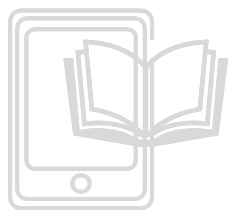


MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Volumen II DINÁMICA

HARRY R. NARA





BASE LEGAL PARA DIGITALIZACIÓN DE LIBROS CON DERECHOS DE AUTOR

El Sistema Integrado de Bibliotecas de la Universidad Central del Ecuador, digitalizará su acervo bibliográfico siempre y cuando sea para fines educativos y de investigación. No se permite la reproducción y distribución para la comercialización directa e indirecta del mismo.

La digitalización del material bibliográfico se lo realiza de acuerdo al Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación Art. 212 numeral 9, Literal ii “(...) Una biblioteca o archivo podrá, además, realizar los siguientes actos (...) La reproducción electrónica y comunicación pública de obras de su colección para ser consultadas gratuita y simultáneamente hasta por un número razonable de usuarios, sólo en terminales de redes de la respectiva institución o para usuarios de esa institución bajo su control, en condiciones que garanticen que no se puedan hacer copias electrónicas de esas reproducciones” y literal vii “La reproducción, adaptación, traducción, transformación, arreglo, distribución y comunicación de una obra protegida por derechos de autor o una prestación protegida por derechos conexos, en uno o más formatos accesibles para el uso exclusivo de personas con discapacidad”.

Este material se considera un producto intelectual a favor de su autor; por tanto, la titularidad de sus derechos se encuentra protegida por el Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación. La violación a dichos derechos constituye un delito que será responsabilidad del usuario.

Este libro está disponible físicamente en:

BIBLIOTECA	Sistema integrado de bibliotecas	PISO	
		ESTANTE	
		BANDEJA	
CONVENIO INTERINSTITUCIONAL		UNIVERSIDAD	

Mecánica vectorial para ingenieros

Parte II: Dinámica

HARRY R. NARA

Departamento de Ingeniería Civil y de Ingeniería Mecánica
Instituto de Tecnología Case

Colaboradores:

RAY E. BOLZ
HOWARD E. CONLON
ROBERT J. GUYAN
SIDNEY W. McCUSKEY
HARRY R. NARA
ROBERT L. SWART
DANIEL K. WRIGHT, JR.



EDITORIAL LIMUSA-WILEY S. A.

MEXICO, D. F.

Título de la obra en inglés

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS, PART II: DYNAMICS

© 1962 John Wiley & Sons, Inc.
605 Third Ave., New York, EE. UU.

Traducido por el físico

RAMÓN CORTÉS BARRIOS

Profesor en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
del Instituto Politécnico Nacional de México y en la Facultad de
Ciencias de la Universidad Autónoma de México

Revisado por el ingeniero

FERNANDO VÁZQUEZ DORANTES

Profesor en la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
del Instituto Politécnico Nacional de México
y en la Escuela Militar de Ingenieros

Reservados todos los derechos en lengua española
© 1964, EDITORIAL LIMUSA-WILEY S. A.
Arcos de Belem N° 75, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial, Reg. N° 121

Primera edición: 1964

Primera reimpresión: 1966

Segunda reimpresión: 1971

Impreso en México

(612)

PROLOGO

Los fenómenos de la dinámica constituyen una parte integral de la vida profesional del ingeniero y del científico. La dinámica es una materia sutil, y su importancia es tan grande que su enseñanza merece una cuidadosa atención en todas las escuelas.

Este libro se ha planeado como libro de texto para el primer curso de dinámica en los estudios de una escuela de ingeniería y para ir más allá de la introducción a la dinámica que se estudia siguiendo la secuencia usual de la física. Este libro es el resultado del esfuerzo conjunto de muchos de mis colegas en el "Case Institute of Technology" continuamente probado con los alumnos de ingeniería del segundo año durante los últimos cuatro de su elaboración.

La idea básica de este libro es simplemente la de desarrollar en la forma más general (compatible con los conocimientos que ha adquirido el alumno de ingeniería en el primer año) los principios fundamentales de la dinámica y después aplicar el proceso de análisis específico a la solución de problemas reales de ingeniería.

Cantidades tales como el momento de inercia, el producto de inercia, etc., no se consideran separadamente, sino que, de una manera natural aparecen en la discusión de los principios generales, así el alumno no distrae su atención en detalles de cálculo mientras intenta comprender los fundamentos.

El contenido de este libro puede servir como base para un curso de un semestre o tres semestres de cuatro horas crédito que toman los alumnos del segundo año de ingeniería mecánica, civil, eléctrica y metalúrgica. Estos alumnos han tenido ya una introducción a la mecánica en física; un curso adicional de estática vectorial y estudian ecuaciones diferenciales simultáneamente con la dinámica. Todos los temas que se desarrollan en este libro se discuten durante el curso.

Se ha incluido una breve historia de la dinámica a fin de que los alumnos de ciencias y tecnología sepan apreciar las grandes contribucio-

nes que se han aportado para desarrollar cada área en particular. Se sugiere que la parte correspondiente a la historia se deje para lo último, ya que adquiere mayor significado si el estudiante se ha compenetrado previamente de los principios de la dinámica.

Deseo expresar mi estimación a quienes más contribuyeron en este texto, Ray E. Bolz, Howard E. Conlon, Robert J. Guyan, Sidney W. McCuskey, Robert L. Swart y Daniel K. Wright, Jr., y al "Case Institute of Technology" por su apoyo en el esfuerzo realizado. El producto de la venta de este texto se utilizará para financiar la educación posprofesional de quienes en el futuro habrán de contribuir en el excitante campo de la mecánica.

HARRY R. NARA

Cleveland, Ohio
Enero de 1962.

CONTENIDO

1 NOTAS HISTORICAS SOBRE LA DINAMICA 11

- 1.1 Introducción — Leyes de movimiento 11
- 1.2 Principios de los desplazamientos virtuales 15
- 1.3 Principio de D'Alembert 21
- 1.4 Cálculo de variaciones 23
- 1.5 Formulación lagrangiana 23

2 CINEMATICA 29

- 2.1 Introducción 29
- 2.2 Definiciones 31
- 2.3 Movimiento de un cuerpo rígido 45
- 2.4 Componentes normal y tangencial de la aceleración 60
- 2.5 Movimiento relativo 69
- 2.6 Movimiento relativo y eje instantáneo de rotación 91
- 2.7 Aceleración de un centro instantáneo 102
- Problemas 106

3 DINAMICA DE LA PARTICULA 139

- 3.1 Introducción 139
- 3.2 Segundo axioma de Newton 140
- 3.3 Aplicaciones de la segunda ley de Newton a sistemas de fuerza constante 144
- 3.4 Aplicaciones a desplazamiento de sistemas de fuerza variable 148
- 3.5 Aplicaciones a sistemas de fuerza dependiente de la velocidad 152
- 3.6 Aplicaciones a sistemas interconectados 156
- 3.7 Justificación del análisis como una partícula 159
- 3.8 La ley de Newton y la rotación de la Tierra 161
- 3.9 Trabajo y energía 168
- 3.10 Sistemas conservativos y energía potencial 173
- 3.11 Conservación de la energía 179
- 3.12 Sistemas mixtos de fuerza 179
- 3.13 El principio de impulso y cantidad de movimiento 184

- 3.14 Conservación de la cantidad de movimiento lineal 189
- 3.15 Un experimento de cantidad de movimiento 191
- 3.16 Choque 195
- Problemas 205

4 DINAMICA DE UN SISTEMA DE PARTICULAS 237

- 4.1 Introducción 237
- 4.2 Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas 238
- 4.3 Cantidad de movimiento lineal e impulso de un sistema de partículas 242
- 4.4 Movimiento de un sistema de masa variable 246
- 4.5 Ecuación de la cantidad de movimiento angular para una sola partícula 250
- 4.6 Ecuación de la cantidad de movimiento angular para un sistema de partículas, con respecto a un origen arbitrario 252
- 4.7 Cálculo de la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas con respecto a un sistema inercial 256
- 4.8 Cálculo de la energía cinética de un sistema de partículas 258
- Problemas 260

5 DINAMICA DE LOS CUERPOS RIGIDOS 279

- 5.1 Introducción 279
- 5.2 El momento de la cantidad de movimiento de un cuerpo rígido 280
- 5.3 Cálculo de los momentos y productos de inercia 283
- 5.4 Traslación de un cuerpo rígido 290
- 5.5 Movimiento plano de un cuerpo rígido 294
- 5.6 Movimiento de trompo que gira 304
- 5.7 Ecuaciones generales de movimiento para un cuerpo rígido 313
- 5.8 Formulación del trabajo y la energía para sistemas de cuerpos rígidos 320
- 5.9 Ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento — Cuerpos rígidos 330
- Problemas 335

6 DINAMICA DE LOS SISTEMAS VIBRATORIOS 377

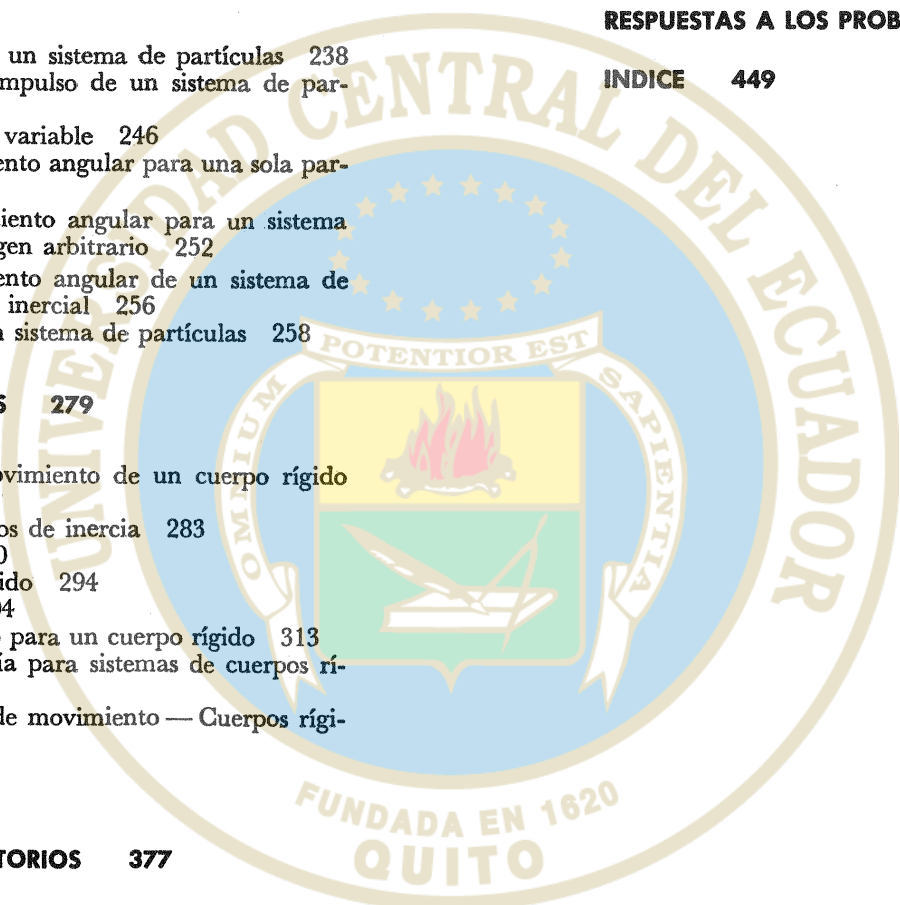
- 6.1 Introducción 377
- 6.2 Vibración libre no amortiguada de un sistema con un solo grado de libertad 377
- 6.3 Método de energía aplicado a sistemas vibratorios 383
- 6.4 La vibración libre amortiguada de un sistema con un solo grado de libertad 385
- 6.5 Vibración forzada — Sistema con un solo grado de libertad 391
- 6.6 Fuerza transmitida y aislamientos 399

- 6.7 Instrumentos de medida de la vibración 402
- 6.8 Sistemas lineales con varios grados de libertad 404
- 6.9 Sistema forzado con dos grados de libertad 408
- Problemas 411

APENDICE A: PROPIEDADES DE LOS CUERPOS SOLIDOS HOMOGENEOS 433

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS 437

INDICE 449



Notas históricas sobre la dinámica

1.1 Introducción—Leyes del movimiento

“Para el Más Ilustre Señor Conde de Noailles
Consejero de su Cristianísima Majestad,
Caballero de la Orden del Espíritu Santo,
Mariscal de Campo y Comandante, Senescal y Gobernador
de Rouergue y Teniente de Su Majestad en Auvergne,
Mi Señor y Venerable Protector.”

Así dedicó Galileo en 1638 su profundo pensamiento y experiencias sobre el tema del movimiento. La dinámica fue fundada por Galileo. Los antiguos, y particularmente los griegos, habían estudiado la estática, pero fue necesario aguardar hasta Galileo para describir matemáticamente y estudiar experimentalmente el movimiento y sus causas. Debemos a Galileo las “leyes” que nos son familiares del movimiento uniformemente acelerado. Galileo descubrió la ley de la inercia, más tarde formalizada por Isaac Newton.

Debe recordarse el estado en que se hallaba la ciencia en aquellos tiempos. Para la mayoría de las personas la Tierra era el centro del Universo. Creer otra cosa era signo de herejía y contrario a las Sagradas Escrituras. Copérnico había conjeturado en 1543 que la Tierra y los planetas giraban alrededor del Sol. Esta teoría fue expuesta por Galileo, quizá a propósito en forma vaga, a fin de evitar las consecuencias decretadas por la Iglesia. Mucho de la teoría de la dinámica, en los dos siglos siguientes, no pasó de los intentos de explicar los movimientos del sistema planetario. Las contribuciones e ideas de Galileo son dignas de recordarse puesto que abiertamente enunció el hecho de que la ciencia debe estar basada en las “leyes” que se obtienen del experimento.

Newton nació en 1642, el año en que murió Galileo. Tal parece como si la Naturaleza estableciera una continuidad en las vidas de estos dos

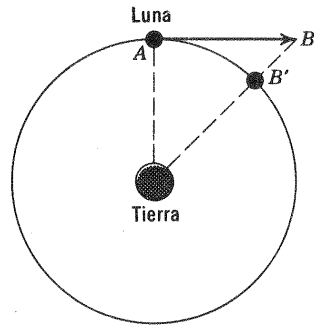


Fig. 1.1

gigantes del intelecto para que sus secretos se escudriñaran con mayor profundidad sin menoscabo del conocimiento. La hazaña más notable de Newton en que conjuga el razonamiento y la imaginación, fue la formulación de la ley de la gravitación universal.

Con gran penetración, Newton razonó que la aceleración de la Luna en su órbita, aceleración radial, no difiere esencialmente de la aceleración debida a la gravedad de la Tierra. Discernió que la aceleración de la gravedad se extiende a las cúspides de las montañas más altas. Razonó que la Luna se movería una distancia AB (Fig. 1.1) en un segundo, debido a su velocidad en torno a la Tierra, si no estuviere sujeta a la atracción terrestre. Sin embargo, después de transcurrir un segundo, realmente debería estar en B' . Ahora, él y otros matemáticos y filósofos de su época habían *adivinado* de la tercera ley de Kepler sobre el movimiento planetario, que la atracción de la Tierra sobre un cuerpo debería disminuir, cuando se alejara de la Tierra, en razón inversa al cuadrado de la distancia desde el centro de la Tierra. Newton sabía que en un segundo un objeto, en la cercanía de la superficie terrestre, se desplaza en su caída 4.9 metros. Por lo tanto, si prevalece una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, razonó que a la distancia de la Luna, la caída BB' de ésta hacia la Tierra, en un segundo, sería

$$BB' = 4.9 \frac{R^2}{D^2} (\text{m}),$$

donde R es el radio de la Tierra y D es la distancia del centro de nuestro planeta al centro de la Luna.

En 1666, cuando efectuó un cálculo para comprobar esta conjetura, su conocimiento sobre el radio de la Tierra era imperfecto y halló que BB' era alrededor de 12 por ciento menor de lo que podría haber sido de acuerdo con su hipótesis. No fue sino hasta 1679 cuando supo de la nueva medición de Picard del radio de la Tierra, y al introducir este nuevo dato en su antiguo cálculo comprobó satisfactoriamente su hipótesis.

A partir de aquel instante Newton desarrolló rápidamente su ley de gravitación universal, a saber $F = -Gmm'/D^2$, donde m y m' son las masas de los dos cuerpos que se atraen, D la distancia que los separa y G una constante cuyo valor tomamos ahora como 6.67×10^{-8} en unidades cgs. De esta ley de Newton fue posible deducir, a partir de un solo principio físico unificado, las tres leyes del movimiento planetario que había enunciado Kepler en 1609 y 1619. Estas leyes keplerianas son:

1. Las órbitas planetarias son elipses con el Sol como foco.
2. El radio vector de un planeta barre áreas iguales en iguales intervalos de tiempo.
3. Los cuadrados de los períodos de los planetas alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de sus distancias medias desde el Sol.

Esto ilustra bien el método inductivo mediante el cual progresa la ciencia, incluyendo la dinámica. Primeramente existe un cuerpo que se observa cuidadosamente y los datos se correlacionan, tal como ocurrió de las observaciones cuidadosas que hizo Tycho Brahe, sobre las cuales Kepler basó sus leyes. Después se construye una teoría que, por medio de un modelo matemático, predice correctamente los hechos observados. Finalmente se puede utilizar el modelo para predecir otros fenómenos naturales. Mientras estas predicciones se cumplan con nuevos experimentos, el principio unificado y la representación matemática de éste, son aceptables. Si la observación y la teoría no concuerdan, generalmente es necesario revisar la teoría.

En su *Principia*, publicado por insistencia de Halley* en 1686, Newton presentó sus llamadas "leyes del movimiento". El número de éstas, es tres.

Primera ley. Una partícula de masa constante permanece en reposo o se mueve con velocidad constante en línea recta, a menos que sobre ella actúe una fuerza.

Segunda ley. Una partícula sometida a una fuerza se mueve de manera que la razón de cambio con respecto al tiempo de su cantidad de movimiento lineal sea igual a la fuerza.

Tercera ley. Si dos partículas actúan una sobre otra, la fuerza que ejerce la primera sobre la segunda es igual en magnitud y dirección, pero opuesta en sentido a la fuerza que ejerce la segunda sobre la primera.

Los consideró como axiomas de los cuales, por razonamiento deductivo, se pueden obtener conclusiones matemáticas. Halló que estas deduc-

* Edmund Halley fue inventor de las tablas de navegación y el tercer Astrónomo Real de Inglaterra. Se hizo más célebre por su cálculo de la órbita del gran cometa de 1682, más tarde llamado cometa de Halley. Su último acercamiento a la Tierra fue en 1910 y se espera nuevamente alrededor de 1985.

ciones se ajustan al universo físico tal como se reconoció posteriormente. Sólo en fecha reciente, con el advenimiento de la teoría de la relatividad (Einstein, 1905) y su aplicación a problemas dinámicos microscópicos y a movimientos con velocidades extremadamente altas, se hizo necesario modificar en parte los axiomas básicos establecidos por Newton.

Las conclusiones deducidas por Newton, y publicadas en su *Principia*, tal vez constituyen la hazaña intelectual más grande que hasta ahora haya sido realizada por un solo hombre. En menos de dos años, Newton trabajó matemáticamente sobre la espina dorsal de las ideas básicas de la dinámica tal como hoy las conocemos. Una faceta interesante de su trabajo es que todas las demostraciones se expresan en lenguaje geométrico. Veinte años antes (1666), Newton había inventado sus fluxiones (conocidas ahora como cálculo), mediante las cuales resolvió indudablemente sus problemas de dinámica. Pero a causa de que en el medio científico de su tiempo nadie estaba suficientemente familiarizado con el cálculo para leer sus escritos, Newton decidió traducir todas sus demostraciones al lenguaje de la geometría.

Hoy día, debido a esto, hallamos que su *Principia* es algo difícil para ser leído, ya que en la actualidad se utilizan las ecuaciones diferenciales para describir el mismo fenómeno. El método de las fluxiones de Newton no se publicó hasta 1704, aproximadamente veinte años después de su *Principia*.

Los axiomas de Newton y sus demostraciones deductivas sobre los teoremas subsiguientes señalan el hecho de que la historia de la dinámica no puede estar desligada de la historia de las matemáticas. Este método de las fluxiones fue inventado específicamente para ayudarle a resolver el enigma del movimiento de la Luna y determinar que una esfera homogénea que atrae un cuerpo se comporta *como si* toda su materia estuviera concentrada en su centro. Por esto, la dinámica es una ciencia deductiva. Como tal, su estructura matemática formal puede construirse sobre otros axiomas fundamentales distintos de los utilizados por Newton. Uno de éstos conduce a la invención y uso del cálculo de variaciones. En vista de que la mayor parte de este libro será dedicada a la aplicación de las leyes del movimiento de Newton, dejaremos éstas para una discusión ulterior más detallada y pasaremos a una breve discusión de otras formas de establecer las ecuaciones de la dinámica.

1.2 Principio de los desplazamientos virtuales. En la cadena del razonamiento a seguir hallamos los nombres de James y John Bernoulli, D'Alembert, Lagrange, Hamilton y Jacobi. En la Tabla 1.1 se incluyen bosquejos de sus contribuciones a la dinámica.

TABLA 1.1 Pequeños bosquejos de grandes nombres y contribuciones a la dinámica

Arquímedes (287-212 a.c.)
De Aequiponderantibus
(ver T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Cambridge, 1897)

Contribuyó a la teoría de la palanca, la idea del centro de gravedad de un cuerpo y los métodos para calcular el centro de gravedad. Estableció el principio que lleva su nombre relativo a la fuerza de empuje ejercida sobre un cuerpo que flota en un líquido. Inventó el método matemático del cálculo integral.

Leonardo de Vinci (1452-1519) (trabajos no publicados hasta 1797 por Venturi)

Relacionó los momentos estáticos con el equilibrio de los cuerpos. Prefiguró el trabajo de Galileo sobre el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Galileo (1564-1642)
Dialogues Concerning Two New Sciences
(Leyden, 1638)

Enunció y verificó experimentalmente las leyes cinemáticas de la caída de los cuerpos, y otro movimiento uniformemente acelerado. Descubrió la ley de la inercia que más tarde fue formalizada por Newton. Observó que las fuerzas producen aceleraciones. Descubrió el paralelogramo de movimientos (composición vectorial) y obtuvo la trayectoria de un proyectil. Construyó el primer telescopio y con él efectuó profundos descubrimientos astronómicos.

Kepler (1571-1642)
Astronomia Nova (Praga, 1609), *Harmonice Mundi* (Linz, 1619)

De las observaciones de Tycho Brahe descubrió tres leyes empíricas del movimiento planetario. Concibió la gravedad como la análoga de la atracción magnética.

Descartes (1596-1650)
Principia Philosophiae
(Amsterdam, 1644)

Propuso ideas vagas del momento lineal como "cantidad de movimiento" y la *fuerza viva* que hoy conocemos como energía cinética. Descartes fue un filósofo que confió en sus conclusiones teóricas más que en el experimento.

Pascal (1623-1662)
Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs (París, 1648)

Aplicó el principio de las velocidades virtuales a la estática de líquidos. Evolucionó las leyes de la presión de los líquidos (presión que se transmite por igual y no disminuye en ningún punto del interior de un líquido, etc.). Fue el primero en demostrar la variación de la presión atmosférica con la altura.

TABLA 1.1 Pequeños bosquejos de grandes nombres y contribuciones a la dinámica (Continuación)

Huyghens (1629-1695) <i>Horologium Oscillatorium</i> (1673)	Creó la teoría del centro de oscilación. Inventó el reloj de péndulo y su escape; mediante mediciones pendulares determinó g . Creó las ideas de fuerza centrífuga y aceleración centrípeta (es decir, dedujo $a_n = v^2/r$ para el movimiento circular uniforme). Inventó el péndulo cicloidal. Estableció la conexión entre el trabajo y la energía cinética.
Newton (1642-1726) <i>Philosophiae Naturaliae Principia Mathematica</i> (Londres, 1686)	Descubrió la ley de la gravitación universal. Formalmente enunció como axiomas las "leyes del movimiento", que forman la base para describir matemáticamente la dinámica de un sistema. Generalizó la idea de fuerza; introdujo el concepto de masa; formuló claramente el principio del paralelogramo de fuerzas; estableció claramente la ley de acción y reacción.
Bernoulli, Jacobo (1654-1705) <i>Acta Eruditorum</i> (1691) <i>Opera Omnia</i> (Ginebra, 1744)	Dedujo la ley del péndulo compuesto y el centro de oscilación a partir del principio de la palanca. Desarrolló un método general (hoy forma parte del cálculo de variaciones) para resolver el problema de la braquistócrona.
Bernoulli, Juan (1667-1748) <i>Acta Eruditorum</i> (1693) <i>Opera Omnia</i> (Lausana, 1742)	Generalizó el principio de las velocidades virtuales. Contribuyó al principio de la conservación de la energía. Resolvió el problema de la braquistócrona.
Maupertius (1698-1759) <i>Mémoires de l'Académie de Paris</i> (1740); <i>Mémoires de l'Académie de Berlin</i> , (1745-1747)	Descubrió que el trabajo efectuado para llevar un sistema al equilibrio es un máximo o bien un mínimo. Enunció (1747) el principio de la mínima acción (acción = masa $\times$ velocidad $\times$ recorrido, una combinación vaga de trabajo virtual y fuerza viva. Aunque esta contribución resultó vaga, inspiró a Euler y Gauss para realizar algunas de sus mejores aportaciones.
Bernoulli, Daniel (1700-1782) <i>Hydrodynamica, sine de Viribus et Motibus Fluidorum</i>	Descubrió la ley de la conservación de las áreas que es una generalización de la segunda ley de Kepler del movimiento pla-

TABLA 1.1 Pequeños bosquejos de grandes nombres y contribuciones a la dinámica (Continuación)

<i>Commentarii</i> (1738)	netario. Aplicó el principio de fuerza viva al movimiento de flúidos. Ideó un método para determinar la salida de un flúido por un orificio. Introdujo el principio de superposición de vibraciones y enunció una teoría cinética rudimentaria de la presión de un gas.
Euler (1707-1783) <i>Mechanica sine Motus Scientia</i> (San Petersburgo, 1736) y artículos en los volúmenes de las Academias de Berlín y San Petersburgo	Introdujo el "momento de inercia" por Σmr^2 . Contribuyó fundamentalmente al cálculo de variaciones y aplicó los métodos de la dinámica. Introdujo los ángulos que llevan su nombre en la dinámica del cuerpo rígido. Las contribuciones de Euler a la mecánica y a los métodos matemáticos en ella aplicados son demasiado numerosos para ser mencionados (ver Whittaker, <i>Analytical Dynamics</i>).
Clairaut (1713-1765) <i>Théorie de la figure de la Terre</i> . (París, 1743)	Aplicó la teoría del potencial (nuestra moderna designación) al equilibrio de los líquidos. Desde este punto de vista discutió la forma de la Tierra.
D'Alembert (1717-1783) <i>Traité de dynamique</i> (París, 1743)	Aplicó el principio del trabajo virtual a la resolución de los problemas de dinámica; hoy día su principio es un punto de partida para establecer las ecuaciones del movimiento.
Lagrange (1736-1813) <i>Mécanique analytique</i> (París, 1788)	Sistematizó tanto la estática como la dinámica para reducir la ciencia a una operación tan formal como fuese posible; siendo analítica su aproximación, se opone a la aproximación geométrica de Newton. Dedujo las famosas ecuaciones lagrangianas del movimiento (equivalentes a las de Newton), que se deducen de los conceptos de energía. Se puede llamar a Lagrange el fundador de la mecánica analítica.
Laplace (1749-1827) <i>Mécanique céleste</i> (París, 1799)	Aplicó los conceptos de Newton al estudio de los movimientos de planetas y satélites. Su trabajo monumental en mecánica celeste es definitivo. Probó la estabilidad del sistema solar.

TABLA 1.1 Pequeños bosquejos de grandes nombres y contribuciones a la dinámica (Continuación)

Gauss (1777-1855) <i>Neues Princip der Mechanik</i> (Periódico de Crelle, IV, 1829)	Inventó el principio de la mínima restricción. Contribuyó a la teoría del equilibrio de las superficies de los líquidos. Evolucionó los métodos para el cálculo de órbitas, los cuales todavía se utilizan.
Poisson (1781-1840)	Introdujo el método de variación de parámetros en la solución de problemas de dinámica. Discutió la estabilidad secular de las órbitas planetarias. Estudió la dinámica de los cuerpos elásticos (razón de Poisson).
Coriolis (1792-1843) <i>Traité de mécanique</i> (París, 1829)	Dio su nombre a la pseudo fuerza $-2m(\vec{\omega} \times \vec{v})$ debida al movimiento confinado a un marco de referencia que gira. Aplicó el nombre de "trabajo" al producto fuerza $\times$ distancia y denotó la "fuerza viva" por $\frac{1}{2}mv^2$ — ahora conocida como energía cinética.
Jacobi (1804-1851) <i>Vorlesungen über Dynamik</i> (editado por von Clebsch, Berlín, 1866)	Contribuyó a la teoría de la mínima acción demostrando que $\int v ds$ tiene un valor estacionario para la trayectoria dinámica, no necesariamente un mínimo o un máximo. Introdujo la función de sustitución, y de este modo contribuyó a la solución de la ecuación fundamental diferencial parcial de Hamilton-Jacobi, tan importante en la mecánica cuántica.
Hamilton (1805-1865) <i>Lectures on Quaternions</i> (1853 Essays)	Introdujo el concepto de las "funciones fuerza"— energía potencial con signo negativo. Ideó una integral equivalente al principio de D'Alembert, que es,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0$$

aplicable a una trayectoria dinámica, que es diferente a las trayectorias en el espacio cartesiano (este es el principio de Hamilton). Introdujo el concepto de odógrafa. Contribuyó a las ecuaciones hamiltonianas del movimiento, que ahora son tan útiles en dinámica analítica y mecánica cuántica.

