene ahora:

$$X_2i = G[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) - (n-1)]$$

Que se puede escribir de la siguiente manera:

$$X_2 = \frac{G}{i} [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) + 1] - \frac{Gn}{i}$$

Los términos que se encuentran en el interior de corchete conforman la suma de términos de una progresión geométrica, entonces la expresión anterior se escribe:

$$X_2 = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] - \frac{Gn}{i}$$

Finalmente:

$$X_2 = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

Por lo anterior, el Valor futuro del gradiente aritmético vencido, está dado por:

$$VF = X_1 + X_2$$

Es decir:

$$VF = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

c. Valor actual y Valor futuro del gradiente aritmético anticipado

Cuando el pago inicial R se lo realiza al inicio de la transacción, el Valor actual y el Valor futuro del Gradiente financiero se lo obtiene con las expresiones que a continuación se indican:

$$VA = R + (R + G) \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} - \frac{n-1}{(1+i)^{(n-1)}} \right]$$

$$VF = R(1+i)^n + (R + G) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 - (n-1)(1+i) \right]$$

d. Valor actual y Valor futuro del gradiente aritmético diferido

Si el primer pago R se realiza luego de que han transcurrido períodos, conocido como período de gracia, el cálculo del Valor actual y Valor futuro está dado por:

$$VA = \frac{\left[\frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right]}{(1+i)^k}$$

$$VF = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

e. Valor actual del gradiente aritmético en una perpetuidad

Si el pago periódico es a perpetuidad, el Gradiente financiero existe cuando éste es creciente; partiendo del Valor actual del gradiente vencido se tiene:

$$VA = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

Para una perpetuidad, el Valor actual está dado por:

$$VA = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right]$$

Que se puede escribir como:

$$VA = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n} \right] \right]$$

Recordando que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+i)^{-n} \approx 0$$

Finalmente se tiene:

$$VA = \frac{R}{i} + \frac{G}{i^2}$$

f. Valor actual y Valor futuro del gradiente aritmético general

Para la determinación del Valor actual y del Valor futuro en un gradiente general, es decir, en la serie de pagos en que el período de capitalización y el período de pago no coinciden, es necesario encontrar previamente la tasa equivalente con un período de capitalización que coincida con el período de pago; luego, se pueden utilizar las expresiones de cálculo determinadas en párrafos anteriores. A continuación se presentan las fórmulas para el cálculo del Valor actual y Valor futuro en términos de la tasa equivalente:

$$VA = \frac{R[1 - (1 + i')^{-n}]}{i'} + \frac{G}{i'} \left[\frac{1 - (1 + i')^{-n}}{i'} - \frac{n}{(1 + i')^n} \right]$$

$$VF = \frac{R[(1 + i')^n - 1]}{i'} + \frac{G}{i'} \left[\frac{(1 + i')^n - 1}{i'} - n \right]$$

Recordando que:

$$i' = [(1 + i)^{\frac{n}{m}} - 1] \times 100$$

13.5 Gradiente geométrico o porcentual

El gradiente geométrico o porcentual es una serie de pagos variables, en la que el valor de un pago cualquiera se obtiene multiplicando una cantidad constante en términos porcentuales, llamada gradiente geométrico, al pago anterior. Este valor se puede determinar con la siguiente expresión:

$$P_k = R(1 + p)^{k-1}$$

Donde:

R : Valor del primer pago o pago inicial.

n : Número de pagos que conforman el Gradiente financiero.

p : Gradiente geométrico o porcentual.

k : Valor que representa el pago a buscar.

13.6 Valor actual y Valor futuro del gradiente geométrico

De cada uno de los gradientes se deberá determinar el Valor actual o Valor presente y el Valor futuro. A continuación, se establecen las expresiones de cálculo correspondientes.

a. Gradiente geométrico vencido

$$VA = R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i} \right)^n}{i-p} \right] \quad \text{si } i \neq p$$

$$VF = R \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i-p} \right] \quad \text{si } i \neq p$$

$$VA = \frac{nR}{1+i} \quad \text{si } i = p$$

$$VF = nR(1+i)^{n-1} \quad \text{si } i = p$$

b. Gradiente geométrico anticipado

Cuando el pago inicial R se realiza al inicio del gradiente geométrico es conveniente aislar el primer pago y trabajar como gradiente vencido.

c. Gradiente geométrico diferido

Si el primer pago R se realiza luego de que han transcurrido k periodos, conocido como período de gracia, el cálculo del Valor actual se determina planteando una ecuación de valor, con fecha focal al final del período de gracia. El valor futuro se lo determina como un gradiente vencido.

d. Gradiente geométrico perpetuo

Si el pago periódico es a perpetuidad, el Gradiente financiero existe cuando es creciente; entonces:

$$VA = \frac{R}{i-p} \quad \text{si } i > p$$

e. Gradiente geométrico general

Para la determinación del Valor actual y del Valor futuro en un gradiente general, es decir, en la serie de pagos en que el período de capitalización y el período de pago no coinciden, es necesario encontrar la tasa equivalente con un período de capitalización que coincida con el período de pago.

Para el caso del gradiente geométrico vencido, en términos de la tasa equivalente se tiene:

$$VA = R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i'} \right)^n}{i'-p} \right] \quad \text{si } i' \neq p$$

$$VF = R \left[\frac{(1+i')^n - (1+p)^n}{i'-p} \right] \quad \text{si } i' \neq p$$

$$VA = \frac{nR}{1+i'} \quad \text{si } i' = p$$

$$VF = nR(1+i)^{n-1} \quad \text{si } i' = p$$

13.7 PROBLEMAS RESUELTOS

- Encuentre el valor de las dos últimas cuotas y halle el valor de contado de una máquina adquirida con el siguiente plan: cuota inicial de \$3,000 y 20 pagos mensuales; \$1,550 es el valor de la primera, \$1,570 la segunda, \$1,590 la tercera y, así sucesivamente, sabiendo que la tasa de interés es el 12% capitalizable mensualmente.

Gráfico problema 13.1



$$R_n = R + (n - 1)G$$

$$R_{20} = 1,550 + (20 - 1) \times 20$$

$$R_{19} = 1,550 + (19 - 1) \times 20$$

$$R_{20} = \$1,930.00$$

$$R_{19} = \$1,910.00$$

$$X = 3,000 + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$$

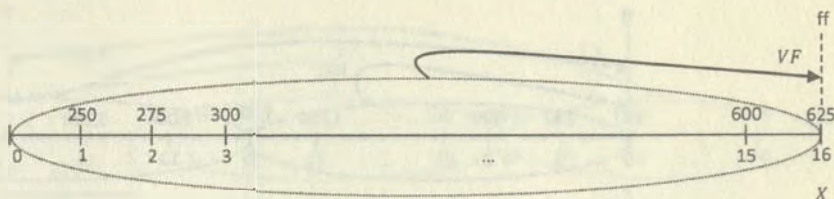
$$X = 3,000 + \frac{1,550 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-20} \right]}{\frac{12}{1200}} + \frac{20}{\frac{12}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-20}}{\frac{12}{1200}} - \frac{20}{\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{20}} \right]$$

$$X = 3,000.00 + 27,970.61 + 3,309.33$$

$$X = \$34,279.94$$

- Se van a depositar \$250 en tres meses, \$275 dentro de 6 meses, \$300, dentro de 9 meses, y así sucesivamente, hasta hacer el último depósito en 4 años. Encuentre el valor de los dos últimos depósitos y el valor acumulado en 4 años, si los depósitos ganan un interés del 8% capitalizable trimestralmente.

Gráfico problema 13.2



$$R_n = R + (n - 1)G$$

$$R_{16} = 250 + (16 - 1) \times 20$$

$$R_{15} = 250 + (15 - 1) \times 25$$

$$R_{16} = \$ 625.00$$

$$R_{15} = \$ 600.00$$

Ecuación de Valor:

$$X = VF$$

$$X = \frac{R[(1+i)^n - 1]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

$$X = \frac{250 \left[\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{16} - 1 \right]}{\frac{8}{400}} + \frac{25}{\frac{8}{400}} \left[\frac{\left(1 + \frac{8}{400}\right)^{16} - 1}{\frac{8}{400}} - 16 \right]$$

$$X = 4,659.82 + 3,299.11$$

$$X = \$ 7,958.93$$

3. Una serie de pagos mensuales se inicia hoy con un pago de \$500 y aumentará en una cantidad fija de dinero, hasta llegar a \$1,100 en doce meses; a partir de allí disminuirá en otra suma fija de dinero, hasta llegar a \$740 diez meses más tarde. Para una tasa de interés del 8% anual capitalizable mensualmente, hallar el Valor actual de esta serie.

Gradiente 1:

Serie uniforme de 12 pagos crecientes:

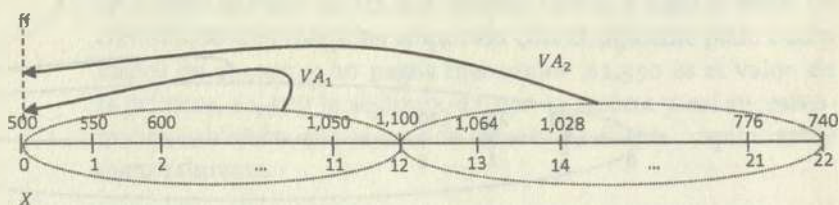
$$G_1 = \frac{1,100 - 500}{12} = 50$$

Gradiente 2:

Serie uniforme de 10 pagos decrecientes:

$$G_2 = \frac{740 - 1,100}{10} = -36$$

Gráfico problema 13.3



$$X = 500 + VA_1 + VA_2$$

$$VA_1 = \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

$$VA_1 = \frac{550 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-12} \right]}{\frac{8}{1200}} + \frac{50}{\frac{8}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-12}}{\frac{8}{1200}} - \frac{12}{\left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{12}} \right]$$

$$VA_1 = 6,322.68 + 3,115.83 = \$ 9,438.51$$

$$VA_2 = (1+i)^{-12} \left[\frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right]$$

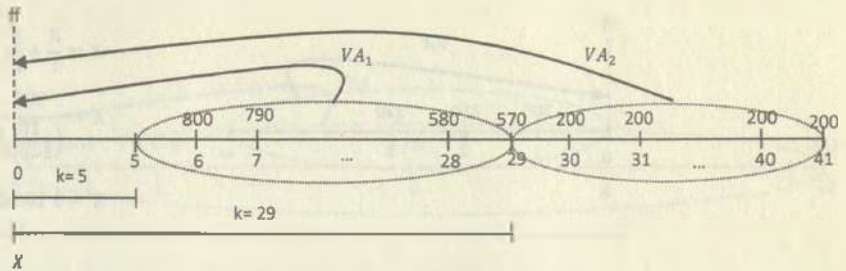
$$VA_2 = \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-12} \left[\frac{1,064 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-10} \right]}{\frac{8}{1200}} + \frac{-36}{\frac{8}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{-10}}{\frac{8}{1200}} - \frac{10}{\left(1 + \frac{8}{1200} \right)^{10}} \right] \right]$$

$$VA_2 = \$ 8,048.87$$

$$X = 500.00 + 9,438.51 + 8,048.87 = \$ 17,987.38$$

4. Determinar el valor de contado de un vehículo financiado con el siguiente plan: 24 cuotas mensuales de \$800, \$790, \$780 y así sucesivamente, sabiendo además que la primera cuota se debe pagar en seis meses; y después de estas cuotas, doce pagos mensuales de \$200 cada uno. La tasa de interés es el 6% capitalizable mensualmente.

Gráfico problema 13.4



$$X = VA_1 + VA_2$$

$$VA_1 = \frac{1}{(1+i)^k} \times \left\{ \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \right\}$$

$$VA_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^5} \times \left\{ \frac{800 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{-24} \right]}{\frac{6}{1200}} + \frac{-10}{\frac{6}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{-24}}{\frac{6}{1200}} - \frac{24}{\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{24}} \right] \right\}$$

$$VA_1 = 15,127.48$$

$$VA_2 = (1+i)^{-k} \left[\frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i} \right]$$

$$VA_2 = (1+i)^{-k} \left[\frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i} \right]$$

$$VA_2 = \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{-29} \left[\frac{200 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{-12} \right]}{\frac{6}{1200}} \right]$$

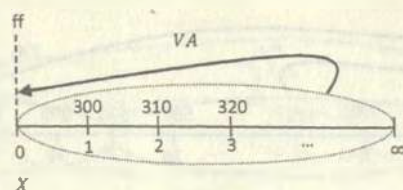
$$VA_2 = 2,010.85$$

$$X = 15,127.48 + 2,010.85 = \$ 17,138.33$$

5. ¿Cuánto se debe consignar hoy en una corporación que paga un interés del 10% capitalizable mensualmente, para atender una serie de gastos a perpetuidad, si empezando el siguiente mes y con un valor de \$300 se incrementa \$10 mensualmente?



Gráfico problema 13.5



$$X = VA$$

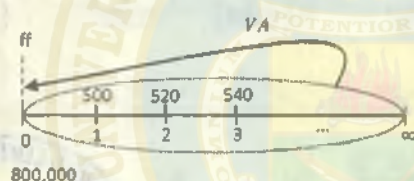
$$X = \frac{R}{i} + \frac{G}{i^2}$$

$$X = \frac{300}{\left(\frac{10}{1200}\right)} + \frac{10}{\left(\frac{10}{1200}\right)^2}$$

$$X = \$ 180,000.00$$

6. ¿Qué interés nominal, capitalizable trimestralmente se reconoce a un depósito de \$800,000 realizado hoy, si se pueden hacer retiros de \$500 dentro de 3, \$520 dentro de seis meses y así sucesivamente de manera perpetua?

Gráfico problema 13.6



$$X = VA$$

$$800,000 = \frac{500}{i} + \frac{20}{i^2}$$

$$800,000 = \frac{500i + 20}{i^2}$$

$$800,000i^2 - 500i - 20 = 0$$

$$40,000i^2 - 25i - 1 = 0$$

$$40,000i^2 - 25i - 1 = 0$$

$$a = 40,000, b = -25, c = -1$$

$$i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$i_1 = \frac{25 + 400,78}{2(40,000)} = 0.53\%$$

$$i_2 = \frac{25 - 400,78}{2(40,000)} = -0.47\%$$

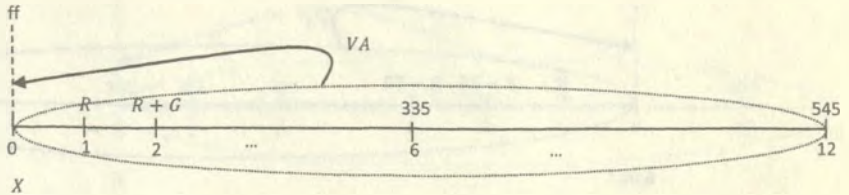
No existen tasas negativas, entonces:

$$i = 0.53\%$$

$$j = 0.53\% \times 4 = 2.13\%$$

7. Un préstamo se debe cancelar con 12 cuotas mensuales así: la primera es de cierto valor, que mes a mes se incrementa en cierta cantidad constante; si se sabe que el valor de la cuota 6 es de \$335 y el valor de la cuota 12 es de \$545, encontrar el valor de la primera y segunda cuotas, al igual que el valor del préstamo, si el interés de financiación es del 24 % capitalizable mensual.

Gráfico problema 13.7.a



Cálculo del Gradiente aritmético:

Tomando desde el 6to hasta el 12º término:

$$P = R + (n - 1)G$$

$$545 = 335 + 6G$$

$$G = \$ 35.00$$

Cálculo del primer pago:

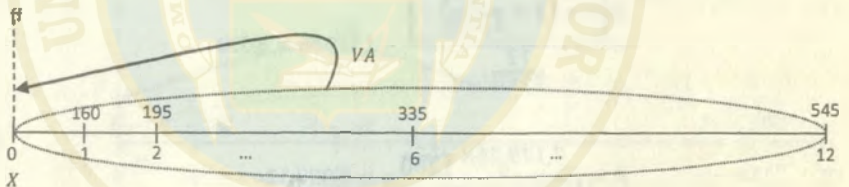
Tomando desde el 1º hasta el 6to término:

$$P = R + (n - 1)G$$

$$335 = R + (5)35$$

$$R = \$ 160.00$$

Gráfico problema 13.7.b



$$VA = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1 + i)^n} \right]$$

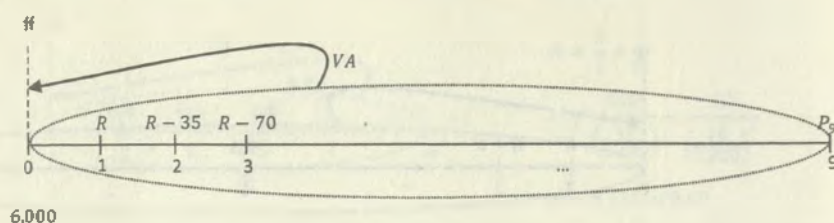
$$VA = \frac{160 \left[1 - \left(1 + \frac{24}{1200} \right)^{-12} \right]}{\frac{24}{1200}} + \frac{35}{\frac{24}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{24}{1200} \right)^{-12}}{\frac{24}{1200}} - \frac{12}{\left(1 + \frac{24}{1200} \right)^{12}} \right]$$

$$VA = 1,692.05 + 1,948.49$$

$$VA = \$ 3,640.55$$

8. Un artículo de contado vale \$7,000; a plazos, exigen una cuota inicial de \$1,000; y, el resto para ser cancelados con 9 cuotas mensuales, de tal manera que, cada cuota decrezca en \$30 respecto de la anterior. Si el interés de financiación es del 12% anual capitalizable mensualmente, encontrar el valor de la última cuota.

Gráfico problema 13.8



va: Valor actual de la anualidad vencida con gradiente creciente.

$$VA = 6,000.00$$

$$\frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{G}{i} \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] = 6,000$$

$$\frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-9} \right]}{\frac{12}{1200}} - \frac{35}{\frac{12}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-9}}{\frac{12}{1200}} - \frac{9}{\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^9} \right] = 6,000$$

$$\frac{R \left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-9} \right]}{\frac{12}{1200}} - 1,179.36 = 6,000$$

$$R = \frac{7,179.36 \times \frac{12}{1200}}{\left[1 - \left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{-9} \right]} = \$838.12$$

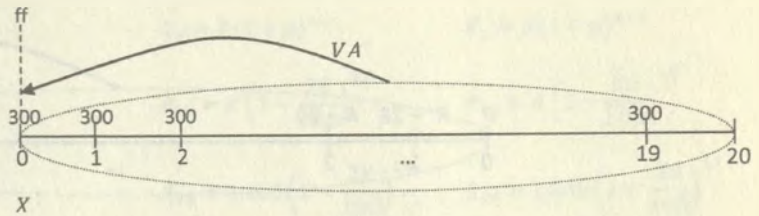
$$P_k = R + (n-1)G$$

$$P_9 = 838.12 + (9-1)(-35)$$

$$P_9 = \$558.12$$

9. Un producto se debe cancelar en 20 cuotas mensuales iguales anticipadas de \$300 y un interés de financiación del 10% anual capitalizable mensualmente. Si desea cambiar esta forma de pago por 20 pagos variables que tengan forma de gradiente aritmético decreciente igual a \$20, hallar el valor del primer pago, si éste se realiza de inmediato.

Gráfico problema 13.9.a



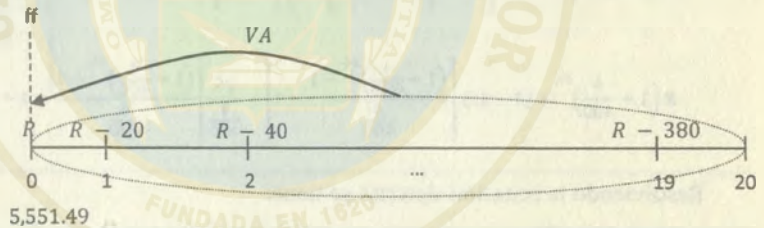
$$X = VA$$

$$X = 300 \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{-(20-1)}}{\frac{10}{1200}} + 1 \right]$$

$$X = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right]$$

$$X = \$5,551.49$$

Gráfico problema 13.9.b



$$VA = R + (R+G) \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} \right] + G \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} - \frac{n-1}{(1+i)^{(n-1)}} \right]$$

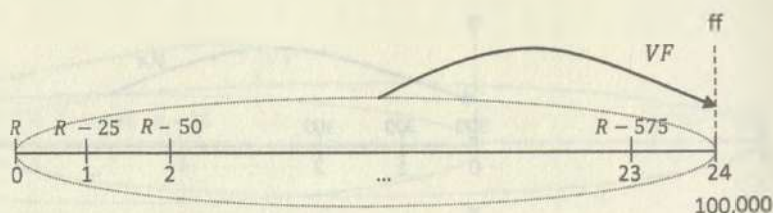
$$5,551.49 = R + (R-20) \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{-(20-1)}}{\frac{10}{1200}} \right] - \frac{20}{\frac{10}{1200}} \left[\frac{1 - \left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{-(20-1)}}{\frac{10}{1200}} - \frac{20-1}{\left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{(20-1)}} \right]$$

Resolviendo la ecuación descrita se tiene:

$$R = \$484.48$$

10. Dentro de seis años, una empresa requiere renovar sus activos por un valor de \$100,000, para lo cual es necesario establecer un fondo con depósitos trimestrales en una financiera que reconoce el 4% capitalizable trimestralmente; si el primer depósito se realiza el día de hoy y los siguientes depósitos decrecen en \$25, encuentre el valor del depósito inicial realizado este día.

Gráfico problema 13.10



VF: Valor futuro del gradiente aritmético decreciente anticipado.

$$VF = 100,000$$

$$R(1+i)^n + (R+G) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 - (n-1)(1+i) \right] = 100,000$$

$$\frac{VF = 100,000}{R(1+i)^n + (R+G) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 \right] + \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - 1 - (n-1)(1+i) \right] = 100,000$$

$$R \left(1 + \frac{4}{400} \right)^{24} + (R-25) \left[\frac{\left(1 + \frac{4}{400} \right)^{24} - 1}{\frac{4}{400}} - 1 \right] - \frac{25}{\frac{4}{400}} \left[\frac{\left(1 + \frac{4}{400} \right)^{24} - 1}{\frac{4}{400}} - 1 - (24-1) \left(1 + \frac{4}{400} \right) \right] = 100,000$$

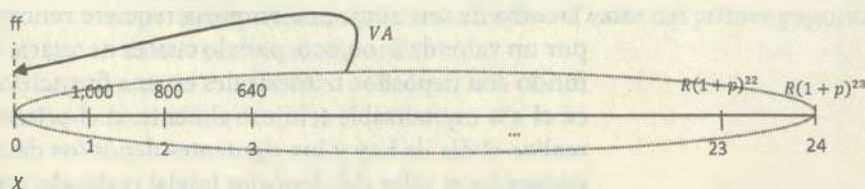
Resolviendo la ecuación descrita se tiene:

$$R = \$3,946.23$$

Gradiente geométrico

11. Hallar el valor de un préstamo financiado al 10% convertible mensualmente que se debe pagar en 24 cuotas mensuales vencidas, siendo de \$1,000 la primera y las demás los 4/5 de la correspondiente cuota anterior. Hallar también el valor de las cuotas canceladas en los meses 23 y 24.

Gráfico problema 13.11



Cálculo del gradiente porcentual	Pago N° 23	Pago N° 24
$R_n = R(1+p)^{n-1}$	$R_n = R(1+p)^{n-1}$	$R_n = R(1+p)^{n-1}$
$800 = 1,000(1+p)^1$	$R_{23} = R\left(1 - \frac{20}{100}\right)^{22}$	$R_{24} = R\left(1 - \frac{20}{100}\right)^{23}$
$1+p = \frac{800}{1,000}$	$R_{23} = 1,000\left(1 - \frac{20}{100}\right)^{22}$	$R_{24} = 1,000\left(1 - \frac{20}{100}\right)^{23}$
$p = \frac{800}{1,000} - 1$	$R_{23} = \$7.38$	$R_{24} = \$5.90$
$p = -20\%$		

$$X = VA$$

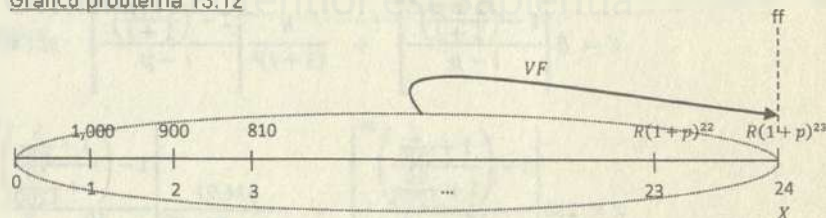
$$X = R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i}\right)^n}{i - p} \right] \quad \text{si } i \neq p$$

$$X = 1,000 \left[\frac{1 - \left(\frac{1 - \frac{20}{100}}{1 + \frac{10}{1200}}\right)^{24}}{\frac{10}{1200} + \frac{20}{100}} \right]$$

$$X = \$4,781.43$$

12. Una persona decide ahorrar en una corporación que paga un interés del 4% capitalizable mensualmente los siguientes valores: \$1,000 el primer mes, 900 el segundo mes, \$810 el tercer mes y así sucesivamente por espacio de dos años. Hallar la cantidad que tendrá acumulada al final de este tiempo.

Gráfico problema 13.12



Cálculo del gradiente porcentual

$$R_n = R(1+p)^{n-1}$$

$$900 = 1,000(1+p)^1$$

$$1+p = \frac{900}{1,000}$$

$$1+p = \frac{900}{1,000}$$

$$p = \frac{900}{1,000} - 1$$

$$p = -10\%$$

$$X = VF$$

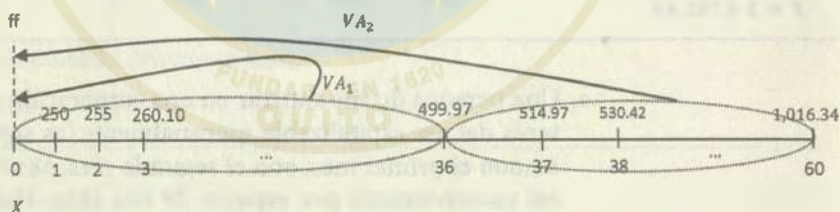
$$X = R \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i-p} \right] \quad \text{si } i \neq p$$

$$X = 1,000 \left[\frac{\left(1 + \frac{4}{1200}\right)^{24} - \left(1 - \frac{10}{100}\right)^{24}}{\frac{4}{1200} + \frac{10}{100}} \right]$$

$$X = \$9,710.10$$

13. Un artículo se compraría a crédito mediante cuotas mensuales variables durante cinco años; \$250 es el valor de la primera cuota y de allí en adelante aumentarían en el 2% cada mes, hasta finales del tercer año y, a partir de esa fecha, aumentarían en el 3% cada mes. Se desea pagar mediante dos pagos iguales, el primero hoy y el otro dentro de 3 años. Determinar el valor de los pagos si la tasa de interés es del 10% convertible mensualmente.