TABLA 1.1 Pequeños bosquejos de grandes nombres y contribuciones a la dinámica (Conclusión)

Mach (1838-1916) <i>Die Mechanik in ihrer Entwicklung</i> (Leipzig, 1883)	Analizó exhaustivamente los fundamentos axiomáticos y filosóficos de los conceptos de dinámica, tales como masa y fuerza. Criticó y sistematizó la ciencia de la dinámica tal como se conoce hoy en día.
Hertz (1857-1894) <i>Principien der Mechanik</i> (Leipzig, 1894)	Criticó los fundamentos filosóficos y axiomáticos de la dinámica newtoniana. Formuló un sistema "sin fuerza" en que solamente se aceptaron los conceptos de tiempo, espacio y masa. Su principal punto de partida fue una combinación de la ley de inercia y el principio de mínima restricción.
Poincaré (1854-1912) <i>Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste</i> (1892, 1893, 1899)	Creó mucho de la teoría de los invariantes integrales y de las ecuaciones diferenciales aplicables a la mecánica celeste. Introdujo métodos topológicos en el estudio de las órbitas periódicas. Contribuyó al estudio del problema de los n cuerpos, la estabilidad de los movimientos periódicos y la estabilidad de los flúidos que giran.
Einstein (1878-1955) <i>Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.</i> (Anales de Física, 49, 1916)	En sus teorías de la relatividad especial (1905) y general (1915), Einstein introdujo los nuevos conceptos de espacio-tiempo necesarios en el estudio de las partículas atómicas que se mueven a elevadas velocidades. La masa variable (dependiente de la velocidad) y el tiempo variable son conceptos originales.

Principiaremos con un postulado o axioma enunciado por John Bernoulli en 1717. Este es el "principio de los desplazamientos virtuales" o bien como ahora se le llama "principio del trabajo virtual". Esta es una forma de establecer el equilibrio de un sistema mecánico en términos de la energía, y en consecuencia, este principio pertenece al dominio de la estática; sin embargo, es interesante observar que puede tomarse como punto de partida fundamental, o axioma, de la dinámica. El principio del trabajo virtual establecido en lenguaje vectorial moderno, es el siguiente:

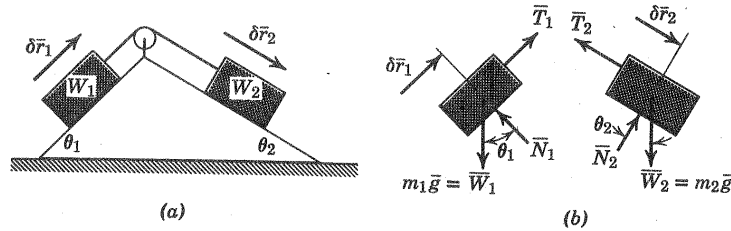


Fig. 1.2

Sea un sistema de n partículas situadas en los puntos $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \dots \bar{r}_n$ sometidas a un sistema de fuerzas $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$. Sean $\delta\bar{r}_1, \delta\bar{r}_2 \dots \delta\bar{r}_n$ desplazamientos arbitrarios o virtuales (¡imaginados!), desplazamientos de las partículas que son compatibles con las restricciones impuestas sobre el sistema ya sea por cuerdas, reacción de superficie o agentes restrictivos semejantes. Entonces, el principio de Bernoulli de los desplazamientos virtuales establece que si el sistema está en equilibrio

$$\bar{F}_1 \cdot \delta\bar{r}_1 + \bar{F}_2 \cdot \delta\bar{r}_2 + \dots + \bar{F}_n \cdot \delta\bar{r}_n = 0.$$

Evidentemente esta suma de productos escalares representa el producto de fuerzas y desplazamientos, y en lenguaje moderno constituye el trabajo efectuado por las fuerzas sobre el sistema de partículas en los desplazamientos virtuales (o imaginados).

Será suficiente una ilustración para fijar las ideas. Consideremos bloques de pesos $\bar{W}_1 = m_1\bar{g}$ y $\bar{W}_2 = m_2\bar{g}$ unidos por una cuerda inextensible, colocados en ranuras lisas sobre planos inclinados, como se muestra en la figura 1.2. Imaginemos que el peso W_1 se mueve ligeramente hacia arriba del plano en el sentido de $\delta\bar{r}_1$. Este es un desplazamiento compatible con la condición de que W_1 permanezca sobre el plano y en la ranura; por otra parte, $\delta\bar{r}_1$ es arbitrario. Análogamente, sea $\delta\bar{r}_2$ un desplazamiento virtual de W_2 sobre su plano lo tomaremos arbitrariamente hacia abajo. Puesto que la cuerda es inextensible, $|\delta\bar{r}_1| = |\delta\bar{r}_2|$ y $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2|$.

Ahora, por el principio de Bernoulli, el sistema estará en equilibrio si

$$(m_1\bar{g} + \bar{T}_1 + \bar{N}_1) \cdot \delta\bar{r}_1 + (m_2\bar{g} + \bar{T}_2 + \bar{N}_2) \cdot \delta\bar{r}_2 = 0,$$

donde $\bar{N}_1$ y $\bar{N}_2$ son las reacciones de los planos sobre las masas. Efectuando los productos escalares, hallamos

$$[m_1g \cos(90^\circ + \theta_1) + |T_1|] |\delta r_1| + [m_2g \cos(90^\circ - \theta_2) - |T_2|] |\delta r_2| = 0$$

y aplicando las condiciones de restricción, tenemos

$$(-m_1g \sin \theta_1 + m_2g \sin \theta_2) |\delta r_1| = 0.$$

Pero, en general, $|\delta\bar{r}_1|$ es un desplazamiento arbitrario distinto de cero. Entonces esta expresión se anula solamente si

$$m_1g \sin \theta_1 = m_2g \sin \theta_2$$

6

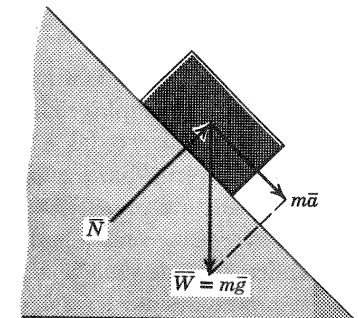
$$W_1 \sin \theta_1 = W_2 \sin \theta_2$$

Esta es la condición para el equilibrio deducida del principio de Bernoulli. Podría haberse obtenido de inmediato si se observa que $W_1 \sin \theta_1$ es la componente del peso hacia abajo del plano de la izquierda, la fuerza $W_2 \sin \theta_2$ es la componente del peso hacia abajo del plano de la derecha, y en el equilibrio son iguales.

1.3 Principio de D'Alembert. D'Alembert, matemático francés del siglo XVIII, introdujo en 1743 el concepto interesante de "pérdida" de fuerzas a fin de aplicar a un sistema dinámico el principio de Bernoulli. Su intento fue reducir los problemas de la dinámica a problemas de estática ya resueltos (¡un artificio bien conocido de los matemáticos!) Insertaremos aquí el contenido del principio de D'Alembert en su forma más útil, no en su forma original.

Sean n partículas situadas en puntos $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \dots \bar{r}_n$ y sometidas a las fuerzas $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \dots \bar{F}_n$ llamadas *fuerzas impresas*, las cuales, si las partículas estuvieran en libertad de moverse, les imprimirían las aceleraciones $\bar{a}_1 = \bar{F}_1/m_1 \dots \bar{a}_n = \bar{F}_n/m_n$. Las n partículas pueden estar restringidas de alguna manera; en tal caso, solamente ciertas componentes de las fuerzas $\bar{F}_i$ estarán en posibilidad de producir movimiento. Denotaremos estas *fuerzas efectivas* por $\bar{f}_i$ ($i = 1, 2 \dots n$). Por la segunda ley de Newton sabemos que $\bar{f}_i = m_i\bar{a}_i$; entonces, $\bar{F}_i - \bar{f}_i = \bar{G}_i$ ($i = 1, 2 \dots n$) constituye la parte de fuerzas impresas que no son efectivas y que se denominan *fuerzas "perdidas"*. Por ejemplo, para un bloque de peso $\bar{W}$ que descansa sobre un plano inclinado liso (Fig. 1.3) la fuerza impresa es $\bar{W} + \bar{N}$, donde $\bar{N}$ es la reacción del plano sobre el bloque. La fuerza efectiva es

Fig. 1.3



$m\bar{a}$. A la fuerza efectiva con signo negativo algunas veces se la llama "fuerza de inercia". Por lo tanto, la fuerza perdida es

$$\bar{G} = \bar{W} + \bar{N} - m\bar{a}.$$

El principio de D'Alembert establece que las fuerzas "perdidas" constituyen un sistema de fuerzas en equilibrio. Esto es, para un sistema de n partículas, por el principio del trabajo virtual se tiene

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m\bar{a}_i) \cdot \delta \bar{r}_i = 0.$$

Para ilustrar al respecto, consideremos nuevamente las masas m_1 y m_2 sobre los planos inclinados que se ven en la Fig. 1.2. Por el principio de D'Alembert, para las fuerzas impresas se puede escribir

$$m_1 \bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{T}_1 \quad \text{y} \quad m_2 \bar{g} + \bar{N}_2 + \bar{T}_2$$

y para las fuerzas de inercia

$$-m_1 \bar{a}_1 \quad \text{y} \quad -m_2 \bar{a}_2,$$

donde $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ son las aceleraciones efectivas que experimentan las masas m_1 y m_2 respectivamente. Por lo tanto, las fuerzas perdidas son

$$m_1 \bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{T}_1 - m_1 \bar{a}_1 \quad \text{y} \quad m_2 \bar{g} + \bar{N}_2 + \bar{T}_2 - m_2 \bar{a}_2.$$

Con los desplazamientos virtuales $\delta \bar{r}_1$ y $\delta \bar{r}_2$ y con las restricciones $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = a$, $|\delta \bar{r}_1| = |\delta \bar{r}_2|$, $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2|$ impuestas por las conexiones, por el principio de D'Alembert tenemos

$$(m_1 \bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{T}_1 - m_1 \bar{a}_1) \cdot (\delta \bar{r}_1) + (m_2 \bar{g} + \bar{N}_2 + \bar{T}_2 - m_2 \bar{a}_2) \cdot \delta \bar{r}_2 = 0.$$

Efectuando los productos escalares y aplicando las condiciones de restricción, hallamos

$$|-m_1 g \sin \theta_1 + m_2 g \sin \theta_2 - (m_1 + m_2) a| |\delta r_1| = 0.$$

Pero $|\delta \bar{r}_1|$ es arbitrario, entonces para que esta igualdad se cumpla es necesario que

$$a = \frac{m_2 g \sin \theta_2 - m_1 g \sin \theta_1}{m_1 + m_2}$$

La aplicación elemental de fuerzas que no están en equilibrio lo confirman.

Este simple ejemplo sirve para demostrar cómo el principio de D'Alembert conduce a las ecuaciones diferenciales de movimiento, ya que la aceleración $\bar{a}$ para cada masa es $d^2 \bar{r}/dt^2$. Los ejemplos más complejos rápidamente se analizan de la misma manera. Más que llevar a cabo esto, veremos cómo Lagrange (1736-1813) sistematizó el estudio de la dinámica a fin de reducir la deducción de las ecuaciones de movimiento a un procedimiento formal.

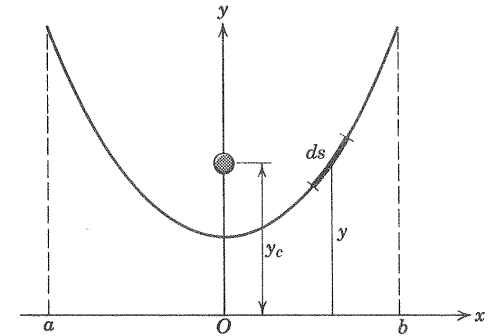


Fig. 1.4

1.4 Cálculo de variaciones. Al sostener una controversia fraternal Jacobo y Juan Bernoulli en 1690, propusieron el problema. "¿Cuál será la curva que formará una cadena o cuerda que cuelga suspendida libremente?" Correctamente razonaron que cualquiera que fuera la forma tomada por la cuerda, su centro de gravedad quedaría tan bajo como sea posible. Expresado en el lenguaje actual, esto significa que la curva $y = y(x)$, que forma la cuerda (Fig. 1.4), será tal que

$$y_c = \frac{1}{s} \int_a^b y \, ds$$

es tan pequeña como sea posible. En esta expresión s es la longitud del arco total de la cuerda; es decir, ya que $ds = [1 + (dy/dx)^2]^{1/2} dx$, exigimos que la curva $y = y(x)$ sea tal que la integral

$$y_c = \frac{1}{s} \int_a^b y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx.$$

sea un mínimo. Este es un problema de cálculo de variaciones. La solución, que no intentaremos presentar aquí, es la bien conocida catenaria. Los dos hermanos Bernoulli fueron los que dieron impulso al desarrollo del cálculo de variaciones.

1.5 Formulación lagrangiana. Lagrange, uno de los primeros matemáticos de todos los tiempos, en su *Mécanique Analytique* (1788), partió del principio del trabajo virtual y del principio de D'Alembert, y mediante el cálculo de variaciones, recientemente desarrollado en aquel entonces, dedujo las ecuaciones de movimiento tanto para sólidos como para líquidos. Su punto de vista fue completamente diferente del de sus predecesores. Más que seguir el movimiento de cada masa individual de un sistema, Lagrange introdujo coordenadas generalizadas en igual número de grados de libertad del sistema. Por ejemplo, en el péndulo doble que se ilustra en

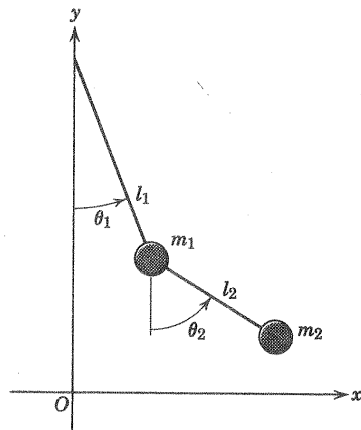


Fig. 1.5

la Fig. 1.5, θ_1 y θ_2 son suficientes para especificar las posiciones de las lentejas del péndulo en cualquier instante. Si se utilizaran las coordenadas x y y , se hubieran hecho necesarias cuatro cantidades. Aquí el sistema tiene 2 grados de libertad siempre que el movimiento se confíne a un plano.

Lagrange expresó las energías cinética y potencial del sistema en términos de las coordenadas generalizadas y de las velocidades q_k y $\dot{q}_k$ ($k = 1, 2 \dots m$) para m grados de libertad. Habiendo expresado la energía cinética T y la energía potencial V en términos de q_k y $\dot{q}_k$, Lagrange demostró que el principio de D'Alembert podría expresarse en una forma variacional integral:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0.$$

Introdujo la función $L(q_k, \dot{q}_k) = T - V$ que hoy se denomina función lagrangiana. Aquí la δ significa "tómese la variación de $\int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt$ "

Esto es, se eligen las coordenadas q_k y las velocidades correspondientes $\dot{q}_k$ como funciones del tiempo t de tal manera que la integral tiene un valor mínimo o máximo cuando se compara a una "trayectoria" que se varía

ligeramente en el tiempo entre t_0 y t_1 . Hacer $\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt = 0$ en el cálculo de variaciones es semejante a igualar a cero la primera derivada dy/dx en el cálculo elemental para hallar un máximo o mínimo de y . Hoy llamamos a esta forma modificada del principio de D'Alembert principio de Hamilton, en honor del matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865).

Lagrange demostró que $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$ si se satisfacen las m ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, 2 \dots m)$$

Ecuaciones similares fueron deducidas anteriormente por Euler (1707-1783) para resolver un problema variacional. Esas ecuaciones se conocen como ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange, o, por su contexto dinámico, simplemente ecuaciones de movimiento de Lagrange, que como veremos, son equivalentes a las ecuaciones de movimiento, se deducen de las tres leyes de movimiento de Newton.

El método de Lagrange es directo. Primeramente lo ilustraremos mediante un conocido problema y después analizaremos otro más complicado.

Tomaremos el caso simple de un proyectil de masa m disparado a un ángulo α con respecto a la horizontal y con una velocidad $\bar{v}_0$ (Fig. 1.6). En cualquier instante t , su posición estará dada por las coordenadas (x, y) ; en este caso, éstas desempeñan el papel de coordenadas generalizadas. Su energía cinética es $\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, donde $\dot{x}$ y $\dot{y}$ son las componentes de la velocidad. Con la relación al suelo, su energía potencial es mgy . Por lo tanto, la función lagrangiana es $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$. Tomando derivadas parciales, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

Las dos ecuaciones lagrangianas de movimiento, para los dos grados de libertad existentes, son

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

o bien, en este caso,

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{y} \quad m\ddot{y} + mg = 0$$

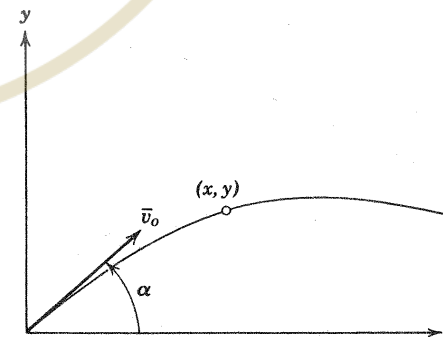


Fig. 1.6

Por supuesto, éstas son equivalentes a las ecuaciones de Newton de movimiento y producen los resultados conocidos para el movimiento de un proyectil en el vacío:

$$x = (v_0 \cos \alpha) t; \quad y = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Para poner de manifiesto la complejidad matemática que puede resultar de un problema físico relativamente simple, consideremos el péndulo doble que se muestra en la figura 1.5. El método de Lagrange es particularmente efectivo para tratar problemas de este tipo. Si θ_1 y θ_2 son las coordenadas generalizadas, podemos expresar las coordenadas (x, y) de cada lenteja en términos de θ_1 y θ_2 , después se calculan las velocidades $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$ y se escriben las energías cinética y potencial en función de estas cantidades. Después de efectuar los pasos algebraicos necesarios, hallamos

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2);$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2gl_2 \sin \theta_2$$

y las ecuaciones lagrangianas de movimiento llegan a ser para θ_1 :

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0;$$

para θ_2 :

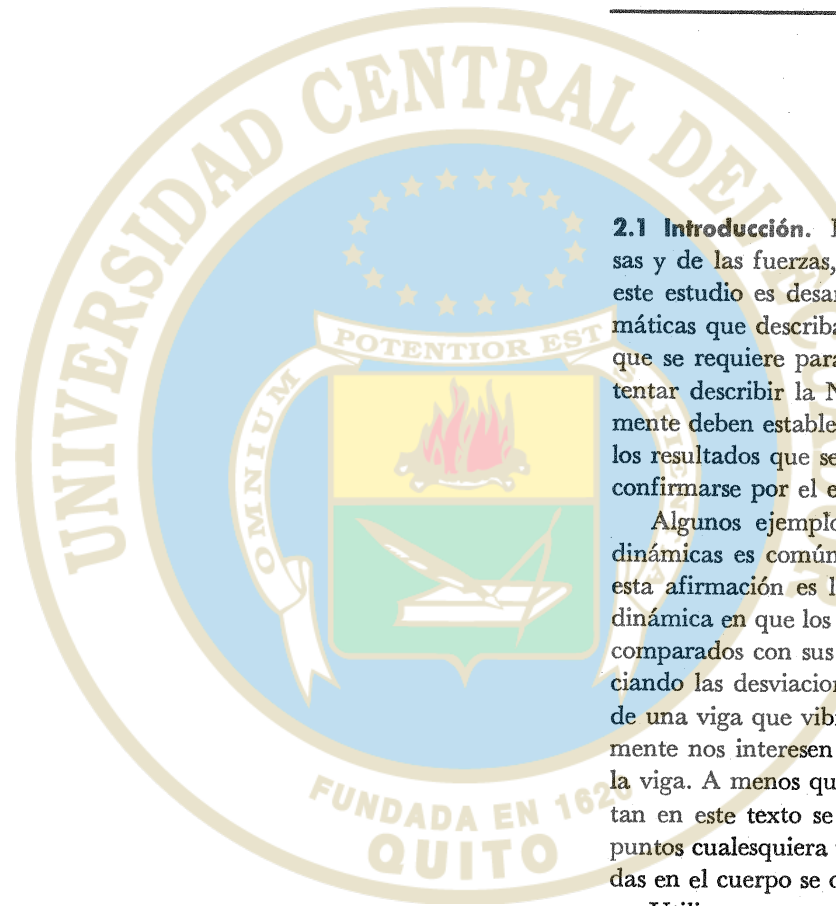
$$l_1\ddot{\theta}_2 + l_1\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin \theta_2 = 0.$$

Estas ecuaciones se pueden resolver simultáneamente para obtener las aceleraciones $\ddot{\theta}_1$ y $\ddot{\theta}_2$. Se recomienda al lector identificar los diversos términos contenidos en estas ecuaciones a fin de observar las fuerzas gravitacionales, las fuerzas centrífugas, las reacciones en las cuerdas y así sucesivamente, las cuales actúan sobre cada masa. El método de Lagrange convierte el análisis de un sistema complejo como éste en un proceso más o menos rutinario. Se gana una economía considerable en la atención.

Con lo anterior se ha intentado bosquejar brevemente cómo, partiendo del postulado básico expresado por el principio de Hamilton, una es-

tructura matemática formal conduce a las ecuaciones de movimiento que describen el fenómeno dinámico tanto como las ecuaciones que resultan de las leyes de Newton.

Durante la última mitad del siglo XIX no se enunciaron nuevos principios de dinámica. Los avances de Hamilton, Jacobi, Poincaré y otros en el terreno de las matemáticas se aplicaron a la teoría dinámica, produciendo resultados de mayor alcance. Por ejemplo, Hamilton consideró simultáneamente los momentos y las coordenadas como parámetros fundamentales para describir el movimiento; al hacer esto, obtuvo dos ecuaciones diferenciales de primer orden por cada grado de libertad en lugar de una ecuación de segundo orden tal como la de Lagrange o la de Newton. Esta idea condujo a las consideraciones del espacio fase en el que los ejes son las cantidades de movimiento y las coordenadas. Un punto en este espacio describe la posición y la cantidad de movimiento, esto es, el estado del sistema en cualquier instante. La mecánica cuántica y la mecánica del movimiento molecular en los gases hace uso constante de la noción de espacio fase. La tabla 1.1 presenta pequeños bosquejos de las contribuciones hechas en dinámica por los grandes científicos, desde el tiempo de Arquímedes hasta alrededor de 1950. La materia es vasta, y las matemáticas necesarias para su estudio aún están evolucionando. En el estado actual del mundo en que los Sputniks, Exploradores, aviones a chorro, cohetes y estaciones del espacio son temas comunes que se discuten y experimentan, obviamente la teoría dinámica juega un papel muy importante. No hay que dudar que veremos avances importantes en la tecnología, pero no se prevén nuevos principios básicos. ¿Quién sabe qué forma podrán tomar los principios mecánicos del futuro?



2.1 Introducción. La dinámica es el estudio de la interacción de las masas y de las fuerzas, y de los movimientos correspondientes. El objeto de este estudio es desarrollar la capacidad para formular expresiones matemáticas que describan estas interacciones, cuando menos con la exactitud que se requiere para un problema dado. Tal como se ha hecho para intentar describir la Naturaleza mediante modelos matemáticos, frecuentemente deben establecerse suposiciones que simplifiquen un problema, pero los resultados que se obtengan continuarán siendo útiles mientras puedan confirmarse por el experimento y con la precisión necesaria.

Algunos ejemplos ilustrarán este punto. En algunas investigaciones dinámicas es común suponer que las masas que intervienen son rígidas; esta afirmación es lo suficientemente exacta para muchos problemas de dinámica en que los movimientos de los cuerpos como un todo son grandes comparados con sus deformaciones, y se obtiene un resultado útil despreciando las desviaciones de la rigidez perfecta. Sin embargo, en el estudio de una viga que vibra no puede emplearse esta suposición cuando inicialmente nos interesen los desplazamientos de las partículas que conforman la viga. A menos que se especifique lo contrario, los objetos que se discutan en este texto se considerarán rígidos, es decir, la distancia entre dos puntos cualesquiera y el ángulo formado por dos rectas cualesquiera situadas en el cuerpo se considerarán constantes.

Utilizaremos en la formulación de algunos problemas el concepto de masa puntual o partícula como otra suposición que simplifica el problema. Aunque la masa de un objeto está distribuida en toda la región que ocupa, en algunas circunstancias se obtiene una exactitud satisfactoria si se considera que la masa está concentrada en un punto; esta aproximación es adecuada particularmente si la longitud de los parámetros importantes que describen la geometría del movimiento son grandes comparados con

las dimensiones del objeto, o bien si éste está sujeto a una traslación pura sin rotación; el balanceo de una rueda de automóvil es un ejemplo ligeramente alterado de esta idea. El radio de la rueda que describe el movimiento de la masa efectiva es grande en relación con el ancho de la llanta, justificándose la suposición común de que la rueda y la llanta son un disco de espesor despreciable. Normalmente el balanceo se lleva a cabo agregando pesos en el plano del disco, y ninguna distinción se hace si los pesos se sitúan en la periferia exterior o interior o bien en ambas.

La aplicación de nuestro conocimiento científico de dinámica a problemas reales de ingeniería, generalmente requiere que se efectúen aproximaciones a fin de obtener el análisis del problema en un tiempo razonable. Sin embargo, los principios fundamentales deben ser claramente establecidos, las magnitudes físicas que intervengan deben ser definidas con precisión y las aproximaciones deben tenerse presentes y calcularse en cada paso si se quiere obtener un resultado satisfactorio.

En dinámica aparecen dos tipos comunes de problemas: la determinación del movimiento de un cuerpo o cuerpos bajo la influencia de un conjunto dado de fuerzas, e inversamente, la determinación de las fuerzas necesarias que impartan movimientos que se desean a un objeto o grupo de objetos. El vuelo de un cohete es un ejemplo del primer tipo de problema, puesto que a menudo es necesario predecir la trayectoria del vehículo bajo la influencia de su fuerza de empuje, la resistencia atmosférica, los medios de control y la fuerza de gravedad. La segunda clase de problemas de dinámica se encuentra con más frecuencia en el análisis de mecanismos de maquinaria, esto es, las partes móviles de una cierta máquina. La configuración geométrica de un mecanismo determina los movimientos de sus elementos, mientras que las fuerzas que actúan sobre cada uno de ellos se deben hallar de tal manera que puedan proporcionarse adecuadamente para soportar las cargas necesarias.

En ambas situaciones es esencial un significado preciso del movimiento inherente. En consecuencia, las características del movimiento y su especificación, que es el estudio de la *cinemática*, se considerarán como antecedente para discutir los principios fundamentales de la dinámica.

Las ideas intuitivas de espacio y tiempo forman la base para el estudio de la cinemática. El tema, como se presenta en este texto, es una aproximación clásica o newtoniana; así, se utilizarán las nociones de que el espacio tiene tres dimensiones y el tiempo solamente una. En mecánica relativista no existe, en sentido absoluto, tal cosa como *tiempo*, pero en la mayoría de los problemas que se presentan en ingeniería se desprecia la diferencia entre los análisis hechos desde el punto de vista newtoniano y el relativista.

La especificación de una posición en el espacio exige tres números, que pueden ser coordenadas cartesianas comunes (x, y, z) , o bien, en una situación particular podría describirse más convenientemente con el uso de coordenadas cilíndricas, es decir, la longitud de un radio, la distancia a lo largo del eje cilíndrico y un ángulo; en coordenadas esféricas, dos ángulos y la longitud de un radio; o bien en algún sistema de coordenadas menos familiar, su propósito sería simplificar el análisis de un problema particular. Independientemente del sistema que se utilice, siempre se requerirán tres coordenadas para localizar un punto en el espacio.

Se supondrá que el tiempo es el mismo en todo nuestro espacio, es decir que dos observadores situados en dos puntos cualesquiera estarán de acuerdo de cuándo se ha producido un suceso. Estas nociones parecen obvias pero debe comprenderse que son suposiciones sobre las cuales los investigadores deberán ponerse de acuerdo, más bien que una verdad divina.

La localización de una posición o un punto en términos de tres coordenadas requiere un marco de referencia que incluye un origen y convenientes direcciones axiales de coordenadas. El investigador está obligado a buscar un sistema absoluto de coordenadas, esto es, un sistema con origen fijo y direcciones axiales fijas. Las posiciones y movimientos referidos a tal marco se denominan "absolutos". Si existe un marco de referencia absolutamente en reposo, un observador no puede ser capaz de distinguirlo de cualquier otro que estuviera moviéndose con respecto a él a velocidad uniforme y sin rotación. El observador puede determinar que existe movimiento relativo entre los dos, pero no puede percibir cuál está en reposo y cuál en movimiento; no obstante, es conveniente imaginar un marco de referencia absoluto y dejar su identificación a las preguntas que se hacen en el problema que se analiza. Para la mayoría de los propósitos de ingeniería es conveniente un sistema de coordenadas fijos en relación con la Tierra.

2.2 Definiciones. Consideremos la especificación de movimiento en un sistema absoluto de coordenadas. De los diversos sistemas que podrían utilizarse, la discusión se limitará a los sistemas de ejes que son mutua-

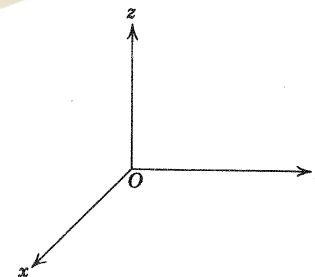


Fig. 2.1

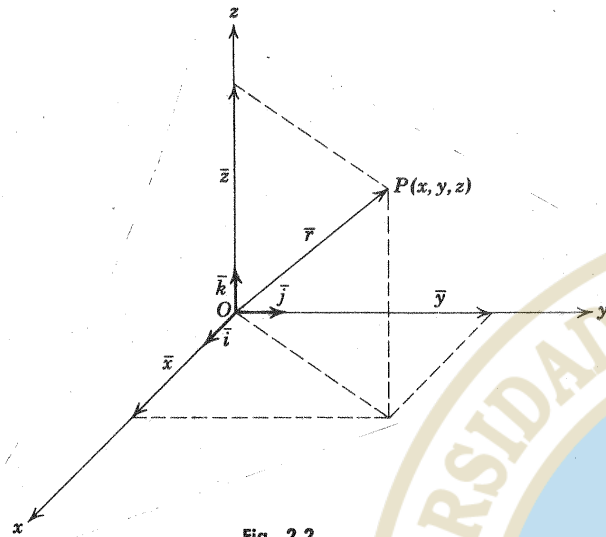


Fig. 2.2

mente ortogonales. Primeramente se considerarán coordenadas cartesianas que se forman mediante tres ejes mutuamente perpendiculares orientados como se ve en la figura 2.1.

El sistema que se ilustra recibe el nombre de sistema *dextrógiro* de ejes (x, y, z) .

Utilizando un sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen se elige arbitrariamente, se puede considerar la posición de un punto en el espacio.

El punto P , de la figura 2.2, se sitúa con relación al origen fijo mediante el vector $\vec{r}$ o sea $\overline{OP}$.

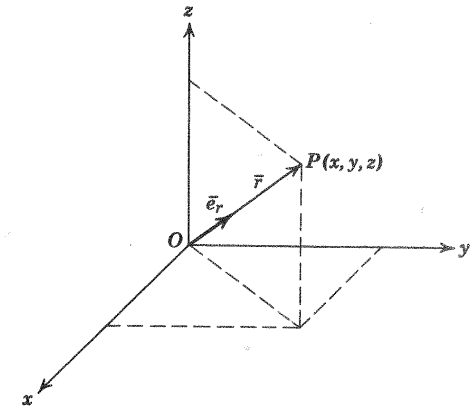
En este texto se representará un vector por una letra o un par de letras sobre las cuales se coloca una barra. La misma letra o letras sin la barra designarán la magnitud del vector que es un escalar. Por lo tanto, en el caso que estamos considerando el vector es $\vec{r}$ o bien $\overline{OP}$ y su longitud se representa por r o bien OP . Si se comprende la regla para la adición de vectores se verá que $\vec{r}$ se puede expresar como la suma de sus componentes vectoriales:

$$\vec{r} = \overline{OP} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}.$$

Es muy frecuente y de gran utilidad tratar por separado la magnitud y dirección de un vector, lo cual se logra cuando cada componente vectorial se escribe como el producto de su magnitud escalar y un vector unitario en la dirección de la componente. Debido a que $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ son vectores unitarios en las direcciones x , y y z , respectivamente, entonces

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Fig. 2.3



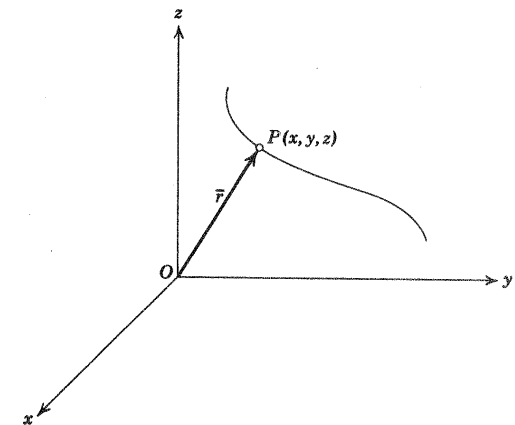
Nótese que los coeficientes de los vectores unitarios son las coordenadas del punto P . En vista de que estas coordenadas fijan la posición del punto en el espacio, el vector $\vec{r}$ se denomina *vector de posición*.

A menudo es conveniente definir un vector unitario a lo largo de *cualquier* dirección; este vector se representará por $\vec{e}$. También es conveniente asociar un índice apropiado al vector unitario a fin de identificar la cantidad. Por ejemplo, con relación a la figura 2.3:

$\vec{r} = r\vec{e}_r$. Aquí r es la longitud de $\vec{r}$, esto es, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, en tanto que $\vec{e}_r$ es un vector unitario que tiene la dirección y el sentido de $\vec{r}$ u $\overline{OP}$.

Supongamos ahora que el punto P fuera una cuenta ensartada en un alambre curvado y que se localiza en el espacio mediante el vector de posición $\vec{r}$, como se ilustra en la figura 2.4.

Fig. 2.4



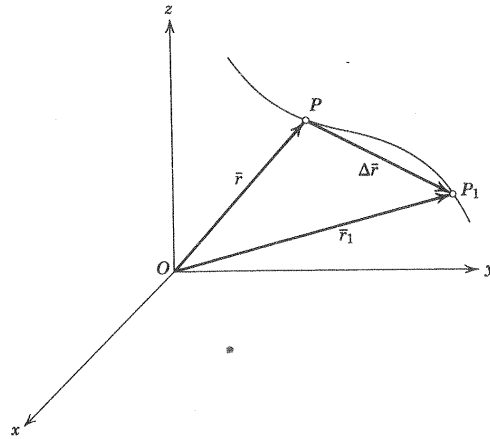


Fig. 2.5

Supongamos que la cuenta se mueve a lo largo del alambre y que su movimiento se expresa en términos de la variación del vector $\bar{r}$. Si la cuenta se mueve del punto P al punto P_1 , el vector $\Delta\bar{r}$ representa el cambio en la posición de la cuenta. Un cambio de posición se denominará *desplazamiento*. En forma de ecuación vectorial formal se deduce que el desplazamiento $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$. Nótese que el desplazamiento es una cantidad vectorial, y que posee magnitud, dirección y sentido. Ver figura 2.5.

La posición de la cuenta a lo largo del alambre se puede expresar ya sea como una función del tiempo o como una función de la longitud de la trayectoria que se describe desde algún punto inicial. Si $\Delta\bar{r}$ ocurre en un intervalo de tiempo Δt , entonces $\Delta\bar{r}/\Delta t$ representa la razón media de la variación de $\bar{r}$ por unidad de tiempo o sea

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Esta razón de variación del desplazamiento con respecto al tiempo se define como la velocidad $\bar{v}$:

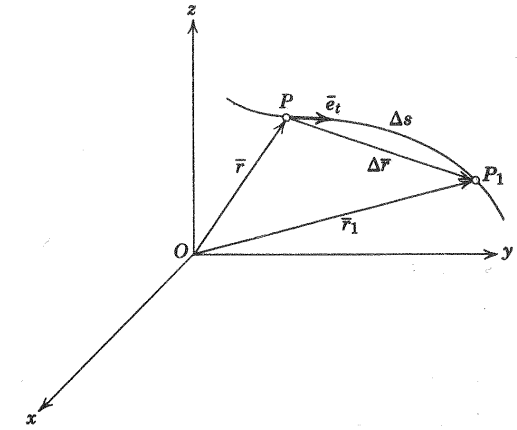
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \quad (2.1)$$

Las derivadas con respecto al tiempo se identificarán colocando un punto sobre la cantidad que se ha derivado; la segunda derivada con respecto al tiempo $d^2\bar{r}/dt^2$ se puede escribir $\ddot{\bar{r}}$.

Se puede determinar la dirección del vector velocidad examinando la figura 2.6.

La longitud del arco $\widehat{PP_1}$ se define como Δs , de manera que $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta\bar{r}/\Delta s = d\bar{r}/ds = (1)\bar{e}_t$, donde la cantidad $\bar{e}_t$ es un vector unitario tangente a la trayectoria en el punto P . De la ecuación 2.1 se sigue que

Fig. 2.6



$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\frac{d\bar{r}}{ds}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \bar{e}_t = s\bar{e}_t \quad (2.2)$$

El término s es la razón de variación con relación al tiempo de la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria y se puede definir como la rapidez v . La rapidez es la magnitud de la velocidad. Por lo tanto

$$\bar{v} = v\bar{e}_t \quad (2.3)$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria.

Para ilustrar la variación de la velocidad como una función del tiempo, consideremos el diagrama de la figura 2.7, donde se ven los vectores que representan la velocidad de la cuenta en los puntos P y P_1 .

Se ha construido el polígono de vectores de la Fig. 2.7b para ilustrar la variación de la velocidad que se denota por $\Delta\bar{v}$. Si el cambio de la velocidad $\Delta\bar{v}$ ocurre en el intervalo de tiempo Δt , entonces $\Delta\bar{v}/\Delta t$ es la razón media de la variación de $\bar{v}$ por unidad de tiempo. Entonces

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

La razón de variación de la velocidad con respecto al tiempo se define como la aceleración $\bar{a}$.

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} \quad (2.4)$$

En términos del vector de posición $\bar{r}$, la aceleración es

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} \quad (2.5)$$

La dirección de la aceleración referida a sistemas convenientes de coordenadas se estudiará en las últimas secciones.

En este punto debemos aclarar cierta ambigüedad en la notación. Los símbolos $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$, etc., representan vectores, mientras que r , $\dot{r}$, $\ddot{r}$ representan escalares. Sin embargo, aun cuando r es la magnitud de $\vec{r}$, $\dot{r}$ representa la razón de variación de r pero no necesariamente la magnitud de $\dot{\vec{r}}$. Por ejemplo, en la figura 2.8 se ve un miembro ranurado que va a girar alrededor del punto O , haciendo que el bloque deslice hacia afuera por la ranura a lo largo del miembro. Se fija la posición de un punto P del bloque mediante su vector de posición.

$$\vec{r} = r\vec{e}_r.$$

Al derivar con respecto al tiempo el vector de posición $\vec{r}$ se halla que la velocidad de P respecto a O es la suma de dos componentes; $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$. La magnitud de $\dot{\vec{r}}$ que podría escribirse $|\dot{\vec{r}}|$, es diferente de $\dot{r}$, la que solamente es la magnitud de una de las componentes; sin embargo, si el vector se escribe como $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ entonces $|\dot{\vec{r}}|$ se puede escribir correctamente como v , que es la magnitud del vector velocidad. Esta magnitud escalar generalmente se conoce con el nombre de "rapidez" para distinguirla del vector "velocidad", y es la razón con respecto al tiempo en que el punto recorre su trayectoria. El velocímetro de un automóvil en realidad es un medidor de rapidez puesto que sólo indica magnitud pero no dirección ni sentido.

La tercera derivada del desplazamiento con respecto al tiempo $d^3\vec{r}/dt^3$ o bien $\ddot{\vec{r}}$ ha adquirido importancia en ingeniería desde que la rapidez de operación de las máquinas ha ido creciendo, también en algunos mecanis-

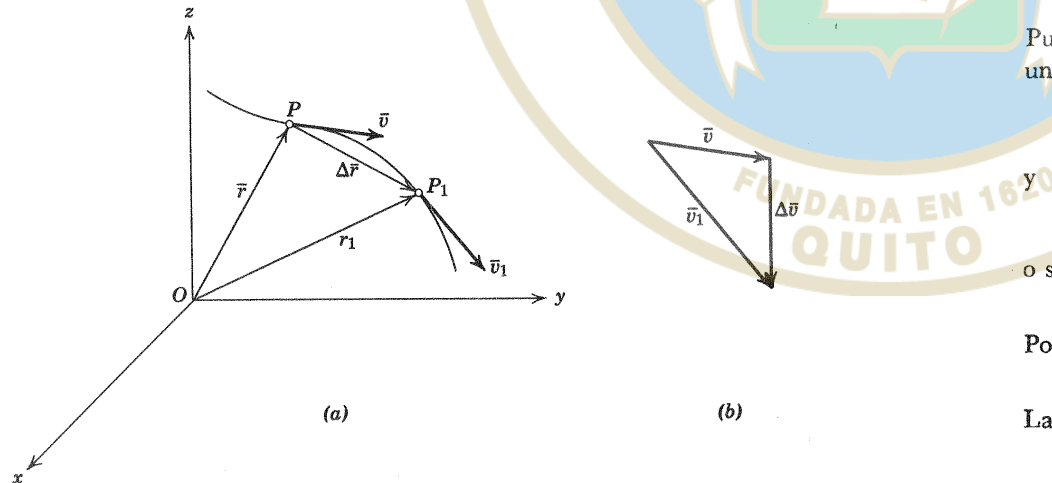
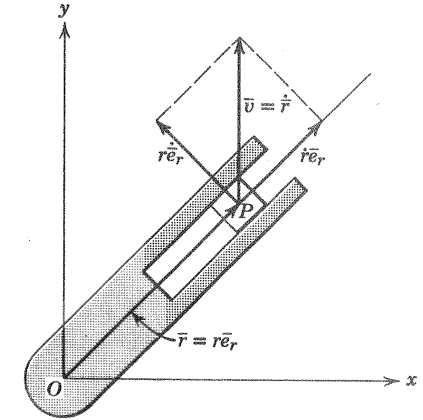


Fig. 2.7

Fig. 2.8



mos tales como el que se utiliza para operar las válvulas de admisión y escape de las máquinas automotrices; esta tercera derivada se debe tener en cuenta y mantenerse a ciertos valores razonables. Debido a que $\ddot{\vec{r}}$ representa la razón de cambio de la aceleración, representará la razón de variación de la fuerza resultante responsable de la aceleración. Un valor grande de esta derivada significa una carga súbita en la máquina. Se le han dado varios nombres, tales como: segunda aceleración, pulso y jerk.

Consideremos ahora las derivadas con respecto al tiempo del vector de posición $\vec{r}$ escritas con relación a un sistema fijo de coordenadas cartesianas. El vector es $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, entonces la velocidad es

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Puesto que $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ se definen como vectores de magnitud constante (la unidad) y con dirección y sentido fijos,

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0,$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

o sea

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, la rapidez de la cuenta es

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (2.7)$$

La aceleración es

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

o sea

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \quad (2.8)$$

y su magnitud

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (2.9)$$

Las derivadas sucesivas se pueden escribir de una manera similar.

Para ilustrar el uso de estas expresiones, consideremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1. Una cuenta se mueve alrededor de un alambre doblado en forma de circunferencia de radio b , el alambre está en el plano xy . El ángulo formado por el vector de posición y el eje x es θ . Determinar la velocidad de la cuenta cuando $t = 2$ seg suponiendo que $\theta = Ct$ radianes donde $C = \pi/4$ rad/seg; $b = 15$ cm.

Con relación a la figura 2.9, el vector de posición es

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

donde

$$x = b \cos \theta, \quad y = b \sin \theta, \quad y \quad z = 0.$$

Sustituyendo,

$$\vec{r} = b(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}).$$

La velocidad es

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = b(-\sin \theta \dot{\theta} \vec{i} + \cos \theta \dot{\theta} \vec{j}).$$

Puesto que

$$\theta = \frac{\pi}{4}t \text{ rad, entonces } \dot{\theta} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/seg.}$$

Cuando $t = 2$ seg,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad y } \dot{\theta} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/seg.}$$

La velocidad es

$$\vec{v} = 15 \left[-\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} \right) \vec{i} + \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} \right) \vec{j} \right] \text{ cm/seg}$$

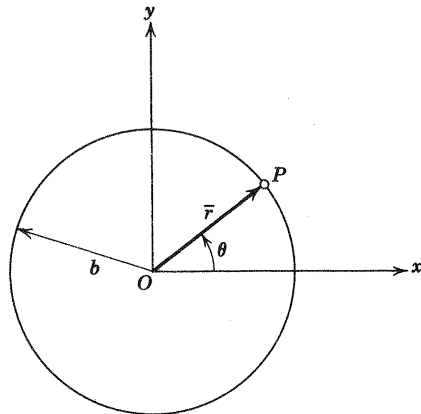


Fig. 2.9

o sea

$$\vec{v} = -\frac{15\pi}{4} \vec{i} \text{ cm/seg.}$$

Podemos comprobar la dirección y el sentido de la velocidad; ya que el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria, entonces, cuando $\theta = \pi/2$ rad, deberá estar en la dirección negativa de x .

La rapidez es

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \frac{15\pi}{4} \text{ cm/seg.}$$

Ejemplo 2.2. Determinar la aceleración de la cuenta del ejemplo 2.1 cuando $t = 2$ seg si $\theta = Ct^2$ rad. Supóngase que $C = \pi/8$ rad/seg/seg y $b = 15$ cm. La aceleración se puede obtener derivando la ecuación (b) del ejemplo anterior. Entonces

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = b[(-\cos \theta \ddot{\theta} - \sin \theta \dot{\theta}^2) \vec{i} + (-\sin \theta \ddot{\theta} + \cos \theta \dot{\theta}^2) \vec{j}]. \quad (a)$$

Puesto que

$$\theta = \frac{\pi}{8}t^2, \quad \text{entonces } \dot{\theta} = \frac{\pi}{4}t \quad y \quad \ddot{\theta} = \frac{\pi}{4}.$$

Cuando $t = 2$ seg,

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad, } \dot{\theta} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/seg, y } \ddot{\theta} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/seg/seg.}$$

La aceleración es

$$\vec{a} = 15 \left\{ \left[-\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 - \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right] \vec{i} + \left[-\sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 + \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right] \vec{j} \right\},$$

$$\vec{a} = -\frac{15\pi^2}{4} \vec{i} - \frac{15\pi^2}{4} \vec{j} \text{ cm/seg}^2$$

o sea

$$\vec{a} = -\frac{15\pi^2}{4} (\vec{i} + \vec{j}) \text{ cm/seg}^2. \quad (b)$$

La magnitud de la aceleración es

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \frac{15\pi}{4} \sqrt{1 + \pi^2} \text{ cm/seg}^2. \quad (c)$$

Ejemplo 2.3. Una cuenta se mueve a lo largo de un alambre doblado en la forma de caracol dado por la ecuación $r = a \cos \theta + b$. El alambre está en el plano xy . Determinar la velocidad y aceleración de la cuenta cuando $t = 1$ seg si $\theta = Ct^2 + Dt^4$ rad. Sea $a = 10$ cm, $b = 15$ cm, $C = 4\pi/5$ rad/seg² y $D = -3\pi/10$ rad/seg⁴ (Fig. 2.10).

Como en los ejemplos anteriores, el movimiento está restringido a un plano. En consecuencia el vector de posición es

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

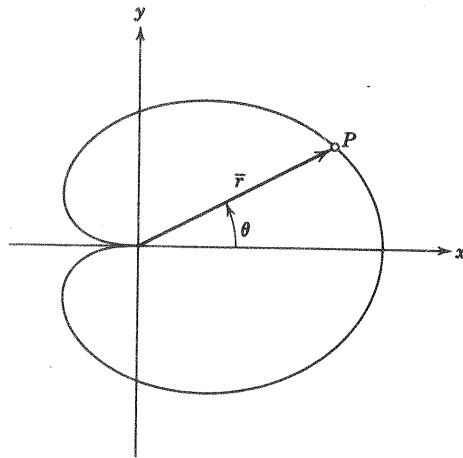


Fig. 2.10

donde

$$x = (a \cos \theta + b) \cos \theta, \quad y = (a \cos \theta + b) \sin \theta.$$

Sustituyendo,

$$\vec{r} = (a \cos \theta + b) (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}). \quad (a)$$

Las derivadas sucesivas de $\vec{r}$, con respecto al tiempo, dan las expresiones para la velocidad y la aceleración. La velocidad es

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (-a \sin \theta \dot{\theta}) [\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}] + (a \cos \theta + b) [-\sin \theta \dot{\theta} \vec{i} + \cos \theta \dot{\theta} \vec{j}],$$

$$\vec{v} = [-2a \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} - b \sin \theta \dot{\theta}] \vec{i} + [a(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \dot{\theta} + b \cos \theta \dot{\theta}] \vec{j},$$

o sea

$$\vec{v} = -\dot{\theta} \{ [a \sin 2\theta + b \sin \theta] \vec{i} - [a \cos 2\theta + b \cos \theta] \vec{j} \}. \quad (b)$$

La aceleración es

$$\vec{a} = -\ddot{\theta} \{ [a \sin 2\theta + b \sin \theta] \vec{i} - [a \cos 2\theta + b \cos \theta] \vec{j} \} - \dot{\theta}^2 \{ [2a \cos 2\theta + b \cos \theta] \vec{i} + [2a \sin 2\theta + b \sin \theta] \vec{j} \}. \quad (c)$$

En vista de que

$$\theta = \frac{4\pi}{5} t^2 - \frac{3\pi}{10} t^4, \quad (d)$$

$$\dot{\theta} = \frac{8\pi}{5} t - \frac{6\pi}{5} t^3 \quad (e)$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{8\pi}{5} - \frac{18\pi}{5} t^2. \quad (f)$$

Cuando $t = 1$ seg

$$\theta = \frac{4\pi}{5} - \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \quad (g)$$

$$\dot{\theta} = \frac{8\pi}{5} - \frac{6\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad/seg}, \quad (h)$$

y

$$\ddot{\theta} = \frac{8\pi}{5} - \frac{18\pi}{5} = -2\pi \text{ rad/seg}^2. \quad (i)$$

Sustituyendo estas cantidades en la ecuación b, la velocidad resulta ser

$$\vec{v} = -\left(\frac{2\pi}{5}\right) \left\{ \left[10 \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 15 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \vec{i} - \left[10 \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 15 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \vec{j} \right\}$$

$$\vec{v} = -\frac{2\pi}{5} [15\vec{i} + 10\vec{j}],$$

o sea

$$\vec{v} = -2\pi [3\vec{i} + 2\vec{j}] \text{ cm/seg}. \quad (j)$$

$$\text{La rapidez es } v = 2\pi \sqrt{9 + 4} = 2\pi \sqrt{13} \text{ cm/seg} \quad (k)$$

Para la aceleración

$$\vec{a} = -(-2\pi) \left\{ \left[10 \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 15 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \vec{i} \right.$$

$$\left. - \left[10 \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 15 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \vec{j} \right\}$$

$$- \left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 \left\{ \left[(2)(10) \cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 15 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \vec{i} \right.$$

$$\left. + \left[(2)(10) \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 15 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \vec{j} \right\}$$

$$\vec{a} = 2\pi [15\vec{i} + 10\vec{j}] - \left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 [-20\vec{i} + 15\vec{j}],$$

6

$$\vec{a} = 20\pi \left\{ \left[\frac{3}{2} + \frac{4\pi}{25} \right] \vec{i} + \left[1 - \frac{3}{25} \right] \vec{j} \right\} \text{ cm/seg}^2. \quad (l)$$

Los primeros ejemplos han sido problemas en el plano. Estudiaremos ahora el siguiente problema tridimensional.

Ejemplo 2.4. Un punto se mueve con rapidez constante a lo largo de una trayectoria helicoidal. Determinar la rapidez y la magnitud de la aceleración del punto móvil.

En coordenadas cartesianas la posición del punto queda determinada por

$$\begin{aligned} x &= a \cos bt, \\ y &= a \sin bt, \\ z &= ct. \end{aligned} \quad (a)$$

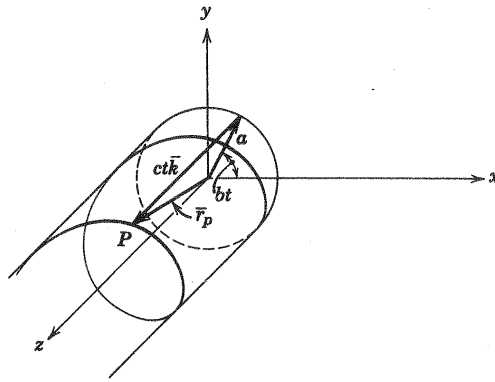


Fig. 2.11

Entonces

$$\vec{r}_p = a \cos bt \vec{i} + a \sin bt \vec{j} + ct \vec{k}.$$

Tomando derivadas sucesivas,

$$\vec{v}_p = \dot{\vec{r}} = -ab \sin bt \vec{i} + ab \cos bt \vec{j} + c \vec{k},$$

$$\vec{a}_p = \ddot{\vec{r}} = -ab^2 \cos bt \vec{i} - ab^2 \sin bt \vec{j}.$$

La rapidez del punto a lo largo de la curva está dada por la ecuación 2.7

$$v_p = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 bt + a^2 b^2 \cos^2 bt + c^2},$$

$$v_p = \sqrt{a^2 b^2 + c^2}.$$

La magnitud de la aceleración del punto se puede determinar mediante la ecuación 2.9.

$$a_p = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{a^2 b^4 \cos^2 bt + a^2 b^4 \sin^2 bt},$$

$$a_p = ab^2.$$

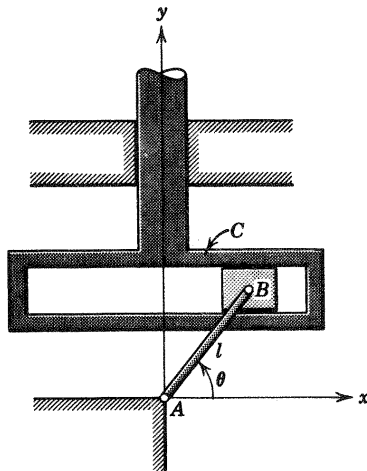


Fig. 2.12

La posibilidad de escribir y calcular las derivadas sucesivas con respecto al tiempo de los vectores de posición, permite la determinación de las velocidades y aceleraciones no solamente de puntos y partículas, sino también de los elementos de un mecanismo. (Se define un mecanismo como el conjunto de cuerpos rígidos interconectados cuyo fin es transmitir o modificar el movimiento.) Los siguientes ejemplos ilustrarán sobre el particular.

Ejemplo 2.5. La barra AB gira alrededor de un pasador en A y está unida a un bloque que se desliza en una ranura del miembro C, este miembro está en posibilidad de moverse en una guía. (Este mecanismo algunas veces se denomina "yugo escocés".) Determinar la aceleración de C cuando $\theta = 60^\circ$. Supóngase $l = 30$ cm y $\theta = ct$ donde $c = \pi/6$ rad/seg.

Al estudiar el mecanismo de la Fig. 2.12, se puede ver que el desplazamiento del miembro ranurado es igual a la componente del desplazamiento vertical del punto B de la varilla AB. Por lo tanto, las aceleraciones correspondientes también deben ser iguales y, en consecuencia, si se puede determinar la aceleración de B, la aceleración del bloque C que se pide queda determinada. El punto B es el extremo de una varilla que está girando; por lo tanto, B describe una trayectoria de radio constante. Elijiendo el sistema de ejes coordenados que se muestra, se puede efectuar el análisis del movimiento de B como en el ejemplo 2.1.

De la figura 2.12,

$$\vec{r}_B = l(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}). \quad (a)$$

Entonces

$$\dot{\vec{r}}_B = l(-\sin \theta \dot{\theta} \vec{i} + \cos \theta \dot{\theta} \vec{j})$$

o sea

$$\dot{\vec{r}}_B = l\dot{\theta}(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}). \quad (b)$$

La aceleración es

$$\ddot{\vec{r}}_B = l\ddot{\theta}(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) + l\dot{\theta}(-\cos \theta \dot{\theta} \vec{i} - \sin \theta \dot{\theta} \vec{j})$$

o sea

$$\ddot{\vec{r}}_B = l\ddot{\theta}(-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) - l\dot{\theta}^2(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}). \quad (c)$$

La aceleración pedida se puede representar por $\ddot{\vec{r}}_C$. Puesto que $\ddot{\vec{r}}_C = \ddot{y}_B \vec{j}$, entonces

$$\ddot{\vec{r}}_C = [+l\ddot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta] \vec{j}. \quad (d)$$

Para este sistema, $\theta = (\pi/6)t$, de manera que $\dot{\theta} = \pi/6$ y $\ddot{\theta} = 0$. El hecho de que $\ddot{\theta} = 0$ sugiere que la barra AB gira a una razón constante de $\pi/6$ rad/seg.

Sustituyendo,

$$\ddot{\vec{r}}_C = \left[-(30) \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] \vec{j},$$

$$\ddot{\vec{r}}_C = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{2.4} \vec{j} \text{ cm/seg}^2. \quad (e)$$

Ejemplo 2.6. Una varilla está unida en sus extremos a dos bloques deslizantes que están obligados a moverse como se muestra en la figura 2.13. La caída de

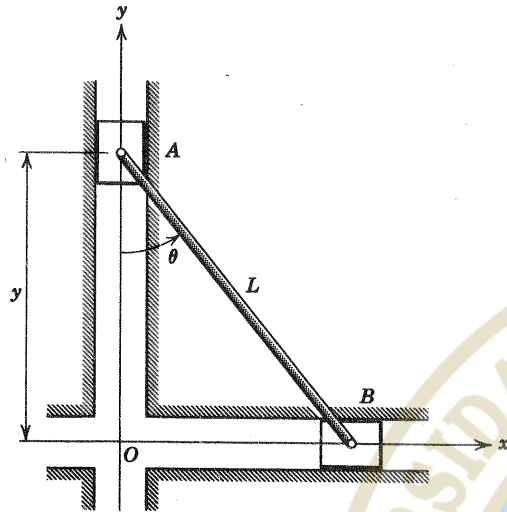


Fig. 2.13

la varilla es tal que el ángulo θ crece positivamente a una razón constante de 4 rad/seg. Cuando $\theta = 30^\circ$, se sabe que la velocidad del bloque A es de 2 m/seg hacia abajo. Determinar la velocidad y aceleración del bloque B en este instante. Supóngase $L = 1$ m.

Los bloques deslizantes A y B tienen el mismo movimiento que los extremos de la varilla. Por lo tanto, en este problema interviene la relación entre dos puntos de un miembro común. Antes de escribir los vectores de posición, se debe elegir y colocar un sistema de coordenadas. El sistema que se muestra está orientado de manera que los movimientos de los puntos A y B ocurran a lo largo de los ejes coordenados, así mismo el origen está situado convenientemente.