Gráfico problema 13.13.a



$$X = VA_1 + VA_2$$

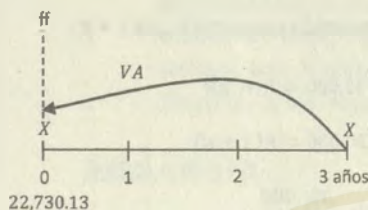
$$X = R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i}\right)^n}{i-p} \right] + \frac{R}{(1+i)^k} \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i}\right)^n}{i-p} \right] \quad \text{si } i \neq p$$

$$X = 250 \left[\frac{1 - \left(\frac{1 + \frac{2}{100}}{1 + \frac{10}{1200}}\right)^{36}}{\frac{10}{1200} - \frac{2}{100}} \right] + \frac{514.97}{\left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{36}} \left[\frac{1 - \left(\frac{1 + \frac{3}{100}}{1 + \frac{10}{1200}}\right)^{24}}{\frac{10}{1200} - \frac{3}{100}} \right]$$

$$X = 10,994.26 + 11,735.87$$

$$X = \$ 22,730.13$$

Gráfico problema 13.13.b



$$X + VA = 22,730.13$$

$$X + \frac{M}{(1+i)^n} = 22,730.13$$

$$X + \frac{X}{\left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{36}} = 22,730.13$$

$$X \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{36}} \right] = 22,730.13$$

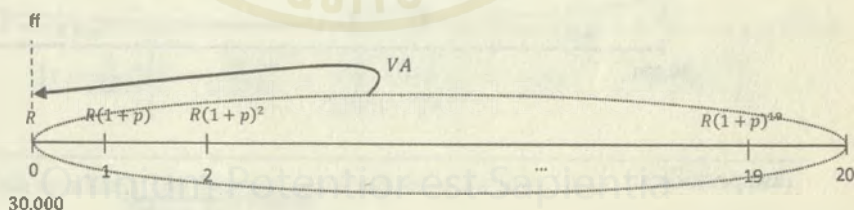
$$X = \frac{22,730.13}{1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{10}{1200}\right)^{36}}}$$

$$X = \$ 13,050.25$$

Dos pagos iguales de \$13,050.25

14. Una entidad financiera presta a un cliente \$30,000, con un interés del 8% capitalizable trimestralmente. El deudor tiene un plazo de 5 años para amortizar la deuda, mediante pagos trimestrales; suponiendo que la primera cuota es con pago de inmediato y que se estipula un reajuste trimestral del 2%, ¿cuál debe ser el valor de la primera cuota, para cancelar la deuda?

Gráfico problema 13.14



Tasa periódica:

$$i = \frac{j}{m} = \frac{8\%}{4} = 2\%; \quad p = 2\%$$

$$30,000 - R = VA$$

$$30,000 - R = \frac{nR}{1+i}$$

$$30,000 = R + \frac{nR}{1+i}$$

Reemplazando con los valores del problema se tiene:

$$30000 = R + \frac{nR(1+p)}{1+i}$$

Tomando en cuenta que $i = p$

$$30,000 = R + nR$$

$$30,000 = R(1+n)$$

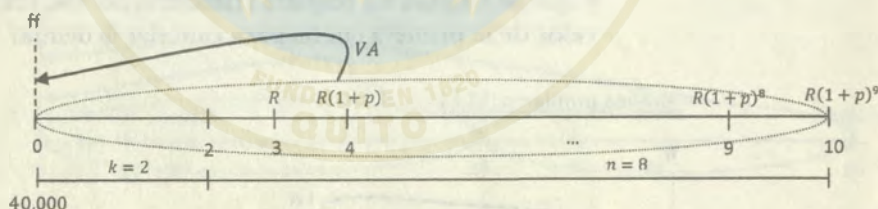
$$R = \frac{30,000}{(1+n)}$$

$$R = \frac{30000}{1+20}$$

$$R = \$1,528.47$$

15. El día de hoy se adquiere una deuda de \$40,000 a 5 años plazo, pagadera en cuotas semestrales que aumentan cada semestre en 3%; si se sabe que el primer pago se realizará dentro de 18 meses y que la tasa de interés aplicada es el 6% capitalizable semestralmente, calcular el valor del primer pago.

Gráfico problema 13.15



Tasa periódica:

$$i = \frac{j}{m} = \frac{6\%}{2} = 3\%; \quad p = 3\%$$

$$40,000 = VA$$

$$40,000 = \frac{nR}{(1+i)(1+i)^k} \quad \text{si } i = p$$

$$40,000 = \frac{nR}{(1+i)^{k+1}}$$

$$40,000 = \frac{nR}{(1+i)^{k+1}}$$

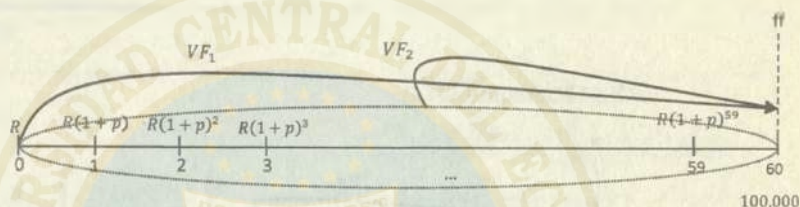
$$R = \frac{40,000 \times (1+i)^{k+1}}{n}$$

$$R = \frac{40,000 \times \left(1 + \frac{6}{200}\right)^{2+1}}{8}$$

$$R = \$5,463.64$$

16. Diez estudiantes recién ingresados piensan asociarse y crear un fondo de ahorros mensuales, de tal forma que al culminar sus 5 años de estudio, posean un capital de \$100,000 con el propósito de fundar su propia empresa. Sus ingresos les permiten incrementar el ahorro mensual en 2% y la entidad financiera les ofrece un interés 6% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuánto deberá ser el ahorro mensual inicial de cada uno de los estudiantes, si los depósitos se realizan al inicio de cada período?

Gráfico problema 13.16



$$VF_1 + VF_2 = 100,000$$

$$R(1+i)^n + R(1+p) \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i-p} \right] (1+i) = 100,000$$

$$R(1+i)^{60} + R(1+p) \left[\frac{(1+i)^{59} - (1+p)^{59}}{i-p} \right] (1+i) = 100,000$$

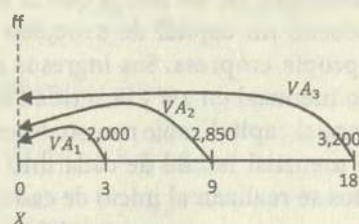
$$R(1+i) \left[(1+i)^{59} + \frac{(1+p)}{(i-p)} [(1+i)^{59} - (1+p)^{59}] \right] = 100,000$$

$$R = \frac{100,000}{\left(1 + \frac{6}{1200}\right) \left[\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{59} + \frac{\left(1 + \frac{2}{100}\right)}{\left(\frac{6}{1200} - \frac{2}{100}\right)} \left[\left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{59} - \left(1 + \frac{2}{100}\right)^{59} \right] \right]} = 772,46$$

Cada estudiante deberá hacer un depósito inicial de \$77.25

17. Sustituir una obligación que consta de tres pagarés así: \$2,000 para dentro de tres meses; \$2,850 para dentro de 9 meses y \$3,200 para dentro de un año y medio; todos con un interés del 6 % capitalizable trimestralmente, por su equivalente en cuotas mensuales que disminuyan en el 5% cada mes, debiendo pagarse en 24 cuotas, la primera después de 6 meses; sabiendo que para este caso se cobrará un interés del 12% convertible mensualmente.

Gráfico problema 13.17.a



$$X = VA_1 + VA_2 + VA_3$$

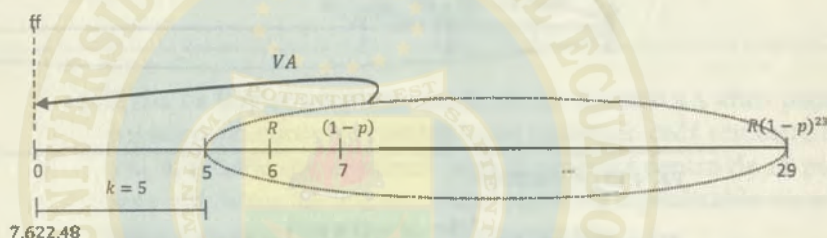
$$X = \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n} + \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$X = \frac{2,000}{\left(1 + \frac{6}{400}\right)^1} + \frac{2,850}{\left(1 + \frac{6}{400}\right)^3} + \frac{3,200}{\left(1 + \frac{6}{400}\right)^6}$$

$$X = 1,970.44 + 2,725.50 + 2,926.54$$

$$X = \$7,622.48$$

Gráfico problema 13.17.b



$$VA = 7,622.48$$

$$\frac{R}{(1+i)^k} \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i}\right)^n}{i-p} \right] = 7,622.48$$

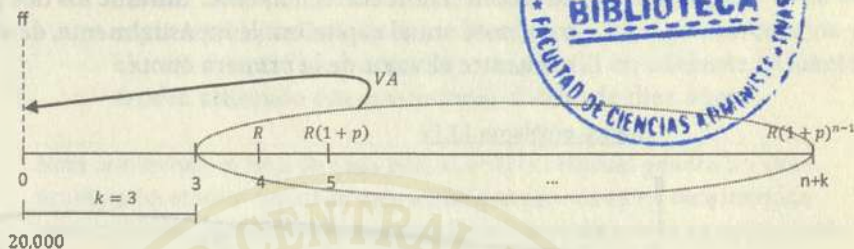
$$R = \frac{7,622.48 \times (i-p)(1+i)^k}{\left[1 - \left(\frac{1+p}{1+i}\right)^n \right]}$$

$$R = \frac{7,622.48 \times \left(\frac{12}{1200} + \frac{5}{100}\right) \left(1 + \frac{12}{1200}\right)^5}{\left[1 - \left(\frac{1 - \frac{5}{100}}{1 + \frac{12}{1200}}\right)^{24} \right]} = \$624.23$$

18. Si hoy se depositan \$20,000 en una corporación que reconoce el 8% capitalizable trimestralmente, ¿cuántos retiros trimestrales se podrán hacer, de tal manera que, cada retiro sea el 4% mayor que el retiro anterior, si se sabe que el valor del primer retiro es de \$1,000 y se lo realizará luego de 1 año? Además, determine

el valor del retiro adicional realizado con el último retiro, de manera que el fondo se liquide.

Gráfico problema 13.18.a



$$20,000 = VA$$

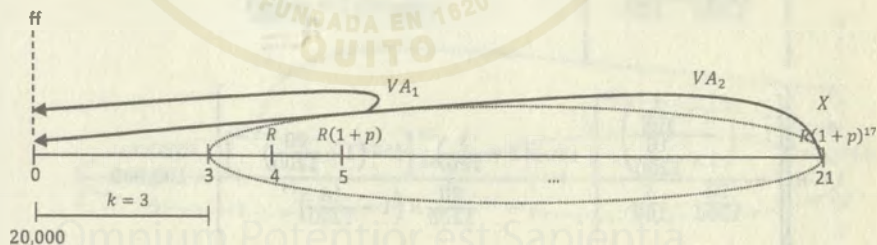
$$20,000 = \frac{R}{(1+i)^k} \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i} \right)^n}{i-p} \right]$$

$$\log \left[1 - \frac{20,000 \times \left(1 + \frac{8}{400} \right)^3 \left(\frac{8}{400} - \frac{4}{100} \right)}{1,000} \right] = \log \left[\frac{1 + \frac{4}{100}}{1 + \frac{8}{400}} \right]$$

$$n = \frac{\log \left[1 - \frac{20,000 \times (1+i)^k (i-p)}{R} \right]}{\log \left[\frac{1+p}{1+i} \right]}$$

$$n = 18.22 \rightarrow 18 \text{ pagos completos}$$

Gráfico problema 13.18.b



$$VA_1 + VA_2 = 20,000$$

$$\frac{R}{(1+i)^k} \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i} \right)^n}{i-p} \right] + \frac{M}{(1+i)^n} = 20,000$$

$$\frac{1,000}{\left(1 + \frac{8}{400} \right)^3} \left[\frac{1 - \left(\frac{1 + \frac{4}{100}}{1 + \frac{8}{400}} \right)^{18}}{\frac{8}{400} - \frac{4}{100}} \right] + \frac{X}{\left(1 + \frac{8}{400} \right)^{21}} = 20,000$$

$$X = \$ 434.81$$

19. El día de hoy se contrae una deuda de \$100,000 que se cancelará en tres años con cuotas mensuales vencidas que aumentan en el 3% cada mes, hasta el final del segundo año y, de allí en adelante, permanecerán constantes. Si la tasa de interés será del 18% convertible mensualmente, durante los dos primeros años, y del 20% anual capitalizable mensualmente, de allí en adelante, encuentre el valor de la primera cuota.

Gráfico problema 13.19



$$VA_1 + VA_2 = 100,000$$

$$R \left[\frac{1 - \left(\frac{1+p}{1+i} \right)^n}{i-p} \right] + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i \times (1+i)^k} = 100,000$$

$$R \left[\frac{1 - \left(\frac{1 + \frac{3}{100}}{1 + \frac{18}{1200}} \right)^{24}}{\frac{18}{1200} - \frac{3}{100}} \right] + \frac{R \left(1 + \frac{3}{100} \right)^{23} \left[1 - \left(1 + \frac{20}{1200} \right)^{-12} \right]}{\frac{20}{1200} \times \left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{24}} = 100,000$$

$$R \left[\frac{1 - \left(\frac{1 + \frac{3}{100}}{1 + \frac{18}{1200}} \right)^{24}}{\frac{18}{1200} - \frac{3}{100}} \right] + \frac{\left(1 + \frac{3}{100} \right)^{23} \left[1 - \left(1 + \frac{20}{1200} \right)^{-12} \right]}{\frac{20}{1200} \times \left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{24}} = 100,000$$

$$R = \frac{100,000}{\left[\frac{1 - \left(\frac{1 + \frac{3}{100}}{1 + \frac{18}{1200}} \right)^{24}}{\frac{18}{1200} - \frac{3}{100}} \right] + \frac{\left(1 + \frac{3}{100} \right)^{23} \left[1 - \left(1 + \frac{20}{1200} \right)^{-12} \right]}{\frac{20}{1200} \times \left(1 + \frac{18}{1200} \right)^{24}}}$$

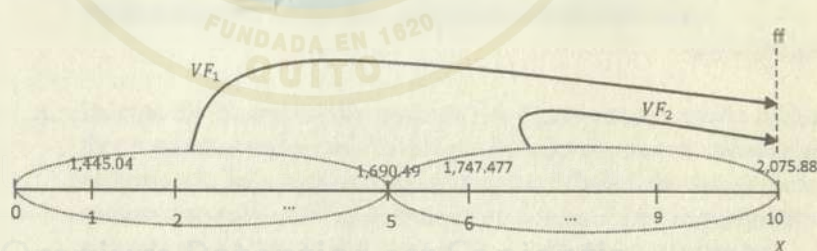
$$R = \$ 2,323.47$$

20. Un profesional recién egresado de la universidad se vincula a una empresa devengando un salario de \$1,150 mensuales en el primer año; la empresa le garantiza un aumento anual del 4% y este empleado decide ahorrar cada mes, la décima parte de su salario mensual, en una institución bancaria que paga el 10 % capitalizable mensualmente, durante los cinco primeros años y el 12% convertible mensualmente, de allí en adelante. ¿Cuánto tendrá ahorrado este profesional al cabo de diez años?

Nota preliminar: al final de cada año, el ahorro mensual genera un valor acumulado; el valor futuro de esta anualidad vencida se ha determinado para cada año, utilizando el programa Excel y se indica en la siguiente tabla:

Año	Ahorro	Tasa	núm. pagos	Valor futuro	Año	Ahorro	Tasa	núm. pagos	Valor futuro
1	115.00	0,83%	12	\$1,445.04	6	139.92	1.00%	12	\$1,774.47
2	119.60	0,83%	12	\$1,502.84	7	145.51	1.00%	12	\$1,845.45
3	124.38	0,83%	12	\$1,562.96	8	151.33	1.00%	12	\$1,919.27
4	129.36	0,83%	12	\$1,625.47	9	157.39	1.00%	12	\$1,996.04
5	134.53	0,83%	12	\$1,690.49	10	163.68	1.00%	12	\$2,075.88

Gráfico problema 13.20



Tasa equivalente (anual) $j = 10\%$ mensual

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{10}{1200} \right)^{12/1} - 1 \right] \times 100 = 10.47\%$$

Tasa equivalente (anual) $j = 12\%$ mensual

$$i' = (1 + i)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

$$i' = \left[\left(1 + \frac{12}{1200} \right)^{12/1} - 1 \right] \times 100 = 12.68\%$$

$$X = VF_1 + VF_2$$

$$X = R \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i-p} \right] (1+i)^n + R \left[\frac{(1+i)^n - (1+p)^n}{i-p} \right]$$

$$X = 1,445.04 \left[\frac{\left(1 + \frac{10.47}{100}\right)^5 - \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5}{\frac{10.47}{100} - \frac{4}{100}} \right] \left(1 + \frac{12.68}{100}\right)^5 + 1,774.47 \left[\frac{\left(1 + \frac{12.68}{100}\right)^5 - \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5}{\frac{12.68}{100} - \frac{4}{100}} \right]$$

$$X = 17,389.20 + 12,263.29$$

$$X = \$ 29,652.49$$



Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapientia

13.8 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una empresa produce 6,000 unidades de un artículo al año, el precio por unidad es de \$12.50 el primer año, de \$13.00 en el segundo año, de \$13.50 en el tercer año y así sucesivamente. El costo por unidad del artículo es de \$8.00, y la empresa invierte anualmente la cuarta parte de las utilidades en una institución que paga el 3%. ¿Cuánto tendrá ahorrado la empresa al cabo de nueve años?

R: \$97,551.72

2. Una fábrica tiene costos fijos de \$600 mensuales y costos variables de \$15 por unidad. Durante los primeros 6 meses no hay producción, porque en ese tiempo se dedicará a pruebas y ajustes. En el mes 7 se iniciará la producción con 300 unidades y cada mes la producción aumentará en 200 unidades, hasta llegar al tope de 2,500 al mes. Si se espera vender la fábrica al final de 2 años, calcular el Valor actual del costo de producción, suponga una tasa del 12% capitalizable mensualmente.

R: \$413,325.85

3. Un producto de contado vale \$80,000. A plazos financian el 70% del valor de contado el cual se debe pagar así: 10 cuotas mensuales: la primera de \$3,000, la segunda de \$3,200 y así sucesivamente. Si la primera cuota se paga 4 meses después de entregada la cuota inicial y además se pagan dos cuotas extras iguales en los meses 6 y 9, hallar el valor de estas cuotas extras, si el interés de financiación es del 8% capitalizable mensualmente.

R: \$9,561.43

4. Dentro de un año se deben cancelar \$5,000 como cuota inicial de un apartamento; para tal fin se efectúan depósitos mensuales, empezando hoy con un ahorro de \$400. ¿Cuál debe ser el incremento constante en las cuotas posteriores, si por los depósitos reconocen un interés del 18% capitalizable mensualmente?

R: \$10.01

5. Dentro de presupuesto que el señor Arteaga tiene para el próximo año, espera ahorrar al final de cada trimestre \$1,700 e incrementar periódicamente dicha suma en \$300 ¿Cuánto tendrá ahorrado al final del año el señor Arteaga, si el banco le ofrece un interés del 4.5% capitalizable trimestral?

R: \$8,729.15

6. Un préstamo se debe cancelar a 5 años y un interés de financiación del 8% capitalizable semestralmente. Si las cuotas son

mensuales e iguales dentro de cada semestre pero, semestre a semestre decrecen en \$150, encontrar el valor de la primera cuota, si el préstamo era de \$30,000.

R: Pago Equivalente mensual: \$709.16; valor equivalente mensual del gradiente: \$-24.59

7. Dentro de 4 años se requieren \$48,000; para este objetivo se construirá un fondo mediante cuotas trimestrales iguales dentro de cada año, pero, año tras año crecen en \$400. Si el fondo reconoce el 8% capitalizable trimestralmente, encontrar el valor de la cuota trimestral para el primer año, tomando en cuenta que los depósitos son anticipados.

R: \$1,964.25

8. ¿Qué depósito inicial se debe realizar el día de hoy en un banco que reconoce el 4% capitalizable mensualmente y luego, al final del primer mes un depósito de \$150, que aumenta cada mes en \$10, para que pueda comprar después de 3 años, un activo que hoy cuesta \$18,000 y que aumenta de valor en 1% mensual?

R: \$11,959.78

9. Una máquina produce una utilidad de 10,000 durante el primer año, sin embargo, la utilidad de la máquina disminuye \$350 cada año, debido al desgaste. Calcular el total de las ganancias, suponiendo que la máquina va a trabajar por 10 años. La tasa de interés es el 5%.

R: \$107,733.68

10. Determinar el valor de contado de un activo que se adquiere así: una cuota inicial de \$450; 18 cuotas mensuales iguales de \$400 cada una, y luego cuotas mensuales de, \$150 la primera, \$160 la segunda, \$170 la tercera y así sucesivamente hasta finales del cuarto año; finalmente y seis meses después de la última de estas cuotas, un pago equivalente al 15% del valor de contado; la tasa de interés es del 12% nominal capitalizable mensualmente.

R: \$12,802.98

11. Un empleado abre una cuenta de ahorros hoy con \$250 y en tres meses empieza a hacer depósitos trimestrales de \$40, \$42, \$44,10, \$46.31, y así sucesivamente. Si la cuenta de ahorros paga el 6% capitalizable trimestralmente, hallar la cantidad acumulada que el empleado tendrá en su cuenta dentro de tres años.

R: \$984.89

12. Se necesita reponer una máquina dentro de 5 años y se estima que su precio en dicho momento será \$3,000. Con tal fin se desea crear un fondo en una corporación que pagará un interés del 6% capitalizable semestralmente. Hallar el valor del depósito que se debe efectuar dentro de seis meses, si los depósitos se incrementan en 1.5% con respecto al depósito anterior; encuentre además el valor de los pagos 5 y 8.

R: \$245.40; \$260.46; \$272.35

13. Hallar el valor de contado de un artículo que, financiado, puede adquirirse así: una cuota inicial equivalente al 30% del valor de contado y el resto a 15 meses, con cuotas que aumenten cada mes en el 2%, sabiendo que la primera será de \$230 y la tasa de interés será del 24% capitalizable mensualmente.

R: \$4,831.93

14. Se va a financiar una deuda de \$50,000 por medio de 36 cuotas mensuales que crecen el 1.18% cada mes, y una cuota extraordinaria por valor de \$3,000 en el mes 24. Si la tasa de interés es del 9 % capitalizable mensualmente, calcule el valor de la primera cuota.

R: \$1,232.46

15. Luis adquiere el día de hoy un crédito por \$60,000 para pagarlo en tres años, con cuotas trimestrales que aumenten en el 2% cada trimestre, hasta el final del segundo año; y, de allí en adelante, permanezcan constantes; si la tasa de interés será del 9% capitalizable trimestralmente, encuentre el valor de la primera cuota a pagar, exactamente en un año.

R: \$5,265.05

16. Se ofrece la administración de un restaurante durante un año y se garantiza que comprarán exactamente 6,000 almuerzos mensuales durante ese año, a razón de \$5 cada uno, pagaderos en un solo pago, al final del año sin intereses. La persona calcula que el costo de los insumos de cada almuerzo será de \$2, los cuales deberán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes, y su valor aumentará cada mes en un 5%. Por otro lado, el costo mensual de mano de obra se considera estable en \$6,500 mensuales y, además, se requerirá una inversión inicial de \$10,000 para la adecuación del restaurante. Suponiendo un interés mensual del 10% conveniente mensualmente, calcular cuál será el valor de su ganancia.

R: \$77,320.55

17. Una fábrica debe importar 80 toneladas mensuales de materia prima pagándola al principio de cada mes, a razón de 200 US\$ la tonelada, con un incremento del costo mensual de 1.25% con relación al precio anterior; hallar el valor total de las importaciones de la fábrica en el transcurso de un año. Suponga una tasa del 8% anual capitalizable mensualmente.

R: \$198,238.96

18. Una deuda se debe cancelar con 18 cuotas mensuales tales que, cada cuota decrece en el 1.24% respecto de la cuota anterior; si el interés de financiación es del 10% anual capitalizable mensualmente y el valor de la primera cuota es de \$400:

- Encuentre el valor del préstamo.
- Halle el saldo insoluto, una vez cancelada la cuota 10.
- Si al pagar la cuota 10 se solicita refinanciar el saldo existente en dicho momento, para cancelarlo con 4 cuotas trimestrales, la primera de inmediato, con un interés del 10% anual capitalizable trimestralmente, determine el valor de la nueva cuota.

R: a) \$6,019.39; b) 2,607.76; c) \$676.28

19. Se necesita pedir un préstamo para la compra de un vehículo que vale \$25,000; se plantea realizar pagos semestrales crecientes, al 5%, durante 5 años; la Corporación Financiera aplica un interés del 10% capitalizable semestralmente. Encuentre el valor de la primera y la última cuotas del préstamo.

R: \$2,625.00; \$4,072.24

20. Una empresa vende cada mes 500 unidades de su producto, a un precio de \$100 por unidad durante el primer año; a \$110 por unidad durante el segundo año; a \$121 por unidad durante el tercer año; y, así sucesivamente. La empresa deposita la décima parte de su ingreso mensual en una corporación financiera que paga el 6% capitalizable mensualmente. Hallar el valor total que la empresa tendrá acumulado al cabo de siete años.

R: \$689,405.68

14

AMORTIZACIÓN VARIABLE

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar el modelo de amortización de una deuda en condiciones de variabilidad en el valor del pago y en la tasa de interés, utilizando la herramienta Buscar objetivo del Excel.

14.1 Introducción

En el capítulo 11 se revisaron los conceptos y técnicas para el proceso financiero de la extinción de una deuda mediante pagos periódicos iguales. Así mismo, se establecieron los procesos de cálculo para los casos en que se presentaba alguna modificación en la tasa periódica.

En este capítulo se van a plantear modelos para extinción de deudas, mediante el proceso financiero de amortización en condiciones variables, con variaciones de diversa índole, tales como variación en la tasa y variación en el valor de las cuotas.

La solución matemática, realizada en forma manual resulta una tarea excesivamente laboriosa, lo que conllevaría una cantidad de tiempo considerable. Por tal razón, se va a aplicar el uso de la herramienta Informática "Buscar objetivo" que se encuentra dentro del programa de Hoja electrónica de cálculo Excel.

14.2 La herramienta Buscar objetivo

La herramienta Buscar objetivo, es una aplicación de la hoja electrónica de cálculo Excel que devuelve un valor, como el valor del pago periódico que permite cumplir con algún objetivo previamente establecido; por ejemplo, la extinción de la deuda (MICROSOFT Office, 1994).

Para el uso de esta herramienta, se requiere previamente la elaboración en Excel de la Tabla de Amortización, enlazando las celdas, de tal manera que, la herramienta busque el valor que permita, en el caso de la extinción de una deuda, cumplir con el objetivo: "el saldo después del último pago sea igual cero".

En la siguiente imagen se puede apreciar la construcción de la tabla de Amortización en una Hoja de cálculo del Programa Excel. Nótese que se ha agregado la Columna Tasa de interés:

Gráfico texto 14.2.a

	B2						
	A	B	C	D	E	F	G
1	Periodo	Saldo insoluto antes del pago	Tasa de Interés	Interés periódico vencido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo insoluto después del pago
2	1						
3	2						
4	3						
5	4						
6	5						
7	6						
8	7						
9	8						
10							

En seguida se procede a ingresar la información disponible; por ejemplo:

- El valor de la deuda deberá ubicarse en la celda correspondiente al Saldo Insoluto, antes del primer pago.
- La tasa de Interés en cada una de las celdas de la columna correspondiente.

- Las fórmulas de cálculo en las respectivas columnas.

De esta manera, la estructura interna de la tabla deberá quedar así:

Gráfico texto 14.2.b

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Periodo	Saldo insoluto antes del pago	Tasa de interés	Interés periódico vencido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo insoluto después del pago	
1								
2	1	=B2	1%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2	
3	2	=G2	1%	=B3*C3	=E2	=E3-D3	=B3-F3	
4	3	=G3	1%	=B4*C4	=E3	=E4-D4	=B4-F4	
5	4	=G4	1%	=B5*C5	=E4	=E5-D5	=B5-F5	
6	5	=G5	1%	=B6*C6	=E5	=E6-D6	=B6-F6	
7	6	=G6	1%	=B7*C7	=E6	=E7-D7	=B7-F7	
8	7	=G7	1%	=B8*C8	=E7	=E8-D8	=B8-F8	
9	8	=G8	1%	=B9*C9	=E8	=E9-D9	=B9-F9	
10								
11								

Se debe tomar en cuenta que el valor del pago (Celda E2, resaltada) no se conoce y es lo que se debe encontrar; además los pagos son iguales.

Si, por ejemplo, se trata de una deuda de \$40,000, al 5%, a pagar en 8 años, se tendrá:

Gráfico texto 14.2.c

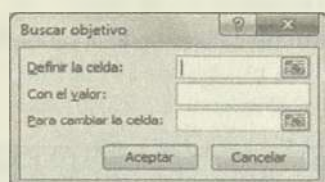
	A	B	C	D	E	F	G	H
	Periodo	Saldo insoluto antes del pago	Tasa de interés	Interés periódico vencido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo insoluto después del pago	
1								
2	1	=0,000.00	5%	2,000.00		-2,000.00	42,000.00	
3	2	42,000.00	5%	2,100.00	0	-2,100.00	44,100.00	
4	3	44,100.00	5%	2,205.00	0	-2,205.00	46,305.00	
5	4	46,305.00	5%	2,315.25	0	-2,315.25	48,620.25	
6	5	48,620.25	5%	2,431.01	0	-2,431.01	51,051.26	
7	6	51,051.26	5%	2,552.56	0	-2,552.56	53,603.83	
8	7	53,603.83	5%	2,680.19	0	-2,680.19	56,284.02	
9	8	56,284.02	5%	2,814.20	0	-2,814.20	59,098.22	
10								
11								

Un vez elaborada la tabla, se puede aplicar la herramienta Buscar objetivo, la misma que se activa desarrollando en la cinta de opciones del Excel el siguiente proceso:

- Pestaña Datos, Grupo Herramienta de datos, opción Análisis y si... (versión 2010).
- Pestaña Datos, Grupo Herramienta de datos, opción Análisis de hipótesis, Buscar objetivo (versión 2013).

Con cualquiera de las dos opciones, se desplegará la siguiente tarjeta:

Gráfico texto 14.2.d.

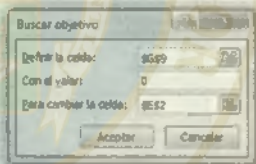


14.3 Aplicación de la herramienta de Excel: Buscar objetivo

Aplicando la herramienta Buscar objetivo en el ejemplo propuesto se tiene:

Gráfico texto 14.3

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Periodo	Saldo insoluto antes del pago	Tasa de Interés	Interés periódico vendido	Pago periódico	Abono al Capital	Saldo insoluto después del pago	
1								
2	1	40,000.00	5%	2,000.00	-2,000.00	-2,000.00	42,000.00	
3	2	42,000.00	5%	2,100.00	0	-2,100.00	44,100.00	
4	3	44,100.00	5%	2,205.00	0	-2,205.00	46,305.00	
5	4	46,305.00	5%	2,315.25	0	-2,315.25	48,620.25	
6	5	48,620.25	5%	2,431.01	0	-2,431.01	51,051.26	
7	6	51,051.26	5%	2,552.56	0	-2,552.56	53,603.83	
8	7	53,603.83	5%	2,680.19	0	-2,680.19	56,284.02	
9	8	56,284.02	5%	2,814.20	0	-2,814.20	59,098.22	
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								



Los resultados parciales obtenidos, antes de aplicar la Herramienta Buscar objetivo, tienen la siguiente interpretación:

“No se ha realizado pago alguno de la deuda de \$40,000, de manera que al vencimiento de la misma (luego de 8 años), el valor de la deuda es de \$59,098.22.”

Los campos de la tarjeta Buscar objetivos se llenan de la siguiente manera:

- Definir la celda: en este campo se ubica el valor de la celda que contiene el Saldo insoluto después del pago; en este caso es la celda G9.
- Con el valor: en este campo debe ingresarse el valor cero (por medio del teclado), puesto que ese es el objetivo, dado que el valor de la deuda luego del último pago es igual a cero.
- Para cambiar la celda: en este campo se colocará la celda cambiante; es decir, aquella celda que en la que el programa ensaya diferentes valores hasta encontrar el valor adecuado. Para el

ejemplo se tomará como celda cambiante la celda que registra el pago (valor desconocido).

Una vez llenos los campos, al hacer clic en el botón Aceptar, Excel desarrollará en forma instantánea varias iteraciones hasta encontrar el resultado; esta operación se lleva a cabo en contados segundos (BACA Currea, 2002).

El resultado obtenido en el ejemplo es: \$6,188.87.



Univ. Central del Ecuador - Facultad de Ciencias Administrativas

Omnium Potentior est Sapientia

14.4 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Elaborar una tabla para amortizar la suma de \$30,000 en 12 pagos periódicos uniformes con una tasa de 3% para los primeros 3 períodos, de 3.5% para los siguientes tres períodos, y de 4% para los siguientes 3 períodos y del 2% para los 3 últimos períodos.

Solución:

En una Hoja de Cálculo del programa Excel desarrolle la tabla que se indica:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	30,000.00	3,00%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	3,00%	=B3*C3	=E2	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	3,00%	=B4*C4	=E3	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	3,50%	=B5*C5	=E4	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	3,50%	=B6*C6	=E5	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	3,50%	=B7*C7	=E6	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	4,00%	=B8*C8	=E7	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	4,00%	=B9*C9	=E8	=E9-D9	=B9-F9
10	9	=G9	4,00%	=B10*C10	=E9	=E10-D10	=B10-F10
11	10	=G10	2,00%	=B11*C11	=E10	=E11-D11	=B11-F11
12	11	=G11	2,00%	=B12*C12	=E11	=E12-D12	=B12-F12
13	12	=G12	2,00%	=B2*C2	=E12	=E2-D2	=B2-F2

Tenga en cuenta las siguientes observaciones:

- Las fórmulas de cálculo son las mismas que se utilizan en el proceso de amortización.
- La celda del primer pago periódico, desconocido, está vacía; las fórmulas de los demás pagos están relacionados con el primero, dando así a entender que los pagos son iguales.

Al final se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	30,000.00	3,00%	900.00		-900.00	30,900.00
3	2	30,900.00	3,00%	927.00	-	-927.00	31,827.00
4	3	31,827.00	3,00%	954.81	-	-954.81	32,781.81
5	4	32,781.81	3,50%	1,147.36	-	-1,147.36	33,929.17
6	5	33,929.17	3,50%	1,187.52	-	-1,187.52	35,116.69
7	6	35,116.69	3,50%	1,229.08	-	-1,229.08	36,345.78
8	7	36,345.78	4,00%	1,453.83	-	-1,453.83	37,799.61
9	8	37,799.61	4,00%	1,511.98	-	-1,511.98	39,311.59

10	9	39,311.59	4.00%	1,572.46	-	-1,572.46	40,884.06
11	10	40,884.06	2.00%	817.68	-	-817.68	41,701.74
12	11	41,701.74	2.00%	834.03	-	-834.03	42,535.77
13	12	42,535.77	2.00%	850.72	-	-850.72	43,386.49

Una interpretación particular de la tabla es la siguiente: "Al no haber realizado ningún pago, la deuda de \$30,000.00 ha crecido hasta \$43,386.49."

Mediante la herramienta "Buscar Objetivo" se puede encontrar el valor del pago periódico que liquide la deuda.

Tome en cuenta:

- La Herramienta Buscar Objetivo se encuentra en la opción "Análisis de hipótesis" de la sección Herramientas de datos, en la pestaña Datos.
- Dado que el objetivo es hallar el valor del pago periódico para extinguir la deuda, entonces al final del pago N° 12, el valor de la deuda debe ser cero; en la herramienta "Buscar objetivo" se debe llenar la información de los campos:
 - Definir la celda: G29 (celda que contiene el saldo de la deuda después del pago N° 12).
 - Con el Valor: 0
 - Para cambiar la celda: E18 (valor del pago periódico a realizar).

Luego de hacer un clic en el botón Aceptar, la tabla va cambiando hasta que se obtiene el valor del pago que cumpla con el objetivo, es decir:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	30,000.00	3.00%	900.00	3,061.47	2,161.47	27,838.53
3	2	27,838.53	3.00%	835.16	3,061.47	2,226.31	25,612.22
4	3	25,612.22	3.00%	768.37	3,061.47	2,293.10	23,319.12
5	4	23,319.12	3.50%	816.17	3,061.47	2,245.30	21,073.82
6	5	21,073.82	3.50%	737.58	3,061.47	2,323.88	18,749.94
7	6	18,749.94	3.50%	656.25	3,061.47	2,405.22	16,344.72
8	7	16,344.72	4.00%	653.79	3,061.47	2,407.68	13,937.04
9	8	13,937.04	4.00%	557.48	3,061.47	2,503.99	11,433.06
10	9	11,433.06	4.00%	457.32	3,061.47	2,604.14	8,828.91
11	10	8,828.91	2.00%	176.58	3,061.47	2,884.89	5,944.02
12	11	5,944.02	2.00%	118.88	3,061.47	2,942.59	3,001.44
13	12	3,001.44	2.00%	60.03	3,061.47	3,001.44	0.00

El valor del pago periódico a realizar para extinguir la deuda es de \$3,061.47

- Elaborar una tabla para amortizar la suma de \$10,000, en pagos mensuales iguales por 18 meses, si se cobra una tasa durante los 8 primeros meses 2.5% periódico mensual, de ahí en adelante sube 0.3%. El deudor solicita que el período 1 y el período 8 sean de gracia y ofrece un pago extra de 1,000, en el período 12.

Solución: En una Hoja de Cálculo del programa Excel desarrolle la tabla que se indica:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	10,000.00	=2.5%	=B2*C2	0,00	=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	=2.5%	=B3*C3		=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	=2.5%	=B4*C4	=E3	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	=2.5%	=B5*C5	=E3	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	=2.5%	=B6*C6	=E3	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	=2.5%	=B7*C7	=E3	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	=2.5%	=B8*C8	=E3	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	=2.5%	=B9*C9	0,00	=E9-D9	=B9-F9
10	9	=G9	=C9+0.3%	=B10*C10	=E3	=E10-D10	=B10-F10
11	10	=G10	=C10+0.3%	=B11*C11	=E3	=E11-D11	=B11-F11
12	11	=G11	=C11+0.3%	=B12*C12	=E3	=E12-D12	=B12-F12
13	12	=G12	=C12+0.3%	=B13*C13	=E3+1000	=E13-D13	=B13-F13
14	13	=G13	=C13+0.3%	=B14*C14	=E3	=E14-D14	=B14-F14
15	14	=G14	=C14+0.3%	=B15*C15	=E3	=E15-D15	=B15-F15
16	15	=G15	=C15+0.3%	=B16*C16	=E3	=E16-D16	=B16-F16
17	16	=G16	=C16+0.3%	=B17*C17	=E3	=E17-D17	=B17-F17
18	17	=G17	=C17+0.3%	=B18*C18	=E3	=E18-D18	=B18-F18
19	18	=G18	=C18+0.3%	=B19*C19	=E3	=E19-D19	=B19-F19

Obteniendo el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	10.000,00	2.50%	250,00	0,00	-250,00	10.250,00
3	2	10.250,00	2.50%	256,25		-256,25	10.506,25
4	3	10.506,25	2.50%	262,66	-	-262,66	10.768,91
5	4	10.768,91	2.50%	269,22	-	-269,22	11.038,13

6	5	11.038,13	2.50%	275,95	-	-275,95	11.314,08
7	6	11.314,08	2.50%	282,85	-	-282,85	11.596,93
8	7	11.596,93	2.50%	289,92	-	-289,92	11.886,86
9	8	11.886,86	2.50%	297,17	0,00	-297,17	12.184,03
10	9	12.184,03	2.80%	341,15	-	-341,15	12.525,18
11	10	12.525,18	3.10%	388,28	-	-388,28	12.913,46
12	11	12.913,46	3.40%	439,06	-	-439,06	13.352,52
13	12	13.352,52	3.70%	494,04	1.000,00	505,96	12.846,56
14	13	12.846,56	4.00%	513,86	-	-513,86	13.360,43
15	14	13.360,43	4.30%	574,50	-	-574,50	13.934,92
A		B	C	D	E	F	G
16	15	13.934,92	4.60%	641,01	-	-641,01	14.575,93
17	16	14.575,93	4.90%	714,22	-	-714,22	15.290,15
18	17	15.290,15	5.20%	795,09	-	-795,09	16.085,24
19	18	16.085,24	5.50%	884,69	-	-884,69	16.969,93

Al aplicar la herramienta Buscar Objetivo se encuentra el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	10,000.00	2.50%	250.00	0.00	-250.00	10,250.00
3	2	10,250.00	2.50%	256.25	763.94	507.69	9,742.31
4	3	9,742.31	2.50%	243.56	763.94	520.38	9,221.93
5	4	9,221.93	2.50%	230.55	763.94	533.39	8,688.54
6	5	8,688.54	2.50%	217.21	763.94	546.72	8,141.82
7	6	8,141.82	2.50%	203.55	763.94	560.39	7,581.43
8	7	7,581.43	2.50%	189.54	763.94	574.40	7,007.02
9	8	7,007.02	2.50%	175.18	0.00	-175.18	7,182.20
10	9	7,182.20	2.80%	201.10	763.94	562.84	6,619.36
11	10	6,619.36	3.10%	205.20	763.94	558.74	6,060.63
12	11	6,060.63	3.40%	206.06	763.94	557.88	5,502.75
13	12	5,502.75	3.70%	203.60	1,763.94	1,560.34	3,942.41
14	13	3,942.41	4.00%	157.70	763.94	606.24	3,336.17
15	14	3,336.17	4.30%	143.46	763.94	620.48	2,715.69
16	15	2,715.69	4.60%	124.92	763.94	639.02	2,076.68
17	16	2,076.68	4.90%	101.76	763.94	662.18	1,414.50

18	17	1,414.50	5.20%	73.55	763.94	690.38	724.11
19	18	724.11	5.50%	39.83	763.94	724.11	0.00

3. ¿Cuál es el préstamo máximo que se le puede conceder a una persona que puede pagar mensualmente \$600, durante 15 meses y que, en el mes 12, además de la cuota ordinaria de \$600 puede pagar una cuota extraordinaria de \$1,500? Suponga una tasa del 3.5% periódica mensual.

Preparar en una hoja de cálculo del programa Excel la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1		3.50%	=B2*C2	600.00	=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	3.50%	=B3*C3	600.00	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	3.50%	=B4*C4	600.00	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	3.50%	=B5*C5	600.00	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	3.50%	=B6*C6	600.00	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	3.50%	=B7*C7	600.00	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	3.50%	=B8*C8	600.00	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	3.50%	=B9*C9	600.00	=E9-D9	=B9-F9
10	9	=G9	3.50%	=B10*C10	600.00	=E10-D10	=B10-F10
11	10	=G10	3.50%	=B11*C11	600.00	=E11-D11	=B11-F11
12	11	=G11	3.50%	=B12*C12	600.00	=E12-D12	=B12-F12
13	12	=G12	3.50%	=B13*C13	2100.00	=E13-D13	=B13-F13
14	13	=G13	3.50%	=B14*C14	600.00	=E14-D14	=B14-F14
15	14	=G14	3.50%	=B15*C15	600.00	=E15-D15	=B15-F15
16	15	=G15	3.50%	=B16*C16	600.00	=E16-D16	=B16-F16

Obteniendo el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1		3.50%	0.00	600.00	600.00	-600.00
3	2	-600.00	3.50%	-21.00	600.00	621.00	-1,221.00
4	3	-1,221.00	3.50%	-42.74	600.00	642.74	-1,863.74
5	4	-1,863.74	3.50%	-65.23	600.00	665.23	-2,528.97
6	5	-2,528.97	3.50%	-88.51	600.00	688.51	-3,217.48

7	6	-3,217.48	3.50%	-112.61	600.00	712.61	-3,930.09
8	7	-3,930.09	3.50%	-137.55	600.00	737.55	-4,667.64
9	8	-4,667.64	3.50%	-163.37	600.00	763.37	-5,431.01
10	9	-5,431.01	3.50%	-190.09	600.00	790.09	-6,221.10
11	10	-6,221.10	3.50%	-217.74	600.00	817.74	-7,038.84
12	11	-7,038.84	3.50%	-246.36	600.00	846.36	-7,885.20
13	12	-7,885.20	3.50%	-275.98	2,100.00	2,375.98	-10,261.18
14	13	-10,261.18	3.50%	-359.14	600.00	959.14	-11,220.32
15	14	-11,220.32	3.50%	-392.71	600.00	992.71	-12,213.03
16	15	-12,213.03	3.50%	-427.46	600.00	1,027.46	-13,240.49

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, tomando en cuenta el objetivo de siempre: extinguir la deuda y como Celda cambiante la celdas correspondiente al valor del préstamo se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Periodo	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	7,903.12	3.50%	276.61	600.00	323.39	7,579.73
3	2	7,579.73	3.50%	265.29	600.00	334.71	7,245.02
4	3	7,245.02	3.50%	253.58	600.00	346.42	6,898.60
5	4	6,898.60	3.50%	241.45	600.00	358.55	6,540.05
6	5	6,540.05	3.50%	228.90	600.00	371.10	6,168.95
7	6	6,168.95	3.50%	215.91	600.00	384.09	5,784.86
8	7	5,784.86	3.50%	202.47	600.00	397.53	5,387.33
9	8	5,387.33	3.50%	188.56	600.00	411.44	4,975.89
10	9	4,975.89	3.50%	174.16	600.00	425.84	4,550.05
11	10	4,550.05	3.50%	159.25	600.00	440.75	4,109.30
12	11	4,109.30	3.50%	143.83	600.00	456.17	3,653.12
13	12	3,653.12	3.50%	127.86	2,100.00	1,972.14	1,680.98
14	13	1,680.98	3.50%	58.83	600.00	541.17	1,139.82
15	14	1,139.82	3.50%	39.89	600.00	560.11	579.71
16	15	579.71	3.50%	20.29	600.00	579.71	0.00

- Un banco le presta a un cliente \$100,000 con un interés del 12% capitalizable trimestralmente. El deudor tiene un plazo de 4 años para amortizar la deuda mediante pagos trimestrales. El primer pago vence dentro de tres meses y de ahí en adelante cada pago se aumentará en un 2% trimestral durante 1 año, de tal manera que, a partir del año y hasta la total liquidación de la

deuda, los pagos mantendrán el mismo valor que el pago número 4. Calcule el valor de los pagos trimestrales.

Preparar en una hoja de cálculo del programa Excel, a partir de la celda A1, la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	100,000.00	3%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	3%	=B3*C3	=E2*1.02	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	3%	=B4*C4	=E3*1.02	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	3%	=B5*C5	=E4*1.02	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	3%	=B6*C6	=E5	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	3%	=B7*C7	=E6	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	3%	=B8*C8	=E7	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	3%	=B9*C9	=E8	=E9-D9	=B9-F9
10	9	=G9	3%	=B10*C10	=E9	=E10-D10	=B10-F10
11	10	=G10	3%	=B11*C11	=E10	=E11-D11	=B11-F11
12	11	=G11	3%	=B12*C12	=E11	=E12-D12	=B12-F12
13	12	=G12	3%	=B13*C13	=E12	=E13-D13	=B13-F13

Obteniendo el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	100,000.00	3%	3,000.00		(3,000.00)	103,000.00
3	2	103,000.00	3%	3,090.00	-	(3,090.00)	106,090.00
4	3	106,090.00	3%	3,182.70	-	(3,182.70)	109,272.70
5	4	109,272.70	3%	3,278.18	-	(3,278.18)	112,550.88
6	5	112,550.88	3%	3,376.53	-	(3,376.53)	115,927.41
7	6	115,927.41	3%	3,477.82	-	(3,477.82)	119,405.23
8	7	119,405.23	3%	3,582.16	-	(3,582.16)	122,987.39
9	8	122,987.39	3%	3,689.62	-	(3,689.62)	126,677.01
10	9	126,677.01	3%	3,800.31	-	(3,800.31)	130,477.32
11	10	130,477.32	3%	3,914.32	-	(3,914.32)	134,391.64
12	11	134,391.64	3%	4,031.75	-	(4,031.75)	138,423.39
13	12	138,423.39	3%	4,152.70	-	(4,152.70)	142,576.09

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, tomando en cuenta el objetivo de siempre: extinguir la deuda, y como Celda cambiante, la

celda correspondiente al valor del Pago periódico en el primer período (celda E2), se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	100,000.00	3%	3,000.00	9,573.08	6,573.08	93,426.92
3	2	93,426.92	3%	2,802.81	9,764.54	6,961.73	86,465.19
4	3	86,465.19	3%	2,593.96	9,959.83	7,365.88	79,099.31
5	4	79,099.31	3%	2,372.98	10,159.03	7,786.05	71,313.26
6	5	71,313.26	3%	2,139.40	10,159.03	8,019.63	63,293.63
7	6	63,293.63	3%	1,898.81	10,159.03	8,260.22	55,033.41
8	7	55,033.41	3%	1,651.00	10,159.03	8,508.03	46,525.38
9	8	46,525.38	3%	1,395.76	10,159.03	8,763.27	37,762.11
10	9	37,762.11	3%	1,132.86	10,159.03	9,026.17	28,735.95
11	10	28,735.95	3%	862.08	10,159.03	9,296.95	19,438.99
12	11	19,438.99	3%	583.17	10,159.03	9,575.86	9,863.14
13	12	9,863.14	3%	295.89	10,159.03	9,863.14	(0.00)

5. Elaborar la tabla de amortización para una deuda de \$2,500 que se va a liquidar en 8 pagos mensuales, con el 12% de interés capitalizable cada mes, si los pagos se incrementan en \$40 cada mes.