Debido a que se pide el movimiento de B, escribiremos $\vec{r}_B$. Es conveniente hacer notar que al escribir los vectores de posición se debe utilizar tanta información dada y conocida como sea posible. En este caso, $\vec{r}_B$ es más sencillo escribirlo en la forma

$$\vec{r}_B = y \tan \theta \vec{i}. \quad (a)$$

Entonces

$$\dot{\vec{r}}_B = [\dot{y} \tan \theta + y \sec^2 \theta \dot{\theta}] \vec{i} \quad (b)$$

Nótese que y y $\dot{y}$, θ y $\dot{\theta}$ todas son cantidades conocidas. La aceleración es

$$\ddot{\vec{r}}_B = [\ddot{y} \tan \theta + \dot{y} \sec^2 \theta \dot{\theta} + \dot{y} \sec^2 \theta \dot{\theta} + 2y \sec^2 \theta \tan \theta \dot{\theta}^2 + y \sec^2 \theta \ddot{\theta}] \vec{i}$$

o sea

$$\ddot{\vec{r}}_B = [\ddot{y} \tan \theta + 2\dot{y}\dot{\theta} \sec^2 \theta + 2y\dot{\theta}^2 \sec^2 \theta \tan \theta + y\ddot{\theta} \sec^2 \theta] \vec{i}. \quad (c)$$

En la ecuación c solamente se desconoce $\ddot{y}$. Escribiendo un vector de posición del punto A, es posible relacionar $\ddot{y}$ con las derivadas de θ respecto al tiempo que son conocidas. De la figura 2.13,

$$\vec{r}_A = L \cos \theta \vec{j}. \quad (d)$$

Entonces

$$\dot{\vec{r}}_A = -L \sin \theta \dot{\theta} \vec{j} \quad (e)$$

y

$$\ddot{\vec{r}}_A = -L(\cos \theta \ddot{\theta} + \sin \theta \dot{\theta}^2) \vec{j}. \quad (f)$$

Admitiendo que $\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{y}} \vec{j}$, entonces

$$\ddot{y} = -L(\cos \theta \ddot{\theta} + \sin \theta \dot{\theta}^2). \quad (g)$$

Todas las cantidades contenidas en la expresión para $\ddot{\vec{r}}_B$ ahora son conocidas o pueden calcularse. En el instante en que se estudia el sistema $\theta = 30^\circ$, $\dot{\theta} = +4$ rad/seg, $\ddot{\theta} = 0$ y $\dot{y} = -2$ m/seg. Consecuentemente, de la ecuación b se obtiene la velocidad

$$\dot{\vec{r}}_B = \left[(-2) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + (1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (4)^2 \right] \vec{i}$$

$$\dot{\vec{r}}_B = \left[-\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \right] \vec{i}$$

o sea

$$\dot{\vec{r}}_B = 2\sqrt{3} \vec{i} \text{ m/seg.} \quad (h)$$

De la ecuación g

$$\ddot{y} = -1 \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (4)^2 + 0 \right] = -8\sqrt{3}$$

Sustituyendo en la ecuación c, se obtiene la aceleración

$$\ddot{\vec{r}}_B = \left[(-8\sqrt{3}) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + (2) (-2) (4) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + (2) (1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (4)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \vec{i},$$

$$\ddot{\vec{r}}_B = \left[(-8) - \left(\frac{64}{3} \right) + \left(\frac{64}{3} \right) \right] \vec{i},$$

$$\ddot{\vec{r}}_B = -8 \vec{i} \text{ m/seg}^2. \quad (i)$$

3.2. Movimiento de un cuerpo rígido. En los ejemplos anteriores intervino solamente la descripción del movimiento de un punto en el espa-

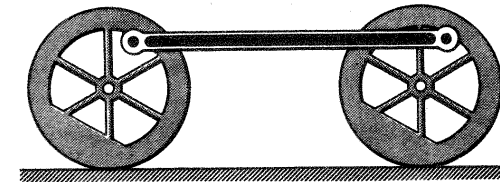


Fig. 2.14

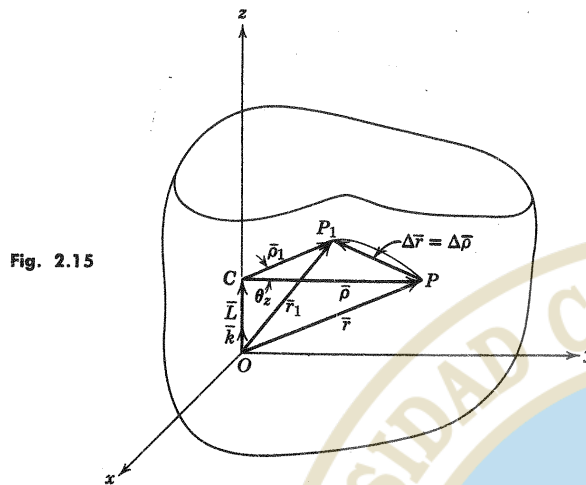


Fig. 2.15

cio o de un punto perteneciente a un cuerpo rígido. Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo rígido en un sistema fijo de coordenadas X_0, Y_0, Z_0 . Se fija, al cuerpo móvil, un segundo sistema de coordenadas x, y, z . Si permanecen constantes los ángulos formados por las parejas de ejes correspondientes, es decir, X_0 y x , Y_0 y y , Z_0 y z , se dice que el movimiento es una "traslación". Todos los puntos del cuerpo describen trayectorias paralelas con relación al sistema fijo y tienen la misma velocidad en cualquier instante. Si estas trayectorias son líneas rectas, como sucede en el movimiento del émbolo en el cilindro del motor de un automóvil, se dice que el movimiento es una traslación "rectilínea"; si las líneas son curvas, la traslación es "curvilínea". La ilustración de la figura 2.14 representa la barra lateral de una locomotora. Este eslabón describe una traslación curvilínea con relación al sistema de la locomotora y con relación a la Tierra cuando la vía es recta y plana.

Si el cuerpo de que se trata en un principio, se mueve de tal manera que varía cualquiera de los ángulos formados por los ejes de un sistema fijo y los ejes unidos al cuerpo, entonces el movimiento del cuerpo incluye alguna rotación. Si un punto está fijo en el cuerpo, siempre se podrá hallar una recta que pase por ese punto a lo largo de la cual, al menos en un instante dado, todos los puntos están en reposo. Para ese instante, esta recta es el *eje de rotación* y se dice que el movimiento es una rotación pura ya que, todos los puntos del cuerpo describen trayectorias circulares alrededor del eje.

Demos ahora un vistazo al fenómeno llamado rotación. La figura 2.15 muestra un cuerpo rígido con un punto fijo O . Supongamos que el cuerpo

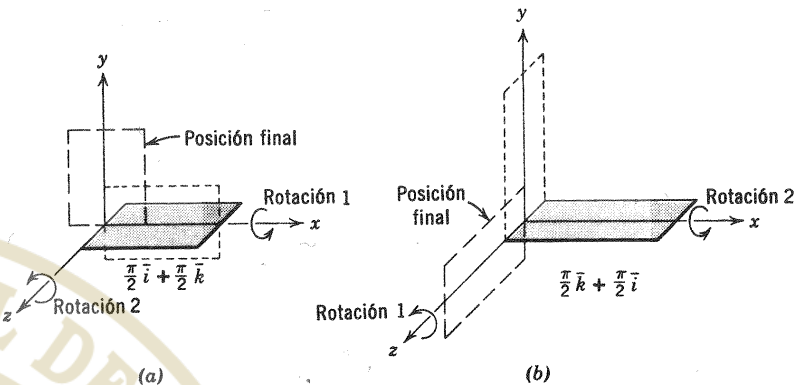


Fig. 2.16

gira en un ángulo θ_z alrededor del eje z . El ángulo θ_z se puede medir en cualquier plano normal al eje z . Un punto P , localizado por su vector de posición $\vec{r}$ se mueve a una nueva posición P_1 .

Ahora

$$\vec{r} = \vec{L} + \vec{\rho},$$

donde $\vec{L}$ está a lo largo del eje z y $\vec{\rho}$ está en el plano de rotación, esto es, perpendicular al eje. Debido a que el cuerpo es rígido, el punto P ha descrito un arco circular de radio ρ alrededor del punto C sobre el eje z . Puesto que L es constante,

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\rho}.$$

Para describir la rotación, definiremos un vector unitario a lo largo del eje de rotación de acuerdo con la siguiente regla de la mano derecha: si se curvan los dedos de la mano derecha alrededor del eje y en el sentido de la rotación del cuerpo, el pulgar señalará la dirección y sentido del vector unitario. En este caso el vector unitario es el vector $\vec{k}$.

Se puede describir el desplazamiento angular utilizando las propiedades convencionales asociadas con un vector, que son: la dirección, en la forma de un eje de rotación (o sea una normal a los planos de rotación), el sentido (en el mismo sentido o contrario al de las manecillas del reloj, esto es, levógiro o dextrógiro) y la magnitud θ_z ; este desplazamiento angular finito descrito por el segmento orientado $\theta_z \vec{k}$, no obedece las reglas de la adición vectorial; en este caso, no es conmutativo. Si se suman dos rotaciones finitas, el efecto resultante sobre la posición de un cuerpo rígido no es independiente del orden en que se lleve a cabo la suma.

Las figuras 2.16a y 2.16b ilustran sobre este punto. En la figura 2.16a, al objeto que está en el plano zx se da una rotación de 90° , primero al-

rededor del eje x , después alrededor del eje z . En la figura 2.16b, el orden es primero alrededor del eje z , después alrededor del eje x . Debido a que los puntos del cuerpo quedan en posiciones totalmente diferentes, la adición de rotaciones grandes evidentemente es más compleja que la simple adición vectorial. Aquí,

$$\frac{\pi}{2} \bar{i} + \frac{\pi}{2} \bar{k} \neq \frac{\pi}{2} \bar{k} + \frac{\pi}{2} \bar{i}.$$

Sin embargo, hallamos que si las rotaciones se restringen a cantidades infinitesimales entonces el efecto sobre la posición resultante de un cuerpo rígido no queda afectado por el orden en que se efectúen las rotaciones. Primeramente consideremos el efecto de una rotación infinitesimal $\Delta\theta_z \bar{k}$ sobre la posición de un punto P localizado sobre un cuerpo rígido por el vector de posición $\bar{r}$ que se ve en la figura 2.17. Después de una rotación infinitesimal $\Delta\theta_z \bar{k}$ alrededor del eje z , el punto P se mueve a la nueva posición P_1 . El radio del arco descrito por P es

$$\rho = |\bar{r}| \sin \phi.$$

La longitud del arco Δs_1 descrito durante esta rotación infinitesimal es

$$\Delta s_1 = \rho \Delta\theta_z.$$

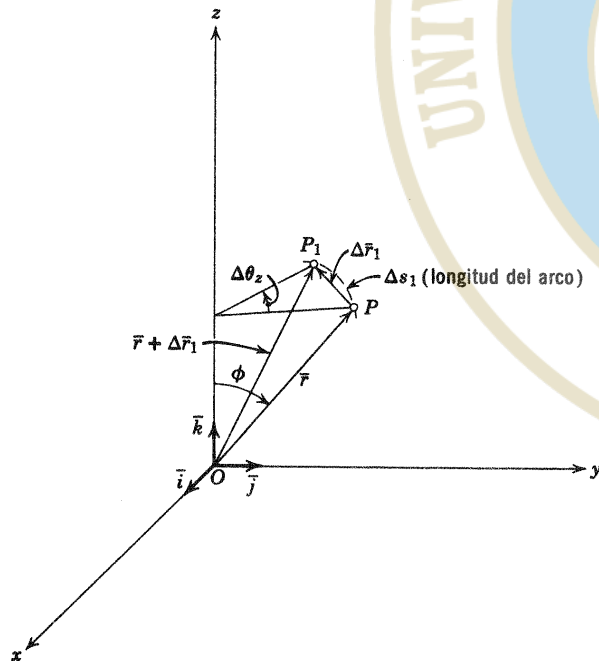


Fig. 2.17

Además,

$$\lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{r}_1|}{\Delta s_1} = 1.$$

Así que

$$|\Delta \bar{r}_1| \approx |\bar{r}| \sin \phi \Delta\theta_z.$$

Ahora

$$|\bar{r}| \sin \phi = |\bar{k} \times \bar{r}|$$

y se ve de la figura 2.17 que el vector $\Delta \bar{r}$ es normal al plano que contiene al vector unitario $\bar{k}$ y al vector de posición $\bar{r}$. Además, la dirección y sentido de $\Delta \bar{r}$ son los mismos que los correspondientes al vector que se obtiene formalmente de la operación vectorial $\bar{k} \times \bar{r}$. Se deduce que

$$\Delta \bar{r}_1 \approx \Delta\theta_z \bar{k} \times \bar{r}.$$

Si aplicamos ahora una rotación adicional $\Delta\theta_x \bar{i}$ (rotación infinitesimal alrededor del eje x), admitiendo que el nuevo vector de posición es $\bar{r} + \Delta \bar{r}_1$, se sigue que el desplazamiento infinitesimal resultante $\Delta \bar{r}_2$ es

$$\Delta \bar{r}_2 \approx \Delta\theta_x \bar{i} \times (\bar{r} + \Delta \bar{r}_1).$$

Una tercera rotación $\Delta\theta_y \bar{j}$ producirá un desplazamiento infinitesimal $\Delta \bar{r}_3$ que será

$$\Delta \bar{r}_3 \approx \Delta\theta_y \bar{j} \times (\bar{r} + \Delta \bar{r}_1 + \Delta \bar{r}_2).$$

Si $\Delta \bar{r}$ representa el desplazamiento infinitesimal total debido a las tres rotaciones, entonces

$$\Delta \bar{r} \approx \Delta \bar{r}_1 + \Delta \bar{r}_2 + \Delta \bar{r}_3 = \Delta\theta_z \bar{k} \times \bar{r} + \Delta\theta_x \bar{i} \times (\bar{r} + \Delta \bar{r}_1) + \Delta\theta_y \bar{j} \times (\bar{r} + \Delta \bar{r}_1 + \Delta \bar{r}_2).$$

Despreciando los términos de orden superior se tiene

$$\Delta \bar{r} \approx (\Delta\theta_x \bar{i} + \Delta\theta_y \bar{j} + \Delta\theta_z \bar{k}) \times \bar{r}$$

Es de hacerse notar que $\bar{r}$ es independiente del orden en que se lleven a cabo las rotaciones siempre y cuando se desprecien los términos de orden superior.

Si las tres rotaciones se producen simultáneamente en el tiempo Δt ,

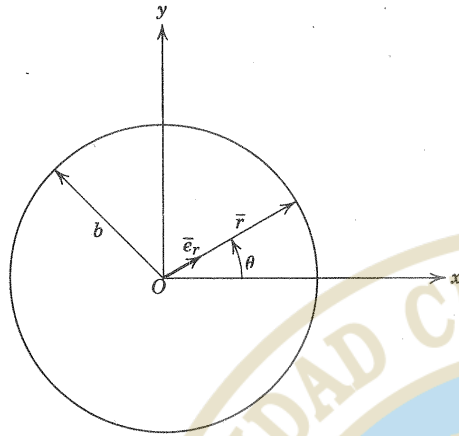
$$\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \approx \left[\frac{\Delta\theta_x}{\Delta t} \bar{i} + \frac{\Delta\theta_y}{\Delta t} \bar{j} + \frac{\Delta\theta_z}{\Delta t} \bar{k} \right] \times \bar{r}.$$

En el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, se tiene

$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \left[\frac{d\theta_x}{dt} \bar{i} + \frac{d\theta_y}{dt} \bar{j} + \frac{d\theta_z}{dt} \bar{k} \right] \times \bar{r}. \quad (2.10)$$

Ahora definiremos $\bar{\omega}$. La cantidad comprendida en los paréntesis rectangulares se llama vector velocidad angular y se representa por la letra griega "omega", $\bar{\omega}$. Omega es la velocidad angular resultante del cuerpo

Fig. 2.18



rígido, o sea, la suma vectorial de tres componentes de velocidad angular, ω_x , ω_y y ω_z , donde $\omega_x = (d\theta_x/dt)\bar{i}$, $\omega_y = (d\theta_y/dt)\bar{j}$ y $\omega_z = (d\theta_z/dt)\bar{k}$. El eje de rotación resultante también está a lo largo de este vector ω . El vector velocidad angular está ligado a su eje, pero puede descomponerse en componentes o sumarse a otros vectores velocidad angular que pasen por O de acuerdo con la regla usual de la adición vectorial.

De esta discusión se ha deducido una expresión para la velocidad de cualquier punto de un cuerpo rígido que tenga un punto fijo. Si el vector de posición de un punto P con relación a cualquier punto sobre el eje de rotación se designa por $\bar{r}$, la velocidad absoluta del punto es

$$\dot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (2.11)$$

donde $\bar{\omega}$ es la velocidad angular absoluta del cuerpo rígido.

La última afirmación puede ser generalizada; es la expresión escrita de la derivada respecto al tiempo de cualquier vector de longitud constante, cuya dirección está cambiando debido a la rotación alrededor de un punto fijo O.

Para demostrar el uso de la ecuación 2.11, estudiaremos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.7. Una cuenta se mueve en un alambre doblado en la forma de una circunferencia de radio b . El alambre está en el plano xy . Determinar la velocidad y aceleración de la cuenta cuando $t = 2$ seg si $\theta = Ct^2$ rad. Sea $C = \pi/8$ rad/seg/seg y $b = 15$ cm.

El vector de posición de la cuenta

$$\bar{r} = r\bar{e}_r. \quad (a)$$

La velocidad es

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r. \quad (b)$$

CINEMATICA

Debido a que el radio de la circunferencia es constante, $\dot{r} = 0$, en tanto que la ecuación 2.11 indica que

$$\dot{\bar{e}}_r = \bar{\omega} \times \bar{e}_r. \quad (c)$$

Entonces

$$\bar{v} = r(\bar{\omega} \times \bar{e}_r). \quad (d)$$

La aceleración es

$$\bar{a} = \dot{r}(\bar{\omega} \times \bar{e}_r) + r(\dot{\bar{\omega}} \times \bar{e}_r) + r(\bar{\omega} \times \dot{\bar{e}}_r)$$

o sea

$$\bar{a} = r(\dot{\bar{\omega}} \times \bar{e}_r) + r[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{e}_r)]. \quad (e)$$

Con $\theta = (\pi/8)t^2$ se pueden obtener expresiones para $\bar{\omega}$ y $\dot{\bar{\omega}}$. Entonces

$$\bar{\omega} = \dot{\theta}\bar{k} = \frac{\pi}{4}t\bar{k} \quad (f)$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \ddot{\theta}\bar{k} = \frac{\pi}{4}\bar{k} \quad (g)$$

Utilizando la ecuación d y los datos del problema, la velocidad cuando $t = 2$ seg es

$$\bar{v} = 15 \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) (2)\bar{k} \times \bar{e}_r \right],$$

$$\bar{v} = \frac{15\pi}{2} (\bar{k} \times \bar{e}_r) \text{ cm/seg.} \quad (h)$$

Cuando $t = 2$ seg

$$\dot{\theta} = \frac{\pi}{2}\bar{k} \quad \text{y} \quad \bar{e}_r = \bar{j}$$

Entonces

$$\bar{v} = \frac{15\pi}{2} (\bar{k} \times \bar{j}),$$

$$\bar{v} = -\frac{15\pi}{2} \bar{i} \text{ cm/seg.} \quad (i)$$

La aceleración es

$$\bar{a} = 15 \left[\left(\frac{\pi}{4} \bar{k} \right) \times \bar{e}_r \right] + 15 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} \right) (2)\bar{k} \times \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) (2\bar{k}) \times \bar{e}_r \right] \right\},$$

$$\bar{a} = \frac{15\pi}{4} [\bar{k} \times \bar{j}] + \frac{15\pi}{2} \bar{k} \times \left[\frac{\pi}{2} \bar{k} \times \bar{j} \right]$$

o sea

$$\bar{a} = -\frac{15\pi}{4} \bar{i} - \frac{15\pi^2}{4} \bar{j}.$$

Finalmente

$$\bar{a} = -\frac{15\pi}{4} (\bar{i} + \pi\bar{j}) \text{ cm/seg}^2. \quad (j)$$

Nótese que la ecuación j concuerda con los resultados del ejemplo 2.2 como puede verse en la ecuación b de ese ejemplo.

Ejemplo 2.8. Desarrollar las características del movimiento de un punto en coordenadas cilíndricas usando la expresión de la derivada con respecto al tiempo de un vector de longitud constante.

Se expresa la posición de un punto en términos de las tres coordenadas r , ϕ y z , en seguida se establece el origen fijo O , por el que pasa el eje z , que se caracteriza por el vector unitario $\bar{e}_z$. La coordenada r se mide en el plano normal a $\bar{e}_z$ y a partir de O . En el mismo plano se debe establecer una dirección fija, desde la cual se mide ϕ . Se deben definir dos vectores unitarios adicionales $\bar{e}_r$ y $\bar{e}_\phi$. El vector $\bar{e}_r$ tiene su origen en O y la dirección de r y el vector $\bar{e}_\phi$ es

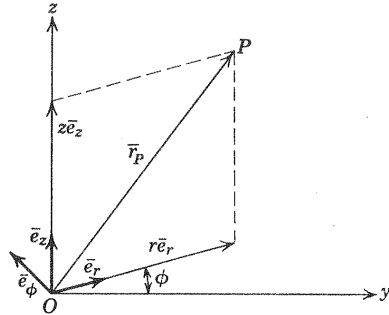


Fig. 2.19

perpendicular tanto a $\bar{e}_r$ como a $\bar{e}_z$ de manera que la terna de vectores $\bar{e}_r$, $\bar{e}_\phi$, $\bar{e}_z$ forme un sistema dextrógiro. El vector unitario $\bar{e}_z$ es constante, no así $\bar{e}_r$ y $\bar{e}_\phi$ cuya dirección cambia cuando ϕ varía en la razón $\dot{\phi}$.

El desplazamiento del punto P es

$$\bar{r}_P = \overline{OP} = r\bar{e}_r + z\bar{e}_z. \quad (a)$$

Nótese que esta expresión no contiene explícitamente a ϕ puesto que $\bar{r}_P$ siempre está en el plano definido por $\bar{r}$ y z .

Las derivadas sucesivas con respecto al tiempo dan las expresiones de la velocidad y de la aceleración. La velocidad es

$$\bar{v}_P = \dot{\bar{r}}_P = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r + \dot{z}\bar{e}_z + z\dot{\bar{e}}_z. \quad (b)$$

Pero

$$\dot{\bar{e}}_r = \bar{\omega} \times \bar{e}_r = \dot{\phi}\bar{e}_z \times \bar{e}_r. \quad (c)$$

y

$$\dot{\bar{e}}_\phi = -\dot{\phi}\bar{e}_r, \quad (d)$$

Entonces

$$\dot{\bar{e}}_z = 0. \quad (e)$$

La aceleración es

$$\bar{a}_P = \dot{\bar{v}}_P = \ddot{r}\bar{e}_r + \dot{r}\dot{\bar{e}}_r + \dot{r}\dot{\bar{e}}_r + r\dot{\phi}\dot{\bar{e}}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\bar{e}}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\bar{e}}_\phi + \ddot{z}\bar{e}_z, \quad (f)$$

pero

$$\dot{\bar{e}}_\phi = \bar{\omega} \times \bar{e}_\phi = \dot{\phi}\bar{e}_z \times \bar{e}_\phi = -\dot{\phi}\bar{e}_r.$$

Entonces

$$\bar{a}_P = \ddot{r}\bar{e}_r + \dot{r}\dot{\bar{e}}_r + r\dot{\phi}\dot{\bar{e}}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\bar{e}}_\phi - r\dot{\phi}^2\bar{e}_r + \ddot{z}\bar{e}_z$$

o sea

$$\bar{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\bar{e}_\phi + \ddot{z}\bar{e}_z. \quad (f)$$

Ejemplo 2.9. El problema del ejemplo 2.4 trataba del movimiento de un punto con rapidez constante a lo largo de una hélice. Este problema se adapta mucho mejor a las coordenadas cilíndricas. Resolver el ejemplo 2.4 utilizando las ecuaciones e y f deducidas en el ejemplo 2.8.

En coordenadas cilíndricas

$$r = a, \quad \phi = bt, \quad z = ct \quad (a)$$

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\phi} = b, \quad \dot{z} = c.$$

$$\ddot{r} = \ddot{\phi} = \ddot{z} = 0.$$

Entonces

$$\bar{r}_P = a\bar{e}_r + ct\bar{e}_z. \quad (b)$$

La velocidad es

$$\bar{v}_P = ab\bar{e}_\phi + c\bar{e}_z \quad (c)$$

y la rapidez

$$v_P = \sqrt{a^2b^2 + c^2}. \quad (d)$$

La aceleración es

$$\bar{a}_P = -ab^2\bar{e}_r. \quad (e)$$

Como antes, la magnitud de la aceleración es

$$a_P = +ab^2. \quad (f)$$

Ejemplo 2.10. En coordenadas esféricas la posición de un punto está dada en términos de una longitud r y dos ángulos ϕ y θ . Deducir una expresión, en coordenadas esféricas, para la velocidad de un punto que se mueve en el espacio.

Se establece un sistema de coordenadas esféricas en la forma siguiente: se elige un punto fijo O y un eje que pase por éste, se sitúa un plano fijo perpendicular al eje, alrededor del eje fijo se hace girar un segundo plano y la posición del punto queda especificada midiendo el ángulo ϕ desde una dirección fija en el plano fijo hasta la intersección de los dos planos. El punto P se localiza en el extremo del radio vector $\bar{r}$ que está en el plano móvil y la dirección de $\bar{r}$ queda especificada por el ángulo θ que se mide desde el eje fijo hasta $\bar{r}$. Se elige una terna de vectores unitarios $\bar{e}_r$, $\bar{e}_\theta$ y $\bar{e}_\phi$; el vector $\bar{e}_r$ a lo largo de la dirección radial, el vector $\bar{e}_\phi$ normal al plano móvil y en la dirección de $\Delta\phi$ y el vector $\bar{e}_\theta$ en el plano móvil, normal a $\bar{e}_r$ y a $\bar{e}_\phi$ y en la dirección de $\Delta\theta$. Ver la figura 2.20.

El vector de posición del punto P es

$$\bar{r} = r\bar{e}_r. \quad (a)$$

La velocidad es

$$\bar{v}_P = \dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\bar{e}}_r, \quad (b)$$

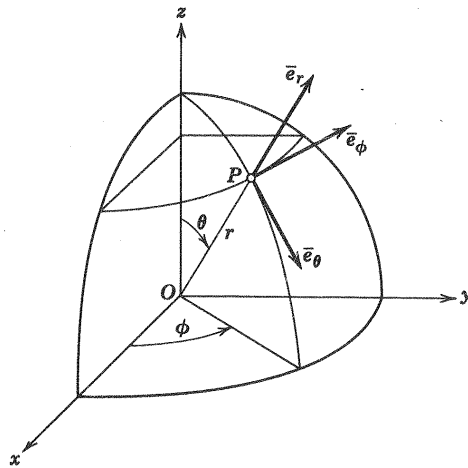


Fig. 2.20

donde

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega} \times \vec{e}_r$$

y

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

Pero

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{y} \quad \dot{\phi} = \dot{\phi} \vec{k}$$

Examinando el plano de la Fig. 2.21 que es normal a $\vec{e}_\phi$, el vector $\dot{\phi}$ se puede escribir en la forma

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Entonces

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Finalmente,

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_r) - r \dot{\phi} \sin \theta (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_r),$$

$$\vec{v}_P = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi$$

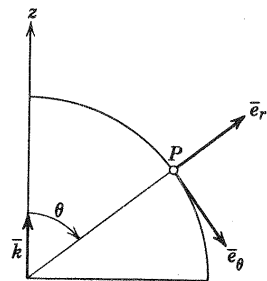


Fig. 2.21

Ejemplo 2.11. Un brazo ranurado que se halla en el plano xy , gira alrededor de un pasador en O con una rapidez angular constante de 2 rad/seg en el

sentido dextrógiro. El bloque deslizante se mueve alejándose del origen a lo largo del brazo a una velocidad constante de 2 m/seg. Cuando $\theta = 60^\circ$ y $OP = 2.5$ m, calcular la velocidad y aceleración del punto P del bloque.

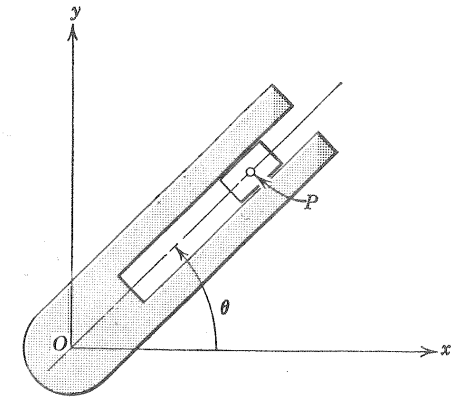


Fig. 2.22

El vector de posición del punto P es

$$\vec{r} = \overline{OP} = (OP) \vec{e}_r, \quad (a)$$

donde $\vec{e}_r$ es un vector unitario en la dirección $\overline{OP}$ como se muestra en la figura 2.23.

La velocidad es

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}} = (\dot{OP}) \vec{e}_r + (OP) \dot{\vec{e}}_r, \quad (b)$$

pero

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega} \times \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{k} \times \vec{e}_r$$

o sea

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta. \quad (c)$$

Como puede verse, el vector unitario definido $\vec{e}_\theta$ es normal a $\vec{e}_r$. Finalmente,

$$\vec{v}_P = (\dot{OP}) \vec{e}_r + (OP) \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad (d)$$

La aceleración es

$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{OP}) \vec{e}_r + (\dot{OP}) \dot{\vec{e}}_r + (\dot{OP}) \dot{\theta} \vec{e}_\theta + (OP) (\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + (OP) (\dot{\theta}) \dot{\vec{e}}_\theta, \quad (e)$$

pero

$$\dot{\vec{e}}_\theta = \vec{\omega} \times \vec{e}_\theta = \dot{\theta} \vec{k} \times \vec{e}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r. \quad (f)$$

Entonces

$$\vec{a}_P = [(\ddot{OP}) - (OP) (\dot{\theta})^2] \vec{e}_r + [(OP) (\ddot{\theta}) + 2(\dot{OP}) (\dot{\theta})] \vec{e}_\theta. \quad (g)$$

Para este problema se busca la velocidad y aceleración de P cuando $\theta = 60^\circ$ y $OP = 2.5$ m. También se sabe del enunciado del problema que

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \dot{\bar{\theta}} = \dot{\theta} \bar{k} = -2\bar{k} \text{ rad/seg,} \\ \dot{\bar{\omega}} &= \ddot{\theta} = 0,\end{aligned}$$

(h)

$$\overline{OP} = (\dot{OP}) \bar{e}_r = 2\bar{e}_r \text{ m/seg,}$$

$$\overline{OP} = (\ddot{OP}) \bar{e}_r = 0.$$

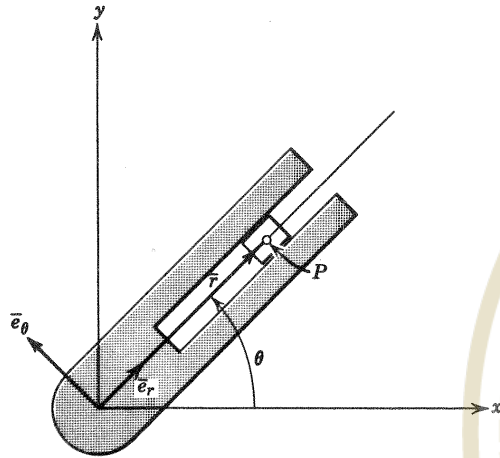


Fig. 2.23

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones d y g ,

$$\bar{v}_P = 2\bar{e}_r + (2.5)(-2)\bar{e}_\theta$$

o sea

$$\bar{v}_P = 2\bar{e}_r - 5\bar{e}_\theta \text{ m/seg,}$$

y

$$\bar{a}_P = [-(2.5)(-2)^2]\bar{e}_r + [(2)(2)(-2)]\bar{e}_\theta,$$

$$\bar{a}_P = 10\bar{e}_r - 8\bar{e}_\theta,$$

o sea

$$\bar{a}_P = -4[2.5\bar{e}_r + 2\bar{e}_\theta] \text{ m/seg}^2.$$

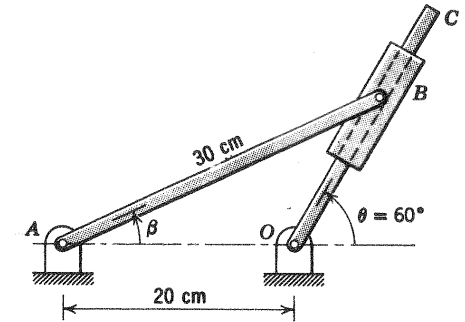
Ejemplo 2.12. Dos varillas que giran están unidas mediante un bloque deslizable B . Sabiendo que la varilla articulada en O gira con una rapidez angular constante de 6 rad/seg en el sentido levógiro, determinar la velocidad absoluta del bloque B .