Preparar en una hoja de cálculo del programa Excel, a partir de la celda A1, la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	2,500.00	1.00%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	1.00%	=B3*C3	=E2+40	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	1.00%	=B4*C4	=E3+40	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	1.00%	=B5*C5	=E4+40	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	1.00%	=B6*C6	=E5+40	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	1.00%	=B7*C7	=E6+40	=E7-D7	=B7-F7
8	7	=G7	1.00%	=B8*C8	=E7+40	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	1.00%	=B9*C9	=E8+40	=E9-D9	=B9-F9

Obteniendo el siguiente resultado:

	A	B	C	C	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	2,500.00	1.00%	25.00		-25.00	2,525.00
3	2	2,525.00	1.00%	25.25	40.00	14.75	2,510.25
4	3	2,510.25	1.00%	25.10	80.00	54.90	2,455.35
5	4	2,455.35	1.00%	24.55	120.00	95.45	2,359.91
6	5	2,359.91	1.00%	23.60	160.00	136.40	2,223.51
7	6	2,223.51	1.00%	22.24	200.00	177.76	2,045.74
8	7	2,045.74	1.00%	20.46	240.00	219.54	1,826.20
9	8	1,826.20	1.00%	18.26	280.00	261.74	1,564.46

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, como Celda cambiante la celda correspondiente al valor del Pago periódico en el primer período (celda E2) se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	2,500.00	1.00%	25.00	188.82	163.82	2,336.18
3	2	2,336.18	1.00%	23.36	228.82	205.45	2,130.73
4	3	2,130.73	1.00%	21.31	268.82	247.51	1,883.22
5	4	1,883.22	1.00%	18.83	308.82	289.98	1,593.24
6	5	1,593.24	1.00%	15.93	348.82	332.88	1,260.36
7	6	1,260.36	1.00%	12.60	388.82	376.21	884.15
8	7	884.15	1.00%	8.84	428.82	419.97	464.17
9	8	464.17	1.00%	4.64	468.82	464.17	(0.00)

6. Resuelva el ejercicio anterior si los pagos decrecen en \$40 de un mes a otro.

Preparar en una hoja de cálculo del programa Excel, a partir de la celda A1, la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	2,500.00	1.00%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	1.00%	=B3*C3	=E2-40	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	1.00%	=B4*C4	=E3-40	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	1.00%	=B5*C5	=E4-40	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	1.00%	=B6*C6	=E5-40	=E6-D6	=B6-F6
7	6	=G6	1.00%	=B7*C7	=E6-40	=E7-D7	=B7-F7

8	7	=G7	1.00%	=B8*C8	=E7-40	=E8-D8	=B8-F8
9	8	=G8	1.00%	=B9*C9	=E8-40	=E9-D9	=B9-F9

Obteniendo el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	2,500.00	1.00%	25.00		(25.00)	2,525.00
3	2	2,525.00	1.00%	25.25	(40.00)	(65.25)	2,590.25
4	3	2,590.25	1.00%	25.90	(80.00)	(105.90)	2,696.15
5	4	2,696.15	1.00%	26.96	(120.00)	(146.96)	2,843.11
6	5	2,843.11	1.00%	28.43	(160.00)	(188.43)	3,031.55
7	6	3,031.55	1.00%	30.32	(200.00)	(230.32)	3,261.86
8	7	3,261.86	1.00%	32.62	(240.00)	(272.62)	3,534.48
9	8	3,534.48	1.00%	35.34	(280.00)	(315.34)	3,849.82

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, como Celda cambiante la celda correspondiente al valor del Pago periódico en el primer período (celda E2) se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	2,500.00	1.00%	25.00	464.64	439.64	2,060.36
3	2	2,060.36	1.00%	20.60	424.64	404.03	1,656.33
4	3	1,656.33	1.00%	16.56	384.64	368.07	1,288.26
5	4	1,288.26	1.00%	12.88	344.64	331.75	956.50
6	5	956.50	1.00%	9.57	304.64	295.07	661.43
7	6	661.43	1.00%	6.61	264.64	258.02	403.41
8	7	403.41	1.00%	4.03	224.64	220.60	182.81
9	8	182.81	1.00%	1.83	184.64	182.81	-

7. Elaborar una tabla para amortizar \$50,000 en 2 años y 6 meses mediante pagos semestrales vencidos y crecientes en un 10%.

La tasa de interés es del 8% anual capitalizable semestralmente. Se prepara en una hoja de cálculo del programa Excel, a partir de la celda A1, la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	5,000	2.00%	=B2*C2		=E2-D2	=B2-F2
3	2	=G2	2.00%	=B3*C3	=E2*1.10	=E3-D3	=B3-F3
4	3	=G3	2.00%	=B4*C4	=E3*1.10	=E4-D4	=B4-F4
5	4	=G4	2.00%	=B5*C5	=E4*1.10	=E5-D5	=B5-F5
6	5	=G5	2.00%	=B6*C6	=E5*1.10	=E6-D6	=B6-F6

Obteniendo el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	5,000.00	2.00%	100.00		(100.00)	5,100.00
3	2	5,100.00	2.00%	102.00		- (102.00)	5,202.00
4	3	5,202.00	2.00%	104.04		- (104.04)	5,306.04
5	4	5,306.04	2.00%	106.12		- (106.12)	5,412.16
6	5	5,412.16	2.00%	108.24		- (108.24)	5,520.40

Al aplicar la herramienta Buscar objetivo, como Celda cambiante la celda correspondiente al valor del Pago periódico en el primer período (celda E2) se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	SIAP	TASA	IPV	PAGO	AC	SIDP
2	1	5,000.00	2.00%	100.00	872.05	772.05	4,227.95
3	2	4,227.95	2.00%	84.56	959.26	874.70	3,353.25
4	3	3,353.25	2.00%	67.07	1,055.18	988.12	2,365.13
5	4	2,365.13	2.00%	47.30	1,160.70	1,113.40	1,251.74
6	5	1,251.74	2.00%	25.03	1,276.77	1,251.74	-

14.5 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una imprenta se vende en \$385,000. El comprador da un enganche de \$85,000 y se compromete a pagar el saldo en un año, con pagos mensuales iguales, más 3 pagos extraordinarios de \$50,000, cada uno al final de cada cuatrimestre. Si la tasa de interés es del 9% capitalizable mensualmente, hallar el valor de los pagos mensuales y elaborar la tabla de amortización.

R: \$13,875.19

2. Se va a amortizar una deuda de \$12,500 en un año, mediante pagos mensuales vencidos de X (dólares) cada uno, más 2 pagos extraordinarios de $4X$ (dólares) cada uno, al final de cada semestre. Si la tasa de interés es el 36% capitalizable mensualmente, encontrar el valor de los pagos normales y el de los pagos extraordinarios; finalmente, construir la tabla de amortización.

R: \$775.94; \$3,879.71

3. Un comerciante renta por 5 años una bodega, el contrato de arrendamiento estipula: "durante el primer año se pagará una renta semestral vencida de \$24,000; el segundo año la renta semestral vencida será de \$27,600; el tercer año será de \$33,120 cada semestre vencido y en el cuarto y quinto años será de \$41,400 semestrales". Si el costo promedio del dinero es del 12% capitalizable cada semestre, encuentre el Valor Actual de la renta de la bodega.

R: \$280,889.18

4. José acaba de abrir un almacén y en el primer mes de operaciones tuvo ventas por \$6,420; sin embargo, estima que sus ventas a partir del segundo mes, se incrementarán con un gradiente de \$3,000 mensuales. Hallar el valor presente de sus ventas en los primeros 8 meses, suponiendo una tasa de interés del 10% capitalizable cada mes.

R: \$129,414.41

5. Cuánto dinero deberá depositarse inicialmente en una cuenta de ahorros que paga el 24% anual con capitalización trimestral, para proporcionar suficiente dinero para 6 retiros trimestrales que comienzan con \$10,000 y disminuyen con \$600 cada trimestre, tomando en cuenta que la tasa sube 0.5% cada trimestre durante los 3 primeros trimestres y luego baja 0.75% cada uno de los tres últimos trimestres.

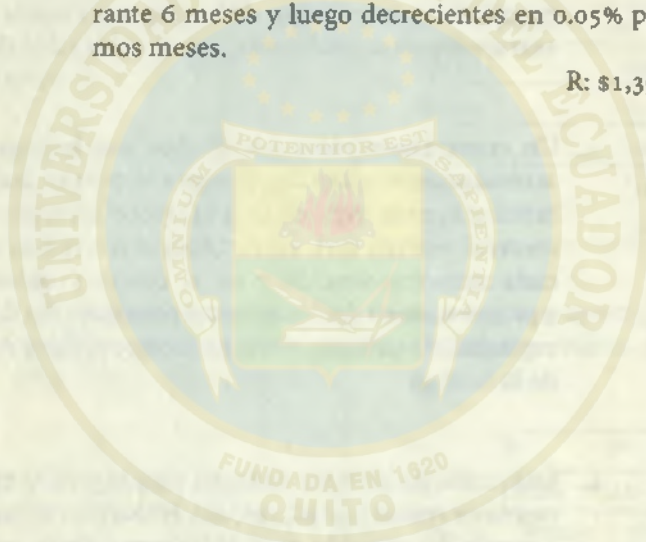
R: \$41,983.46

6. Una persona desea comprar una casa a un costo de \$270,000, ofrece un pago inmediato de \$70,000 y el resto lo va a pagar mediante una amortización semestral de 3 años. ¿Cuál debe ser el valor del primer pago, si cada uno de los pagos siguientes puede decrecer en \$6,400? La tasa de interés es del 12% capitalizable semestral, decreciente en 0.05%.

R: 42,064.24

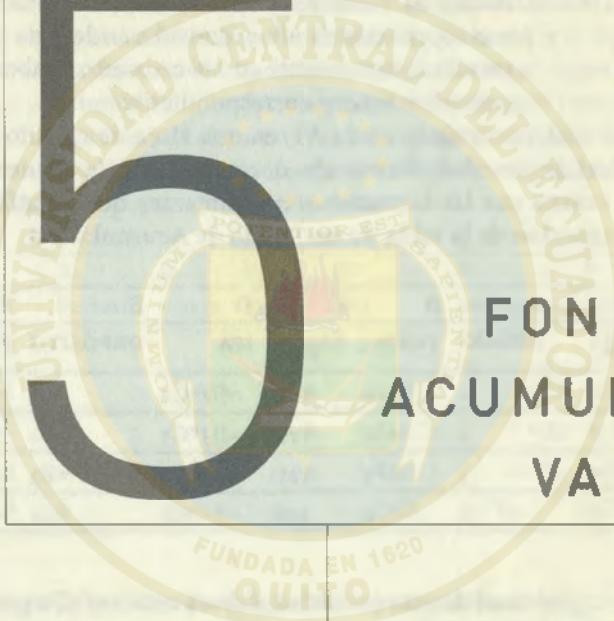
7. Al comprar una casa se queda debiendo \$15,000, para cancelar en 1 año con cuotas mensuales iguales y cuotas trimestrales iguales. Si las cuotas trimestrales son el 10% más que las cuotas mensuales, halle el valor de las cuotas a pagar para un interés inicial del 2% inicial con incrementos del 0.09% cada mes, durante 6 meses y luego decrecientes en 0.05% para los seis últimos meses.

R: \$1,392.77; \$1,532.04



Omnium Potentior est Sapientia

15



FONDOS DE ACUMULACIÓN VARIABLE

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar el modelo de acumulación en un Fondo en condiciones de variabilidad en el valor del depósito y en la tasa de interés, utilizando la herramienta Buscar objetivo del Excel.

15.1 Introducción

Al igual que en la Unidad 14, Amortización variable, en esta unidad se va a aplicar la herramienta “Buscar Objetivo” para la construcción de modelos financieros de acumulación variable. Se presenta a continuación un grupo de problemas resueltos y, como parte del proceso de aprendizaje, se incluye una selección de problemas propuestos que permitirán desarrollar destrezas en el manejo de esta herramienta de Excel (BACA Currea, 2002).

15.2 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor del depósito anual necesario para acumular \$20,000 en cuatro años, considerando una tasa de interés de 13% anual, decreciente en 1% cada año. Elaborar la tabla de fondo de valor futuro correspondiente.

A partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel, ingrese la información que aparece en la siguiente tabla. Tome en cuenta que las fórmulas son las mismas que se utilizan para la construcción de la tabla de un Fondo de Acumulación.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	13%	$=B2*C2$		$=D2+E2$	$=B2+F2$
3	2	$=G2$	12%	$=B3*C3$	$=E2$	$=D3+E3$	$=B3+F3$
4	3	$=G3$	11%	$=B4*C4$	$=E3$	$=D4+E4$	$=B4+F4$
5	4	$=G4$	10%	$=B5*C5$	$=E4$	$=D5+E5$	$=B5+F5$

Al final de esta actividad, deberá obtener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	-	13%		-		-
3	2	-	12%		-		-
4	3	-	11%		-		-
5	4	-	10%		-		-

Con la herramienta Buscar Objetivo, tal como se indica, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	-	13%	-	4,265.74	4,265.74	4,265.74
3	2	4,265.74	12%	511.89	4,265.74	4,777.63	9,043.37
4	3	9,043.37	11%	994.77	4,265.74	5,260.51	14,303.87
5	4	14,303.87	10%	1,430.39	4,265.74	5,696.13	20,000.00

2. Para disponer de 50,000 en cinco años se va a construir un fondo de acumulación en una entidad financiera que reconoce el 10%. Encuentre el valor del pago anual y construya la tabla de amortización correspondiente. Tome en cuenta que el segundo depósito debe ser el doble del primero, el tercer pago es igual al primero y el cuarto y quinto pago es el doble del tercero.

A partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel, ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	10%	=B2*C2	=D2+E2	=B2+F2	
3	2	=G2	10%	=B3*C3	=2*E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	10%	=B4*C4	=E2	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	10%	=B5*C5	=2*E4	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	10%	=B6*C6	=2*E4	=D6+E6	=B6+F6

Al final de esta actividad, deberá obtener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	10%	-	-	-	-
3	2	-	10%	-	-	-	-
4	3	-	10%	-	-	-	-
5	4	-	10%	-	-	-	-
6	5	-	10%	-	-	-	-

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G6, con el valor de 50,000 para cambiar la celda E2:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	10%	-	5,243.23	5,243.23	5,243.23
3	2	5,243.23	10%	524.32	10,486.47	11,010.79	16,254.02
4	3	16,254.02	10%	1,625.40	5,243.23	6,868.64	23,122.66
5	4	23,122.66	10%	2,312.27	10,486.47	12,798.73	35,921.39
6	5	35,921.39	10%	3,592.14	10,486.47	78.61	50,000.00

3. Una señora, mediante depósitos mensuales, desea acumular \$8,500 al cabo de 8 meses. Si la tasa es del 8% capitalizable mensualmente, ¿cuál debe ser el valor del primer depósito, si cada uno de los siguientes depósitos puede aumentar en \$80?

A partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel, ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	0,67%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	0,67%	=B3*C3	=E2+80	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	0,67%	=B4*C4	=E3+80	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	0,67%	=B5*C5	=E4+80	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	0,67%	=B6*C6	=E5+80	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	0,67%	=B7*C7	=E6+80	=D7+E7	=B7+F7
8	7	=G7	0,67%	=B8*C8	=E8+80	=D8+E8	=B8+F8
9	8	=G8	0,67%	=B9*C9	=E9+80	=D9+E9	=B9+F9

Al final de esta actividad, deberá obtener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1		0,67%	-	-	-	-
3	2		0,67%	-	80,00	80,00	80,00
4	3	80,00	0,67%	0,53	160,00	160,53	240,53
5	4	40,53	0,67%	1,60	240,00	241,60	482,14
6	5	482,14	0,67%	3,21	320,00	323,21	805,35
7	6	805,35	0,67%	5,37	400,00	405,37	1,210,72
8	7	1,210,72	0,67%	8,07	480,00	488,07	1,698,79
9	8	1,698,79	0,67%	11,33	560,00	571,33	2,270,12

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G9, con el valor de 8,500 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	0,67%	-	760,75	760,75	760,75
3	2	760,75	0,67%	5,07	840,75	845,82	1,606,56
4	3	1,606,56	0,67%	10,71	920,75	931,46	2,538,02
5	4	2,538,02	0,67%	16,92	1,000,75	1,017,67	3,555,69
6	5	3,555,69	0,67%	23,70	1,080,75	1,104,45	4,660,14
7	6	4,660,14	0,67%	31,07	1,160,75	1,191,81	5,851,95
8	7	5,851,95	0,67%	39,01	1,240,75	1,279,76	7,131,71
9	8	7,131,71	0,67%	47,54	1,320,75	1,368,29	8,500,00

4. Para jubilarse, Juan está planeando la construcción de un fondo que le entregará \$40,000 dentro de 7 años, el fondo se construirá mediante depósitos anuales crecientes en el 8%. ¿Cuál será el valor del depósito anual, si se establece una tasa del 6% efectivo anual?

A partir de la celda A1, de la Hoja de cálculo del Programa Excel, ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	6,00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	6,00%	=B3*C3	=1.08*E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	6,00%	=B4*C4	=1.08*E3	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	6,00%	=B5*C5	=1.08*E4	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	6,00%	=B6*C6	=1.08*E5	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	6,00%	=B7*C7	=1.08*E6	=D7+E7	=B7+F7
8	7	=G7	6,00%	=B8*C8	=1.08*E7	=D8+E8	=B8+F8

Al final de esta actividad, deberá obtener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	6,00%	-	-	-	-
3	2	-	6,00%	-	-	-	-
4	3	-	6,00%	-	-	-	-

5	4	-	6,00%	-	-	-	-
6	5	-	6,00%	-	-	-	-
7	6	-	6,00%	-	-	-	-
8	7	-	6,00%	-	-	-	-

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G8, con el valor de 40,000 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	6,00%	-	3,806,01	3,806,01	3,806,01
3	2	3,806,01	6,00%	228,36	4,110,49	4,338,85	8,144,86,
4	3	8,144,86	6,00%	488,69	4,439,33	4,928,02	13,072,87
5	4	13,072,87	6,00%	784,37	4,794,47	5,578,85	18,651,72
6	5	18,651,72	6,00%	1,119,10	5,178,03	6,297,13	24,948,86
7	6	24,948,86	6,00%	1,496,93	5,592,27	7,089,21	32,038,06
8	7	32,038,06	6,00%	1,922,28	6,039,66	7,961,94	40,000,00

5. El gerente de producción de una aceitera está pensando en crear un fondo de acumulación con depósitos decrecientes en 10%, para poder renovar una máquina cuyo costo dentro de 5 años será de 150,000. El fondo a construir reconoce el 5% de interés efectivo anual. Encuentre el valor de los depósitos anuales y construya el fondo de acumulación correspondiente.

A partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel, ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	5,00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	5,00%	=B3*C3	=0.9*E3	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	5,00%	=B4*C4	=0.9*E4	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	5,00%	=B5*C5	=0.9*E5	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	5,00%	=B6*C6	=0.9*E6	=D6+E6	=B6+F6

Al final de esta actividad, deberá obtener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	5,00%	-	-	-	-
3	2	-	5,00%	-	-	-	-
4	3	-	5,00%	-	-	-	-
5	4	-	5,00%	-	-	-	-
6	5	-	5,00%	-	-	-	-

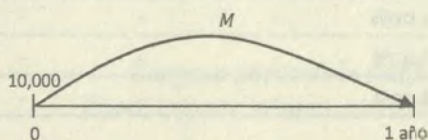
En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G6, con el valor de 150,000 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	5,00%	-	32,808,80	32,808,80	32,808,80
3	2	32,808,80	5,00%	1,640,44	29,527,92	31,168,36	63,977,17
4	3	63,977,17	5,00%	3,198,86	26,575,13	29,773,99	93,751,15
5	4	93,751,15	5,00%	4,687,56	23,917,62	28,605,17	122,356,33
6	5	122,356,33	5,00%	6,117,82	21,525,86	27,643,67	150,000,00

6. Cristina y Anita han decidido iniciar su propio negocio y para ello han realizado un préstamo de \$10,000, pagaderos en su totalidad en un año, con una tasa del 8 % capitalizable semestralmente. Para pagar la deuda, deciden constituir un fondo de amortización, mediante depósitos mensuales vencidos a una tasa del 24% capitalizable mensualmente, junto con depósitos trimestrales equivalentes al doble de la cuota mensual. Encuentre el valor de los depósitos periódicos y construya la tabla de acumulación correspondiente.

En primer lugar se determina el valor del préstamo dentro de un año:

Gráfico problema 15.6



$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 10,000 \left(1 + \frac{8}{200}\right)^2 = \$ 10,816.00$$

Luego, a partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel, ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	2,00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	2,00%	=B3*C3	=E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	2,00%	=B4*C4	=E3+2*E3	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	2,00%	=B5*C5	=E3	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	2,00%	=B6*C6	=E5	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	2,00%	=B7*C7	=E6+2*E6	=D7+E7	=B7+F7
8	7	=G7	2,00%	=B8*C8	=E6	=D8+E8	=B8+F8
9	8	=G8	2,00%	=B9*C9	=E8	=D9+E9	=B9+F9
10	9	=G9	2,00%	=B10*C10	=E9+2*E9	=D10+E10	=B10+F10
11	10	=G10	2,00%	=B11*C11	=E9	=D11+E11	=B11+F11
12	11	=G11	2,00%	=B12*C12	=E11	=D12+E12	=B12+F12
13	12	=G12	2,00%	=B13*C13	=E12+2*E12	=D13+E13	=B13+F13

Al final de esta actividad, deberá obtener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	2,00%		-		-
3	2	-	2,00%		-	-	-
4	3	-	2,00%		-	-	-
5	4	-	2,00%		-	-	-
6	5	-	2,00%		-	-	-
7	6	-	2,00%		-	-	-
8	7	-	2,00%		-	-	-
9	8	-	2,00%		-	-	-
10	9	-	2,00%		-	-	-
11	10	-	2,00%		-	-	-
12	11	-	2,00%		-	-	-
13	12	-	2,00%		-	-	-

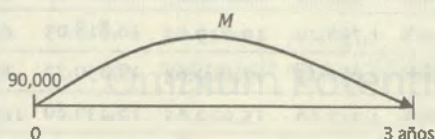
En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G13, con el valor de 10816 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	-	2.00%	-	487.71	487.71	487.71
3	2	487.71	2.00%	9.75	487.71	497.47	985.18
4	3	985.18	2.00%	19.70	463.14	1,482.84	2,468.02
5	4	2,468.02	2.00%	49.36	487.71	537.07	3,005.09
6	5	3,005.09	2.00%	60.10	487.71	547.81	3,552.91
7	6	3,552.91	2.00%	71.06	1,463.14	1,534.19	5,087.10
8	7	5,087.10	2.00%	101.74	487.71	589.45	5,676.55
9	8	5,676.55	2.00%	113.53	487.71	601.24	6,277.80
10	9	6,277.80	2.00%	125.56	1,463.14	1,588.69	7,866.49
11	10	7,866.49	2.00%	157.33	487.71	645.04	8,511.53
12	11	8,511.53	2.00%	170.23	487.71	657.94	9,169.47
13	12	9,169.47	2.00%	183.39	1,463.14	1,646.53	10,816.00

7. Adriana ha decidido emprender un negocio, para lo cual ha recibido un préstamo de \$90,000 por parte de un banco de la localidad, el cual será pagado en su totalidad dentro de 3 años, con una tasa de interés del 10% capitalizable trimestralmente. Para pagar la deuda decide constituir un fondo de acumulación, mediante depósitos semestrales vencidos, a una tasa de interés del 8% capitalizable semestralmente. Elabore la tabla del fondo de acumulación, considerando que los depósitos son decrecientes en \$2,000.

En primer lugar se determina el valor del préstamo dentro de tres años:

Gráfico problema 15.7



$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 90,000 \left(1 + \frac{10}{400}\right)^{12} = \$ 121,039.99$$

Luego, a partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel, ingrese la siguiente información:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	4.00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	4.00%	=B3*C3	=E2-2000	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	4.00%	=B4*C4	=E3-2000	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	4.00%	=B5*C5	=E4-2000	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	4.00%	=B6*C6	=E5-2000	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	4.00%	=B7*C7	=E6-2000	=D7+E7	=B7+F7

Al final de esta actividad, deberá obtener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	4.00%	-	-	-	-
3	2	-	4.00%	-	(2,000.00)	(2,000.00)	(2,000.00)
4	3	(2,000.00)	4.00%	(80.00)	(4,000.00)	(4,080.00)	(6,080.00)
5	4	(6,080.00)	4.00%	(243.20)	(6,000.00)	(6,243.20)	(12,323.20)
6	5	(12,323.20)	4.00%	(492.93)	(8,000.00)	(8,492.93)	(20,816.13)
7	6	(20,816.13)	4.00%	(832.65)	(10,000.00)	(10,832.65)	(31,648.77)

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G7, con el valor de 121,039.99 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

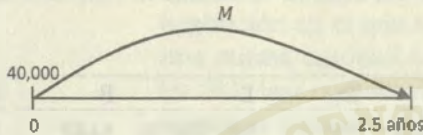
	A	B	C	D	E	F	G
1	Período	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1		4.00%	-	23,019.65	23,019.65	23,019.65
3	2	23,019.65	4.00%	920.79	21,019.65	21,940.43	44,960.08
4	3	44,960.08	4.00%	1,798.40	19,019.65	20,818.05	65,778.13
5	4	65,778.13	4.00%	2,631.13	17,019.65	19,650.77	85,428.91
6	5	85,428.91	4.00%	3,417.16	15,019.65	18,436.80	103,865.71
7	6	103,865.71	4.00%	4,154.63	13,019.65	17,174.28	121,039.99

8. Un empresario solicita un préstamo por un valor de \$40,000 al 7% capitalizable semestralmente. Luego crea un fondo de amortización para que en dos años y medio (momento en que tiene que cancelar la deuda junto con su interés) pueda cancelar el préstamo. En el Fondo de acumulación se compromete a ingresar cada trimestre, un depósito variable creciente en 5% del anterior. Si la tasa del Fondo es del 16% capitalizable trimestral,

con decrecimientos del 0.02%, calcular el valor de los depósitos que deben hacerse en el fondo de acumulación.

En primer lugar se determina el valor del préstamo dentro de 2.5 años:

Gráfico problema 15.8



$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 40,000 \left(1 + \frac{7}{200}\right)^5 = \$ 47,507.45$$

Luego, a partir de la celda A1, en una Hoja de cálculo del Programa Excel, se tiene:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Periodo	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	4.00%	=B2*C2		=D2+E2	=B2+F2
3	2	=G2	3.98%	=B3*C3	=1.05*E2	=D3+E3	=B3+F3
4	3	=G3	3.96%	=B4*C4	=1.05*E3	=D4+E4	=B4+F4
5	4	=G4	3.94%	=B5*C5	=1.05*E4	=D5+E5	=B5+F5
6	5	=G5	3.92%	=B6*C6	=1.05*E5	=D6+E6	=B6+F6
7	6	=G6	3.90%	=B7*C7	=1.05*E6	=D7+E7	=B7+F7
8	7	=G7	3.88%	=B8*C8	=1.05*E7	=D8+E8	=B8+F8
9	8	=G8	3.86%	=B9*C9	=1.05*E8	=D9+E9	=B9+F9
10	9	=G9	3.84%	=B10*C10	=1.05*E9	=D10+E10	=B10+F10
11	10	=G10	3.82%	=B11*C11	=1.05*E10	=D11+E11	=B11+F11

Al final de esta actividad, deberá obtener el siguiente resultado:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Periodo	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	4.00%		-		-
3	2	-	3.98%		-	-	-
4	3	-	3.96%		-	-	-
5	4	-	3.94%		-	-	-
6	5	-	3.92%		-	-	-
7	6	-	3.90%		-	-	-

8	7	-	3.88%	-	-	-	-
9	8	-	3.86%	-	-	-	-
10	9	-	3.84%	-	-	-	-
11	10	-	3.82%	-	-	-	-

En la herramienta Buscar Objetivo, definir la celda G11, con el valor de 47,507.45 para cambiar la celda E2, se obtendrá la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Periodo	VFAD	TASA	IPA	DEPÓSITO	VAEP	FVDD
2	1	0	4.00%	-	3 213.24	3 213.24	3 213.24
3	2	3,213.24	3.98%	127.89	3,373.90	3,501.79	6,715.02
4	3	6,715.02	3.96%	265.91	3,542.59	3,808.51	10,523.53
5	4	10,523.53	3.94%	414.63	3,719.72	4,134.35	14,657.88
6	5	14,657.88	3.92%	574.59	3,905.71	4,480.30	19,138.18
7	6	19,138.18	3.90%	746.39	4,101.00	4,847.39	23,985.57
8	7	23,985.57	3.88%	930.64	4,306.05	5,236.69	29,222.25
9	8	29,222.25	3.86%	1,127.98	4,521.35	5,649.33	34,871.58
10	9	34,871.58	3.84%	1,339.07	4,747.42	6,086.48	40,958.07
11	10	40,958.07	3.82%	1,564.60	4,984.79	6,549.38	47,507.45

15.3 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El Sr. Maldonado pide prestado a una institución financiera \$30,000 que va a cancelar mediante pagos semestrales constantes durante 2 años; pero, en el último semestre, para cancelar dicha deuda, realiza un pago adicional X . Los pagos semestrales constantes son de \$2,500 y la tasa de interés es el 12% anual capitalizable semestralmente. Al mismo tiempo, para conseguir esta cantidad adicional X , abre una cuenta de ahorros con la misma institución en el que se compromete a ingresar cada trimestre una misma cantidad, pero incrementándola en \$200 trimestrales. Si la tasa capitalizable trimestralmente, que otorgan en dicha cuenta de ahorros es del 8% el primer año y del 6% en el segundo año, calcular cuál es el valor de dichos ahorros trimestrales.

R: \$2,499.85

2. El Fondo de Solidaridad (FS) recibe un crédito por \$600,000 de un organismo internacional, de los cuales el 40% no es reembolsable y el saldo restante debe ser cancelado dentro de 10 años, con una tasa de interés del 8% efectivo anual. Por tal motivo, el FS. decide crear una cuenta de acumulación que paga el 12% efectivo anual para cancelar el valor adeudado. Haciendo depósitos anuales iguales y dos depósitos extraordinarios (adicionales al pago anual) de \$100,000 cada uno en el año 4 y en el año 7. Determine el valor de los depósitos anuales y construya la tabla de acumulación correspondiente.

R: \$25,035.30

3. La utilidad que genera una empresa va creciendo el 1% mensualmente, si el 40% de la misma es depositada en una cuenta de inversión que paga el 5% capitalizable mensualmente, durante 12 meses y, adicionalmente, se hacen depósitos extraordinarios de \$300 cada trimestre, determine el valor de la utilidad en el primer mes, si al final del año en la cuenta de ahorro existen \$12,570.

R: \$2,287.46

4. Los estudiantes de Auditoría desean realizar una gira de fin de carrera, han llegado a un acuerdo con una agencia de viajes, la cual va a congelar el valor de la totalidad del contrato en \$60,000, los cuales deberán ser cancelados dentro de 2 años. Para conseguir esta cantidad, realizan depósitos trimestrales que crecen en \$1,500 cada año. Si la tasa de la localidad es del 12% anual capitalizable trimestralmente, elabore la tabla del Fondo de Acumulación.

R: \$1,729.94

5. En un Fondo de Acumulación se han venido realizando depósitos vencidos cada trimestre, los cuales disminuyen en 20%, con la finalidad de acumular cierta cantidad de dinero en un período de dos años una tasa de 10% anual, capitalizable trimestralmente. El dinero acumulado permitirá renovar los activos de una empresa estimados en \$25,000. Encontrar el valor del depósito inicial.

R: primer depósito de \$5,353.93

6. La Fundación Nueva Vida consigue un préstamo de \$100,000 a una organización internacional. El préstamo es reembolsable en un 40% dentro de 4 años, con una tasa de interés del 2%. Bajo estas condiciones, la Fundación decide construir un fondo que paga el 4%. Determine el valor de los depósitos anuales que debe hacer, si se toma en cuenta una gradiente positiva del 5% y construya la tabla de acumulación correspondiente.

R: \$9,485.10

7. Se desea establecer un fondo perpetuo de becas para estudiantes de Administración, este fondo concederá una beca anual por la cantidad de \$10,000 y a perpetuidad empezando en 10 años. Para este fondo se hace un primer depósito dentro de un año, y disminuye anualmente en un 15%, con respecto al inmediato anterior, hasta el año 7, luego de lo cual ya no se realizan más depósitos. Si el dinero rinde al 8%, construya la tabla de acumulación correspondiente.

R: \$17,691.40

Omnium Potentior est Sapientia



16

DEPRECIACIÓN DE ACTIVOS

OBJETIVO GENERAL

Establecer el valor de la depreciación periódica de un activo de acuerdo con los métodos de depreciación comúnmente aceptados, como también determinar el Valor en libros para los periodos de vida útil del mismo.

16.1 Introducción

Los activos fijos que conforman el patrimonio de una empresa, tales como maquinaria, vehículos, edificios y demás bienes muebles, día a día pierden su valor. Esta pérdida se conoce como depreciación de activos (PORTUS Govinden, 1985).

La depreciación de los activos se produce por el desgaste normal, el uso y, en la actualidad, por consideraciones de carácter tecnológico.

16.2 Variables que intervienen en la depreciación

Las variables que intervienen en la depreciación de un activo son:

- a. El costo inicial del activo
Valor del mismo, en el momento de la compra o adquisición; este valor se le conoce también, como capital inicial, se le representa con C_0 .
- b. La vida útil
Es el tiempo, o el número de unidades de producción, dentro del cual el activo prestará servicios en condiciones normales de operación; después de este tiempo o una vez superadas las unidades de producción previstas, el activo requerirá de mayores gastos de mantenimiento y reparación. Cuando la vida útil está expresada en unidades de tiempo, se considera al año como unidad de depreciación, al número de años de vida útil se lo representa con n .

La determinación de la vida útil se hace mediante estimación, tomando en cuenta experiencias anteriores, futuros volúmenes de producción, entre otros aspectos. Normalmente, los catálogos y manuales de operación de maquinaria, traen consigo cierta información relacionada con la vida útil del activo adquirido.
- c. El Valor de Salvamento
Representado con la letra S , es el valor estimado del activo, una vez que éste ha cumplido su vida útil. Es decir, el valor que podríamos recuperar mediante la venta del activo; este valor es estimado, al igual que la vida útil (PORTUS Govinden, 1985).

Para estimar este valor hay que tomar en cuenta el estado en que se encontrará el activo, como también, el desarrollo tecnológico mundial. En muchas ocasiones, es conveniente considerar que el valor de salvamento del activo es cero; de esta manera, cualquier valor que se recupere, por venta del mismo, será considerado como ingreso extra.

16.3 Depreciación del activo

La depreciación del activo, o valor depreciado del mismo, es la diferencia entre el costo inicial del activo, y el valor de salvamento estimado. Si se representa con D a la depreciación del activo, se tiene:

$$D = Co - S$$

La reposición del activo, consiste en recuperar el valor depreciado del mismo y, junto con el valor de salvamento, disponer de los fondos económicos necesarios para la renovación del activo (PORTUS Govinden, 1985).

16.4 Depreciación periódica

Es el valor que el activo pierde, en cada uno de los períodos que conforman la vida útil; según el método de cálculo la depreciación periódica puede ser uniforme o diferente en cada período. Esta depreciación periódica conforma una gradiente cuyo máximo valor es el valor del activo en el momento de la compra, y su mínimo valor, el valor de salvamento; a la depreciación periódica se la representa con Dp .

16.5 Valor en libros

Es la diferencia del valor del activo y la depreciación periódica en cada uno de los períodos del activo. En el período inicial el valor en libros del activo es igual al valor de la compra, o adquisición; mientras que, el valor en libros del activo luego de haber cumplido su vida útil, es igual al valor de salvamento (PORTUS Govinden, 1985).

16.6 Métodos de depreciación

Método de Depreciación lineal

Este método considera que, la depreciación periódica del activo, es la misma en todos y cada uno de los períodos del mismo. Entonces, la depreciación periódica está dada por:

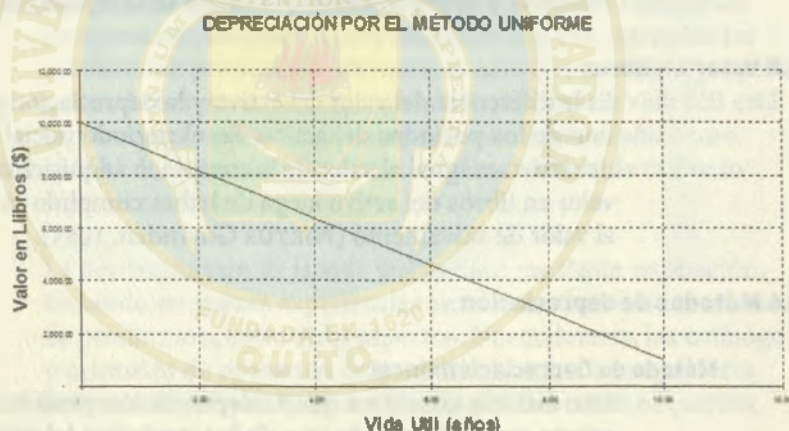
$$Dp = \frac{Co - S}{n}$$

Como el nombre lo indica, en este método la depreciación periódica es la misma para todos los períodos. Un registro numérico de la depreciación del activo, período a período, es una tabla denominada Tabla de Depreciación. En esta tabla se resalta, en la última columna el Valor en Libros, la estructura de la tabla es la siguiente:

Período	Depreciación periódica	Depreciación acumulada	Valor en Libros
0			
1			
2			
3			
...			
n			

Nótese que la tabla, inicia en el renglón “cero” que corresponde al momento de la compra, o adquisición del período. Si en un sistema cartesiano, se representa en el eje horizontal la vida útil del activo, y en el eje vertical, el Valor en libros correspondiente, se obtendrá un gráfico tal como el que se indica:

Gráfico Texto 16.6.a



En el gráfico se puede observar que, al momento de la compra (período 0), el Valor en Libros del Activo es el valor de la compra; mientras tanto, el Valor en Libros del Activo, una vez que ha cumplido su vida útil, es igual al valor de Salvamento.

Este método es el más difundido, quizá por su facilidad en el cálculo. Sin embargo, es el método que menos se acerca a la realidad puesto que, difícilmente, la depreciación se comporta en forma lineal o uniforme.

Método de Suma de enteros

A diferencia del método anterior, el método de Suma de Enteros considera que la depreciación no es la misma en todos los períodos; considera que la depreciación es mayor en los primeros períodos de vida

útil del activo. Es decir, la depreciación por el método de suma de enteros es decreciente; en este método, el valor de la depreciación periódica del activo es una fracción del valor de la depreciación del activo o sea (PORTUS Govinden, 1985):

$$Dp = \frac{a}{b} \times D$$

Para determinar la fracción, se debe tomar en cuenta:

El numerador (a) es, para cada período, el término de la sucesión: $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$; es decir, una sucesión decreciente, formada por los términos que conforman la vida útil del activo.

El denominador de la fracción (b) es el resultado de:

$$b = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Es decir, la suma de los números que representan los períodos de vida útil del activo; de allí el nombre del método "Suma de enteros".

Esta suma se puede calcular directamente, mediante la fórmula que suma los términos de una progresión aritmética; entonces:

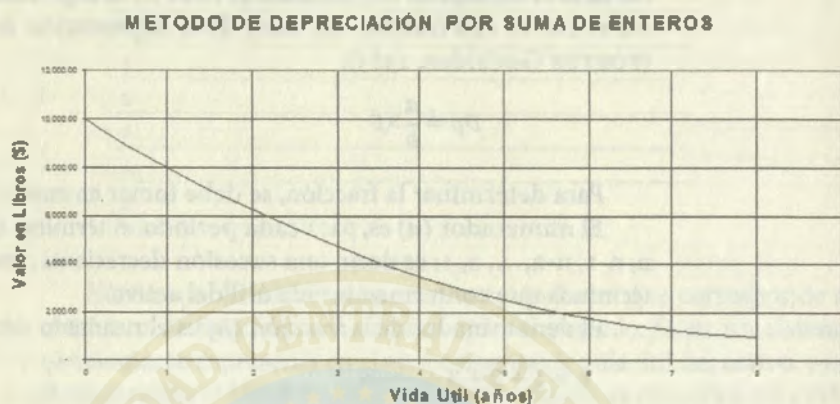
$$b = \frac{n}{2}(1+n)$$

Para el cálculo de la depreciación periódica del activo, y del Valor en libros de cada uno de los períodos, es conveniente ir tabulando los valores en una tabla que disponga de la siguiente estructura:

Período	Fracción	Depreciación periódica	Depreciación acumulada	Valor en Libros
0				
1				
2				
3				
...				
n				

Al igual que en el método anterior, nótese que la tabla inicia en el renglón "cero", que corresponde al momento de la compra, o adquisición del período; ahora, si en un sistema cartesiano se representa en el eje horizontal la vida útil del activo, y en el eje vertical el Valor en libros correspondiente, se obtendrá un gráfico tal como el que se indica:

Gráfico texto 16.6.b



En el gráfico se puede observar que, al momento de la compra (período 0), el Valor en Libros del Activo es el valor de la compra; mientras tanto que el Valor en Libros del activo, una vez que ha cumplido su vida útil, es igual al valor de Salvamento.

Método del porcentaje fijo

Este método considera que la depreciación del activo es mayor en los primeros períodos de vida útil del mismo; la depreciación periódica es un porcentaje del Valor en Libros del activo determinado en el período anterior. Es decir, (PORTUS Govinden, 1985):

$$Dp(n) = r \times \text{Valor en libros del periodo anterior}$$

Para determinar el porcentaje de depreciación del activo (r), se toma en cuenta que al final del último período, el Valor en libros es igual al valor de salvamento, entonces:

$$Co(1 - r)^n = S$$

Donde r es el porcentaje fijo de depreciación; despejando (r) se tiene:

$$r = \left[1 - \sqrt[n]{\frac{S}{Co}} \right] \times 100$$

El valor de salvamento S no puede ser cero, si esto ocurriera debería tomar como valor del Salvamento el de 1 unidad monetaria ($S = 1$).

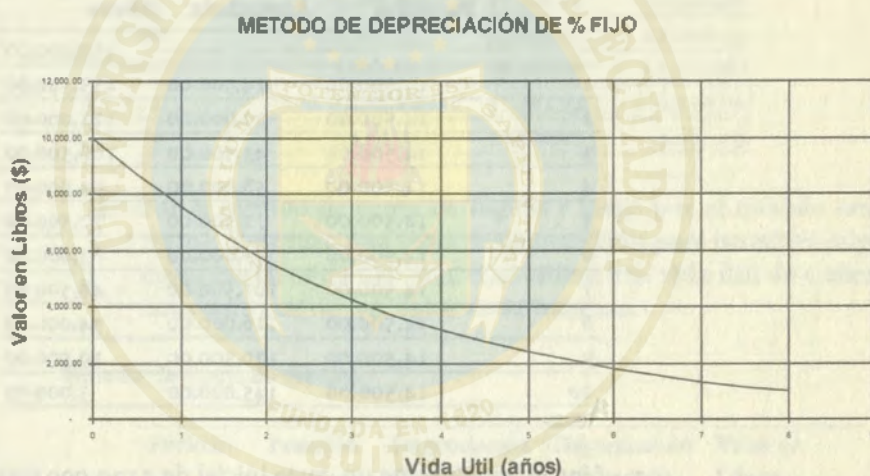
Una vez determinado el porcentaje fijo de depreciación del activo, se debe calcular el valor de la depreciación en cada período, como

también el Valor en libros; es conveniente que estos cálculos se realicen tabulándolos de la siguiente manera:

Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0			
1			
2			
...			
n			

Con los datos de la vida útil y el valor en libros para cada período, se podrá graficar en un sistema cartesiano, tal como se indica:

Gráfico texto 16.6.c



En el gráfico se puede observar que, al momento de la compra (período 0), el Valor en Libros del Activo es el valor de la compra; mientras tanto que, el Valor en Libros del activo, una vez que ha cumplido su vida útil, es igual al valor de Salvamento.



16.7 PROBLEMAS RESUELTOS

1. A un motor con un costo de \$150,000 se ha estimado un valor de salvamento de \$5,000 y una vida probable de 10 años. Determinar por el método de Depreciación Uniforme el valor de la depreciación anual y el Valor en libros para todos los períodos de vida útil del activo.

$$Co = 150,000$$

$$S = 5,000$$

$$t = 10 \text{ años}$$

$$Dp = \frac{Co - S}{n}$$

$$Dp = \frac{150,000 - 5,000}{10}$$

$$Dp = \$ 14,500$$

Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en libros
-	-	-	150,000.00
1	14,500.00	14,500.00	135,500.00
2	14,500.00	29,000.00	121,000.00
3	14,500.00	43,500.00	106,500.00
4	14,500.00	58,000.00	92,000.00
5	14,500.00	72,500.00	77,500.00
6	14,500.00	87,000.00	63,000.00
7	14,500.00	101,500.00	48,500.00
8	14,500.00	116,000.00	34,000.00
9	14,500.00	130,500.00	19,500.00
10	14,500.00	145,000.00	5,000.00

2. Una máquina tiene un costo inicial de \$120,000 una vida útil de 6 años y un valor de salvamento de \$30,000. Elaborar un cuadro de depreciación aplicando el método de la suma de enteros.

Período	Fracción	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0		-	-	120,000.00
1	0.29	25,714.29	25,714.29	94,285.71
2	0.24	21,428.57	47,142.86	72,857.14
3	0.19	17,142.86	64,285.71	55,714.29
4	0.14	12,857.14	77,142.86	42,857.14
5	0.10	8,571.43	85,714.29	34,285.71
6	0.05	4,285.71	90,000.00	30,000.00

3. Una máquina tiene un valor de \$60,000 y debe depreciarse hasta \$5,000 en 5 años. Hallar el porcentaje fijo de depreciación y hacer el cuadro de depreciación.

$$C_0 = 60,000$$

$$S = 5,000$$

$$t = 5 \text{ años}$$

$$r = \left[1 - \sqrt[n]{\frac{S}{C_0}} \right] \times 100$$

$$r = \left[1 - \sqrt[5]{\frac{5,000}{60,000}} \right] \times 100 = 39.16\%$$

Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en libros
0	-	-	60,000.00
1	23,498.14	23,498.14	36,501.86
2	14,295.43	37,793.57	22,206.43
3	8,696.83	46,490.40	13,509.60
4	5,290.84	51,781.24	8,218.76
5	3,218.76	55,000.00	5,000.00

4. Por el método de suma de dígitos y luego por el método uniforme, construya una tabla de depreciación para un activo cuyo costo inicial es de \$40,000, si se estima una vida útil de 5 años; considere que no hay valor de salvamento.

Método de Suma de dígitos:

Período	Fracción	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0		-	-	40,000.00
1	0.33	13,333.33	13,333.33	26,666.67
2	0.27	10,666.67	24,000.00	16,000.00
3	0.20	8,000.00	32,000.00	8,000.00
4	0.13	5,333.33	37,333.33	2,666.67
5	0.07	2,666.67	40,000.00	0.00

Método Uniforme:

Período	Depreciación Periódica	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0	-	-	40,000.00
1	8,000.00	8,000.00	32,000.00

2	8,000.00	16,000.00	24,000.00
3	8,000.00	24,000.00	16,000.00
4	8,000.00	32,000.00	8,000.00
5	8,000.00	40,000.00	0,00

5. Un equipo industrial con un costo inicial de \$80,000, valor de salvamento de \$10,000 y vida útil 7 años se deprecia utilizando el método del Porcentaje fijo. Construir la tabla de depreciación para todos los periodos de vida útil del activo.

Cálculo del porcentaje fijo

$$r = \left[1 - \sqrt[7]{\frac{S}{Co}} \right] \times 100$$

$$r = \left[1 - \sqrt[7]{\frac{10000}{80000}} \right] \times 100$$

$$r = 25,70\%$$

Periodo	Depreciación periódica	Depreciación acumulada	Valor en libros
0	-	-	80,000.00
1	20,560.23	20,560.23	59,439.77
2	15,276.19	35,836.42	44,163.58
3	11,350.17	47,186.59	32,813.41
4	8,433.14	55,619.73	24,380.27
5	6,265.80	61,885.53	18,114.47
6	4,655.47	66,541.00	13,459.00
7	3,459.00	70,000.00	10,000.00

16.8 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un equipo eléctrico costó \$50,000 y tiene especificación de 7 años de vida útil, al final de los cuales no tiene ningún valor y, por lo cual, se deberá reemplazar por otro de igual valor. Calcular por el método de depreciación uniforme el valor de la depreciación periódica y elaborar la tabla de depreciación para todos los períodos de la vida útil.

R: \$7,142.86

2. Una máquina que tiene un valor de \$140,000 y un valor de salvamento de \$40,000 debe depreciarse en 15 años por el método uniforme. Hallar la depreciación anual y el valor en libros al final del décimo año.

R: \$6,666.67; \$73,333.33

3. Las instalaciones de una industria cuestan \$250,000, tiene una vida útil de 10 años y su valor de salvamento se estima en \$45,000. Elaborar un cuadro de depreciación aplicando el método de la suma de enteros.

R: \$37,272.73; \$33,545.45;...

4. Un equipo tiene un costo de \$60,000 y una vida útil de 4 años, desarrollar el cuadro de depreciación aplicando el método de la suma de enteros, considerando que no existe valor de salvamento.

R: \$24,000.00; 18,000.00;...

5. Por el método del porcentaje fijo, calcular el Valor en Libros para todos los períodos de una máquina cuyo costo inicial es de \$40,000, si se estima una vida útil de 5 años luego del cual su valor de salvamento será de \$1000.

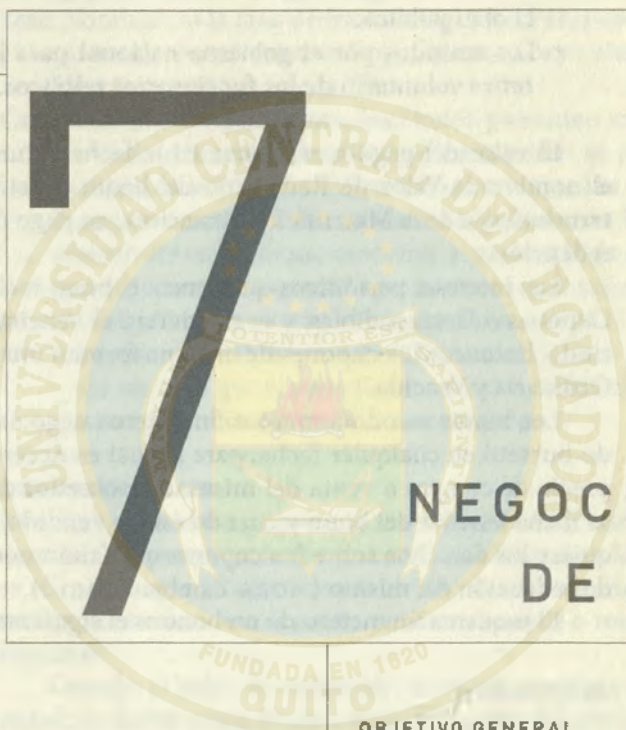
R: 52.18%; \$20,872.95; \$9,980.95;...

6. Un equipo tiene un valor inicial de \$30,000 y un valor de salvamento de \$2,000, se deprecia anualmente el 25.98%; por el método del Porcentaje fijo indique en cuántos años se estimó la vida útil del equipo y construya la tabla de depreciación del activo.

R: 9 años.

1

7



NEGOCIACIÓN DE BONOS

OBJETIVO GENERAL

Determinar el valor monetario de los elementos financieros que conforman un bono, como también el precio de compra/venta del mismo, negociado en fecha de cupón y en fecha entre cupones.

17.1 Definición

Un bono es un documento financiero que registra la promesa de pago de una cantidad de dinero en una fecha futura determinada, junto con los respectivos intereses que en forma periódica dicha cantidad de dinero va generando (AYRES Jr, 1998).

Como ejemplos de bonos podemos citar los siguientes:

- Los emitidos por el gobierno nacional para la construcción de la obra pública.
- Los emitidos por el gobierno nacional para liquidación por el retiro voluntario de los funcionarios públicos.

El valor del pago a realizarse en la fecha futura señalada recibe el nombre de Valor de Redención del bono; constituye dentro de la terminología de la Matemática Financiera, un pago único a la fecha de redención.

Los intereses periódicos que genera el bono reciben el nombre de Cupones o Desprendibles, y se efectivizan al vencimiento de cada período. Entonces, los cupones de un bono forman una Anualidad Cierta Ordinaria y Vencida.

Los bonos son documentos financieros negociables en el mercado bursátil en cualquier fecha, para lo cual es necesario establecer un precio de compra o venta del mismo. El poseedor de este documento se llama tenedor del bono y cuando éste es vendido, el comprador adquiere los derechos sobre los cupones que faltan por cobrar y el valor de redención del mismo (MORA Zambrano, 2010).

El esquema financiero de un bono es el siguiente:

Gráfico texto 17.1



En este esquema, el lector podrá notar que los cupones (C) son los pagos periódicos de la anualidad, y el Valor de Redención (VR), el pago único.

17.2 Elementos de un bono

Un bono consta de:

Valor Nominal: es el valor que se convierte en pago único en la fecha de vencimiento del bono; permite determinar el valor de redención del mismo, como se verá más adelante; el valor nominal (Vn), en la mayoría de los casos, es un valor múltiplo de 100.

Fecha de emisión: es la fecha en la cual se suscribe el bono, junto con la fecha de vencimiento, permite determinar el número de períodos o cupones que conforman el bono.

Fecha de vencimiento: es la fecha en la cual el tenedor del bono recibe el Valor de redención; en esta fecha, deberá haberse cumplido el pago de todos los cupones; junto con la fecha de emisión del bono, se puede determinar el tiempo de duración del bono.

Tasa Nominal: es la tasa de interés, expresado en porcentaje, que permite calcular el valor de los cupones; como siempre, la tasa de interés se representa con (i).

Capitalización: normalmente, los bonos presentan capitalización semestral, indicando además, que los cupones se pagan semestralmente; con lo que se confirma el criterio que los cupones conforman una Anualidad Cierta Ordinaria y Vencida. La capitalización semestral se manifiesta, mediante la presencia de dos letras juntas, que representan los meses que conforman el semestre, veamos:

- EJ significa que el pago de cupones se realiza al final del mes de enero, y al final del mes de julio.
- MS significa que el pago de intereses se realiza al final del mes de marzo, y al final del mes de septiembre.