Se elige un sistema de coordenadas con origen en O . Ver figura 2.25.

$$\bar{r} = \overline{OB} = (OB) \bar{e}_r.$$

(a)

Fig. 2.24



Debido a que la velocidad es la primera derivada de $\bar{r}$ tomada con respecto al tiempo,

$$\dot{\bar{r}} = (\dot{OB}) \bar{e}_r + (OB) \dot{\bar{e}}_r$$

o sea

$$\dot{\bar{r}} = (\dot{OB}) \bar{e}_r + (OB) (\bar{\omega} \times \bar{e}_r). \quad (b)$$

Esta ecuación contiene cuatro cantidades desconocidas, la magnitud y dirección de $\dot{\bar{r}}$ y los valores de $\dot{OB}$ y OB . El valor de OB se puede calcular de la geometría del sistema, pero los tres escalares desconocidos restantes no se pueden determinar solamente de la ecuación vectorial anterior, en consecuencia, se debe escribir una ecuación adicional. Habiendo elegido el sistema de coordenadas que se ve en la figura 2.26, se puede escribir otra ecuación para la velocidad de B .

$$\bar{r}' = \overline{AB} = (AB) \bar{e}_r' \quad (c)$$

La velocidad del punto B está dada por

$$\dot{\bar{r}}' = (\dot{AB}) \bar{e}_r' + (AB) \dot{\bar{e}}_r'.$$

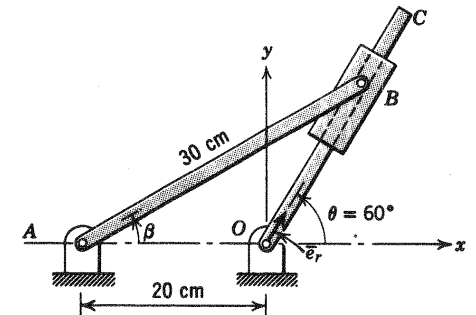
o sea

$$\dot{\bar{r}}' = (\dot{AB}) \bar{e}_r' + (AB) (\bar{\omega}' \times \bar{e}_r'). \quad (d)$$

En vista de que $\overline{AB}$ es un vector de longitud constante, $\dot{AB} = 0$, por lo tanto,

$$\dot{\bar{r}}' = (AB) (\bar{\omega}' \times \bar{e}_r'). \quad (e)$$

Fig. 2.25



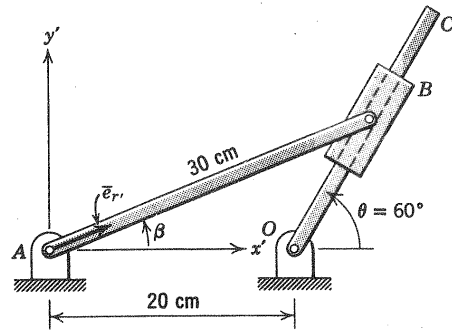


Fig. 2.26

La velocidad de B es independiente del sistema de coordenadas que se utilice para describirlo; de manera que,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}$$

o sea

$$(AB)(\omega' \times \bar{e}_r') = (\dot{OB})\bar{e}_r + (OB)(\omega \times \bar{e}_r). \quad (f)$$

Nótese que esta ecuación contiene solamente dos incógnitas escalares, ω' y $\dot{OB}$. Para calcular estas incógnitas, los vectores unitarios $\bar{e}_r'$ y $\bar{e}_r$ se pueden expresar en términos de los vectores unitarios ordinarios. Reescribiendo la ecuación anterior,

$$(AB)(\omega' \bar{k}) \times (\cos \beta \bar{i} + \sin \beta \bar{j}) = (\dot{OB})(\cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j}) + (OB)(\omega \bar{k}) \times (\cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j})$$

Desarrollando,

$$AB\omega' \cos \beta \bar{j} - AB\omega' \sin \beta \bar{i} = (\dot{OB} \cos \theta - OB\omega \sin \theta) \bar{i} + (\dot{OB} \sin \theta + OB\omega \cos \theta) \bar{j}. \quad (g)$$

Igualando los coeficientes de los vectores unitarios,

$$-AB\omega' \sin \beta = \dot{OB} \cos \theta - OB\omega \sin \theta, \quad (h)$$

$$AB\omega' \cos \beta = \dot{OB} \sin \theta + OB\omega \cos \theta. \quad (i)$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas,

$$-AB\omega' \sin \beta \cos \beta = \dot{OB} \cos \theta \cos \beta - OB\omega \sin \theta \cos \beta,$$

$$AB\omega' \sin \beta \cos \beta = \dot{OB} \sin \theta \sin \beta + OB\omega \cos \theta \sin \beta.$$

Sumando,

$$0 = \dot{OB}(\cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta) + OB(\cos \theta \sin \beta - \sin \theta \cos \beta)\omega$$

o sea

$$0 = \dot{OB} \cos(\theta - \beta) - OB\omega \sin(\theta - \beta),$$

$$\dot{OB} = OB\omega \tan(\theta - \beta) \quad (j)$$

Usando la ley de los senos se obtiene OB,

$$\frac{OB}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(180 - \theta)}, \quad (k)$$

$$OB = \frac{AB \sin \beta}{\sin(180 - \theta)}.$$

Puesto que el valor de β no es conocido, primeramente se debe calcular esta cantidad. Usando otra vez la ley de los senos, se tiene

$$\frac{\sin(180 - \theta)}{30} = \frac{\sin(\theta - \beta)}{20}$$

$$\sin(\theta - \beta) = \frac{2}{3} \sin 120^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2},$$

$$\sin(\theta - \beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (\theta - \beta) = 35.3^\circ.$$

Por lo tanto,

$$\beta = 24.7^\circ$$

De aquí que,

$$OB = \frac{(30)(\sin 24.7^\circ)}{\sin 120^\circ} = \frac{(30)(0.417)}{0.866}$$

$$OB = 14.45 \text{ cm}. \quad (l)$$

Por consiguiente,

$$\dot{OB} = 14.45(6) \tan 35.3^\circ = (14.45)(6)(0.708),$$

$$\dot{OB} = 61.30 \text{ cm/seg} \quad (m)$$

Finalmente,

$$\dot{\mathbf{r}} = 61.3\bar{e}_r + 14.45(6\bar{k} \times \bar{e}_r),$$

$$\dot{\mathbf{r}} = 61.3\bar{e}_r + 86.7(\bar{k} \times \bar{e}_r). \quad (n)$$

Los resultados se presentan en la figura 2.27.

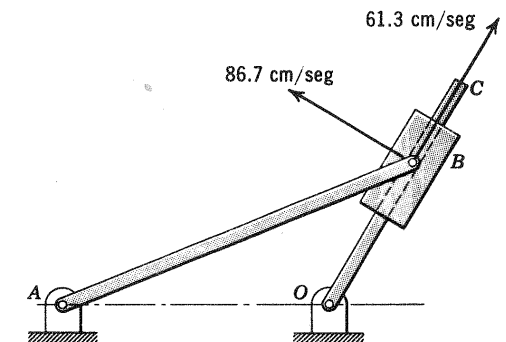


Fig. 2.27

La magnitud de la velocidad absoluta es

$$|\dot{\vec{r}}| = \sqrt{(61.3)^2 + (86.7)^2} = \sqrt{11,274.58}$$

$$|\dot{\vec{r}}| = 106 \text{ cm/seg.} \quad (o)$$

2.4 Componentes normal y tangencial de la aceleración. En los problemas de los ejemplos anteriores se calcularon las velocidades y aceleraciones de un punto o de una partícula en términos de las coordenadas dependientes del tiempo. A veces es más conveniente expresar la velocidad y la aceleración de un punto que se mueve a lo largo de una trayectoria como una función de la distancia que ha recorrido desde alguna posición inicial.

Consideremos ahora un punto que se mueve a lo largo de una trayectoria general en el espacio, de la cual se muestra una parte en la figura 2.28.

Se puede pensar que el punto P es una cuenta o una partícula que se mueve a lo largo de esta curva alabeada. La velocidad de P es

$$\vec{v} = v\vec{e}_t \quad (2.3 \text{ repetida})$$

como se determinó previamente.

Por definición, la aceleración es la variación de la velocidad por unidad de tiempo, es decir,

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t,$$

o en términos de s que es la distancia recorrida a lo largo de la curva,

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \dot{s}\dot{\vec{e}}_t \quad (2.12)$$

Generalmente, es preferible escribir las derivadas con respecto al tiempo de los vectores unitarios en términos de los mismos vectores unitarios. Como se estableció en la ecuación 2.11,

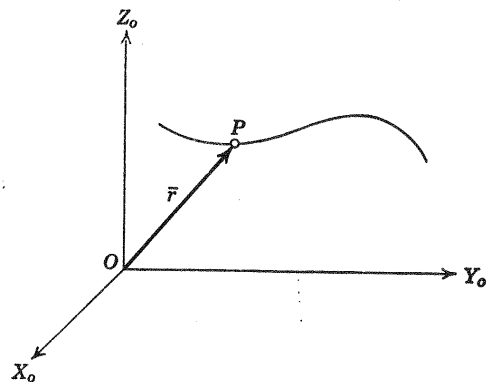


Fig. 2.28

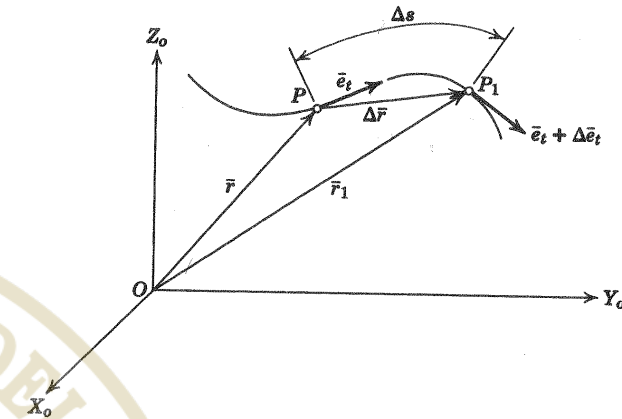


Fig. 2.29

$$\dot{\vec{e}}_t = \vec{\omega} \times \vec{e}_t,$$

donde $\vec{\omega}$ es la razón de cambio de la dirección del vector unitario tangente, por unidad de tiempo. Para investigar esta razón de variación, supongamos que la partícula se mueve de P a P_1 , una distancia Δs , como se ve en la figura 2.29.

En el límite, cuando $\Delta s \rightarrow 0$, los dos vectores unitarios $\vec{e}_t$ y $\vec{e}_t + \Delta\vec{e}_t$ definen un plano llamado *plano osculador*. El ángulo que ha girado $\vec{e}_t$ está en el plano osculador y se ve en la figura 2.30a y b.

Con referencia a la figura 2.30b, es evidente que en el límite, cuando $\Delta\theta \rightarrow 0$, $\Delta\vec{e}_t$ será normal a $\vec{e}_t$. Por lo tanto, es conveniente definir un vector unitario que tenga las mismas características que $\Delta\vec{e}_t$, esto es, que sea

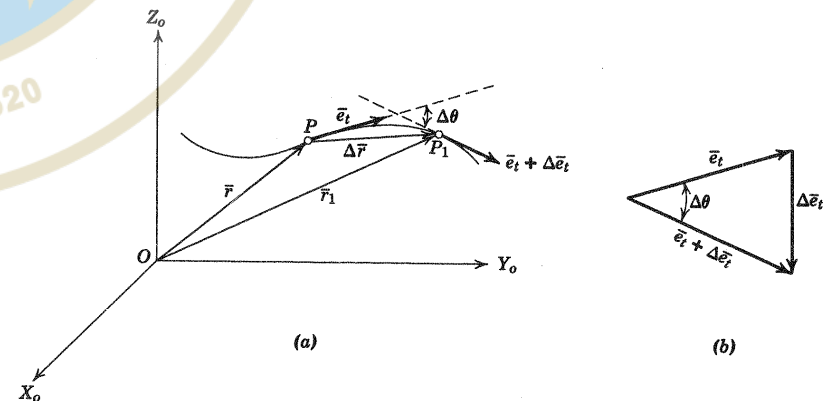


Fig. 2.30

normal a la trayectoria que se describe, que esté en el plano osculador y que tenga la misma dirección y sentido que $\Delta \vec{e}_t$; como en seguida se demostrará, la dirección y sentido de $\Delta \vec{e}_t$ es única. Las normales a la trayectoria en P y P_1 , que están en el plano osculador, se cortan en el centro de curvatura C , entonces, el vector $\Delta \vec{e}_t$ está dirigido hacia el centro de curvatura, esto es, de P a C . Ver figura 2.31. En consecuencia, el vector unitario que va a definirse será normal a la trayectoria, estará contenido en el plano osculador y estará dirigido *hacia* el centro de curvatura; este vector unitario se llama *vector normal principal* y se designa por $\vec{e}_n$. Para completar una terna de vectores ortogonales unitarios, se define un vector unitario $\vec{e}_b$, llamado *vector unitario binormal*, normal al plano de la terna $\vec{e}_t$ y $\vec{e}_n$, tal que $\vec{e}_t$, $\vec{e}_n$ y $\vec{e}_b$ forman una base ortogonal derecha, esto es $\vec{e}_t \times \vec{e}_n = \vec{e}_b$.

Habiendo definido este conjunto de vectores unitarios, ahora es posible expresar ω .

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \bar{e}_b = \frac{d\theta}{dt} \bar{e}_b$$

o sea

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \left(\frac{ds}{dt} \right) \bar{\mathbf{e}}_v. \quad (2.13)$$

En el límite, $CP = CP_1 = \rho$, que es el radio de curvatura. Es evidente

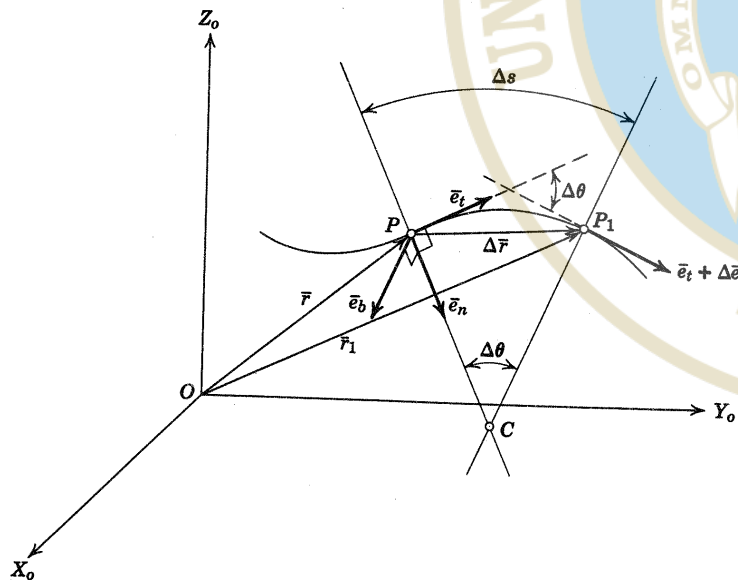


Fig. 2.31

que el ángulo PCP_1 es $\Delta\theta$ como se puede ver en la figura 2.31. Así que

$$\Delta s = \Delta \theta \rho,$$

o sea,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}. \quad (2.14)$$

La velocidad angular es

$$\bar{\omega} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right) \bar{e}_b = \frac{s}{\rho} \bar{e}_b.$$

Entonces

$$\dot{\bar{e}}_t = \frac{s}{\rho} (\bar{e}_b \times \bar{e}_t)$$

o sea,

$$\dot{\bar{e}}_t = \frac{\dot{s}}{\rho} \bar{e}_n. \quad (2.15)$$

La aceleración es

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n. \quad (2.16)$$

Esta ecuación da la aceleración de P relativa a O en términos de las componentes tangencial y normal, llamadas así a causa de su relación con la trayectoria de P . La magnitud de la componente tangencial es la razón de cambio de la rapidez de P y la magnitud de la componente normal se calcula dividiendo el cuadrado de la rapidez de P entre el valor instantáneo del radio de curvatura de la trayectoria. La componente normal está dirigida hacia el centro de curvatura a lo largo de la normal principal a la curva y es la componente que aparece en virtud del cambio de dirección del vector velocidad. La aceleración total de P está en el plano osculador.

Ahora se pueden calcular las aceleraciones en función de $\dot{s}$ y $\ddot{s}$ con tal que el radio de curvatura se conozca o se pueda calcular. Si la trayectoria recorrida está en un solo plano, se puede calcular el radio de curvatura empleando las fórmulas conocidas del cálculo. Si la curva es una trayectoria que se tuerce en el espacio, la determinación de ρ es un poco más complicada.

Consideremos ahora la determinación de ρ como una función de la distancia s .

Se ha demostrado que

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \bar{e}_t \quad (2.2 \text{ repetida})$$

y

$$\bar{a} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \bar{e}_t + \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \bar{e}_n. \quad (2.16 \text{ repetida})$$

De la expresión de la velocidad se puede ver que

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_t. \quad (2.17)$$

Derivando la ecuación 2.17 con respecto a s ,

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{e}_t}{ds}. \quad (2.18)$$

De la ecuación 2.15,

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \left(\frac{1}{\rho}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right) \vec{e}_n$$

o sea

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{e}_n.$$

Entonces

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho} \vec{e}_n.$$

Finalmente,

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| \quad (2.19)$$

Ejemplo 2.13. Determinar el radio de curvatura ρ de una curva en el espacio que es una hélice de radio R con un paso de $2\pi p$ como se muestra en la figura 2.32.

El vector de posición $\vec{r}$ es

$$\vec{r} = R(\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}) + p\phi \vec{k}$$

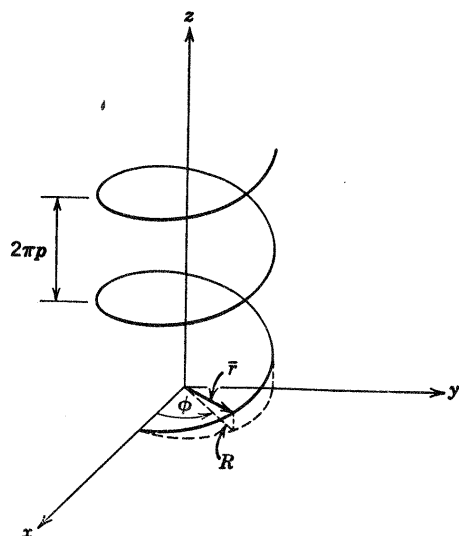


Fig. 2.32

y

$$d\vec{r} = (-R \sin \phi \vec{i} + R \cos \phi \vec{j} + p \vec{k}) d\phi,$$

de la cual

$$ds = (d\vec{r} \cdot d\vec{r})^{1/2} = (R^2 + p^2)^{1/2} d\phi.$$

Ahora

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{(R^2 + p^2)^{1/2}} [-R \sin \phi \vec{i} + R \cos \phi \vec{j} + p \vec{k}]$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{(R^2 + p^2)} [-R \cos \phi \vec{i} - R \sin \phi \vec{j}],$$

con la que, al aplicar la ecuación 2.20, se deduce que

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| = \left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right)^{1/2} = \frac{R}{R^2 + p^2}.$$

Es posible despejar ρ y expresarla como una función de las derivadas de $\vec{r}$ con respecto al tiempo; en efecto:

$$\vec{v} \times \vec{a} = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \left(\frac{1}{\rho} \right) (\vec{e}_t \times \vec{e}_n)$$

o sea

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right| = \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \frac{1}{\rho}.$$

Puesto que

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|,$$

entonces

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^3} = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}. \quad (2.21)$$

Estas relaciones, para la recíproca de ρ , se pueden utilizar tanto para una curva plana como para una curva general en el espacio. Por ejemplo, supongamos que $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ donde x y y son funciones de t . Entonces

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

y

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}.$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \\ \ddot{x} & \ddot{y} & 0 \end{vmatrix} = (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\vec{k}.$$

Por consiguiente

$$\frac{1}{\rho} = \frac{[\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}]}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}. \quad (2.22)$$

Si la ecuación de la curva plana es $y = f(x)$, se efectúa el cambio de variable $x = t$, $y = f(t)$, entonces $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$ y sustituyendo y' por $\dot{y}$ y y'' por $\ddot{y}$, se obtiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}}. \quad (2.23)$$

La ecuación 2.23 es la expresión familiar para el radio de curvatura de una curva plana.

Para una curva en el espacio, la orientación del plano osculador cambia a medida que la partícula avanza a lo largo de la trayectoria. Una medida de la forma en que la curva se tuerce en el espacio, se obtiene definiendo la llamada *torsión* y que puede determinarse¹ en función de las derivadas de $\vec{r}$ pero su deducción está más allá de la finalidad de este libro.

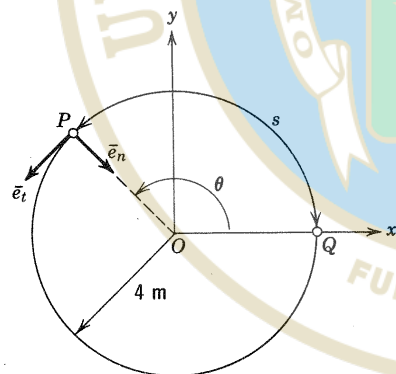
Los siguientes ejemplos ilustrarán sobre el uso de las componentes normal y tangencial de la aceleración.

Ejemplo 2.14. El punto P se mueve a lo largo de un alambre doblado en forma de circunferencia cuyo diámetro es de 8 m. La distancia s que ha recorrido el punto a partir de Q se expresa como sigue:

$$s = t^4 - 4t \text{ m},$$

donde t está en segundos. Determinar la magnitud de la aceleración total de P cuando $t = 2$ seg.

Fig. 2.33



En virtud de que el movimiento de la partícula fácilmente se puede expresar como una función de s , es más conveniente determinar la aceleración utilizando la ecuación 2.16.

$$\vec{a} = \dot{s}\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{e}_n. \quad (2.16 \text{ repetida})$$

¹ Struik, P. J., *Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1950, págs. 15-18.

Puesto que $s = t^4 - 4t$ m, para $t = 2$ seg,

$$\dot{s} = 4t^3 - 4 = 28 \text{ m/seg}$$

y

$$\ddot{s} = 12t^2 = 48 \text{ m/seg}^2.$$

La aceleración es

$$\vec{a} = 48\vec{e}_t + \frac{(28)^2}{4}\vec{e}_n,$$

$$\vec{a} = 48\vec{e}_t + 196\vec{e}_n,$$

o sea

$$\vec{a} = 4[12\vec{e}_t + 49\vec{e}_n] \text{ m/seg}^2.$$

La magnitud

$$a = \sqrt{(a_t)^2 + (a_n)^2} = 4\sqrt{(12)^2 + (49)^2},$$

$$a = 201.2 \text{ m/seg}^2.$$

Cuando se conocen las aceleraciones es posible utilizar la ecuación 2.16 para determinar el radio de curvatura de la trayectoria descrita, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15. Un proyectil sigue la trayectoria que se muestra en la figura 2.34. La aceleración del proyectil es constante y está dada por

$$\vec{a} = -\vec{i} - 6\vec{j} \text{ m/seg}^2.$$

Determinar el radio de curvatura de la trayectoria cuando $t = 2$ seg si, cuando $t = 0$, $v_0 = 50$ m/seg.

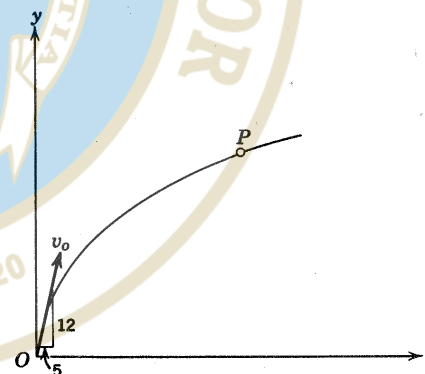


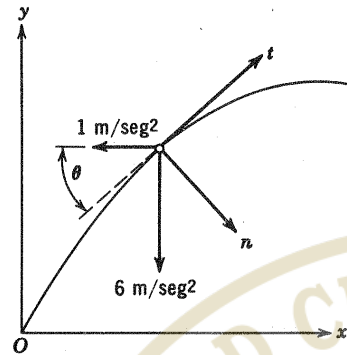
Fig. 2.34

Si se conocieran la aceleración normal y la rapidez del proyectil y se sustituyeran en la relación

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho},$$

se podría calcular el radio de curvatura ρ . Según se estableció en la ecuación 2.7, la rapidez es $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Sin embargo, $\dot{x}$ y $\dot{y}$ no se conocen 2 seg después de haberse iniciado el movimiento. Por definición

Fig. 2.35



$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} \quad \text{y} \quad \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt}.$$

Reescribiendo estas expresiones,

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_0^2 \ddot{x} dt = - \int_0^2 dt,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 - 2 = (50) \left(\frac{5}{13} \right) - 2 = 17.2 \text{ m/seg}$$

y

$$\int_{\dot{y}_0}^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_0^2 \ddot{y} dt = -6 \int_0^2 dt,$$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 - 12 = (50) \left(\frac{12}{13} \right) - 12 = 34.2 \text{ m/seg}$$

Por lo tanto,

$$\dot{s}^2 = (17.2)^2 + (34.2)^2 = 1465.5 \text{ m}^2/\text{seg}^2.$$

Es un hecho conocido que la velocidad es tangente a la trayectoria del movimiento; en consecuencia, también se puede establecer la inclinación de los vectores unitarios normal y tangente, es decir, se puede calcular al ángulo θ . Ver la figura 2.35.

$$\theta = \text{ang tan} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \text{ang tan} \left(\frac{34.2}{17.2} \right),$$

$$\theta = 63^\circ.$$

Se puede considerar que la aceleración total tiene dos componentes ortogonales, esto es, ya sean componentes rectangulares o componentes normal y tangencial. En vista de que las componentes x y y son conocidas, se puede calcular la componente normal. Así que

$$a_n = 6 \cos \theta - \sin \theta,$$

$$a_n = (6) (0.45) - 0.89$$

$$a_n = 1.81 \text{ m/seg}^2.$$

Finalmente,

$$a_n = 1.81 = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{1465.5}{\rho},$$

$$\rho = 800 \text{ m}$$

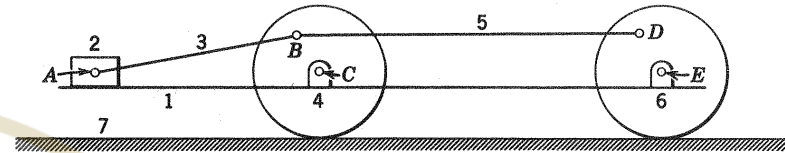


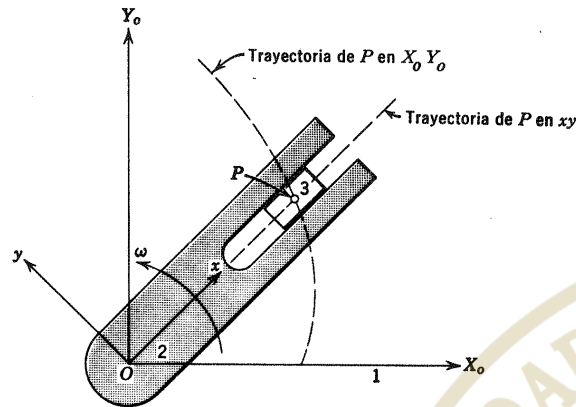
Fig. 2.36

2.5 Movimiento relativo. En un gran número de problemas la descripción del movimiento o la relación entre las fuerzas, puede llegar a ser más complicada cuando está referida a un sistema fijo de coordenadas, mientras que si el movimiento se refiere a un sistema móvil, su descripción se puede simplificar considerablemente; en tales casos puede ser ventajoso tratar con el movimiento de puntos relativos a un sistema de referencia móvil y posteriormente determinar el movimiento absoluto de dicho sistema.

Algunos ejemplos simples del diseño de máquinas ilustrarán sobre este particular. La figura 2.36 es un dibujo esquemático del mecanismo de una locomotora de vapor con seis cuerpos rígidos o eslabones. El eslabón 1 es el bastidor de la locomotora, el eslabón 2 es el émbolo que se mueve, con traslación horizontal relativa al bastidor, el eslabón 3 es la biela de conexión a la rueda 4. El eslabón 5 es una barra lateral que transmite el movimiento de 4 a 6. La vía está indicada por el número 7.

Con relación a un sistema fijo de coordenadas unido a 7, el eslabón 1 describe una traslación rectilínea simple, los movimientos de los eslabones restantes con relación a 7 son más complicados. El eslabón 2 describe una traslación rectilínea que es más confusa que la de 1; los eslabones 3, 4 y 6 poseen rotaciones así como alguna traslación y el eslabón 5 está animado de traslación curvilínea. Con relación a 7, los puntos B y D describen curvas cicloides.

Si se une un sistema de referencia al eslabón 1, estos movimientos resultan más simples en el sistema móvil de coordenadas. Las traslaciones de los eslabones 2 y 5 así como las rotaciones de 3, 4 y 6 se describen con mayor facilidad. En este sistema de referencia el movimiento de los puntos B y D se lleva a cabo en trayectorias circulares con centros en C y E respectivamente. En ocasiones puede ser conveniente considerar un



sistema de referencia unido al eslabón 2 a fin de que el movimiento de 3 con respecto a este sistema sea una rotación alrededor del punto A.

El ejemplo anterior es tal que el sistema móvil posee movimiento de traslación solamente con respecto al sistema fijo. En la figura 2.37 se puede ver un eslabón ranurado indicado por el número 2 que gira en torno a O respecto a un eslabón fijo 1. Un bloque 3 se desliza en la ranura hacia afuera haciendo que un punto P sobre 3 describa una trayectoria espiral en el sistema fijo de coordenadas X_0, Y_0 . Sin embargo, si un segundo sistema de coordenadas x, y se une al eslabón 2, el movimiento de P, en xy , es simplemente una línea recta. Por supuesto, se debe tomar en cuenta el movimiento del eslabón 2 relativo a 1 tanto como el movimiento de P relativo a 2. La técnica que en estos momen-

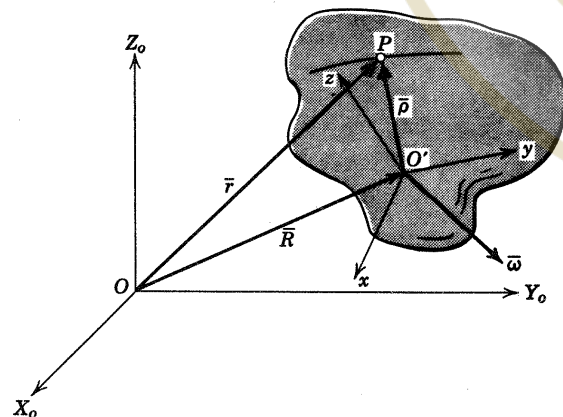


Fig. 2.38

tos se está utilizando es uno de los métodos básicos de análisis; esto es, descomponer el problema en partes simples, resolver cada parte y después se construye la solución completa.