17.3 Valor de redención de un bono

Es el valor que debe pagarse al tenedor del bono a la fecha de vencimiento; en la mayoría de los casos, el valor de redención del bono (VR) es el mismo que el valor nominal (Vn); esto es un bono a la par; sin embargo, el valor de redención puede ser mayor o menor que el valor nominal.

Cuando el Valor de redención del bono es mayor que el valor nominal, se define como Bono con premio; esta diferencia por exceso, se presenta mediante valores tales como: 102, 105, 110, etc., que quieren decir que el Valor de Redención del bono es el 2%, el 5% o el 10% mayor que el nominal, respectivamente.

Cuando el Valor de redención del bono es menor que el valor nominal, se dice que es un bono con descuento; esta diferencia por defecto, se presenta mediante valores tales como 95, 98, 99, que quiere decir que el valor de Redención del bono es: el 5%, el 2% o el 1% menor que el nominal, respectivamente.

Resumiendo:

- $VR = Vn \rightarrow$ Bono a la par.
- $VR > Vn \rightarrow$ Bono con premio,
- $VR < Vn \rightarrow$ Bono con descuento.

17.4 Número de cupones y valor de cada cupón

El número de cupones (n) está dado por el producto del tiempo, en años, que dura el bono, por la frecuencia de capitalización. Es decir:

$$n = t \times m$$

El valor de cada cupón (C) está dado por el producto del valor nominal por la tasa periódica. Es decir:

$$C = Vn \times i$$

Recordando además que la tasa periódica es el cociente entre la tasa nominal (j) y la frecuencia de capitalización ($m = 2$, dado que es capitalización semestral).

17.5 Precio de venta de un bono

Siendo los bonos documentos negociables en el mercado bursátil, es necesario determinar el precio de un bono al momento de su negociación; tomando en cuenta que, al momento de la compra venta del bono, el nuevo tenedor es el beneficiario de todos los cupones que faltan por cobrar, como también del valor de redención del mismo (MORA Zambrano, 2010).

Cuando la negociación se presenta, aparece en escena una nueva tasa sobre la cual se realizarán los cálculos para determinar el precio del bono; esta tasa, representada por (r), se la conoce como tasa de redeviabilidad (RODRÍGUEZ & GARCÍA Fronti, 2002).

La tasa de redeviabilidad es periódica, entonces deberá tomarse en cuenta esta situación. Es decir:

$$r = \frac{\text{redeviabilidad \%}}{m = 2}$$

El Precio de un bono depende de cuando se lo negocia, entonces se pueden establecer dos alternativas, explicadas a continuación.

17.6 Precio de venta de un bono en fecha de pago de intereses

En esta alternativa, la negociación o compra venta del bono, se realiza precisamente en la fecha de pago de cupón; el precio de venta del bono, representado por (P), será la suma del Valor Actual de la anualidad que conforman los cupones (VA_1), y el Valor actual del Valor de Redención (VA_2) del bono, considerado como pago único. Es decir:

$$P = VA_1 + VA_2$$

Es decir:

$$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

Si el precio de venta de un bono es mayor que el Valor de Redención, se dice que el bono es negociado con premio. Si el precio de compraventa del bono es menor que el Valor de Redención, entonces se dice que el bono es comprado con descuento.

17.7 Precio de venta de un bono entre fechas de cupón

Cuando el bono se adquiere entre fechas de cupón, el precio de compra se lo determina aplicando la regla comercial para Valor Actual. Es decir:

Se calcula el precio del bono para el período de pago de cupón anterior al de la fecha de pago, y luego se proyecta a interés simple para el número de días entre la fecha focal y la fecha de pago; la tasa de interés para este cálculo es la *redituabilidad*.

Cuando el Bono se negocia entre fechas de pagos de interés, al precio obtenido se lo denomina *precio del Bono Sucio*. La forma de limpiar el Bono es reintegrando, por parte del vendedor al comprador, el valor proporcional del último cupón, repartido de acuerdo con el número de días transcurridos entre el último pago de intereses y la fecha de compra. A este valor se le conoce como *Redituabilidad del último cupón*.

Entonces, resulta necesario calcular la *redituabilidad*. Es decir:

R : Redituabilidad del último cupón.

t : Tiempo en días transcurrido entre la fecha de pago de intereses y la fecha de negociación.

C : Valor del cupón.

La *redituabilidad del último cupón* está dado por:

$$R = \frac{C \times t}{180}$$

Entonces se tiene ahora:

Precio del Bono Limpio = Valor del Bono Sucio – Redituabilidad

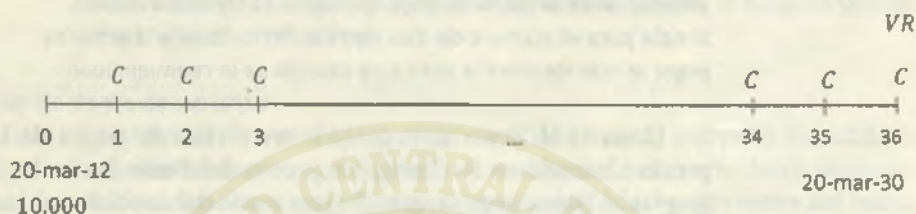
Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapientia

17.8 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcule el valor de redención, el número de cupones y el valor de cada cupón de un bono de \$10,000 al 15% MS suscrito el 20 de marzo del 2012, redimible a la par el 20 de marzo del 2030.

Gráfico problema 17.1



Valor de redención:	Número de cupones:	Valor del cupón:
$VR = Vn$	$n = t \times m$	$C = Vn \times i$
$VR = \$10,000.00$	$n = 18 \times 2$	$C = 10,000 \times \frac{15}{200}$
	$n = 36$	$C = \$750.00$

2. Encuentre el precio de venta de un Bono con Valor nominal \$500, redimible a la par en 15 años, al 4% semestral de interés con redituabilidad del 5% semestral.

Gráfico problema 17.2



$$C = Vn \times i$$

$$C = 500 \times \frac{4}{200} = 10$$

$$VR = Vn = \$500.00 \text{ (a la par)}$$

$$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

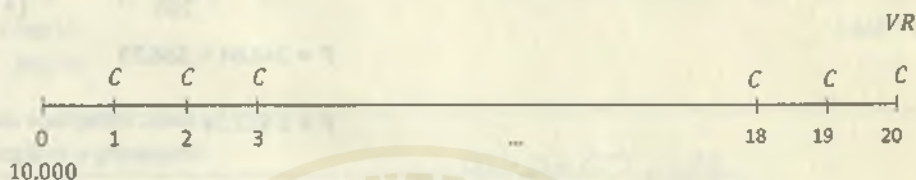
$$P = \frac{10 \left[1 - \left(1 + \frac{5}{200} \right)^{-30} \right]}{\frac{5}{200}} + \frac{500}{\left(1 + \frac{5}{200} \right)^{30}}$$

$$P = 209.30 + 238.37$$

$P = \$447.67$ Bono comprado con descuento o castigo.

3. Calcule el precio que se puede pagar por un bono de \$10,000 al 13% FA, redimible a 102 después de 10 años, si se desea un rendimiento del 12% capitalizable semestralmente.

Gráfico problema 17.3



$$C = Vn \times i$$

$$C = 10,000 \times \frac{13}{200} = 650$$

$$VR = 1.02Vn$$

$$VR = 1.02 \times 10,000$$

$$VR = \$10,200.00$$

$$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

$$P = \frac{650 \left[1 - \left(1 + \frac{12}{200} \right)^{-20} \right]}{\frac{12}{200}} + \frac{10,200}{\left(1 + \frac{12}{200} \right)^{20}}$$

$$P = 7,455.45 + 3,180.41$$

$$P = \$10,635.86 \text{ Bono comprado con premio.}$$

4. Encuentre el precio de venta de un Bono con Valor nominal de \$1,000, redimible a la par el 30 de diciembre de 2016, con pago de interés 4% JD, con fecha de compra el 30 de junio de 2005, que reditúa el 5% semestral.

Gráfico problema 17.4



$$C = Vn \times i$$

$$C = 1,000 \times \frac{4}{200} = 20$$

$$VR = Vn = \$ 1,000.00 \text{ (a la par)}$$

$$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

$$P = \frac{20 \left[1 - \left(1 + \frac{5}{200} \right)^{-23} \right]}{\frac{5}{200}} + \frac{1,000}{\left(1 + \frac{5}{200} \right)^{23}}$$

$$P = 346.64 + 566.70$$

$$P = \$ 913.34 \text{ Bono comprado con descuento o castigo.}$$

5. El 1 de enero del 2000 un inversionista compró un bono de \$100,000 al 6% EJ, redimible a 105 el 1 de julio del 2009. Calcule el precio que pagó por este bono, si la tasa de redituabilidad se establece en el 4%, capitalizable semestralmente.

Gráfico problema 17.5



$$C = Vn \times i$$

$$C = 100,000 \times \frac{6}{200} = 3,000$$

$$VR = 1.05 \times Vn \text{ (con premio)}$$

$$VR = 1.05 \times 100,000$$

$$VR = \$ 105,000.00$$

$$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

$$P = \frac{3,000 \left[1 - \left(1 + \frac{4}{200} \right)^{-19} \right]}{\frac{4}{200}} + \frac{105,000}{\left(1 + \frac{4}{200} \right)^{19}}$$

$$P = 47,035.39 + 72,075.23$$

$$P = \$ 119,110.62 \text{ Bono comprado con premio.}$$

6. Un bono de \$30,000, 4 % MS, es redimible el 1 de septiembre de 2020 a 103. Hallar el precio de compra el 1 de septiembre de 2012, considere una tasa de redituabilidad del 6% capitalizable semestralmente.

Gráfico problema 17.6



$$C = Vn \times i$$

$$C = 30,000 \times \frac{4}{200} = 600$$

$$VR = 1.03 \times Vn \text{ (con premio)}$$

$$VR = 1.03 \times 30,000$$

$$VR = \$ 30,900.00$$

$$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

$$P = \frac{600 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{200} \right)^{-16} \right]}{\frac{6}{200}} + \frac{30,900}{\left(1 + \frac{6}{200} \right)^{16}}$$

$$P = 7,536.66 + 19,255.86$$

$$P = \$ 26,792.52 \text{ Bono comprado con castigo.}$$

7. Halle el precio de venta de un bono de \$5,000 al 12 % MS, redimible a la par el 21 de septiembre del año 2015, si se negocia el 21 de marzo de 2000 a una tasa de rendimiento del 15% anual capitalizable semestralmente. Indique si la negociación es con premio o con castigo.

Gráfico problema 17.7



$$C = Vn \times i$$

$$C = 5,000 \times \frac{12}{200} = 300$$

$$VR = Vn \text{ (a la par)}$$

$$VR = \$ 5,000.00$$

$$P = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

$$P = \frac{300 \left[1 - \left(1 + \frac{15}{200} \right)^{-31} \right]}{\frac{15}{200}} + \frac{5,000}{\left(1 + \frac{15}{200} \right)^{31}}$$

$$P = 3,574.99 + 531.26$$

$$P = \$ 4,106.25 \text{ Bono comprado con castigo.}$$

8. Calcule el precio de un bono (sucio y limpio) de \$2,000 al 22 % MN, redimible a la par el 30 de noviembre de 2023, si se compra el 15 de febrero de 2007, con un rendimiento del 21% anual capitalizable semestralmente.

Gráfico problema 17.8.a



$$C = Vn \times i$$

$$C = 2,000 \times \frac{22}{200} = 220$$

$$VR = Vn \text{ (a la par)}$$

$$VR = \$2,000.00$$

$$P' = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

$$P' = \frac{220 \left[1 - \left(1 + \frac{21}{200} \right)^{-34} \right]}{\frac{21}{200}} + \frac{2,000}{\left(1 + \frac{21}{200} \right)^{34}}$$

$$P' = 2,024.94 + 67.10$$

$$P' = \$2,092.04$$

Gráfico problema 17.8.b



$$t = 77 \text{ días}$$

$$P = P'(1 + rt)$$

$$P = 2,092.04 \left(1 + \frac{21}{100} \times \frac{77}{360} \right)$$

$$P = 2,186.01 \text{ (precio bono sucio)}$$

Redituabilidad del cupón:

$$\text{Redituabilidad} = \frac{C \times t}{180}$$

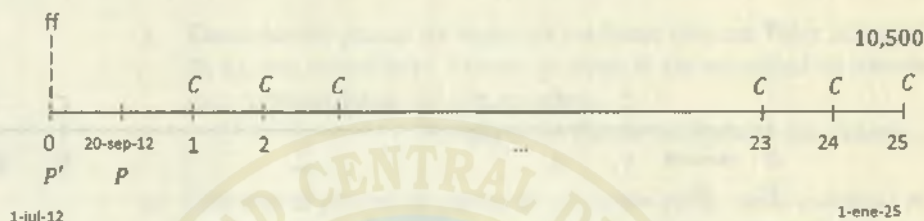
$$\text{Redituabilidad} = \frac{220 \times 77}{180} = 94.11$$

Precio bono limpio:

$$P = 2,186.01 - 94.11 = \$2,091.90$$

9. Un bono de \$10,000, 5% EJ, redimible a 105 el 1 de enero de 2025 se compra el 20 de septiembre de 2012, esperando un rendimiento del 6% convertible semestralmente. Hallar el precio del bono sucio, el interés redituable y el precio del bono limpio.

Gráfico problema 17.9.a



$$C = Vn \times i$$

$$C = 10,000 \times \frac{5}{200} = 250$$

$$VR = \frac{105}{100} Vn \text{ (con premio)}$$

$$VR = \$10,500.00$$

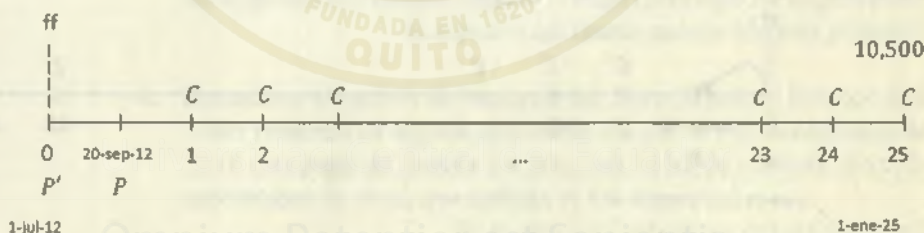
$$P' = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

$$P' = \frac{250 \left[1 - \left(1 + \frac{6}{200} \right)^{-25} \right]}{\frac{6}{200}} + \frac{10,500}{\left(1 + \frac{6}{200} \right)^{25}}$$

$$P' = 4,353.29 + 5,014.86$$

$$P' = \$9,368.15$$

Gráfico problema 17.9.b



$$t = 81 \text{ días}$$

$$P = P'(1 + rt)$$

$$P = 9,368.15 \left(1 + \frac{6}{100} \times \frac{81}{360} \right)$$

$$P = \$9,494.62 \text{ (precio bono sucio)}$$

Redituabilidad del cupón:

$$\text{Redituabilidad} = \frac{C \times t}{180}$$

$$\text{Redituabilidad} = \frac{250 \times 81}{180} = 112.50$$

Precio bono limpio:

$$P = 9,494.62 - 112.50 = \$9,382.12$$

10. Un bono de \$5,000 al 6% EJ, redimible a 92 el 1 de enero del 2021, se vende el 10 de marzo de 2009 con una redituabilidad del 8% capitalizable semestralmente. Encuentre el precio del bono sucio y del bono limpio.

Gráfico problema 17.10.a



$$C = Vn \times i$$

$$C = 5,000 \times \frac{6}{200} = 150$$

$$VR = \frac{92}{100} Vn \text{ (con descuento)}$$

$$VR = \$4,600.00$$

$$P' = \frac{C[1 - (1 + r)^{-n}]}{r} + \frac{VR}{(1 + r)^n}$$

$$P' = \frac{150 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{200} \right)^{-24} \right]}{\frac{8}{200}} + \frac{4,600}{\left(1 + \frac{8}{200} \right)^{24}}$$

$$P' = 2,287.04 + 1,794.56$$

$$P' = \$4,081.60$$

Gráfico problema 17.10.b



$$t = 68 \text{ días}$$

$$P = P'(1 + rt)$$

$$P = 4,081.60 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{68}{360} \right)$$

$$P = 4,143.28 \text{ (precio bono sucio)}$$

Redituabilidad del cupón:

$$\text{Redituabilidad} = \frac{C \times t}{180}$$

$$\text{Redituabilidad} = \frac{150 \times 68}{180} = 56.67$$

Precio bono limpio:

$$P = 4,143.28 - 56.67 = \$4,086.61$$

17.9 PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El 1 de enero del 2000 un inversionista compró un bono de \$40,000 al 20% EJ, redimible a la par el 1 de julio del 2009. Determinar el precio de venta del bono, si se aplica una tasa de redituabilidad del 18% capitalizable semestralmente.
R: \$43,850.05 (bono comprado con premio).
2. Encuentre el precio de venta de un bono con un valor nominal de \$3,000, redimible a 102 en 20 años, al 4% semestral de interés con redituabilidad del 3% semestral.
R: \$3,481.81 (bono comprado con premio).
3. Calcular el precio de venta de un bono cuyo valor nominal es \$2,500, si es redimible a 97 en 10 años, al 6% semestral de interés con redituabilidad del 8% semestral.
R: \$2,126.01 (bono comprado con descuento).
4. Un bono de \$3,500, 4%, JD, redimible el 1 de diciembre de 2016, a la par, es comprado el 1 de diciembre de 2004 para que reditúe el 5% convertible semestralmente. Hallar el precio de compra del bono e indique el tipo de negociación del mismo.
R: \$3,187.01 (bono comprado con descuento).
5. Un bono de \$35,000 al 21% MN, redimible a 99 el 15 de noviembre del año 2019, se vende el 15 de mayo de 2014 con una tasa de rendimiento del 20% anual capitalizable semestralmente, calcular el precio del bono e indicar el respectivo tipo de negociación.
R: \$36,013.96 (bono comprado con premio).
6. Encuentre el precio de venta de un bono (sucio y limpio) con Valor nominal de \$4,000 redimible a la par el 1 de noviembre de 2018 con pago de interés 4% MN, con fecha de compra el 22 de septiembre de 2002 que reditúa el 5% semestral.
R: \$3,625.25 (sucio); \$3,561.25 (limpio).
7. El 20 de noviembre de 2012 se compra un bono de \$10,000 al 13% FA, redimible a 102 el 31 de agosto de 2020, si se desea un rendimiento del 12% capitalizable semestralmente, ¿cual es el precio que se debe pagar por el bono?
R: \$10,577.29 (bono limpio).
8. Un bono de \$5,000, al 3% con pagos de intereses el 1 de febrero y el 1 de agosto es redimible a 103 el 1 de febrero de 2018. Hallar

el valor de compra que reditúe el 5% convertible semestralmente, si se compra el 1 de junio de 2012.

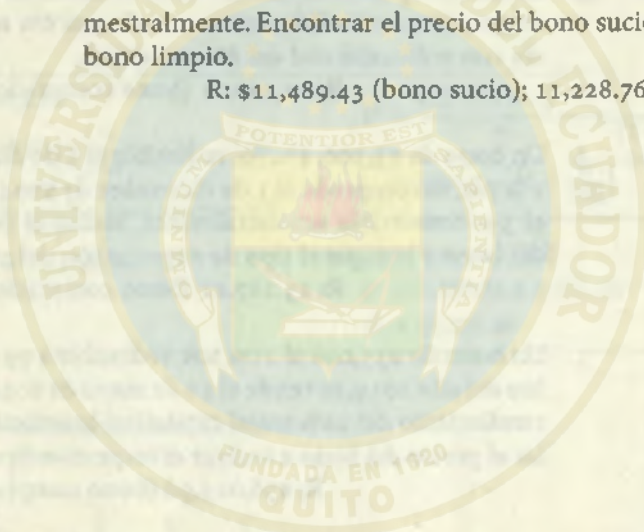
R: \$4,675.93 (bono sucio); \$4,625.51 (bono limpio).

9. Hallar el precio de compra (sucio y limpio) de un bono de \$7,500 al 14% EJ, redimible a la par el 1 de julio del 2019, si se compra el 18 de abril de 2004, a fin de que reditúe 13% anual capitalizable semestralmente.

R: \$8,306.83 (bono sucio); 7,991.83 (bono limpio).

10. El 8 de junio de 2013 se compra un bono con valor nominal de \$12,000 al 11.5 % AO, redimible a 98 el 1 de octubre del 2019, con una tasa de redituabilidad de 12.8 % anual capitalizable semestralmente. Encontrar el precio del bono sucio y el precio del bono limpio.

R: \$11,489.43 (bono sucio); 11,228.76 (bono limpio).



OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA

18

VALOR ACTUAL NETO Y TASA INTERNA DE RETORNO

OBJETIVO GENERAL

Determinar la factibilidad financiera de un proyecto de inversión mediante el cálculo del Valor actual neto, considerando la tasa de descuento y la Tasa interna de retorno.

18.1 Introducción

La Ingeniería Económica es una serie de técnicas matemáticas basada en los fundamentos de la Matemática Financiera, que permite la evaluación económica de proyectos, con la finalidad de escoger la alternativa más conveniente para los intereses de la comunidad (BLANK & Anthony, 1983). Bajo este contexto, existen dos criterios que permiten la selección de la alternativa más conveniente, El Valor actual neto y la Tasa interna de retorno (BACA Currea, 2002).

18.2 El flujo de caja

El flujo de caja es un registro numérico de los ingresos y egresos de dinero que ocurren durante la vida de un proyecto. Se consideran ingresos a las ventas, utilidades o ganancias y egresos a los desembolsos, costos de operación y gastos corrientes (GRANT, Grant, & LEAVENWORTH, 1985).

En cada uno de los períodos de vida del proyecto, se debe establecer el flujo de caja neto (FCN) como la diferencia entre los ingresos y egresos ocurridos en ese período (GARCÍA González, 2001).

18.3 Valor actual neto

El Valor actual neto (VAN) de una inversión es la suma del Valor actual de cada uno de los flujos de caja de los períodos de la inversión, tomando como fecha focal el inicio del proyecto. Cabe recordar que el Valor actual para un número determinado (*n*) de períodos, está dado por (VEGA O, 1983):

$$VA = M(1 + i)^{-n}$$

El Valor actual neto de una inversión, con *n* períodos está dado por:

$$VAN = -Inversión\ inicial + \sum_{k=1}^n FNC(1 + i)^{-k}$$

El Valor actual neto puede ser positivo o negativo. Si el Valor actual neto a una tasa de mercado (*i*) dada es positivo, entonces la inversión es rentable. Si el Valor actual neto es negativo, entonces no es conveniente realizar dicha inversión.

Si se presentan varias alternativas de inversión, todas ellas con el mismo número de períodos, la alternativa más conveniente es aquella que presenta el Valor Actual neto más alto (VEGA O, 1983).

Si las alternativas de inversión tienen diferentes períodos de duración, hay que tomar en cuenta lo siguiente:

1. Se deberá calcular el Valor actual neto de todas las alternativas, para un número de períodos igual al mínimo común múltiplo de los períodos.
2. Se deberá establecer un ciclo periódico de flujos de caja, para igualar el tiempo de duración de todas las alternativas. Es decir: si se presentan dos alternativas con 2 y 3 períodos respectivamente, el número de períodos a ser analizados será 6 (mínimo común múltiplo entre 2 y 3), por lo que en la primera alternativa tendrá tres ciclos periódicos de flujo de caja, y en la segunda alternativa tendrá dos ciclos periódicos de flujo de caja.
3. La alternativa más conveniente será aquella que presente el Valor Actual neto más alto.

18.4 Tasa interna de retorno

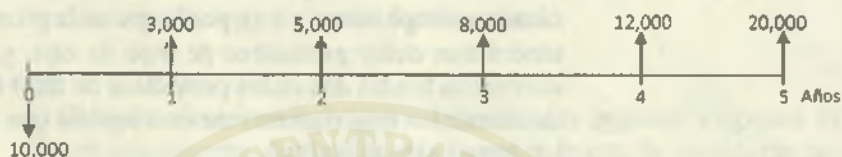
La *Tasa interna de retorno* es el porcentaje en el cual, los ingresos o ganancias se igualan a los egresos o desembolsos. En otras palabras, la Tasa Interna de Retorno, o tasa de rendimiento (i), es el porcentaje en el que el Valor actual neto es igual a cero. Es decir: (SEPÚLVEDA, SOUTER, & GOTTFRIED, 1984):

$$TIR = -Inversión + \sum_{t=1}^n FNC_t (1+i)^{-t} = 0$$

Si la *Tasa interna de retorno* es mayor que la tasa de mercado, la inversión es rentable; si la Tasa interna de retorno es menor que la tasa periódica de mercado, la inversión no es conveniente.

18.5 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor presente neto de un negocio si se invierte \$10,000 y se recibe neto anualmente \$3,000, \$5,000, \$8,000, \$12,000, y \$20,000, si la tasa efectiva de descuento estuvo al 9 %.

Gráfico problema 18.1

$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{t=1}^n VA_t$$

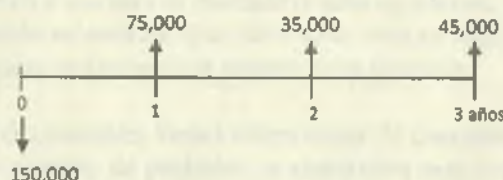
$$VAN = -10,000 + VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 + VA_5$$

$$VAN = -10,000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4} + \frac{M_5}{(1+i)^5}$$

$$VAN = -10,000 + \frac{3,000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^1} + \frac{5,000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^2} + \frac{8,000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^3} + \frac{12,000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^4} + \frac{20,000}{\left(1 + \frac{9}{100}\right)^5}$$

$$VAN = \$24,637.89$$

2. Un proyecto agrícola estima el siguiente flujo de dinero: aporte inicial \$150,000, ingresos anuales por \$75,000, 35,000 y 45,000. Si la tasa de mercado está al 8.5% anual, encuentre el Valor actual neto del proyecto.

Gráfico problema 18.2

$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -150,000 + VA_1 + VA_2 + VA_3$$

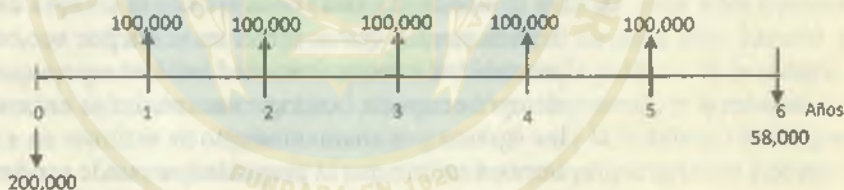
$$VAN = -150,000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3}$$

$$VAN = -150,000 + \frac{75,000}{\left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^1} + \frac{35,000}{\left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^2} + \frac{45,000}{\left(1 + \frac{8.5}{100}\right)^3}$$

$$VAN = \$ -15,913.78$$

3. El costo de una mina es \$200,000 y se reciben utilidades durante 5 años por 100,000. Luego para liquidar activos y personal en el sexto año, se debe hacer un desembolso de \$58,000. ¿Cuál es el Valor actual neto de la inversión, considerando una tasa de descuento de 9.2%.

Gráfico problema 18.3



$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -200,000 + VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 + VA_5 - VA_6$$

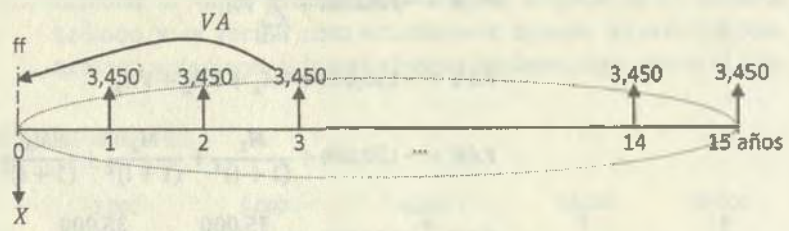
$$VAN = -200,000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4} + \frac{M_5}{(1+i)^5} - \frac{M_6}{(1+i)^6}$$

$$VAN = -200,000 + \frac{100,000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^1} + \frac{100,000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^2} + \frac{100,000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^3} + \frac{100,000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^4} + \frac{100,000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^5} - \frac{58,000}{\left(1 + \frac{9.2}{100}\right)^6}$$

$$VAN = \$ 152,749.80$$

4. Un inversionista está considerando la compra de una suite para alquilar. El exceso de los ingresos sobre los egresos se estima en \$3,450 al año, durante 15 años. ¿A qué precio de esta propiedad, recobraría un inversionista, justamente su inversión, con una tasa de rendimiento del 10%?

Gráfico problema 18.4

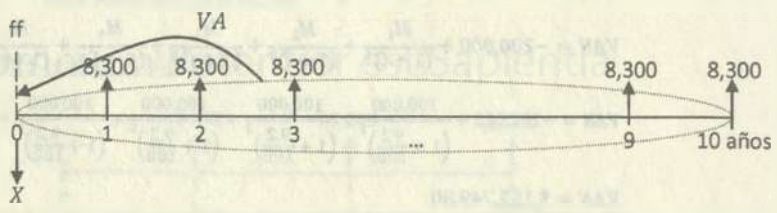


VA: Valor actual de la anualidad vencida
La inversión se recupera cuando: $VAN = 0$

$$-I_{\text{Inicial}} + \sum_{t=1}^n VA_t = 0$$
$$-X + \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} = 0$$
$$X = \frac{R[1 - (1 + i)^{-n}]}{i} = \frac{3,450 \left[1 - \left(1 + \frac{10}{100} \right)^{-15} \right]}{\frac{10}{100}} = \$26,240.97$$

5. Un inversionista está considerando la compra de un edificio de departamentos que se ofrece en venta por \$90,000. Debido a su proximidad a una universidad local, se espera que el edificio esté siempre ocupado. Los ingresos anuales se estiman en \$10,800 y los egresos por mantenimiento se estiman en \$2,500. El inversionista estima que la propiedad se puede vender en \$65,000, al final de 10 años. Usando una tasa del 8%, determine si el inversionista debe pagar \$90,000 por la propiedad.

Gráfico problema 18.5



$$-I_{\text{Inicial}} + \sum_{k=1}^n VA_k = 0$$

$$-X + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{M}{(1+i)^n} = 0$$

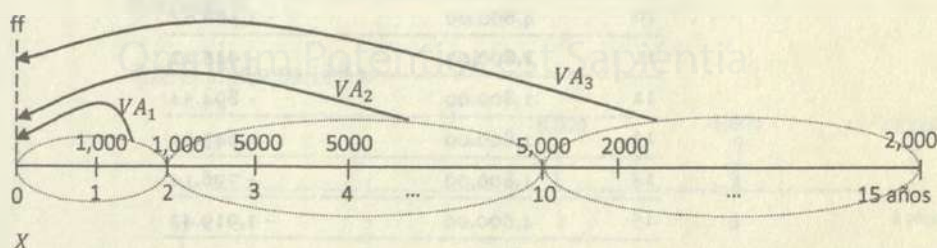
$$-X + \frac{8,300 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{100} \right)^{-10} \right]}{\frac{8}{100}} + \frac{65,000}{\left(1 + \frac{8}{100} \right)^{10}} = 0$$

$$X = \frac{8,300 \left[1 - \left(1 + \frac{8}{100} \right)^{-10} \right]}{\frac{8}{100}} + \frac{65,000}{\left(1 + \frac{8}{100} \right)^{10}} = 0$$

$$X = 85,801.25$$

6. El propietario de una patente ha hecho un contrato con la empresa a la que otorga el derecho exclusivo de la misma. La compañía ha acordado pagarle \$1,000 al año, al final de cada uno de los primeros 4 años, durante el período que se desarrolla un mercado para el invento. \$5,000 al final de cada año, durante los 8 años siguientes. Y \$2,000 al final de cada año durante 5 años finales de los 17 años de vida de la patente. Si la compañía deseara comprar de inmediato la patente, y quedarán 15 años de vigencia al contrato, ¿Cuál será la máxima oferta que la compañía podría permitirse hacer al propietario en este momento, si se requiere una tasa de descuento del 9% sobre tales inversiones?

Gráfico problema 18.6



$$X = 1,000 + VA_1 + VA_2 + VA_3$$

$$X = 1,000 + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i} + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i(1+i)^k} + \frac{R[1 - (1+i)^{-n}]}{i(1+i)^k}$$

$$X = 1,000 + \frac{1,000 \left[1 - \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{-2} \right]}{\frac{9}{100}} + \frac{5,000 \left[1 - \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{-8} \right]}{\frac{9}{100} \left(1 + \frac{9}{100} \right)^2} + \frac{2,000 \left[1 - \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{-5} \right]}{\frac{9}{100} \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{10}}$$

$$X = \$ 29,337.91$$

7. Una compañía compra una máquina por \$12,000 con un valor de salvamento esperado de \$2,000, los gastos de operación de la máquina serán de \$1,800 por año; además, necesita una revisión general importante cada cinco años, con un costo de \$2,800. ¿Cuál es el costo presente equivalente de la máquina, si tiene una vida útil de 18 años y la tasa de descuento es 6% anual?

n	Desembolsos	Ingresos	V Actual
0	12,000.00		- 12,000.00
1	1,800.00		- 1,698.11
2	1,800.00		- 1,601.99
3	1,800.00		- 1,511.31
4	1,800.00		- 1,425.77
5	4,600.00		- 3,437.39
6	1,800.00		- 1,268.93
7	1,800.00		- 1,197.10
8	1,800.00		- 1,129.34
9	1,800.00		- 1,065.42
10	4,600.00		- 2,568.62
11	1,800.00		- 948.22
12	1,800.00		- 894.54
13	1,800.00		- 843.91
14	1,800.00		- 796.14
15	4,600.00		- 1,919.42
16	1,800.00		- 708.56
17	1,800.00		- 668.46
18	1,800.00	2,000.00	70.07
Valor Actual neto (VAN):			-35,613.17

8. Se tienen dos proyectos de inversión:

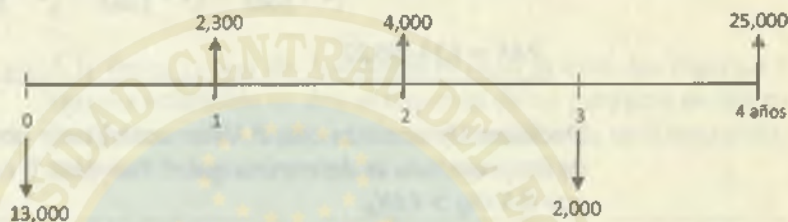
Proyecto A: \$-13,000, \$2,300, \$4,000, \$-2,000, y \$25,000.

Proyecto B: \$-16,000, \$-2,000, \$5,000, \$6,000, y \$25,000.

¿Cuál de los dos proyectos es más rentable si se considera una tasa de mercado del 7%?

Proyecto A

Gráfico problema 18.8.a



$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{i=1}^n VA_i$$

$$VAN = -13,000 + VA_1 + VA_2 - VA_3 + VA_4$$

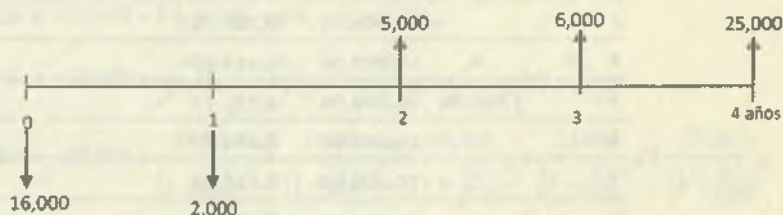
$$VAN = -13,000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} - \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4}$$

$$VAN = -13,000 + \frac{2,300}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^1} + \frac{4,000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2} - \frac{2,000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^3} + \frac{25,000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^4}$$

$$VAN = \$10,083.07$$

Proyecto B

Gráfico problema 18.8.b



$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{t=1}^n VA_t$$

$$VAN = -16,000 - VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4$$

$$VAN = -16,000 - \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4}$$

$$VAN = -16,000 - \frac{2,000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^1} + \frac{5,000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^2} + \frac{6,000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^3} + \frac{25,000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^4}$$

$$VAN = \$10,468.20$$

Decisión: De acuerdo con el Valor actual neto obtenido en cada uno de los proyectos, se determina que el Proyecto B es más rentable dado que el $VAN_B > VAN_A$.

9. Considere los dos siguientes planes de inversión:

Plan A, tiene un costo inicial de \$25,000 y requiere inversiones adicionales de \$5,000 al final del tercer mes y de \$8,000 al final del séptimo mes. Este plan tiene 12 meses de vida y produce \$10,000 mensuales de ingresos a partir del primer mes.

Plan B, tiene un costo inicial de \$20,000 y requiere una inversión adicional de \$10,000 al final del octavo mes. Durante sus 12 meses de vida, este plan produce \$8,000 mensuales de ingresos en los primeros 11 meses y \$12,000 al término del proyecto.

Suponiendo una tasa de descuento del 36% anual capitalizable mensualmente, determine cuál de los dos planes es más conveniente.

N	ALTERNATIVA PLAN A			ALTERNATIVA PLAN B		
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual
0	25,000.00	-	-25,000.00	20,000.00	-	-20,000.00
1	-	10,000.00	9,708.74	-	8,000.00	7,766.99
2	-	10,000.00	9,425.96	-	8,000.00	7,540.77
3	5,000.00	10,000.00	4,575.71	-	8,000.00	7,321.13
4	-	10,000.00	8,884.87	-	8,000.00	7,107.90
5	-	10,000.00	8,626.09	-	8,000.00	6,900.87
6	-	10,000.00	8,374.84	-	8,000.00	6,699.87
7	8 000.00	10,000.00	1,626.18	-	8,000.00	6,504.73
8	-	10,000.00	7,894.09	10,000.00	8,000.00	-1,578.82

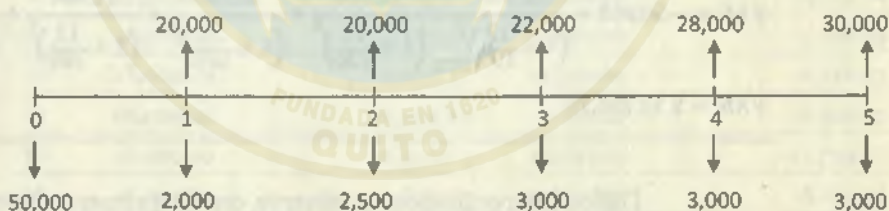
9	- 10,000.00	7,664.17	- 8,000.00	6,131.33
10	- 10,000.00	7,440.94	- 8,000.00	5,952.75
11	- 10,000.00	7,224.21	- 8,000.00	5,779.37
12	- 10,000.00	7,013.80	- 12,000.00	8,416.56
Valor Actual neto (VAN):		63,459.60	Valor Actual neto (VAN):	54,543.46

La alternativa más conveniente es aquella que presenta el mayor Valor actual neto, entonces se debe tomar como alternativa la del Plan A.

10. A la fecha, la tasa de descuento es igual al 12%; los ingresos y egresos estimados de dos alternativas de un proyecto se dan en la siguiente tabla. Calcular el VAN y decidir cuál es la alternativa más conveniente; el proyecto dura cinco años.

ALTERNATIVA A	0	1	2	3	4	5
INGRESOS		20,000	20,000	20,000	20,000	20,000
EGRESOS	50,000	2,000	2,500	3,000	3,000	3,000

Gráfico problema 18.10.a



$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{t=1}^n VA_t$$

$$VAN = -50,000 + VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 + VA_5$$

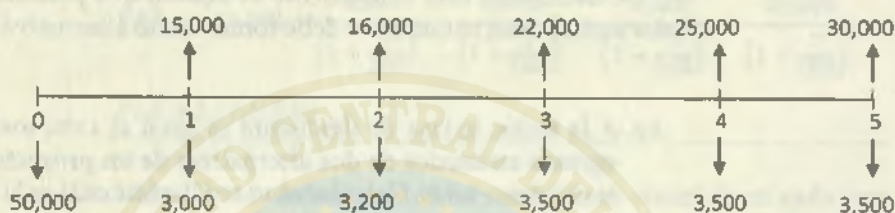
$$VAN = -50,000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4} + \frac{M_5}{(1+i)^5}$$

$$VAN = -50,000 + \frac{18,000}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^1} + \frac{17,500}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^2} + \frac{19,000}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^3} + \frac{25,000}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^4} + \frac{27,000}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^5}$$

$$VAN = \$24,754.62$$

ALTERNATIVA B	0	1	2	3	4	5
INGRESOS		15,000	16,000	22,000	25,000	30,000
EGRESOS	50,000	3,000	3,200	3,500	3,500	3,500

Gráfico problema 18.10.b



$$VAN = -I_{\text{Inicial}} + \sum_{t=1}^n VA_t$$

$$VAN = -50,000 + VA_1 + VA_2 + VA_3 + VA_4 + VA_5$$

$$VAN = -50,000 + \frac{M_1}{(1+i)^1} + \frac{M_2}{(1+i)^2} + \frac{M_3}{(1+i)^3} + \frac{M_4}{(1+i)^4} + \frac{M_5}{(1+i)^5}$$

$$VAN = -50,000 + \frac{12,000}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^1} + \frac{12,800}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^2} + \frac{18,500}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^3} + \frac{21,500}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^4} + \frac{26,500}{\left(1 + \frac{12}{100}\right)^5}$$

$$VAN = \$ 12,786.75$$

Dados los resultados, se observa que la primera alternativa presenta el VAN más alto, entonces la primera alternativa es la más conveniente.

11. Están bajo consideraciones, dos planes para proporcionar ciertas instalaciones a una compañía estatal de servicios públicos. Cada plan está diseñado para proporcionar capacidad suficiente durante los próximos 18 años, para satisfacer el incremento de carga esperado durante ese período. Independientemente del plan que se elija ahora, se prevé que las instalaciones deberán retirarse al final de 18 años y serán repuestas para una nueva planta de un tipo distinto.

El plan A: requiere una inversión inicial de \$50,000. Posteriormente, se hará una inversión de \$25,000, al final de 9 años. Durante los primeros 9 años, los egresos anuales serán de \$11,000; durante los últimos

nueve años, serán de \$18,000. Habrá un valor de rescate de \$10,000 al final de los 18 años.

El Plan B: requiere una inversión inicial de \$30,000. Posteriormente, se hará una inversión de \$30,000, al final de 6 años; y, una inversión de \$20,000 al final de 12 años. Durante los primeros 6 años, los egresos anuales serán de \$8,000; durante los segundos seis años, de \$16,000; durante los 6 años finales, de \$25,000. No habrá valor de rescate al final de los 18 años.

Usando una tasa de descuento del 9%, compare los valores presentes de los egresos netos de ambos planes.

N	PLAN A			PLAN B			
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual	
0	50,000.00		-50,000.00	30,000.00		-30,000.00	
1	11,000.00		-10,091.74	8,000.00		-7,339.45	
2	11,000.00		-9,258.48	8,000.00		-6,733.44	
3	11,000.00		-8,494.02	8,000.00		-6,177.47	
4	11,000.00		-7,792.68	8,000.00		-5,667.40	
5	11,000.00		-7,149.25	8,000.00		-5,199.45	
6	11,000.00		-6,558.94	38,000.00		-22,658.16	
7	11,000.00		-6,017.38	16,000.00		-8,752.55	
8	11,000.00		-5,520.53	16,000.00		-8,029.86	
9	36,000.00		-16,575.40	16,000.00		-7,366.84	
10	18,000.00		-7,603.39	16,000.00		-6,758.57	
11	18,000.00		-6,975.59	16,000.00		-6,200.53	
12	18,000.00		-6,399.63	36,000.00		-12,799.25	
13	18,000.00		-5,871.22	25,000.00		-8,154.47	
14	18,000.00		-5,386.44	25,000.00		-7,481.16	
15	18,000.00		-4,941.68	25,000.00		-6,863.45	
16	18,000.00		-4,533.66	25,000.00		-6,296.74	
17	18,000.00		-4,159.32	25,000.00		-5,776.83	
18	18,000.00	10,000.00	-1,695.95	25,000.00		-5,299.84	
Valor actual neto (VAN)			-175,025.28	Valor actual neto (VAN)			-173,555.47

Alternativa	Valor actual neto
Plan A	-175,025.28
Plan B	-173,554.47

Conclusión: El plan B tiene un menor desembolso, este debe recomendarse.



12. Una compañía constructora debe levantar un edificio temporal para oficinas en el sitio de la construcción. Se proponen dos planes diferentes para la calefacción de este edificio. Se puede usar gas embotellado para horno, tipo piso, o radiadores eléctricos que pueden ser instalados en las paredes y en el techo. Se estima que el edificio se usará 5 años antes de desmantelarlo.

La instalación de gas requerirá una inversión de \$6,000. Se cree que su valor de salvamento será de cero al final de los 5 años. El costo anual de combustible y mantenimiento se estima en \$1,100.

La instalación de los radiadores eléctricos requerirá una inversión de \$8,000; su valor de rescate estimado es de \$1,000; el costo anual estimado de energía y mantenimiento es de \$700. La elección de la instalación eléctrica, causará un pago adicional por impuesto sobre la renta estimado en \$100 al año. Compare los valores presentes de los costos de estas alternativas, usando una tasa periódica del 10%.

N	Gas embotellado			Radiadores eléctricos			
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual	
0	6,000.00		-6,000.00	8,000.00		-8,000.00	
1	1,100.00		-1,000.00	800.00		-727.27	
2	1,100.00		-909.09	800.00		-661.16	
3	1,100.00		-826.45	800.00		-601.05	
4	1,100.00		-751.31	800.00		-546.41	
5	1,100.00		-683.01	800.00	1,000.00	124.18	
Valor actual neto (VAN)			-10,169.87	Valor actual neto (VAN)			-10,411.71

Alternativa	Valor actual neto
Gas embotellado	-10,169.87
Radiadores eléctricos	-10,411.71

Conclusión: El sistema de calefacción con gas embotellado tiene un menor desembolso, este debe recomendarse.

13. Se están considerando dos sistemas alternativos de abastecimientos de agua para una pequeña comunidad. Compare los valores presentes de los costos de 20 años de servicio usando una tasa i de 11%.

El sistema A: requiere una inversión inicial de \$58,000, con reposición de ciertos elementos al final de 10 años a un costo estimado de \$16,000. Los costos anuales de operación y mantenimiento serán de \$12,000 el primer año y se espera que aumenten en \$500 cada año.

El sistema B: requiere una inversión inicial de \$72,000 y se espera que dure los 20 años completos sin reposiciones de importancia. Se

espera que los egresos anuales sean de \$10,000 el primer año y que aumenten \$350 cada año. Al final de periodo de 20 años, ninguno de los sistemas tendrá valor residual neto.

Como las alternativas presentan diferentes periodos (10 y 20 años), se desarrolla el flujo de caja para un período común equivalente, que es el mínimo común múltiplo entre 10 y 20.

Período	Alternativa A			Alternativa B			
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual	
0	58,000.00	-	-58,000.00	72,000.00	-	-72,000.00	
1	12,000.00	-	-10,810.81	10,000.00	-	-9,009.01	
2	12,500.00	-	-10,145.28	10,350.00	-	-8,400.29	
3	13,000.00	-	-9,505.49	10,700.00	-	-7,823.75	
4	13,500.00	-	-8,892.87	11,050.00	-	-7,278.98	
5	14,000.00	-	-8,308.32	11,400.00	-	-6,765.35	
6	14,500.00	-	-7,752.29	11,750.00	-	-6,282.03	
7	15,000.00	-	-7,224.88	12,100.00	-	-5,828.07	
8	15,500.00	-	-6,725.86	12,450.00	-	-5,402.38	
9	16,000.00	-	-6,254.80	12,800.00	-	-5,003.84	
10	32,500.00	-	-11,446.00	13,150.00	-	-4,631.23	
11	17,000.00	-	-5,393.82	13,500.00	-	-4,283.32	
12	17,500.00	-	-5,002.21	13,850.00	-	-3,958.90	
13	18,000.00	-	-4,635.26	14,200.00	-	-3,656.70	
14	18,500.00	-	-4,291.90	14,550.00	-	-3,375.52	
15	19,000.00	-	-3,971.08	14,900.00	-	-3,114.16	
16	19,500.00	-	-3,671.70	15,250.00	-	-2,871.46	
17	20,000.00	-	-3,392.65	15,600.00	-	-2,646.27	
18	20,500.00	-	-3,132.85	15,950.00	-	-2,437.51	
19	21,000.00	-	-2,891.23	16,300.00	-	-2,244.15	
20	21,500.00	-	-2,666.73	16,650.00	-	-2,065.16	
Valor Actual neto (VAN):			-184,116.03	Valor Actual neto (VAN):			-169,078.08

Alternativa	Valor actual neto
Sistema A	-184,116.03
Sistema B	-169,078.08

Conclusión: El sistema de B tiene un menor desembolso, este debe recomendarse.

14. Se están considerando dos tipos posibles de acabado de superficies de carreteras, con estimaciones de su costo por kilómetro como sigue:

Rubro	Tipo X	Tipo Y
Costo Inicial	\$36,000	\$44,000
Período de duración del recubrimiento	10 años	15 años
Costo de recubrimiento	\$18,000	\$24,000
Costo anual promedio de mantenimiento	\$3,400	\$1,800

Compare estas alternativas, considerando el Valor Presente Neto del costo de 30 años de servicio. Suponga un valor de rescate terminal de cero para ambas alternativas con $i = 9\%$.

Período	Alternativa tipo X			Alternativa tipo Y		
	Desembolsos	Ingresos	V Actual	Desembolsos	Ingresos	V Actual
0	36,000.00	-	-36,000.00	44,000.00	-	-44,000.00
1	3,400.00	-	-3,119.27	1,800.00	-	-1,651.38
2	3,400.00	-	-2,861.71	1,800.00	-	-1,515.02
3	3,400.00	-	-2,625.42	1,800.00	-	-1,389.93
4	3,400.00	-	-2,408.65	1,800.00	-	-1,275.17
5	3,400.00	-	-2,209.77	1,800.00	-	-1,169.88
6	3,400.00	-	-2,027.31	1,800.00	-	-1,073.28
7	3,400.00	-	-1,859.92	1,800.00	-	-984.66
8	3,400.00	-	-1,706.35	1,800.00	-	-903.36
9	3,400.00	-	-1,565.45	1,800.00	-	-828.77
10	21,400.00	-	-9,039.59	1,800.00	-	-760.34
11	3,400.00	-	-1,317.61	1,800.00	-	-697.56
12	3,400.00	-	-1,208.82	1,800.00	-	-639.96
13	3,400.00	-	-1,109.01	1,800.00	-	-587.12
14	3,400.00	-	-1,017.44	1,800.00	-	-538.64
15	3,400.00	-	-933.43	25,800.00	-	-7,083.08
16	3,400.00	-	-856.36	1,800.00	-	-453.37
17	3,400.00	-	-785.65	1,800.00	-	-415.93
18	3,400.00	-	-720.78	1,800.00	-	-381.59
19	3,400.00	-	-661.26	1,800.00	-	-350.08
20	21,400.00	-	-3,818.42	1,800.00	-	-321.18
21	3,400.00	-	-556.57	1,800.00	-	-294.66
22	3,400.00	-	-510.62	1,800.00	-	-270.33
23	3,400.00	-	-468.46	1,800.00	-	-248.01
24	3,400.00	-	-429.78	1,800.00	-	-227.53
25	3,400.00	-	-394.29	1,800.00	-	-208.74
26	3,400.00	-	-361.73	1,800.00	-	-191.51
27	3,400.00	-	-331.87	1,800.00	-	-175.69
28	3,400.00	-	-304.46	1,800.00	-	-161.19
29	3,400.00	-	-279.33	1,800.00	-	-147.88
30	3,400.00	-	-256.26	1,800.00	-	-135.67
Valor Actual neto (VAN):			-81,745.57	Valor Actual neto (VAN): -69,081.49		

Alternativa	Valor actual neto
Tipo X	-81,745.57
Tipo Y	-369,081.49
Conclusión: La alternativa tipo Y tiene un menor desembolso, este debe recomendarse.	