Consideremos ahora el problema general de movimiento en un sistema móvil de coordenadas. La figura 2.38 muestra un sistema de referencia fijo $X_0Y_0Z_0$ y un sistema de referencia móvil xyz que gira respecto a $X_0Y_0Z_0$ alrededor de un eje que pasa por su origen O' , al mismo tiempo que O' se mueve con relación al origen fijo O . Deduciremos las expresiones para la velocidad y aceleración absolutas de un punto P que recorre una trayectoria que está descrita en el sistema móvil de coordenadas. Las cantidades vectoriales de la figura 2.38 se describen en la siguiente forma:

$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$ = velocidad angular del sistema de coordenadas xyz tomada con respecto al sistema $X_0Y_0Z_0$.

$\bar{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ = vector de posición del punto P referido a xyz .

$\bar{R}$ = vector de posición del origen móvil O' referido a $X_0Y_0Z_0$.

$\bar{r}$ = vector de posición de P referido a $X_0Y_0Z_0$.

Puesto que se van a determinar la velocidad y aceleración absolutas del punto P, se requiere el vector de posición de este punto.

De la figura 2.38,

$$\bar{r} = \bar{R} + \bar{\rho}. \quad (2.24)$$

Se deriva el vector de posición para hallar la velocidad $\dot{\bar{r}}$.

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}} + \dot{\bar{\rho}}. \quad (2.25)$$

En vista que $\bar{\rho}$ se mide en un sistema de coordenadas que gira, los vectores unitarios tendrán derivadas respecto al tiempo debido al cambio de su dirección.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} \\ &= \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + x(\bar{\omega} \times \bar{i}) + y(\bar{\omega} \times \bar{j}) + z(\bar{\omega} \times \bar{k}) \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}} &= \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + \bar{\omega} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}), \\ \dot{\bar{\rho}} &= \bar{v} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En un sistema de coordenadas que gira y se traslada se ve que la derivada respecto al tiempo de un vector consta de dos partes. En este caso $\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$ es la velocidad medida en el sistema xyz y se designa por $\bar{v}$.

El término $\bar{\omega} \times \bar{\rho}$ es la derivada de $\bar{\rho}$ respecto al tiempo debida a la rotación de xyz . $\bar{R}$ representa la velocidad de O' relativa a $X_0Y_0Z_0$.

$$\dot{\bar{r}} = \bar{R} + \bar{v} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}. \quad (2.27)$$

Derivando $\dot{\bar{r}}$ con respecto al tiempo, se obtiene la aceleración.

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{v}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{\rho}}.$$

Pero,

$$\dot{\bar{v}} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{a} + \bar{\omega} \times \bar{v},$$

donde $\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$ es la aceleración medida en el sistema xyz y se designa por $\bar{a}$. De la ecuación 2.16 se puede calcular la aceleración $\bar{a}$.

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \bar{a} + \bar{\omega} \times \bar{v} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{v} + \bar{\omega} \times \bar{\rho})$$

o sea

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{a} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (2.28)$$

Los términos de esta ecuación se identifican como sigue:

$\ddot{\bar{R}}$ = aceleración del origen móvil con respecto a $X_0Y_0Z_0$.

$\dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}$ = aceleración tangencial de P considerado como fijo en xyz .

$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})$ = aceleración normal de P considerado como fijo en xyz .

$\bar{a}$ = aceleración de P medida en el sistema móvil.

$2\bar{\omega} \times \bar{v}$ = aceleración de Coriolis debida al movimiento sobre una trayectoria que gira.

Al plantear cualquier problema es indispensable elegir un sistema de ejes móviles tales que el movimiento en este sistema quede bien definido. Así mismo, los ejes escogidos se deben adaptar fácilmente a la información que se proporciona. Los problemas siguientes son situaciones típicas que se pueden investigar utilizando las ecuaciones generales de movimiento, esto es, ecuaciones 2.27 y 2.28.

Ejemplo 2.16. El brazo ranurado de la figura 2.39 gira con una rapidez angular constante, en el sentido de las manecillas del reloj, de 2 rad/seg y en el plano X_0Y_0 . El bloque se mueve alejándose del origen a lo largo del brazo a una velocidad constante de 2 m/seg. Cuando $\theta = 60^\circ$ y $OP = 2.5$ m, determinar la velocidad y aceleración de un punto P sobre el bloque.

El sistema móvil de coordenadas se une al brazo ranurado de manera que el movimiento del bloque en este sistema sea una traslación pura. En general, la velocidad de un punto que se mueve en un sistema móvil de coordenadas es

$$\bar{v}_P = \dot{\bar{r}} = \bar{R} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{v}. \quad (2.27 \text{ repetida})$$

En este caso,

$$\bar{R} = 0 \quad (O' \text{ está fijo}),$$

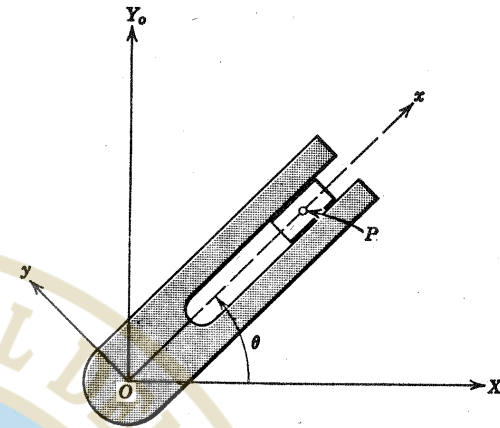


Fig. 2.39

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k} = -2\bar{k} \text{ rad/seg},$$

$$\bar{\rho} = \overline{OP} = (OP)\bar{i} = 2.5\bar{i} \text{ m}, \quad (a)$$

$$\bar{v} = 2\bar{i} \text{ m/seg.}$$

$$\bar{v}_P = (-2\bar{k}) \times (2.5\bar{i}) + (2\bar{i}), \quad (b)$$

$$\bar{v}_P = 2\bar{i} - 5\bar{j} \text{ m/seg.}$$

La ecuación general para la aceleración es

$$\bar{a}_P = \ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{a} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (2.28 \text{ repetida})$$

Para este problema,

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{R}} &= 0 \quad (\text{el origen } O' \text{ está fijo}), \\ \dot{\bar{\omega}} &= \omega\bar{k} = 0 \quad (\bar{\omega} \text{ es constante}). \end{aligned} \quad (c)$$

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n. \quad (2.16 \text{ repetida})$$

En este caso $\ddot{s} = 0$ y puesto que el movimiento del bloque describe una línea recta en el sistema de coordenadas $x, y, \rho = \infty$. Por lo tanto, $\bar{a} = 0$. De ahí, que la aceleración

$$\bar{a}_P = (-2\bar{k}) \times [(-2\bar{k}) \times (2.5\bar{i})] + (2)(-2\bar{k}) \times (2\bar{i}),$$

$$\bar{a}_P = -10\bar{i} - 8\bar{j},$$

$$\bar{a}_P = -2[5\bar{i} + 4\bar{j}] \text{ m/seg}^2. \quad (d)$$

Ejemplo 2.17. Resolver el problema del ejemplo 2.12, que nuevamente se plantea usando la ecuación general para las velocidades.

Dos varillas que giran están unidas mediante un bloque deslizable B . Sabiendo que la varilla articulada en O gira con una rapidez angular constante de 6 rad/seg en el sentido levógiro, determinar la velocidad absoluta del bloque B .

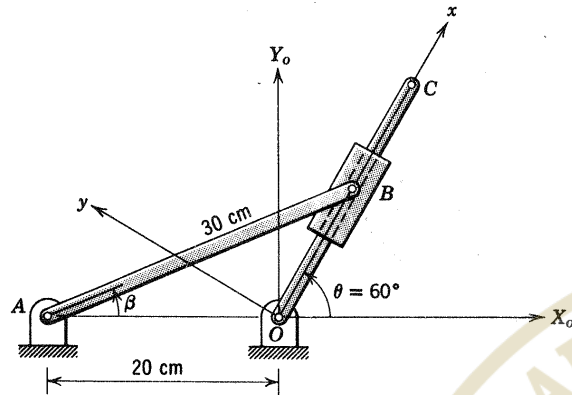


Fig. 2.40

Nótese en la figura 2.40 la posición y orientación del sistema móvil de coordenadas. Se hizo esta elección debido a lo siguiente: se conoce el movimiento del origen ($\ddot{R} = 0$), se conoce el movimiento de los ejes coordenados (se da θ) y en este sistema el movimiento del bloque B está bien definido (movimiento en línea recta).

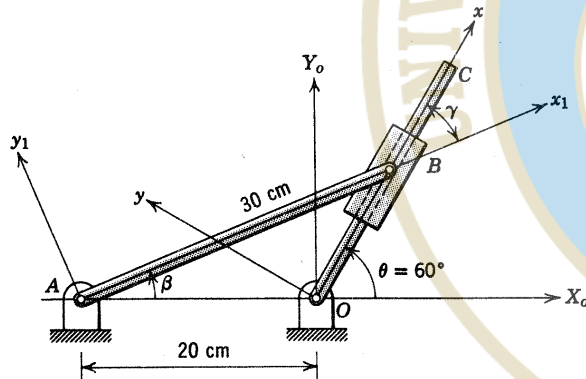


Fig. 2.41

La ecuación general para la velocidad es

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}, \quad (a)$$

donde

$$\dot{\vec{R}} = 0 \quad (\text{el origen está fijo}),$$

$$\vec{\omega} = \omega_{oc} \vec{k} = 6\vec{k} \text{ rad/seg}, \quad (b)$$

$$\vec{\rho} = \vec{OB} = OB\vec{i} \text{ cm},$$

$$\vec{v} = \dot{OB}\vec{i} \text{ cm/seg}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= (6\vec{k} \times (OB\vec{i})) + \dot{OB}\vec{i}, \\ \vec{v}_B &= 6(OB)\vec{j} + \dot{OB}\vec{i}. \end{aligned} \quad (c)$$

La velocidad de B no se puede obtener directamente de la ecuación c puesto que contiene cuatro incógnitas, la magnitud y dirección de $\vec{v}_B$, OB y $\dot{OB}$. De la geometría del sistema se puede calcular la distancia OB, pero se debe escribir otra ecuación para $\vec{v}_B$. Introduciendo un segundo sistema de ejes móviles, como se ve en la figura 2.41, se puede escribir para $\vec{v}_B$ una relación adicional.

Nótese que: se conoce el movimiento del origen del sistema $x_1y_1z_1$, el movimiento de los ejes se puede expresar como una función de β pero no es conocido y en este sistema el movimiento del punto B está bien definido (B está unido a x_1, y_1).

Para este nuevo sistema de ejes

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= 0 \quad (\text{el origen está fijo}), \\ \vec{\omega} &= \omega_{AB}\vec{k} \text{ rad/seg}, \\ \vec{\rho} &= AB = 30\vec{i}_1 \text{ cm}, \\ \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (d)$$

Entonces

$$\vec{v}_B = \omega_{AB}\vec{k} \times 30\vec{i}_1 = 30\omega_{AB}\vec{j}_1. \quad (e)$$

Igualando las ecuaciones c y e,

$$30\omega_{AB}\vec{j}_1 = 6(OB)\vec{j} + \dot{OB}\vec{i}. \quad (f)$$

La ecuación f contiene solamente dos incógnitas no geométricas y por consiguiente se puede resolver para ω_{AB} y $\dot{OB}$. No obstante, con el objeto de resolver esta ecuación se deben expresar todos los vectores unitarios en términos de las mismas cantidades; esto es, $\vec{j}_1$ se debe escribir en términos de $\vec{i}$ y $\vec{j}$ o bien $\vec{i}$ y $\vec{j}$ se deben escribir en términos de $\vec{i}_1$ y $\vec{j}_1$. Es más conveniente reescribir $\vec{j}_1$. Así pues, haciendo referencia a la figura 2.41,

$$\vec{j}_1 = \sin \gamma \vec{i} + \cos \gamma \vec{j}. \quad (g)$$

La ecuación f se transforma en

$$30\omega_{AB}(\sin \gamma \vec{i} + \cos \gamma \vec{j}) = 6(OB)\vec{j} + \dot{OB}\vec{i}$$

Igualando los coeficientes de los vectores unitarios,

$$(\vec{i}) \quad 30\omega_{AB} \sin \gamma = \dot{OB},$$

$$(\vec{j}) \quad 30\omega_{AB} \cos \gamma = 6(OB). \quad (h)$$

Por lo tanto,

$$\omega_{AB} = \frac{OB}{5 \cos \gamma} \quad (i)$$

y

$$OB = 6(OB) \tan \gamma. \quad (j)$$

Para completar la solución, OB y γ , que son cantidades geométricas, deben ser calculadas. Utilizando la ley de los senos, de la figura 2.41 es evidente que

$$\frac{OB}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin (180 - \theta)} = \frac{AO}{\sin \gamma}. \quad (k)$$

Puesto que

$$AO = 20 \text{ cm}, \quad AB = 30 \text{ cm} \quad \text{y} \quad \theta = 60^\circ, \quad (l)$$

$$\sin \gamma = \frac{AO}{AB} \sin 120^\circ = \left(\frac{20}{30}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Entonces

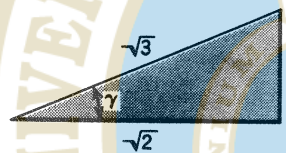
$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (m)$$

(Ver la Fig. 2.42).

Es obvio que

$$\beta = 180^\circ - \gamma - (180^\circ - \theta) = \theta - \gamma.$$

Fig. 2.42



En términos de funciones trigonométricas,

$$\sin \beta = \sin (\theta - \gamma) = \sin \theta \cos \gamma - \cos \theta \sin \gamma$$

o sea

$$\sin \beta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = 0.418.$$

Consecuentemente

$$OB = AB \frac{\sin \beta}{\sin 120^\circ} = (30) \left(\frac{0.418}{0.866}\right)$$

$$OB = 14.45 \text{ cm} \quad (o)$$

De la ecuación i,

$$\omega_{AB} = \frac{(14.45)(\sqrt{3})}{5\sqrt{2}} = 3.54 \text{ rad/seg.} \quad (p)$$

De la ecuación e, la velocidad del bloque B es

$$\bar{v}_B = 30\omega_{AB}\bar{j}_1 = 106\bar{j}_1 \text{ cm/seg.} \quad (q)$$

Nótese que este resultado es el mismo que el de la ecuación o del ejemplo 2.12.

Ejemplo 2.18. El miembro OR , del mecanismo plano de cuatro barras que se muestra, gira en el sentido de las manecillas del reloj con una rapidez angular constante de 4 rad/seg. Determinar la aceleración del punto P cuando $\theta = 53.2^\circ$ y $\beta = 90^\circ$.

El sistema xyz está unido a la barra 3. En este sistema el movimiento del pasador P está bien definido, esto es, pertenece a la barra 3 y por lo tanto no se

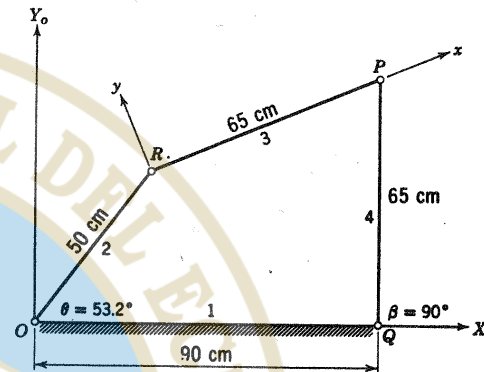


Fig. 2.43

mueve con relación al sistema xyz . El origen del sistema móvil coincide con el pasador en R , como consecuencia, de la información que proporciona el enunciado del problema se conoce el movimiento de R y del origen móvil.

En general, la aceleración de P es

$$\bar{a}_P = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{a} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (a)$$

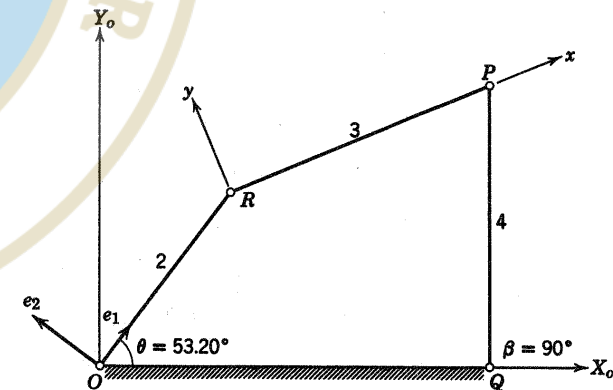


Fig. 2.44

En este caso, el origen móvil R describe una trayectoria circular, así que $\ddot{\bar{R}}$ en general tendrá dos componentes una tangencial y otra normal.

$$\ddot{\bar{R}} = \dot{\bar{\omega}}_2 \times \bar{R} + \bar{\omega}_2 \times (\bar{\omega}_2 \times \bar{R}), \quad (b)$$

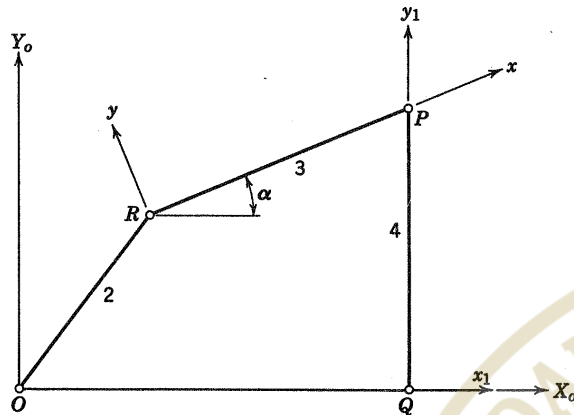


Fig. 2.45

donde

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_2 &= \omega_2 \bar{k} = -4\bar{k} \text{ rad/seg}, \\ \dot{\bar{\omega}}_2 &= 0 \quad (\bar{\omega}_2 \text{ es constante}), \\ \bar{R} &= \overline{OR} = 50\bar{e}_1 \text{ cm},\end{aligned}$$

Entonces

$$\ddot{R} = -800\bar{e}_1, \text{ cm/seg}^2$$

donde $\bar{e}_1$ es un vector unitario definido como se indica en la figura 2.44.

Buscaremos los términos restantes de la ecuación a,

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \omega_3 \bar{k} \quad (\bar{\omega} \text{ de la barra 3}), \\ \dot{\bar{\omega}} &= \dot{\omega}_3 \bar{k} \quad (\dot{\bar{\omega}} \text{ de la barra 3}), \\ \bar{\rho} &= (RP)\bar{i}, \\ \bar{a} &= 0, \\ \bar{v} &= 0\end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(el pasador } P \text{ está unido a la barra 3).} \end{array} \right.$$

Así que

$$\begin{aligned}\bar{a}_P &= -800\bar{e}_1 + (\dot{\omega}_3 \bar{k}) \times (RP\bar{i}) + \omega_3 \bar{k} \times [(\omega_3 \bar{k}) \times (RP\bar{i})], \\ \bar{a}_P &= -800\bar{e}_1 + (RP)\dot{\omega}_3 \bar{j} - (RP)\omega_3^2 \bar{i}\end{aligned} \quad (f)$$

Nótese que la aceleración de P no se puede calcular ya que la ecuación f contiene cuatro incógnitas, la magnitud y dirección de $\bar{a}_P$, $\dot{\omega}_3$ y ω_3 . Para hallar $\bar{a}_P$ se debe escribir otra ecuación que la contenga. Definiremos un segundo sistema de ejes móviles $x_1y_1z_1$, que uniremos al eslabón 4 como se muestra en la figura 2.45 y se puede aplicar nuevamente la ecuación general, en la forma siguiente:

$$\ddot{R} = 0 \quad (\text{el punto } Q \text{ no se mueve}),$$

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}} &= \dot{\omega}_4 \bar{k} \quad (\dot{\bar{\omega}} \text{ de la barra 4}), \\ \bar{\omega} &= \omega_4 \bar{k} \quad (\bar{\omega} \text{ de la barra 4}), \\ \bar{\rho} &= \overline{QP} = QP\bar{j}_1,\end{aligned} \quad (g)$$

$$\left. \begin{aligned}\bar{a} &= 0, \\ \bar{v} &= 0\end{aligned} \right\} \quad (\text{el pasador } P \text{ está unido a la barra 4}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\bar{a}_P &= (\dot{\omega}_4 \bar{k}) \times (QP\bar{j}_1) + (\omega_4 \bar{k}) \times [(\omega_4 \bar{k}) \times (QP\bar{j}_1)], \\ \bar{a}_P &= -(QP)\dot{\omega}_4 \bar{i}_1 - (QP)\omega_4^2 \bar{j}_1.\end{aligned} \quad (h)$$

Las ecuaciones f y h corresponden a la aceleración del mismo punto, de manera que,

$$-800\bar{e}_1 + (RP)\omega_3 \bar{j} - (RP)\omega_3^2 \bar{i} = -(QP)\dot{\omega}_4 \bar{i}_1 - (QP)\omega_4^2 \bar{j}_1. \quad (i)$$

La ecuación i no se puede resolver puesto que contiene cuatro incógnitas ω_3 , $\dot{\omega}_3$, ω_4 y $\dot{\omega}_4$. Afortunadamente, dos de estas cantidades son velocidades y pueden calcularse de las ecuaciones de la velocidad.

Usando el sistema xyz , la velocidad de P es

$$\bar{v}_P = \ddot{R} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{v}, \quad (j)$$

donde

$$\ddot{R} = \bar{\omega}_2 \times \bar{R} = -200\bar{e}_2 \quad (k)$$

y $\bar{\omega}$, $\bar{\rho}$ y $\bar{v}$ aparecen en las ecuaciones e .

La velocidad es

$$\bar{v}_P = -200\bar{e}_2 + (RP)\omega_3 \bar{j} \quad (l)$$

Usando el sistema $x_1y_1z_1$,

$$\ddot{R} = 0$$

($\bar{\omega}$, $\bar{\rho}$ y $\bar{v}$ están dadas en las ecuaciones g). Entonces

$$\bar{v}_P = -(QP)\omega_4 \bar{i}_1. \quad (m)$$

Igualando,

$$-(QP)\omega_4 \bar{i}_1 = -200\bar{e}_2 + (RP)\omega_3 \bar{j}. \quad (n)$$

Para resolver esta ecuación vectorial, se deben escribir los vectores unitarios en términos de vectores unitarios comunes. Para la posición del mecanismo que se muestra,

$$\begin{aligned}\bar{i}_1 &= \bar{i}_0, \\ \bar{e}_2 &= -\sin \theta \bar{i}_0 + \cos \theta \bar{j}_0,\end{aligned} \quad (o)$$

y

$$\bar{j} = -\sin \alpha \bar{i}_0 + \cos \alpha \bar{j}_0.$$

Sustituyendo,

$$-(QP)\omega_4 \bar{i}_0 = -200(-\sin \theta \bar{i}_0 + \cos \theta \bar{j}_0) + (RP)\omega_3(-\sin \alpha \bar{i}_0 + \cos \alpha \bar{j}_0),$$

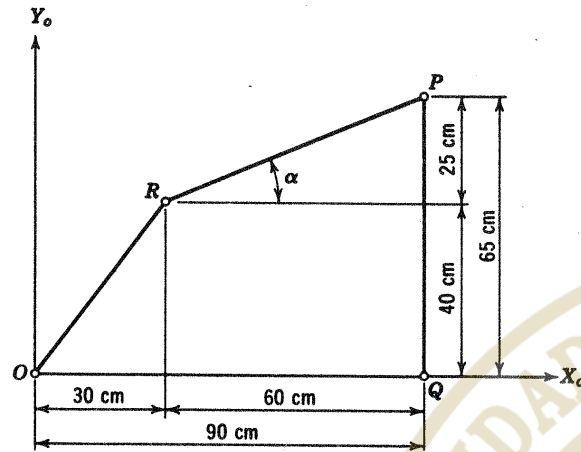


Fig. 2.46

e igualando los coeficientes de los vectores unitarios,

$$(\vec{i}_0) \quad -(QP)\omega_4 = 200 \sin \theta - RP\omega_3 \sin \alpha,$$

$$(\vec{j}_0) \quad 0 = -200 \cos \theta + RP\omega_3 \cos \alpha,$$

de la cual

$$\omega_3 = \left(\frac{200}{RP}\right) \left(\frac{\cos \theta}{\cos \alpha}\right)$$

y

$$\omega_4 = \frac{(RP \sin \alpha)}{QP} \left(\frac{200 \cos \theta}{RP \cos \alpha}\right) - \left(\frac{200}{QP}\right) \sin \theta$$

o sea

$$\omega_4 = \left(\frac{200}{QP}\right) [\tan \alpha \cos \theta - \sin \theta].$$

De la figura 2.46,

$$\tan \alpha = \frac{25}{60} = \frac{5}{12};$$

$$\omega_3 = \left(\frac{200}{65}\right) \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{12}{13}}\right)$$

$$\omega_3 = 2 \text{ rad/seg};$$

$$\omega_4 = \left(\frac{40}{13}\right) \left[\left(\frac{5}{12}\right) \left(\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{4}{5}\right)\right],$$

$$\omega_4 = -\frac{22}{13} \text{ rad/seg}.$$

Ahora se puede resolver la ecuación i para $\dot{\omega}_3$ u $\dot{\omega}_4$. Reescribiendo los vectores unitarios,

$$\vec{e}_1 = \cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0, \quad (s)$$

$$\vec{i} = \cos \alpha \vec{i}_0 + \sin \alpha \vec{j}_0,$$

y

$$\vec{j}_1 = \vec{j}_0.$$

Entonces

$$-800(\cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0) + (RP)\dot{\omega}_3(-\sin \alpha \vec{i}_0 + \cos \alpha \vec{j}_0) - (RP)\omega_3^2(\cos \alpha \vec{i}_0 + \sin \alpha \vec{j}_0) = -(QP)\dot{\omega}_4 \vec{i}_0 - (QP)\omega_4^2 \vec{j}_0. \quad (t)$$

Igualando los coeficientes de $\vec{i}_0$ y $\vec{j}_0$,

$$(\vec{i}_0) \quad -800 \cos \theta - RP\dot{\omega}_3 \sin \alpha - RP\omega_3^2 \cos \alpha = QP\dot{\omega}_4, \quad (u)$$

$$(\vec{j}_0) \quad -800 \sin \theta + RP\dot{\omega}_3 \cos \alpha - RP\omega_3^2 \sin \alpha = -QP\omega_4^2.$$

Resolviendo para $\dot{\omega}_3$ la segunda de las ecuaciones u ,

$$-(800) \left(\frac{4}{5}\right) + (65)(\dot{\omega}_3) \left(\frac{60}{65}\right) - (65)(2^2) \left(\frac{25}{65}\right) = -(65) \left(-\frac{22}{13}\right)^2,$$

de la cual

$$\dot{\omega}_3 = \frac{148}{12} - \frac{(22)^2}{(12)(13)},$$

$$\dot{\omega}_3 = 12.33 - 3.10 = 9.23 \text{ rad/seg}^2.$$

El primer miembro de la ecuación t es la aceleración del pasador P .

$$\vec{a}_P = -800 \left[\frac{3}{5} \vec{i}_0 + \frac{4}{5} \vec{j}_0 \right] + (65)(9.23) \left[-\frac{25}{65} \vec{i}_0 + \frac{60}{65} \vec{j}_0 \right] - (65)(2)^2 \left[\frac{60}{65} \vec{i}_0 + \frac{25}{65} \vec{j}_0 \right],$$

$$\vec{a}_P = -480\vec{i}_0 - 640\vec{j}_0 - 230.75\vec{i}_0 + 553.80\vec{j}_0 - 240\vec{i}_0 - 100\vec{j}_0,$$

$$\vec{a}_P = -950.75\vec{i}_0 - 187.25\vec{j}_0 \text{ cm/seg}^2. \quad (v)$$

Ejemplo 2.19. La pieza 2, del mecanismo plano que se muestra, gira alrededor del punto fijo A con una rapidez angular de 2 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj y una variación de dicha rapidez respecto al tiempo, de 4 rad/seg² de sentido contrario a las manecillas del reloj. Determinar la aceleración del punto P , cuando $\theta = 60^\circ$. Ver figura 2.47.

Como en los ejemplos anteriores, el primer paso en la solución del problema consiste en elegir los sistemas de coordenadas. La figura 2.48 muestra los sistemas que se han elegido con sus respectivas orientaciones. Nótese que los datos del enunciado se utilizan de inmediato con el sistema xyz . En general, la aceleración está dada por

$$\vec{a}_P = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (2.28 \text{ repetida})$$

Fig. 2.47

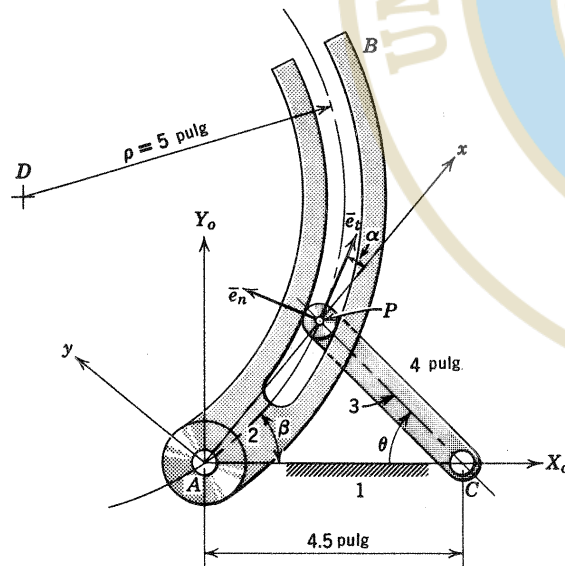
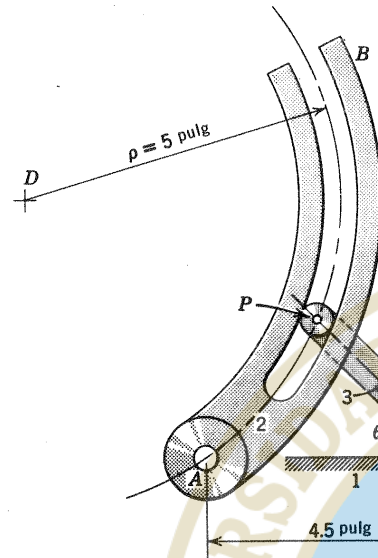


Fig. 2.48

En este problema,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= 0 \quad (\text{el origen está fijo}), \\ \dot{\omega} &= \dot{\omega}_2 = 4\bar{k} \text{ rad/seg}^2, \\ \bar{\omega} &= \bar{\omega}_2 = -2\bar{k} \text{ rad/seg}, \\ \bar{\rho} &= \overline{AP} = AP\bar{i} \text{ pulg}, \\ \bar{\mathbf{v}} &= \dot{s}\bar{e}_t \text{ pulg/seg}, \\ \bar{\mathbf{a}} &= \ddot{s}\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n \text{ pulg/seg}^2.\end{aligned}\quad (a)$$

Nótese que en este momento se desconocen $\dot{s}$ y $\ddot{s}$.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_P &= (4\bar{k}) \times (AP\bar{i}) + (-2\bar{k}) \times [(-2\bar{k}) \times (AP\bar{i})] \\ &\quad + \ddot{s}\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n + 2[(-2\bar{k}) \times (\dot{s}\bar{e}_t)],\end{aligned}\quad (b)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_P = 4AP\bar{j} - 4(AP)\bar{i} + \ddot{s}\bar{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n - 4\dot{s}\bar{e}_n,$$

o sea

$$\bar{\mathbf{a}}_P = -4AP\bar{i} + 4AP\bar{j} + \ddot{s}\bar{e}_t + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho} - 4\dot{s}\right)\bar{e}_n.\quad (c)$$

La ecuación c contiene cinco incógnitas. Una de ellas, AP , se puede obtener resolviendo un problema de geometría, no así las cuatro restantes; estas cuatro cantidades son: la magnitud y dirección de $\bar{\mathbf{a}}_P$, $\dot{s}$ y $\ddot{s}$. Como en otras ocasiones se debe escribir una ecuación adicional. Se establece un sistema de ejes móviles como el que se muestra en la figura 2.49.