15. Calcular la TIR para el flujo de fondos: -\$50,000, \$5,000, \$6,000, \$20,000, \$20,000 y \$3,000.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	50,000.00		-50,000.00
1		5,000.00	5,000.00
2		6,000.00	6,000.00
3		20,000.00	20,000.00
4		20,000.00	20,000.00
5		3,000.00	3,000.00

$$TIR = 2.46\%$$

16. El señor Pérez compró una máquina por \$17,200, la cual le produce 10,000 mensuales y espera venderla al cabo de un año por \$15,000. Encuentre la tasa interna de retorno.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	17,200.00		-17,200.00
1		10,000.00	10,000.00
2		10,000.00	10,000.00
3		10,000.00	10,000.00
4		10,000.00	10,000.00
5		10,000.00	10,000.00
6		10,000.00	10,000.00
7		10,000.00	10,000.00
8		10,000.00	10,000.00
9		10,000.00	10,000.00
10		10,000.00	10,000.00
11		10,000.00	10,000.00
12		25,000.00	25,000.00

$$TIR = 58.11\%$$

17. Una persona compra un negocio por \$20,000, para ponerlo en funcionamiento debe invertir \$2,000 dentro de un mes. Se espera que el negocio produzca \$1,000 mensual a partir del primer mes y durante 11 meses más, al final de los cuales vende el negocio en \$21,000. Calcular la TIR.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	20,000.00		-20,000.00
1	2,000.00		-2,000.00
2		1,000.00	1,000.00
3		1,000.00	1,000.00
4		1,000.00	1,000.00
5		1,000.00	1,000.00
6		1,000.00	1,000.00
7		1,000.00	1,000.00
8		1,000.00	1,000.00
9		1,000.00	1,000.00
10		1,000.00	1,000.00
11		1,000.00	1,000.00
12		22,000.00	22,000.00

$$TIR = 3.81\%$$

18. Un ciudadano compró un departamento por \$100,000, los gastos de escritura y comisión fueron de \$20,000; espera venderlo dentro de 6 años por \$130,000. Los ingresos y egresos durante ese tiempo fueron:

Año	Ingresos	Egresos
1	15,000	1,000
2	15,000	1,800
3	15,000	2,500
4	15,000	1,700
5	15,000	1,800
6	15,000	2,500

Si la tasa del mercado al momento de la venta es 9.5%, mediante la TIR, determinar si este ciudadano hizo un buen negocio.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	120,000.00		-120,000.00
1,00	1,000.00	15,000.00	14,000.00
2,00	1,800.00	15,000.00	13,200.00
3,00	2,500.00	15,000.00	12,500.00
4,00	1,700.00	15,000.00	13,300.00
5,00	1,800.00	15,000.00	13,200.00
6,00	2,500.00	145,000.00	142,500.00

$TIR = 12.01\%$; Como la TIR obtenida es mayor que la tasa de descuento dada, se concluye que el ciudadano hizo un buen negocio.

19. Se compra un autobús en \$720,000. Los costos de operación y mantenimiento son de \$10,000 cada año, durante los seis años. A partir del séptimo, hasta el décimo segundo año, los costos de se incrementan en el 10%, con respecto al año anterior. Los ingresos son de \$25,000 anuales y al final se vende en \$675,000 cuando t es 2.25%. Encontrar la TIR y determinar la factibilidad.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	720,000.00		-720,000.00
1	10,000.00	25,000.00	15,000.00
2	10,000.00	25,000.00	15,000.00
3	10,000.00	25,000.00	15,000.00
4	10,000.00	25,000.00	15,000.00
5	10,000.00	25,000.00	15,000.00
6	10,000.00	25,000.00	15,000.00
7	11,000.00	25,000.00	14,000.00
8	12,100.00	25,000.00	12,900.00
9	13,310.00	25,000.00	11,690.00
10	14,641.00	25,000.00	10,359.00
11	16,105.10	25,000.00	8,894.90
12	17,715.61	700,000.00	682,284.39

$TIR = 1.33\%$, No se hizo un buen negocio.

20. Una máquina tiene un costo inicial de \$1,100 y una vida útil de 6 años, al cabo de los cuales su valor de salvamento es de \$100. Los costos de operación y mantenimiento son de \$30 al año y se espera que los ingresos por el aprovechamiento de la máquina asciendan a \$300 al año. ¿Cuál es la TIR de este proyecto de inversión?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	1,100.00		-1,100.00
1	30.00	300.00	270.00
2	30.00	300.00	270.00
3	30.00	300.00	270.00
4	30.00	300.00	270.00
5	30.00	300.00	270.00
6	30.00	400.00	370.00

$TIR = 13.86\%$

21. Un inversionista de bienes, compra una propiedad en \$6,000 y la vende 17 años más tarde por \$21,000. Los impuestos sobre la propiedad fueron \$80 el primer año, \$90 el segundo y \$10 más cada año hasta que fue vendida. ¿Cuál es la tasa de retorno de la inversión?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	6,000.00		-6,000.00
1	80.00		-80.00
2	90.00		-90.00
3	100.00		-100.00
4	110.00		-110.00
5	120.00		-120.00
6	130.00		-130.00
7	140.00		-140.00
8	150.00		-150.00
9	160.00		-160.00
10	170.00		-170.00
11	180.00		-180.00
12	190.00		-190.00
13	200.00		-200.00
14	210.00		-210.00
15	220.00		-220.00
16	230.00		-230.00
17	240.00	21,000.00	20,760.00

$$TIR = 6.24\%$$

22. Si los impuestos sobre la propiedad en el problema anterior, aumentaron \$10 por año durante los primeros 10 años, y luego \$20 por año de allí en adelante, ¿cuál es la TIR?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	6,000.00		-6,000.00
1	80.00		-80.00
2	90.00		-90.00
3	100.00		-100.00
4	110.00		-110.00
5	120.00		-120.00
6	130.00		-130.00
7	140.00		-140.00
8	150.00		-150.00
9	160.00		-160.00

10	170.00	-170.00
11	190.00	-190.00
12	210.00	-210.00
13	230.00	-230.00
14	250.00	-250.00
15	270.00	-270.00
16	290.00	-290.00
17	310.00	21,000.00
		20,690.00

$$TIR = 6.14\%$$

23. Una familia compró una casa vieja por \$25,000, con la idea de hacerle mejoras y luego venderla para negocio. Durante el primer año gastaron \$5,000 en mejoras; en el segundo año, gastaron \$1,000 y \$800 en el tercero. Además, pagaron impuestos por la propiedad de \$500 anuales durante los tres años, vendiéndose al finalmente en \$35,000. ¿Qué tasa de retorno obtuvieron en la inversión?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	25,000.00		-25,000.00
1	5,500.00		-5,500.00
2	1,500.00		-1,500.00
3	1,300.00	35,000.00	33,700.00

$$TIR = 1.91\%$$

24. Una empresa proporciona los siguientes datos para analizar si su inversión es rentable. Inversión: \$100,000; ingreso promedio: \$30,000; costo anual de operación \$2,500. Si se espera recuperar su inversión en 5 años, calcular la tasa interna de retorno de la inversión.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	100,000.00		-100,000.00
1	2,500.00	30,000.00	27,500.00
2	2,500.00	30,000.00	27,500.00
3	2,500.00	30,000.00	27,500.00
4	2,500.00	30,000.00	27,500.00
5	2,500.00	30,000.00	27,500.00

$$TIR = 11.65\%$$

25. Hace cinco años una persona compró un pequeño edificio de oficinas, a un costo de \$100,000. Los ingresos por renta del edificio excedieron sus egresos, incluyendo sus pagos de impuesto sobre la renta sobre el ingreso gravable, en las siguientes cantidades:

Año	1	2	3	4	5
Cantidad	9,500	10,000	10,500	11,000	11,500

26. Esta persona acaba de vender el edificio en \$120,000, pero tiene que pagar \$12,500 de impuestos por ganancias de capital, con lo cual, su recuperación neta es \$107,500. ¿Qué tasa de rendimiento, después de pagar el impuesto sobre la resta, obtuvo esta persona en su inversión original?

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	100,000.00		-100,000.00
1		9,500.00	9,500.00
2		10,000.00	10,000.00
3		10,500.00	10,500.00
4		11,000.00	11,000.00
5		119,000.00	119,000.00

$$TIR = 11.58\%$$

27. Una empresa requiere hacer una inversión de \$150,000 y proyecta los siguientes datos: Ingreso anual por ventas \$32,000; costo anual de operación \$7,000. Calcular la Tasa Interna de Retorno de la inversión, si ésta está programada para 10 años. Indique si la inversión es rentable, si el costo del dinero está representado con una tasa del 16%.

Período	Desembolsos	Ingresos	Flujo de caja
0	150,000.00		-150,000.00
1	7,000.00	32,000.00	25,000.00
2	7,000.00	32,000.00	25,000.00
3	7,000.00	32,000.00	25,000.00
4	7,000.00	32,000.00	25,000.00
5	7,000.00	32,000.00	25,000.00
6	7,000.00	32,000.00	25,000.00
7	7,000.00	32,000.00	25,000.00
8	7,000.00	32,000.00	25,000.00
9	7,000.00	32,000.00	25,000.00
10	7,000.00	32,000.00	25,000.00

$$TIR = 10.56\%, \text{ No es rentable.}$$

18.6 PROBLEMAS PROPUESTOS**Valor actual neto**

1. Encuentre el Valor actual neto del siguiente flujo de caja: Desembolso inicial \$150,000, \$35,000, \$35,000 y \$120,000, si la tasa de mercado está al 8.5%.

R: \$5,937.97

- 2.Cuál es el Valor actual neto de los siguientes flujos anuales: \$-200,000, 0, 0, 0, 0, 0, \$80,000, \$80,000, \$80,000, \$80,000, \$20,000, \$20,000 y \$20,000. Considere la tasa de mercado en el 4.5%.

R: \$67,300.91

3. Se compra un negocio en \$250,000 y se reciben utilidades durante 6 años por \$80,000. Luego, para liquidar activos y personal, al sexto año, se deben pagar \$35,000. ¿Cuál es el Valor actual neto, si la tasa de descuento está al 18%?

R: \$16,843.10

4. Se compra una casa en \$350,000 y se renta un mes más tarde por \$5,000 mensuales. Al final del año se vende la casa en \$400,000. ¿Cuál es el Valor actual neto de la inversión, si la tasa de descuento es el 12% capitalizable mensualmente?

R: \$68,957.51

5. Una empresa durante un año tiene egresos mensuales de \$1,500 e ingresos trimestrales de \$8,500. Si la tasa de mercado es de 9% efectivo y tuvo un egreso inicial de \$50,000, ¿cuál es el Valor actual neto de la transacción?

R: \$2,826.43

6. Se consideran dos alternativas en un proyecto de inversión:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4
Alternativa A	-1,500	2,300	4,000	-2,000	3,000
Alternativa B	-1,700	-2,000	5,000	6,000	2,000

Si la tasa del mercado es de 6.5%, ¿cuál de las alternativas se debe seleccionar para realizar el proyecto de inversión?

R: VAN (A): \$4,862.53; VAN (B): 7,352.10; Alternativa B.

7. A una empresa se le plantean dos alternativas de inversión, que suponen un desembolso y los flujos netos de caja indicados en el siguiente cuadro:

Proyecto de inversión	Desembolso inicial	Flujos netos de caja			
		Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Inversión A	10,000	5,000	4,000	5,000	2,000
Inversión B	14,000	3,000	-1,000	6,000	2,800

Calcular cuál de estas inversiones es más rentable, según el criterio del Valor actual neto de cada una, si el interés es del 8%.

R: $SVAN(A): 3,498.21$; $VAN(B): -3,453.81$ Alternativa A.

8. La señora López quiere comenzar un negocio de confección de ropa deportiva, para ello necesita comprar varias máquinas, que representan un importe de \$19,000; además, debe adquirir materia prima (hilo, tela, botones, etc.) por un total de \$3,000. Para financiar esta inversión tiene que pedir un préstamo a una entidad financiera, la cual sólo le dará el préstamo si el proyecto resulta rentable económicamente. Se cree que podrá tener ingresos anuales durante 4 años por \$10,000 y que la empresa se liquidará al final del cuarto año, con el valor de los activos en ese momento de \$3,500. Considerando una tasa de descuento del 5%, encuentre el Valor actual neto y establezca la factibilidad del proyecto.

R: \$16,338.96 (Proyecto factible a la tasa de descuento indicada)

9. Una empresa se plantea la adquisición de una máquina que tiene una vida útil de 4 años. La inversión supone desembolsar inicialmente \$5,000, y \$600 anuales por mantenimiento. De la misma, se van a derivar ingresos de \$1,800 cada año. Sabiendo que el valor residual de la máquina es de \$400 y la tasa de descuento es del 5%, calcular el VAN de la inversión y determinar si el negocio es rentable.

R: \$- 415.78 (Negocio no rentable a la tasa de descuento indicada).

10. En una empresa se plantean dos proyectos de inversión (Alfa y Omega). El proyecto Alfa supone invertir inicialmente \$125,000, esperándose obtener en 5 años un flujo neto anual de \$30,000. El proyecto Omega supone la misma inversión inicial, pero los flujos que se esperan en los cinco años de vida son: \$24,000 el primer año, \$28,000 el segundo, \$32,000 el tercero, \$36,000 el cuarto y \$40,000 el quinto año. Siendo la tasa de inversión de 8%, ¿cuál de las dos inversiones es más aconsejable, valorándolas por el método del VAN?

R: $VAN\ ALFA\ \$94,781.30$; $VAN\ OMEGA\ \$100,314.74$. Proyecto Omega.

11. Sean dos proyectos de inversión:

Proyecto 1: Desembolso inicial de \$250,000, con renta anual de \$50,000 durante 10 años.

Proyecto 2: Desembolso inicial de \$320,000, con renta anual de 60,000, durante 10 años.

Se pide seleccionar el mejor proyecto de inversión tomando en cuenta una tasa de inversión del 10%.

R: VAN (1): \$57,228.36; VAN (2) \$48,674.03. Proyecto 1.

12. Una empresa conservera tiene que decidir cuál de estas dos cadenas de envasado instalar: la que ofrece el fabricante X exige un desembolso inicial de \$60,000 y los flujos de caja netos que se prevén en los próximos cuatro años son de \$12,000, el primer año; \$18,000 el segundo año; \$20,000 el tercero; y, \$24,000 el cuarto. La que ofrece el fabricante Y requiere un desembolso inicial de \$80,000 y los flujos de caja netos previsibles en los siguientes cuatro años son de \$16,000, \$24,000, \$28,000, y \$30,000, respectivamente. Si la tasa de mercado es del 4.5%, determine mediante el VAN, cuál es para la empresa la alternativa más conveniente.

R: VAN (X): \$5,617.80; VAN (Y): \$6,981.67. Fabricante Y

13. Una empresa de servicios turísticos, está revisando incluir una nueva oferta de rutas turísticas combinando deportes de aventura con estancias en casas rurales. Pero al principio, únicamente lanzará una de ellas al mercado. La empresa desea saber, considerando una vida útil de 3 años para cada uno de los proyectos, ¿cuál es la que tendría que lanzar antes al mercado? Para cada una de las actividades se registra en la tabla siguiente el desembolso inicial, así como los ingresos y gastos de los 3 años de vida útil.

Período	Deportes de aventura		Estancias en casas rurales	
	Desembolsos	Ingresos	Desembolsos	Ingresos
0	10,000		9,600	
1	2,000	30,000	6,800	16,000
2	2,600	16,000	5,040	24,000
3	4,600	14,000	3,000	20,000

Con una tasa de descuento del 5%, ¿cuál de las alternativas debería optar la empresa de servicios turísticos?

R: VAN (Aventura): \$36,940.94; VAN (Estancia): \$31,044.42. Alternativa Deportes de Aventura

Tasa interna de retorno

14. Dado el siguiente flujo de caja: Desembolso inicial de \$100,000 e ingresos anuales de \$80,000, \$30,000, \$20,000, \$15,000 y \$2,000, determine la Tasa interna de retorno.

R: 25,19%

15. Se invierte en un negocio \$175,000 y se obtienen utilidades anuales de \$40,000 durante 8 años. Encuentre la tasa interna de retorno.

R: 15,78%

16. Calcular la tasa interna de retorno de un negocio, cuya inversión inicial es de \$185,000 y produce utilidades de \$25,000 anuales a perpetuidad.

R: 12,15%.

17. En un proyecto de inversión se presentan dos alternativas:

Tiempo (años)	0	1	2	3	4
Alternativa A	-70,000	30,000	30,000	30,000	10,000
Alternativa B	-70,000	10,000	20,000	60,000	10,000

De acuerdo con el criterio de la Tasa Interna de Retorno y con una tasa de descuento del 15%, ¿cuál de las dos alternativas es más conveniente?

R: TIR (alternativa A) 18,32%; TIR (Alternativa B) 14,36%. Alternativa A.

18. Un proyecto de inversión a fin de cada año proporcionó las siguientes utilidades: \$3,000, \$5,000, \$2,000, \$4,000 y \$10,000. Si la TIR fue del 8%, determine el valor de la inversión inicial.

R: \$18,398.09

19. Determine la tasa interna de retorno de un negocio de explotación minera cuya inversión inicial es de \$500,000. Luego, es posible recibir utilidades anuales durante 8 años por \$120,000 y, finalmente, un año después de recibir la última utilidad, para liquidar deben pagarse \$32,000.

R: 16,81%

20. Se compra una máquina por \$250,000, la cual produce utilidades por \$65,000 anuales, durante 10 años de vida útil. Los costos de mantenimiento de la máquina representan \$2,500 anuales y finalmente, el valor de salvamento de la máquina, luego de cum-

plir con la vida útil, es de \$35,000. Encuentre la Tasa Interna de Retorno de esta inversión.

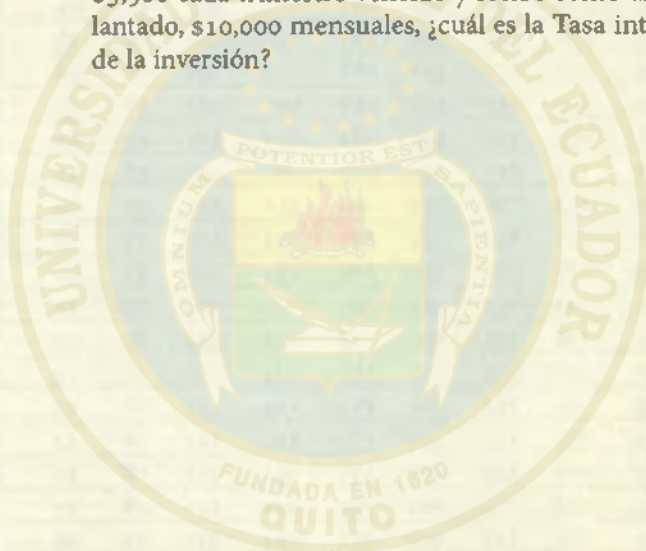
R: 22%

21. Una empresa de construcciones compra acciones en “Cementos del Valle” mediante una inversión inicial de \$850,000, produciendo una utilidad anual de \$150,000. Al final de 10 años liquida las acciones y recibe \$1'185,000. ¿Cuál es el valor de la TIR?

R: 19,22%

22. Un ciudadano compró un departamento por \$210,000 y lo vendió luego de un año en \$300,000. Por mantenimiento debe pagar \$3,500 cada trimestre vencido y recibe como alquiler, por adelantado, \$10,000 mensuales, ¿cuál es la Tasa interna de retorno de la inversión?

R: 6,97%



Universidad Central del Ecuador

Omnium Potentior est Sapientia

Anexo N° 1.

Número de cada día del año a partir del 1 de enero

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31		90		151		212	243		304		365

Bibliografía

- Álvarez, Arango Alberto, *Matemáticas Financieras*, 3ª. edc., Bogotá, Editorial McGraw Hill, 2005.
- Ayres J. Frank, *Matemáticas Financieras*, México D.F., Editorial McGraw Hill, 1999.
- Baca Currea Guillermo, *Excel y la Calculadora financiera aplicados a la Ingeniería Económica*, Bogotá, Fondo Educativo Panamericano, 2002.
- Blank, Leland; Tarquin Anthony, *Ingeniería Económica*, 6ª. edc., México D.F., Editorial McGraw Hill, 2002.
- Cissell, Robert; Cissell, Helen; Flaspohler, David, *Matemáticas Financieras*. 2ª. edc., México D.F., Editorial CECSA, 1999.
- García González, Enrique, *Matemáticas Financieras por medio de algoritmos, calculadora financiera y PC*, México D.F.: McGraw Hill, 2000.
- Grant, Eugene; Grant, Ireson; Leavenworth, Richard, *Principios de Ingeniería Económica*, México D.F.: CECSA, 1995.
- Massé, Pierre, *La elección de las inversiones*, Barcelona, Editorial Sagitario, 1963.
- Mora Zambrano, Armando, *Matemáticas Financieras*, 4ª. edc., Bogotá, Editorial Alfaomega, 2014.
- Portus Govinden, Lincoyán, *Matemáticas Financieras*, 4ª. edc., Bogotá, McGraw Hill, 1997.
- Rodríguez, Mariano; García Fronti, Javier, *ABC de Acciones y Bonos con Microsoft Excel*, Buenos Aires: Omicron System S.A. 2002.
- Sepulveda José; Souder, William E.; Gottfried, Byron S., *Ingeniería Económica*, Serie de Compendios Schaum's, México: McGraw Hill, 1985.
- Spiegel, Murray R.; Moyer, Robert E., *Algebra superior*, 3ª. edc., México D.F., Editorial McGraw Hill, 2007.
- Vega, Celio O, *Ingeniería Económica*, Quito, Editorial Mediavilla, 1983.

Webgrafía

- <http://www.abcfinanzas.com/matematicas-financieras/valor-del-dinero-en-el-tiempo>
- <http://fade.esPOCH.edu.ec/libros/Matematicas-financieras.pdf>
- <http://www.javeriana.edu.co/decisiones/julio/libromatfin.pdf>
- <http://www.uv.mx/personal/llopez/files/2013/03/Manual-Microsoft-Office-Excel-2010.pdf>

Índice analítico

- Amortización 29, 32-33, 39-40, 42, 197-202, 204-208, 210-211, 217, 220-221, 224, 259-260, 264, 271, 275-276, 278-279, 283, 286, 346
- Amortización simple 29, 32, 39-40, 42
- Anualidad 73-75, 77-82, 101-107, 120-121, 123-125, 146-149, 167-171, 198, 214, 229-231, 242, 253, 304-306
- Bono 303-316
- Buscar objetivo 34, 259-262, 265, 267, 269-270, 272-274, 277-279, 281-284, 286, 288
- Capitalización continua 50-51, 67-68, 72
- Costo capitalizado 145, 149-150, 156, 159, 161-162, 166
- Cupón 303, 305-308
- Depreciación 90, 193, 291-296, 298-301
- Descuento bancario 29-31, 35, 41
- Descuento racional 29-30, 35, 41
- Factor de agrupación 171
- Factor de distribución 169, 172, 173, 175, 187, 189, 191,
- Fondo de acumulación 194, 213-214, 216-218, 224, 278-279, 282, 285-287, 289-290
- Función tasa 125
- Gradiente 227-235, 242, 244, 256, 275, 290, 293
- Interés compuesto 9, 20, 43-51, 71
- Interés simple 5-11, 16, 19, 25-26, 30-31, 33-34, 36, 40-46, 48-49, 71, 307
- Pago periódico 33, 74-75, 78, 80, 82, 102, 104, 124-125, 142, 146, 168-171, 197-199, 202, 206-207, 210-211, 219, 224, 228-229, 233, 235, 260, 264-266, 271-274
- Perpetuidad 145-149, 152-154, 163-165, 233, 235, 239, 290, 342
- Porcentaje fijo 296, 299-301
- Redituabilidad 306-308, 310, 315-316
- Regla comercial 48, 55, 307
- Renta 74-75, 80-82, 104, 121, 125-126, 128, 130, 133, 135, 138, 141, 146, 151, 154, 163, 173-180, 187, 198, 275, 330, 338-339, 341
- Suma de enteros 294-295, 298, 301
- Tabla de acumulación 213, 215, 217-220, 224-225, 283, 289-290
- Tabla de amortización 33, 39, 42, 197, 199-202, 204-208, 210-211, 221, 224, 260, 271, 275, 279
- Tabla de depreciación 293, 299-301
- Tasa de descuento 30-31, 35-38, 41-42, 317, 321, 323-324, 326-327, 329, 335, 339-342
- Tasa de redituabilidad 306, 310, 316
- Tasa equivalente 50, 71, 167-168, 170-171, 177, 182-183, 190-193, 206, 211, 234-235
- Tasa interna de retorno 317-319, 333, 337-338, 342-343
- Tasa nominal 4, 45-47, 49-51, 61, 66, 70, 74, 96, 100, 115, 118, 120-122, 125, 198, 211, 305-306



Matemática financiera SE TERMINÓ DE
IMPRIMIR EN FEBRERO DE
2017 EN LOS TALLERES DE
CARVAJAL S.A. PERTENECE
AL FONDO EDITORIAL DE
ALFAOMEGA COLOMBIANA.

**Este Libro es Propiedad de la
Biblioteca de la Fac. Ciencias
Administrativas su Venta es
Penada por la LEY.**



FACULTAD DE CIENCIAS
ADMINISTRATIVAS



FECHA DE DEVOLUCIÓN		
11 oct 2021	Daniela Borrero	

513.1

H565

Ej.3

ADM

Herrera Arauz, Daniel
Matemática financiera

Omnium Potentior est Sapientia

Matemática financiera

Este libro recoge el material didáctico desarrollado durante varios años por el autor Daniel Herrera Aráuz, en el ejercicio docente de la cátedra en la Facultad de Ciencias Administrativas de la Universidad Central del Ecuador y en otras instituciones de educación superior, en los niveles de pregrado y posgrado.

La temática propuesta contempla los contenidos del programa académico de la matemática financiera y sus aplicaciones en el desarrollo profesional de las carreras de administración, contabilidad, auditoría, economía e ingeniería de proyectos, en 18 capítulos. Ofrece un marco teórico donde se exponen las definiciones, fórmulas de cálculo y metodología para la solución de problemas. Así mismo, el libro contempla 248 problemas resueltos y 242 problemas propuestos con sus respuestas, en los cuales se ha aplicado con detalle la metodología de las Ecuaciones de Valor.

Como ayuda didáctica para el proceso de enseñanza aprendizaje de esta materia, ha sido elaborado un grupo de programas de cálculo desarrollados en 27 hojas electrónicas de Excel, para la resolución de problemas sobre toda la temática tratada en el libro; estos programas constituyen una efectiva herramienta para comprobar los resultados obtenidos.

Así lo podrán verificar estudiantes, docentes y lectores, quienes dispondrán de un contenido muy valioso, acompañado de múltiples y enriquecedores valores agregados.

Universidad Central del Ecuador

Omnino Potentior est Sapientia

ÁREA	SUBÁREA
ADMINISTRACIÓN	MATEMÁTICA FINANCIERA