Para este sistema,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= 0, \\ \dot{\omega} &= \dot{\omega}_3 = \dot{\omega}_3\bar{k} \text{ rad/seg}^2, \\ \bar{\omega} &= \bar{\omega}_3 = \omega_3\bar{k} \text{ rad/seg}, \\ \bar{\rho} &= \overline{CP} = CP\bar{j}_1 \text{ pulg}, \\ \bar{\mathbf{a}} &= 0, \\ \bar{\mathbf{v}} &= 0\end{aligned}\quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} (P \text{ está fijo en el sistema } x_1y_1z_1).\quad (d)$$

La aceleración es

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}_P &= (\omega_3\bar{k}) \times (CP\bar{j}_1) + (\omega_3\bar{k}) \times [(\omega_3\bar{k}) \times (CP\bar{j}_1)], \\ \bar{\mathbf{a}}_P &= -(CP)\omega_3\bar{i}_1 - (CP)\omega_3^2\bar{j}_1.\end{aligned}\quad (e)$$

Igualando las ecuaciones c y e ,

$$-(CP)\omega_3\bar{i}_1 - (CP)\omega_3^2\bar{j}_1 = -4AP\bar{i} + 4AP\bar{j} + \ddot{s}\bar{e}_t + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho} - 4\dot{s}\right)\bar{e}_n.\quad (f)$$

Nótese que la ecuación f contiene cuatro incógnitas no geométricas, ω_3 , $\dot{\omega}_3$, $\dot{s}$ y $\ddot{s}$. Dos de estas cantidades son velocidades y se pueden calcular mediante un análisis de velocidades.

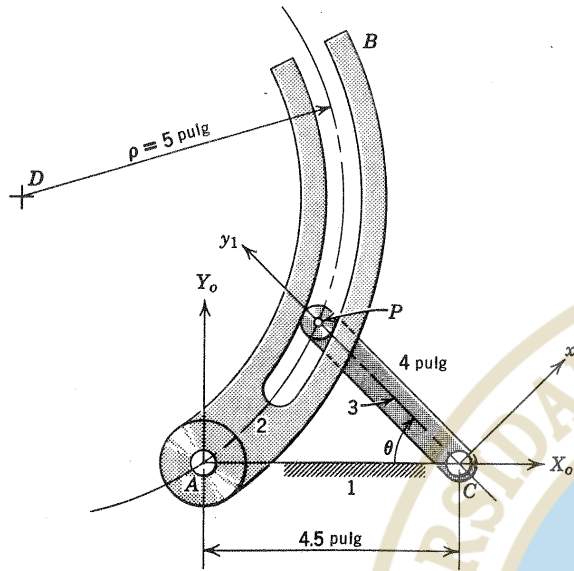


Fig. 2.49

En consecuencia usando el sistema xyz de la figura 2.48,

$$\bar{v}_P = (-2\bar{k}) \times (AP\bar{i}) + \dot{s}\bar{e}_t = -2AP\bar{j} + \dot{s}\bar{e}_t. \quad (g)$$

Usando el sistema $x_1y_1z_1$,

$$\bar{v}_P = (\omega_3\bar{k}) \times (CP\bar{j}_1) = -CP\omega_3\bar{i}_1. \quad (h)$$

Igualando las ecuaciones g y h y reagrupando se obtiene

$$-CP\omega_3\bar{i}_1 = -2AP\bar{j} + \dot{s}\bar{e}_t. \quad (i)$$

Como en el ejemplo anterior, se deben escribir los vectores unitarios en términos de un conjunto de vectores unitarios comunes, pero este procedimiento, lleva bastante tiempo; en lugar de eso, la ecuación vectorial (i) se puede presentar gráficamente como se ve en la figura 2.50. El vector $-CP\omega_3\bar{i}_1$ debe ser igual a la suma de los dos vectores $-2AP\bar{j}$ y $\dot{s}\bar{e}_t$. Principiaremos por dibujar el vector $-2AP\bar{j}$, que está completamente definido puesto que AP es una cantidad positiva que se puede determinar de la geometría del mecanismo. Debemos sumar el siguiente vector $\dot{s}\bar{e}_t$, que está a lo largo de la dirección $\bar{e}_t$ y definido en la figura 2.48. El vector $\dot{s}\bar{e}_t$ se debe dibujar hacia arriba y hacia la derecha a fin de satisfacer la ecuación i , además, debe tener su extremo en el eje $\bar{i}_1$. Se ve inmediatamente que el vector $-CP\omega_3\bar{i}_1$ está orientado en la dirección positiva de $\bar{i}_1$, y en consecuencia, $-CP\omega_3$ es una cantidad positiva, y debido a que el factor CP es una dimensión positiva, se sigue que ω_3 será negativa.

Utilizando la ley de los senos (Fig. 2.50),

$$\frac{CP|\omega_3|}{\sin \psi} = \frac{2AP}{\sin \lambda} = \frac{\dot{s}}{\sin \gamma} \quad (j)$$

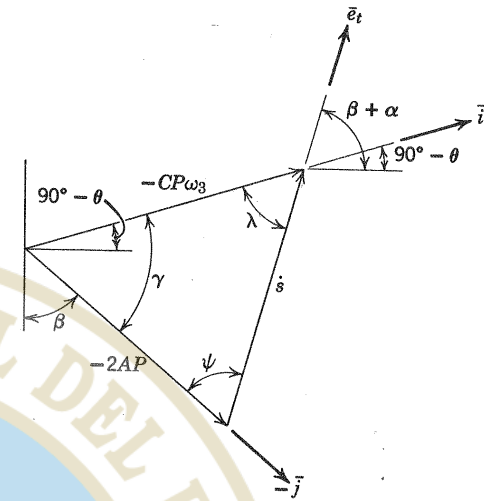


Fig. 2.50

De la geometría de la figura 2.50,

$$\begin{aligned} \gamma &= (90^\circ - \theta) + (90^\circ - \beta) = 180^\circ - (\theta + \beta), \\ \lambda &= (\beta + \alpha) - (90^\circ - \theta) = \alpha + \beta + \theta - 90^\circ, \\ \psi &= 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (\alpha + \beta) = 90^\circ - \alpha. \end{aligned} \quad (k)$$

Aplicando la ley de los cosenos en la figura 2.49,

$$\begin{aligned} (AP)^2 &= (CP)^2 + (AC)^2 - 2(AC)(CP) \cos \theta, \\ (AP)^2 &= (4)^2 + (4.5)^2 - (2)(4)(4.5) \cos \theta, \\ (AP)^2 &= 18.25, \quad AP = \sqrt{18.25} \text{ pulg.} \end{aligned} \quad (l)$$

Usando la ley de los senos,

$$\begin{aligned} \frac{CP}{\sin \beta} &= \frac{AP}{\sin \theta}, \quad \sin \beta = \frac{4}{\sqrt{18.25}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ \beta &= \text{ang sen } (0.811) = 54.3^\circ. \end{aligned} \quad (m)$$

Se puede obtener el ángulo α estudiando el dibujo ligeramente alterado de la figura 2.48, que se ve en la figura 2.51.

Usando nuevamente la ley de los cosenos,

$$\begin{aligned} DP^2 &= DA^2 + AP^2 - 2(DA)(AP) \cos \psi, \\ \cos \psi &= \frac{AP}{2DA} = \frac{\sqrt{18.25}}{10}, \\ \psi &= \text{ang cos } (0.427) = 64.7^\circ. \end{aligned}$$

De la figura 2.51,

$$\alpha = 180^\circ - \psi - 90^\circ,$$

$$\alpha = 90^\circ - \psi = 25.3^\circ.$$

Finalmente, de la ecuación k ,

$$\gamma = 180^\circ - (60.0^\circ + 54.3^\circ) = 65.7^\circ,$$

$$\lambda = 25.3^\circ + 54.3^\circ + 60.0^\circ - 90.0^\circ = 49.6^\circ,$$

$$\psi = 90^\circ - 25.3^\circ = 64.7^\circ.$$

Utilizando la ecuación j ,

$$|\omega_3| = \left(\frac{2AP}{CP} \right) \left(\frac{\sin \psi}{\sin \lambda} \right) = \left[\frac{(2)(4.275)}{(4)} \right] \left[\frac{0.903}{0.761} \right],$$

$$|\omega_3| = 2.53 \text{ rad/seg};$$

$$\dot{s} = (2AP) \left(\frac{\sin \gamma}{\sin \lambda} \right) = (2)(4.275) \left[\frac{0.910}{0.761} \right],$$

$$\dot{s} = 10.23 \text{ pulg/seg}.$$

Como se discutió previamente ω_3 debe ser una cantidad negativa a fin de que la cantidad $-CP\omega_3\bar{i}$ sea un vector en la dirección de $+\bar{i}$. Así que

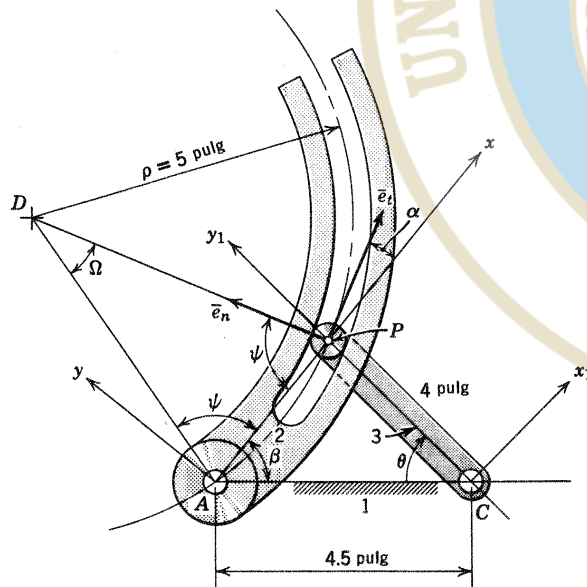


Fig. 2.51

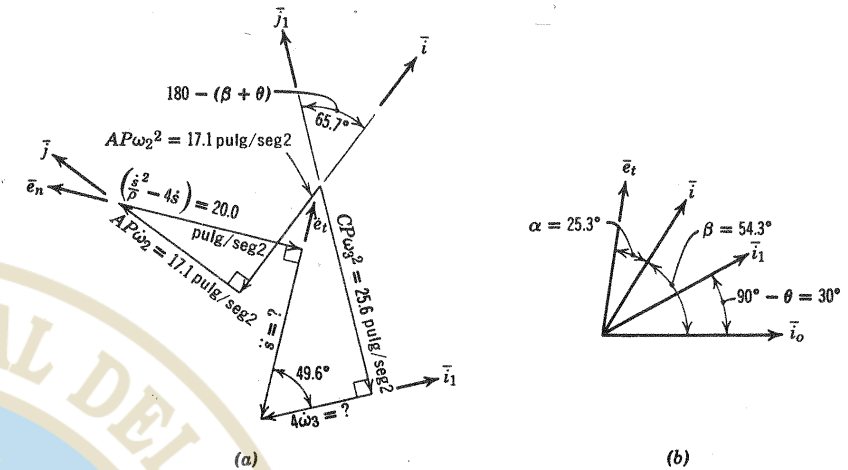


Fig. 2.52

$$\bar{\omega}_3 = -2.53k \text{ rad/seg}$$

$$\bar{v} = 10.23\bar{e}_t \text{ pulg/seg}.$$

Nótese que cuando se sustituye $\bar{\omega}_3$ en una ecuación de aceleración no interesa el signo puesto que se toma el cuadrado de la cantidad.

Volviendo ahora a la ecuación f ,

$$\begin{aligned} -4\dot{\omega}_3\bar{i}_1 - (4)(-2.53)^2\bar{j}_1 &= -(4)(4.275)\bar{i} + (4)(4.275)\bar{j} \\ &+ \ddot{s}\bar{e}_t + \left[\frac{(10.23)^2}{5} - 4(10.23) \right] \bar{e}_n \\ -4\dot{\omega}_3\bar{i}_1 - 25.6\bar{j}_1 &= -17.1\bar{i} + 17.1\bar{j} + \ddot{s}\bar{e}_t - 20.0\bar{e}_n. \end{aligned} \quad (q)$$

La ecuación q contiene solamente dos incógnitas, ω_3 y $\ddot{s}$, de manera que puede resolverse. En lugar de reescribir los vectores unitarios, nuevamente se ahorrará tiempo dibujando la ecuación vectorial como se muestra en la figura 2.52a.

Como ya se conoce la geometría del mecanismo, los ángulos que se muestran en la figura 2.52 se han determinado usando los ángulos de la ecuación n , la figura 2.51 y la figura 2.52b.

Sumando los vectores a lo largo de $CP\omega_3^2$ se llega a la solución de $\ddot{s}$ sin hacer intervenir la otra incógnita ω_3 . Esto es,

$$\begin{aligned} 25.6 &= \ddot{s} \sin(49.6^\circ) + (20.0) \cos(49.6^\circ) + (17.1) \cos(65.7^\circ) \\ &\quad - (17.1) \sin(65.7^\circ) \end{aligned}$$

o sea

$$\begin{aligned} 25.6 &= 0.761\ddot{s} + (20.0)(0.648) + (17.1)(0.411) - (17.1)(0.911), \\ 25.6 &= 0.761\ddot{s} + 12.96 + 17.1(0.411 - 0.911), \end{aligned}$$

$$25.6 = 0.761\ddot{s} + 12.96 + 17.1(-0.500),$$

$$0.761\ddot{s} = 25.6 - 12.96 + 8.55 = 21.19,$$

$$\ddot{s} = 27.8 \text{ pulg/seg}^2.$$

Nótese que, a fin de que cierre el polígono vectorial, la componente tangencial de $\vec{a}$ debe estar dirigida hacia abajo y hacia la izquierda. Se supuso que $\ddot{s}$ estaba en la dirección $+\vec{e}_t$ y por lo tanto $\ddot{s} = -27.8 \text{ pulg/seg}^2$. De la ecuación q se sigue que la aceleración absoluta de P es

$$\vec{a}_P = -17.1\vec{i} + 17.1\vec{j} - 27.8\vec{e}_t - 20.0\vec{e}_n \text{ pulg/seg}^2. \quad (r)$$

Ejemplo 2.20. La manivela del mecanismo en el espacio que se muestra en las figuras 2.53 y 2.54 gira en el plano X_0Z_0 con velocidad angular $\vec{\omega}_2 = -8\vec{j}_0$ rad/seg. La corredera C está obligada a moverse paralelamente al eje X_0 . Hallar la velocidad de los puntos B y C y la velocidad angular de la barra 4. La barra 5 se muestra en uno de los extremos de su carrera.

$$AB = 30 \text{ cm}$$

$$AD = 50 \text{ cm}$$

$$BC = 65 \text{ cm}$$

$$DE = 30 \text{ cm}$$

Como se ve en la figura 2.54, los ejes de coordenadas móviles xyz están orientados normal y a lo largo del miembro AD , entonces

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v}, \quad (2.27 \text{ repetida})$$

donde

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\omega}_2 \times \vec{R},$$

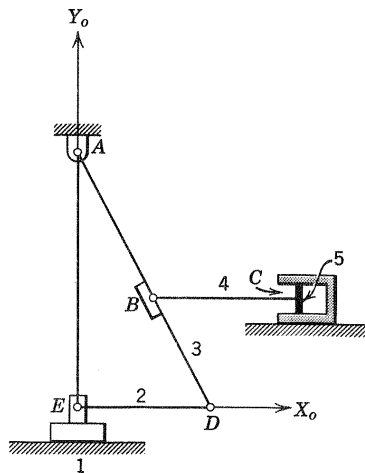


Fig. 2.53

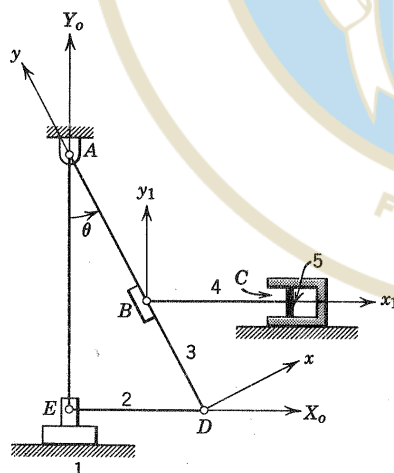


Fig. 2.54

$$\vec{\omega}_2 = -8\vec{j}_0,$$

$$\vec{R} = \vec{ED} = 30\vec{i}_0,$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 = -8\vec{j}_0,$$

$$\vec{\rho} = \vec{DB} = 20\vec{j},$$

$$\vec{v} = 0.$$

$$\vec{v}_B = (-8\vec{j}_0) \times (30\vec{i}_0) + (-8\vec{j}_0) \times (20\vec{j}),$$

$$\vec{v}_B = 240\vec{k}_0 - 160(\vec{j}_0 \times \vec{j}). \quad (b)$$

$$\vec{j} = -\sin \theta \vec{i}_0 + \cos \theta \vec{j}_0; \quad (c)$$

$$\vec{v}_B = 240\vec{k}_0 - 160[\vec{j}_0 \times (-\sin \theta \vec{i}_0 + \cos \theta \vec{j}_0)],$$

$$\vec{v}_B = 240\vec{k}_0 - 160 \sin \theta \vec{k}_0 \quad (d)$$

$$\sin \theta = \frac{DE}{AD} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}; \quad (e)$$

$$\vec{v}_B = 80 \left[3 - (2) \left(\frac{3}{5} \right) \right] \vec{k}_0,$$

$$\vec{v}_B = (240) \left(\frac{3}{5} \right) \vec{k}_0 = 144\vec{k}_0 \text{ cm/seg.} \quad (f)$$

Escribiremos la velocidad de C utilizando el sistema $x_1y_1z_1$ que también se muestra en la figura 2.54.

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{v},$$

$$\dot{\vec{R}} = \vec{v}_B = 144\vec{k}_0 \text{ cm/seg,}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_4 = \omega_4\vec{j}_1 \text{ rad/seg,}$$

$$\vec{\rho} = \vec{BC} = 65\vec{i}_1 \text{ cm,}$$

$$\vec{v} = 0.$$

$$\vec{v}_C = 144\vec{k}_0 + (\omega_4\vec{j}_1) \times (65\vec{i}_1),$$

$$\vec{v}_C = 144\vec{k}_0 - 65\omega_4\vec{k}_1. \quad (h)$$

Debido a que la barra 5 se muestra en un extremo de su carrera,

$$\vec{v}_C = 0. \quad (i)$$

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1,$$

$$\omega_4 = \frac{144}{65} = 2.21 \text{ rad/seg.}$$

o sea

$$\bar{\omega}_s = 2.21\bar{j}_1 \text{ rad/seg.} \quad (j)$$

Ejemplo 2.21. El centro del disco se está moviendo con una velocidad $\bar{v}_0$ y rueda sin deslizar con una velocidad angular $\bar{\omega}$. Ver figura 2.55.

Determinar la velocidad de los puntos B y C sobre la circunferencia del disco de 2 m de diámetro, cuando $\bar{v}_0 = 4 \text{ m/seg}$ y $\bar{\omega} = 4 \text{ rad/seg}$.

Se orientan los ejes como se ve en la figura 2.56.

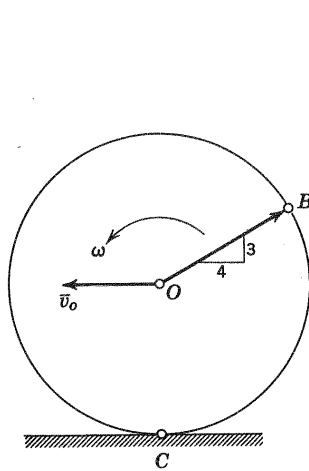


Fig. 2.55

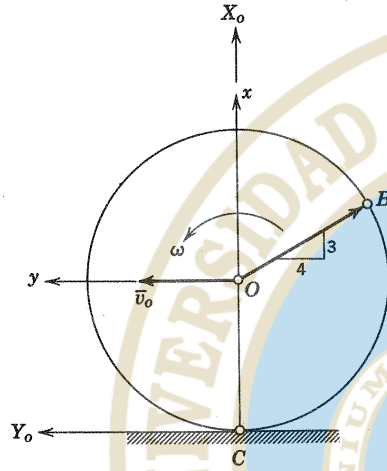


Fig. 2.56

$$\bar{v}_B = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{v},$$

donde

$$\dot{\bar{R}} = 4\bar{j} \text{ m/seg,}$$

$$\bar{\omega} = 4\bar{k} \text{ rad/seg,}$$

$$\bar{\rho} = +1 \left[\frac{3}{5} \bar{i} - \frac{4}{5} \bar{j} \right] \text{ m,}$$

$$\bar{v} = 0.$$

$$\bar{v}_B = 4\bar{j} + (4\bar{k}) \times \frac{1}{5} (3\bar{i} - 4\bar{j}),$$

$$\bar{v}_B = 4\bar{j} + 2.4\bar{j} + 3.2\bar{i},$$

$$\bar{v}_B = 3.2\bar{i} + 6.4\bar{j} \text{ m/seg.}$$

La velocidad de C es

donde

$$\bar{v}_C = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{v},$$

$$\dot{\bar{R}} = 4\bar{j} \text{ m/seg,}$$

$$\bar{\omega} = 4\bar{k} \text{ rad/seg,}$$

$$\bar{\rho} = -\bar{i} \text{ m,} \quad (c)$$

$$\bar{v} = 0.$$

$$\bar{v}_C = 4\bar{j} + (4\bar{k}) \times (-\bar{i}),$$

$$\bar{v}_C = 4\bar{j} - 4\bar{j} = 0. \quad (d)$$

El hecho de que $\bar{v}_C = 0$ es sumamente útil en la solución de una clase importante de problemas de cinemática, según se verá en la siguiente sección.

2.6 Movimiento relativo y eje instantáneo de rotación. Las ecuaciones del movimiento relativo para un cuerpo rígido y que anteriormente se dedujeron son

$$\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho}, \quad (2.27a)$$

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}). \quad (2.28a)$$

Estas ecuaciones muestran que el movimiento de un punto situado en un cuerpo rígido, es una combinación de dos movimientos:

1. Una translación de O' dada por $\dot{\bar{R}}, \ddot{\bar{R}}$.
2. Una rotación alrededor de un eje que pasa por O' dada por

$$\bar{\omega} \times \bar{\rho}, \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho}, \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}).$$

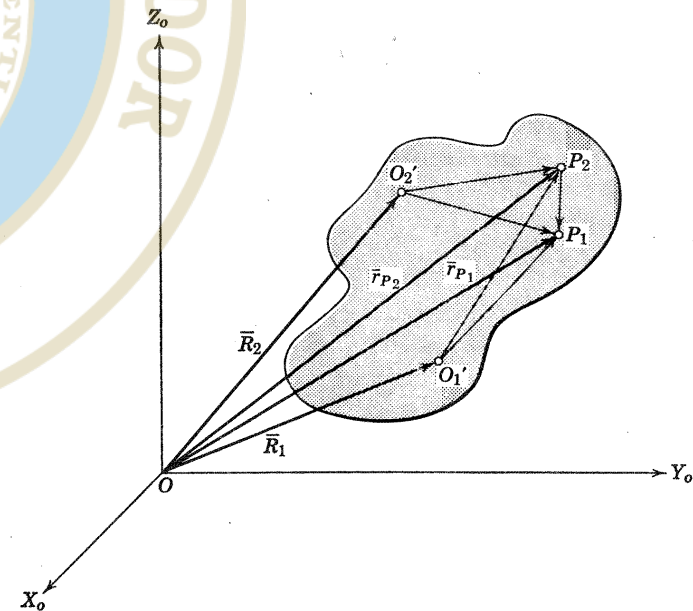


Fig. 2.57

Demostraremos ahora que el vector velocidad angular $\bar{\omega}$ es independiente del origen del sistema móvil de coordenadas. Consideremos la figura 2.57 donde los orígenes de los dos sistemas están unidos al cuerpo rígido en O_1' y O_2' . Se localizan en el cuerpo rígido dos puntos P_1 y P_2 mediante los vectores de posición $\overline{O_1'P_1}$, $\overline{O_1'P_2}$ y $\overline{O_2'P_1}$, $\overline{O_2'P_2}$ a partir del origen de cada sistema de coordenadas. Examinaremos la consecuencia de suponer que las velocidades angulares $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$, asociadas con cada origen, son diferentes. Aplicando la ecuación 2.27 se puede escribir la velocidad de los puntos P_1 y P_2 en términos de cada sistema móvil de coordenadas.

Para el origen en O_1' ,

$$\dot{\vec{r}}_{P_1} = \dot{\vec{R}}_1 + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1'P_1} \quad (a)$$

y

$$\dot{\vec{r}}_{P_2} = \dot{\vec{R}}_1 + \bar{\omega}_1 \times \overline{O_1'P_2}. \quad (b)$$

Para el origen en O_2' ,

$$\dot{\vec{r}}_{P_1} = \dot{\vec{R}}_2 + \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2'P_1} \quad (c)$$

y

$$\dot{\vec{r}}_{P_2} = \dot{\vec{R}}_2 + \bar{\omega}_2 \times \overline{O_2'P_2}. \quad (d)$$

Eliminando $\dot{\vec{R}}_1$ entre las ecuaciones *a* y *b* y $\dot{\vec{R}}_2$ entre las ecuaciones *c* y *d*, se deduce que

$$\dot{\vec{r}}_{P_1} - \dot{\vec{r}}_{P_2} = \bar{\omega}_1 \times (\overline{O_1'P_1} - \overline{O_1'P_2}) = \bar{\omega}_2 \times (\overline{O_2'P_1} - \overline{O_2'P_2}).$$

Nótese que $(\overline{O_1'P_1} - \overline{O_1'P_2}) = \overline{P_2P_1} = \overline{O_2'P_1} - \overline{O_2'P_2}$. Debido a que $\overline{P_2P_1}$ es arbitrario, se sigue que $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ ó sea que la velocidad angular $\bar{\omega}$ de un cuerpo rígido es independiente del origen.

Se define la cantidad $(\dot{\vec{r}}_{P_1} - \dot{\vec{r}}_{P_2})$ como la velocidad de P_1 con respecto a P_2 y se puede escribir

$$(\dot{\vec{r}}_{P_1} - \dot{\vec{r}}_{P_2}) = \bar{\omega} \times \overline{P_2P_1}. \quad (2.29)$$

Se observa que la velocidad relativa es independiente del sistema móvil de coordenadas que se elija y que si $\bar{\omega} = 0$, entonces todas las partículas del cuerpo rígido tienen la misma velocidad.

Se puede determinar la aceleración relativa y es

$$\ddot{\vec{r}}_{P_1} - \ddot{\vec{r}}_{P_2} = \bar{\omega} \times \overline{P_2P_1} + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{P_2P_1}$$

o sea

$$\ddot{\vec{r}}_{P_1} - \ddot{\vec{r}}_{P_2} = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{P_2P_1} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{P_2P_1}). \quad (2.30)$$

A causa de la característica invariante de $\bar{\omega}$ a menudo es conveniente usar las ecuaciones 2.29 y 2.30 para calcular la velocidad o aceleración

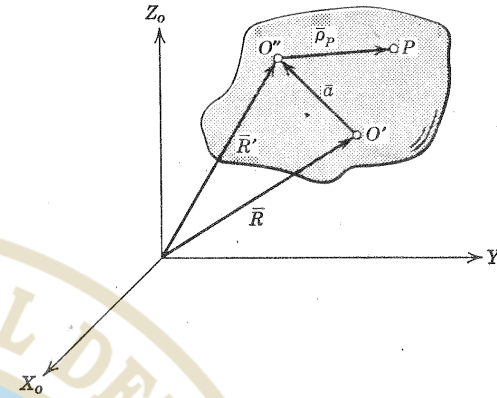


Fig. 2.58

de algún punto (digamos, P_2) sobre un cuerpo rígido cuando la velocidad o aceleración de otro punto (P_1) se conoce.

Simplificaremos ahora la ecuación 2.27. En vista de que la posición de O' es arbitraria, veremos la manera de cómo es posible considerar un nuevo origen O'' tal que los vectores $\dot{\vec{R}}'$ y $\bar{\omega}$ sean paralelos. Esto se asemeja al movimiento de un tornillo y en este caso al eje de $\bar{\omega}$ se le llama eje instantáneo de rotación. Para el movimiento en el plano $\dot{\vec{R}}$ será igual a cero y la intersección de $\bar{\omega}$ y el plano de movimiento se denomina centro instantáneo de rotación.

En la figura 2.58 la velocidad del punto O'' es $\dot{\vec{R}}' = \dot{\vec{R}} + \bar{\omega} \times \bar{a}$, en la que $\bar{a}$ se debe calcular de manera que $\dot{\vec{R}}'$ y $\bar{\omega}$ sean paralelos, entonces debemos hacer $\lambda \bar{\omega} = \dot{\vec{R}} + \bar{\omega} \times \bar{a}$, donde λ es un factor escalar. Si multiplicamos los miembros de esta ecuación escalarmente por $\bar{\omega}$, obtenemos

$$\lambda \bar{\omega} \cdot \bar{\omega} = \dot{\vec{R}} \cdot \bar{\omega} + \bar{\omega} \times \bar{a} \cdot \bar{\omega} \quad (2.31)$$

$$\lambda = \frac{\dot{\vec{R}} \cdot \bar{\omega}}{\bar{\omega}^2}$$

Entonces

$$\bar{a} \times \bar{\omega} = \dot{\vec{R}} - \frac{\dot{\vec{R}} \cdot \bar{\omega}}{\bar{\omega}^2} \bar{\omega}$$

$$(\bar{a} \times \bar{\omega}) \times \bar{\omega} = \dot{\vec{R}} \times \bar{\omega}$$

puesto que $\bar{\omega} \times \bar{\omega} = 0$. Podemos escribir

$$(\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}) \bar{a} - (\bar{\omega} \cdot \bar{a}) \bar{\omega} = \bar{\omega} \times \dot{\vec{R}}.$$

Existen muchas soluciones para $\bar{a}$, pero si en particular $\bar{\omega} \cdot \bar{a} = 0$, entonces $\bar{a} = (\bar{\omega} \times \dot{\vec{R}}) / \bar{\omega}^2$ de manera que $\bar{a}$ es perpendicular tanto a $\bar{\omega}$ como a $\dot{\vec{R}}$. La solución más general es

$$\bar{a} = \frac{\bar{\omega} \times \dot{\bar{R}}}{\omega^2} + k\bar{\omega}, \quad (2.32)$$

donde k es un escalar arbitrario. Esta es la recta llamada eje instantáneo de rotación.

Con O'' como punto base, la velocidad de cualquier otro punto P sobre el cuerpo estará dada por

$$\dot{\bar{r}}_P = \frac{\dot{\bar{R}} \cdot \bar{\omega}}{\omega^2} \bar{\omega} + \bar{\omega} \times \bar{r}_P. \quad (2.33)$$

En el movimiento plano $\dot{\bar{R}}$ y $\bar{\omega}$ son vectores perpendiculares. Entonces

$$\bar{a} = \frac{\bar{\omega} \times \dot{\bar{R}}}{\omega^2} \text{ y } \bar{a} = \frac{|\dot{\bar{R}}|}{\omega}. \quad (2.34)$$

En un gran número de los problemas de dinámica se encuentra el movimiento *plano*, en el cual todos los puntos de los cuerpos en movimiento describen trayectorias en planos paralelos y se pueden representar mediante sus proyecciones sobre un plano único llamado *plano de movimiento*. La mayor parte de los mecanismos que se utilizan en el diseño de máquinas son mecanismos planos y su análisis se lleva a cabo sobre un restridor con suma facilidad.

Cuando el movimiento de un sistema de cuerpos rígidos se restringe al plano de movimiento, se obtienen numerosas simplificaciones. Si se considera que el plano de movimiento es el plano X_0Y_0 , entonces, a lo largo de la dirección Z_0 no existe componente del desplazamiento, ni de velocidad ni de aceleración. No hay rotación fuera del plano X_0Y_0 , y por consiguiente no existen las componentes X_0 ni Y_0 de las velocidades angulares, esto significa que todos los vectores de velocidad angular están dirigidos a lo largo del eje Z_0 y que la única variación que puede ocurrir en la velocidad angular es en su magnitud. La adición vectorial de velocidades angulares (y adición vectorial de aceleraciones angulares) se reduce a la simple suma escalar de sus magnitudes. Además, las dificultades que se presentan al tratar de sumar rotaciones finitas, desaparece cuando esas rotaciones están restringidas al movimiento plano y es posible efectuar una simple adición escalar de los ángulos.

El centro instantáneo es una ayuda sencilla y efectiva para la determinación de las velocidades en el movimiento plano. Si el centro instantáneo de un cuerpo rígido se puede localizar con relación al sistema de referencia fijo, la velocidad absoluta de cualquier punto perteneciente al cuerpo se puede determinar a partir de la relación

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

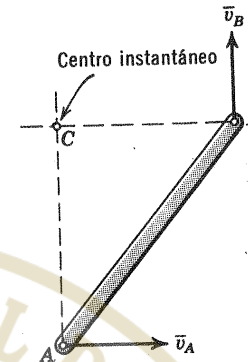


Fig. 2.59

donde $\bar{\omega}$ es la velocidad angular absoluta del cuerpo rígido y $\bar{r}$ es el vector del centro instantáneo al punto cuya velocidad se busca. Si el movimiento está restringido a un plano, se puede calcular la magnitud a partir de la expresión

$$v = \omega r.$$

La dirección de v está en el plano de movimiento y es perpendicular a $\bar{r}$. El sentido de v debe ser compatible con el sentido de ω .

Si en el movimiento plano, se conocen las direcciones de las velocidades absolutas de dos puntos del cuerpo y estos vectores velocidad no son paralelos, se puede hallar el centro instantáneo. La figura 2.59 ilustra al respecto.

Se sabe que las velocidades absolutas de los puntos A y B tienen las direcciones que se indican. Debido a que los radios vectores $\bar{CA}$ y $\bar{CB}$ se conocen y son perpendiculares a $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ respectivamente, se localiza C

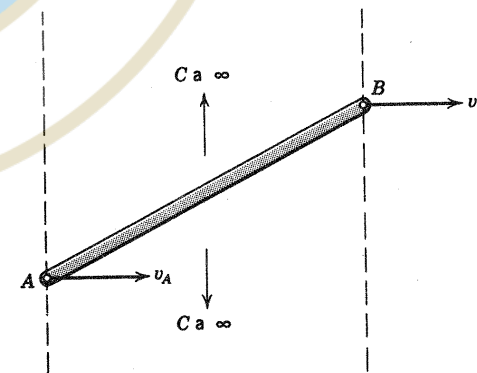


Fig. 2.60

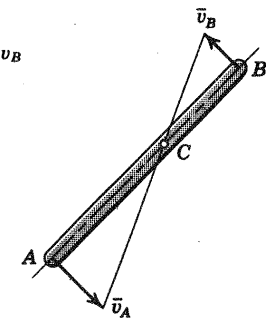


Fig. 2.61

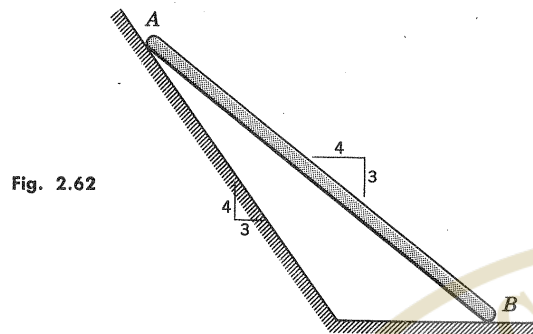


Fig. 2.62

en la intersección de las dos normales a los vectores velocidad que pasan por A y B .

Si las velocidades son paralelas, existen cualquiera de estas dos situaciones: las normales a los vectores velocidad definen dos rectas paralelas cuya intersección está infinitamente lejana, o bien ellas definen la misma recta. Estas alternativas se muestran en las figuras 2.60 y 2.61 respectivamente.

En la figura 2.60, el centro instantáneo C está infinitamente lejano. Esto significa que la barra AB tiene movimiento de traslación con relación al suelo o sea el sistema de referencia inercial, cuando

$$\omega = \frac{v_A}{CA} = \frac{v_B}{CB} = \frac{v}{\infty} = 0.$$

En la figura 2.61, ambas direcciones de las velocidades indican que el centro instantáneo está situado en la línea AB . Para localizar el centro instantáneo en una situación de esta naturaleza, es necesario conocer las magnitudes de v_A y v_B . Si se representan a una cierta escala las magnitudes de estas velocidades, como se muestra en la figura 2.61, se puede localizar el centro instantáneo haciendo uso de los triángulos semejantes de los que se obtiene la relación

$$\omega = \frac{v_A}{CA} = \frac{v_B}{CB}.$$

Algunos ejemplos ilustrarán sobre la simplificación que se logra en la obtención de velocidades al aplicar el concepto de centro instantáneo.

Ejemplo 2.22. La barra AB de 4 m se mueve de manera que sus extremos están en contacto con un piso horizontal y un plano inclinado. Si la velocidad de A es de 10 m/seg hacia abajo del plano, cuando la barra está en la posición que se muestra; determinar la velocidad de B en este instante.

Este problema se puede resolver mediante el uso de la expresión general para las velocidades utilizando los ejes de coordenadas que se ven en la figura 2.63.

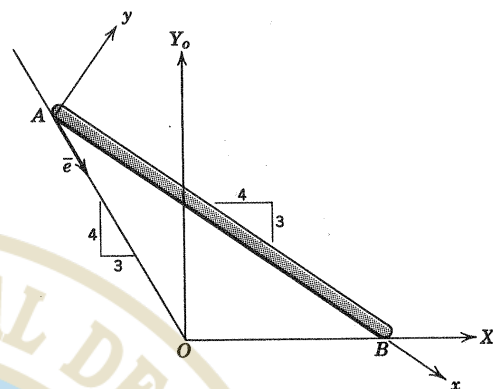


Fig. 2.63

Entonces

donde

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{v}, \quad (a)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}}_A = 10\bar{e} \text{ m/seg}, \quad (b)$$

$$\bar{\omega} = \omega\bar{k} \text{ rad/seg}, \quad (c)$$

$$\bar{\rho} = 4\bar{i} \text{ m},$$

$$\bar{v} = 0.$$

Por lo tanto

$$\dot{\mathbf{r}}_B = 10\bar{e} + 4\omega\bar{j}. \quad (d)$$

Pero

$$\dot{\mathbf{r}}_B = v_B\bar{i}_0$$

y

$$v_B\bar{i}_0 = 10\bar{e} + 4\omega\bar{j}. \quad (e)$$

Utilizando el polígono de velocidades de la figura 2.64, se puede resolver la ecuación d para v_B . Aplicando la ley de los senos,

$$\frac{v_B}{\sin \beta} = \frac{10}{\sin \alpha}, \quad v_B = 10 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}. \quad (f)$$

De la geometría de la figura 2.63,

$$\gamma = 53.2^\circ, \quad \alpha = 53.2^\circ, \quad \beta = 73.6^\circ;$$

$$v_B = 10 \frac{(0.960)}{(0.800)} = 12.0 \text{ m/seg}.$$

Por tanto

$$\dot{\mathbf{r}}_B = 12.0\bar{i}_0 \text{ m/seg}. \quad (g)$$

Aunque no es incorrecta la solución anterior, se puede lograr una simplificación mediante el uso del centro instantáneo. AB gira instantáneamente alrededor del centro instantáneo C , que se localiza como en la figura 2.65. Entonces

$$v_A = \omega(AC) \quad (h)$$

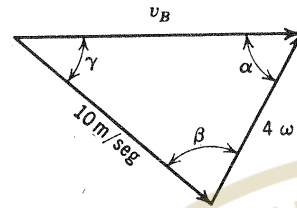
y

$$v_B = \omega(BC)$$

o sea

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} \quad (h)$$

Fig. 2.64



Puesto que se conoce v_A , se puede determinar v_B una vez que se ha resuelto la parte geométrica, esto es, una vez que se han calculado AC y BC . Aplicando la ley de los senos en la figura 2.65,

$$\frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \theta} = \frac{AB}{\sin \gamma}$$

Entonces

$$AC = AB \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$BC = AB \frac{\sin \theta}{\sin \gamma}$$

Pero

$$\lambda = 53.2^\circ - 36.8^\circ = 16.4^\circ,$$

$$\beta = 53.2^\circ,$$

$$\theta = 90^\circ - \lambda = 73.6^\circ,$$

$$\gamma = 180^\circ - (\theta + \beta) = 180^\circ - 126.8^\circ = 53.2^\circ.$$

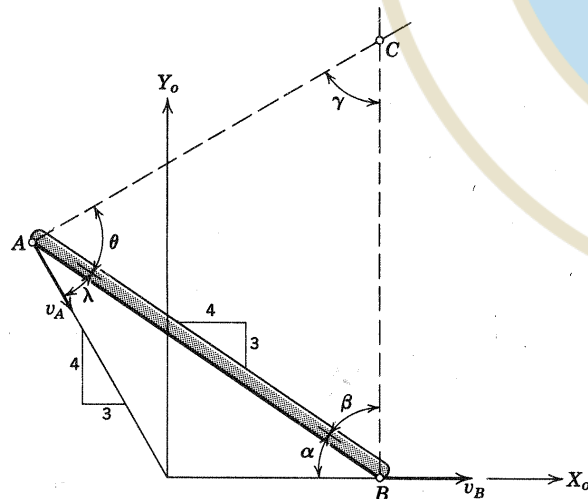


Fig. 2.65

Así que

$$AC = (4) \frac{0.800}{0.800} = 4 \text{ m}, \quad (l)$$

$$BC = (4) \left(\frac{0.960}{0.800} \right) = 4.8 \text{ m}.$$

De la ecuación h,

$$v_B = v_A \frac{BC}{AC} = (10) \left(\frac{4.8}{4} \right),$$

$$v_B = 12.0 \text{ m/seg}.$$

Debido a que v_A es hacia abajo del plano, entonces la barra gira alrededor de C en el sentido contrario a las manecillas del reloj; por lo tanto, v_B debe estar dirigida hacia la derecha a lo largo del plano horizontal, de manera que

$$\dot{r}_B = 12.0 \hat{r}_0 \text{ m/seg}.$$

Ejemplo 2.23. La figura 2.66 representa una máquina o mecanismo de bomba que consiste de un bastidor 1, una manivela 2, una biela 3 y un émbolo 4. La varilla 2 es de 50 cm de longitud, la varilla 3 es de 85 cm de longitud. La manivela gira a una razón constante de 10 rad/seg en sentido contrario a las manecillas del reloj. ¿Cuál es la rapidez del émbolo en el instante en que $x = 105 \text{ cm}$?

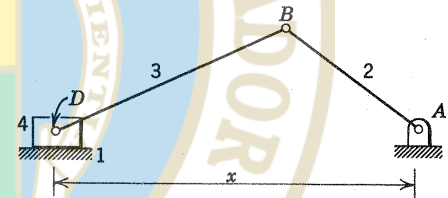


Fig. 2.66

Se localiza el centro instantáneo de la varilla 3 como se ve en la figura 2.67. En estas condiciones la rapidez del émbolo o sea del punto D es v_D . Esta se puede calcular a partir de

$$\frac{v_D}{DC} = \frac{v_B}{BC} \quad (a)$$

Se pueden calcular las distancias DC y BC utilizando la geometría del sistema. De la figura 2.67,

$$\frac{BD}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \beta} = \frac{DC}{\sin \psi}$$

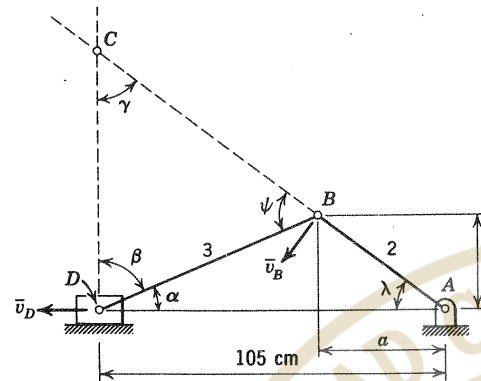
o sea

$$BC = BD \left(\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right) \quad (b)$$

y

$$DC = BD \left(\frac{\sin \beta}{\sin \psi} \right)$$

Fig. 2.67



Entonces,

$$v_D = v_B \left(\frac{DC}{BC} \right) = v_B \left[BD \left(\frac{\sin \beta}{\sin \psi} \right) \right] \left[\frac{\sin \gamma}{BD (\sin \beta)} \right],$$

$$v_D = v_B \frac{\sin \gamma}{\sin \psi} = v_B \frac{\sin \psi \cos \lambda}{\sin \psi} = v_B \cos \lambda$$

También de la figura 2.67,

$$\sin \gamma = \cos \lambda = \frac{a}{50};$$

$$\sin \psi = \sin (\alpha + \lambda) = \sin \alpha \cos \lambda + \cos \alpha \sin \lambda,$$

$$\sin \psi = \left(\frac{b}{85} \right) \left(\frac{a}{50} \right) + \left(\frac{105 - a}{85} \right) \left(\frac{b}{50} \right) = \left(\frac{b}{4250} \right) (a + 105 - a),$$

$$\sin \psi = \frac{21b}{850}$$

Por lo tanto

$$v_D = v_B \left[\frac{a/50}{21b/850} \right] = (v_B) \left(\frac{85a}{105b} \right)$$

Resolviendo para a y b ,

$$85^2 = b^2 + (105 - a)^2,$$

$$2500 = b^2 + a^2.$$

$$4725 = 11,025 - 210a$$

$$210a = 6300,$$

$$a = 30$$

$$b = 40$$

Puesto que

$$v_B = 500 \text{ cm/seg},$$

$$v_D = (500) \left(\frac{85}{105} \right) \left(\frac{30}{40} \right) = 303.5 \text{ cm/seg}.$$

Ejemplo 2.24. Consideremos el rodamiento del disco que anteriormente fue discutido. Se calcularán las velocidades de los puntos A , B y D . Ver fig. 2.68.

Si el disco rueda sin deslizamiento, entonces el punto E de la periferia y el punto F del plano, que coinciden en el instante en que el disco está en la posición que se muestra, no se mueven uno con respecto al otro; es decir, la velo-

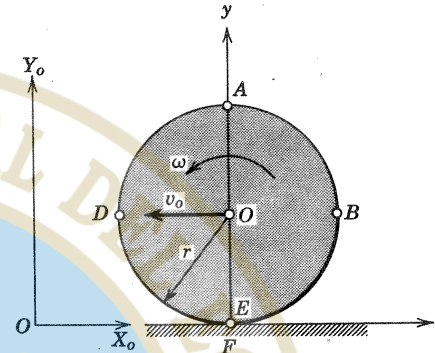


Fig. 2.68

cidad de E relativa a F es cero. Por lo tanto, el disco tiende a girar en torno al punto de contacto. El punto de contacto es el punto por el que debe pasar el eje instantáneo de rotación.

Las ecuaciones para la velocidad de A , B y D , son

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{R}} + \bar{\omega} \times \overline{\mathbf{EA}},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{R}} + \bar{\omega} \times \overline{\mathbf{EB}},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_D = \dot{\mathbf{R}} + \bar{\omega} \times \overline{\mathbf{ED}}.$$

Debido a que la velocidad del punto E es cero, las ecuaciones se simplifican:

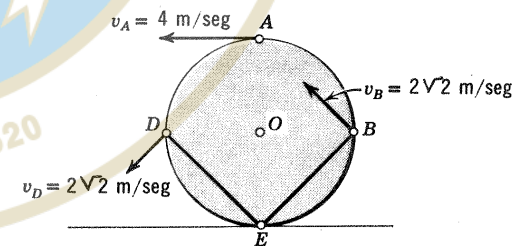


Fig. 2.69

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \bar{\omega} \times \overline{\mathbf{EA}},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \bar{\omega} \times \overline{\mathbf{EB}},$$

$$\dot{\mathbf{r}}_D = \bar{\omega} \times \overline{\mathbf{ED}}.$$

Si $r = 1$ m y $v_0 = 2$ m/seg hacia la izquierda, como se ve en la figura 2.68, entonces

$$\omega = \frac{v_0}{r} = 2 \text{ rad/seg.}$$

Las velocidades calculadas se muestran en la figura 2.69.

2.7 Aceleración de un centro instantáneo. Todo centro instantáneo de velocidad cero tiene una aceleración. Esto se puede demostrar considerando el disco de la figura 2.70 que rueda hacia la izquierda sin deslizamiento. En ese instante, el centro del disco tiene una velocidad y una aceleración hacia la izquierda. Ahora determinaremos la aceleración del punto C .

Utilizando la ecuación general:

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{v}},$$

donde

$$\ddot{\mathbf{R}} = -a_0 \bar{\mathbf{i}}_0,$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} \bar{\mathbf{k}},$$

$$\bar{\omega} = \omega \bar{\mathbf{k}},$$

$$\bar{\rho} = -O'C \bar{\mathbf{j}},$$

$$\bar{\mathbf{a}} = 0,$$

$$\bar{\mathbf{v}} = 0,$$

entonces

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = -a_0 \bar{\mathbf{i}}_0 + \dot{\omega} \bar{\mathbf{k}} \times (-O'C \bar{\mathbf{j}}) + \omega \bar{\mathbf{k}} \times [\omega \bar{\mathbf{k}} \times (-O'C \bar{\mathbf{j}})],$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = -a_0 \bar{\mathbf{i}}_0 + (O'C) \dot{\omega} \bar{\mathbf{i}} + (O'C) \omega^2 \bar{\mathbf{j}},$$

o sea

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = [-a_0 + (O'C) \dot{\omega}] \bar{\mathbf{i}} + (O'C) \omega^2 \bar{\mathbf{j}}.$$

Para investigar cómo están relacionadas $(O'C) \dot{\omega}$ y a_0 , admitiremos que el punto C es el centro instantáneo del disco cuando rueda sin deslizamiento. Como resultado inmediato, se puede escribir

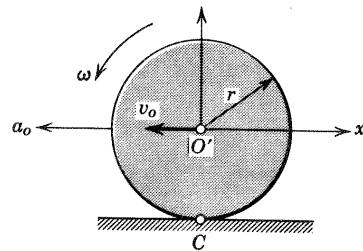
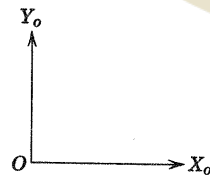


Fig. 2.70



$$\bar{\mathbf{v}}_0 = \bar{\omega} \times \bar{CO}',$$

$$-v_0 \bar{\mathbf{i}} = (\omega \bar{\mathbf{k}}) \times (CO' \bar{\mathbf{j}}),$$

$$-v_0 \bar{\mathbf{i}} = -\omega CO' \bar{\mathbf{i}},$$

o sea

$$v_0 = \omega CO'.$$

Tomando la derivada de la expresión anterior,

$$\dot{v}_0 = \dot{\omega} CO'.$$

Pero

$$\dot{v}_0 = a_0;$$

Por lo tanto

$$\bar{\mathbf{a}}_0 = CO' \dot{\omega}.$$

Por consiguiente, la aceleración del centro instantáneo se reduce a

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = (O'C) \omega^2 \bar{\mathbf{j}}.$$

Puesto que, en general, el centro instantáneo de velocidad cero tiene una aceleración, usualmente no es conveniente utilizarlo para el cálculo de aceleraciones. Por regla general, la aceleración del centro instantáneo no se obtiene fácilmente. Existe un centro instantáneo de aceleración cero, pero no se puede localizar convenientemente.

Aunque en general no se utiliza el centro instantáneo para determinar una aceleración, existe un caso especial donde es conveniente usar este punto. Consideremos nuevamente el disco rodando sin deslizamiento.

Supondremos que se busca la aceleración del punto B . Habiendo elegido los ejes de coordenadas que se indican en la figura 2.71, se puede aplicar la ecuación general, en la que

$$\ddot{\mathbf{R}} = -a_0 \bar{\mathbf{i}},$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} \bar{\mathbf{k}},$$

$$\bar{\omega} = \omega \bar{\mathbf{k}},$$

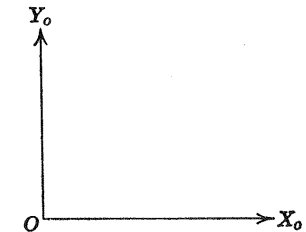
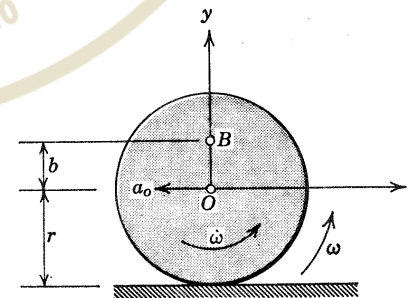


Fig. 2.71

$$\bar{\rho} = b\bar{j}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_B &= -a_0\bar{i} + \dot{\omega}\bar{k} \times b\bar{j} + \omega\bar{k} \times (\omega\bar{k} \times b\bar{j}), \\ \ddot{\mathbf{r}}_B &= -a_0\bar{i} - b\dot{\omega}\bar{i} - b\omega^2\bar{j},\end{aligned}$$

o sea

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = -[(a_0 + b\dot{\omega})\bar{i} + b\omega^2\bar{j}].$$

Puesto que

$$a_0 = r\dot{\omega},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = -[(r + b)\dot{\omega}\bar{i} + b\omega^2\bar{j}].$$

Tomando en consideración solamente la componente tangencial de la aceleración, la expresión anterior se reduce a

$$(\ddot{\mathbf{r}}_B)_t = \dot{\omega}(r + b)\bar{i}.$$

Nótese que el movimiento del punto B es el mismo que si el disco realmente estuviera girando alrededor de un eje que pasa por el centro instantáneo. Nótese, además, que puede aplicarse este movimiento solamente a los puntos que están sobre una recta que une el centro geométrico de la rueda con su centro instantáneo.

En los siguientes ejemplos, se demostrará el empleo del centro instantáneo en el cálculo de aceleraciones.

Ejemplo 2.25. El disco rueda hacia la derecha sin deslizamiento. En la posición dada, $\omega = 3$ rad/seg y $\dot{\omega} = 5$ rad/seg/seg, ambas en el sentido de las manecillas del reloj. Determinar la aceleración del punto B . Ver figura 2.72.

Con los ejes de coordenadas orientados como se muestra,

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\omega} \times \bar{\rho} + \omega \times (\omega \times \bar{\rho}) + \bar{a} + 2\omega \times \bar{v},$$

donde

$$\ddot{\mathbf{R}} = \bar{a}_0 = (AO)\dot{\omega}\bar{i} = 7.5\bar{i} \text{ m/seg}^2,$$

$$\dot{\omega} = -5\bar{k} \text{ rad/seg}^2,$$

$$\omega = -3\bar{k} \text{ rad/seg},$$

$$\bar{\rho} = OB (\cos \theta \bar{i} + \sin \theta \bar{j}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{i} + \frac{1}{2} \bar{j} \text{ m},$$

$$\bar{a} = 0,$$

$$\bar{v} = 0.$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = 7.5\bar{i} + (-5\bar{k}) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{i} + \frac{1}{2} \bar{j} \right) + (-3\bar{k}) \times$$

$$\left[(-3\bar{k}) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \bar{i} + \frac{1}{2} \bar{j} \right) \right].$$

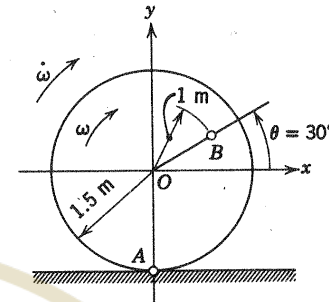


Fig. 2.72

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = 7.5\bar{i} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\bar{j} + \frac{5}{2}\bar{i} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\bar{i} - \frac{9}{2}\bar{j},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = \left(10 - \frac{9}{2}\sqrt{3} \right) \bar{i} - \left(\frac{9}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3} \right) \bar{j},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = 2.2\bar{i} - 8.85\bar{j} \text{ m/seg}^2.$$

Si el origen de los ejes de coordenadas estuviera en el centro instantáneo, entonces

$$\ddot{\mathbf{R}} = r\omega^2\bar{j} = (1.5)(3)^2\bar{j} = 13.5\bar{j} \text{ m/seg}^2$$

y

$$\bar{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} + 2\bar{j} \text{ m}.$$

De manera que,

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_B &= 13.5\bar{j} + (-5\bar{k}) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} + 2\bar{j} \right) + (-3\bar{k}) \times \\ &\quad \left[(-3\bar{k}) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} + 2\bar{j} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = 13.5\bar{j} - \frac{5}{2}\sqrt{3}\bar{j} + 10\bar{i} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\bar{i} - 18\bar{j}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_B = 2.2\bar{i} - 8.85\bar{j} \text{ m/seg}^2.$$

La relación entre el centro instantáneo y las componentes tangenciales de las aceleraciones de puntos especiales, proporcionan una forma conveniente de relacionar el movimiento plano de un disco que rueda libremente con el movimiento de un cuerpo unido a él. El ejemplo 2.26 ilustra sobre este punto.

Ejemplo 2.26. Los sistemas que se muestran están unidos por cables inextensibles que no resbalan sobre ninguna de las poleas. Si el peso A tiene una aceleración de 20 cm/seg^2 hacia abajo, determinar la aceleración del peso D . Ver figura 2.73.

La aceleración de D es igual a la aceleración tangencial de un punto sobre C correspondiente al punto 4.

$$a_D = 15\dot{\omega}_C.$$

Pero ω_C es desconocida. Sin embargo, la aceleración tangencial del punto 3 perteneciente a C es igual a la aceleración tangencial del punto 2 perteneciente a B. Debido a que el punto 1 en B es el centro instantáneo de B,

$$a_B = 15\dot{\omega}_B = a_A = 20 \text{ cm/seg}^2,$$

$$a_2 = 30\dot{\omega}_B = a_3 = 40\dot{\omega}_C.$$

Entonces

$$\dot{\omega}_C = \left(\frac{30}{40}\right)\left(\frac{20}{15}\right) = 1$$

y

$$a_D = 15 \text{ cm/seg}^2.$$

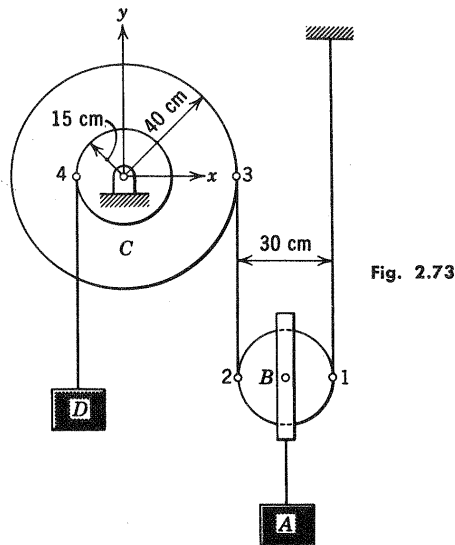


Fig. 2.73

Debido a que la aceleración de A es hacia abajo, $\dot{\omega}_B$ es contraria a las manecillas del reloj. Por lo tanto, a_2 y a_3 son hacia abajo y $\dot{\omega}_C$ tiene el sentido de las manecillas del reloj. De aquí que,

$$\bar{a}_D = 15\bar{j} \text{ cm/seg}^2.$$

PROBLEMAS

2.1. Una partícula se mueve sobre la curva $y = h \tan kx$, $z = 0$, donde h y k son constantes. Si $\dot{y} = \dot{y}_0$ es una constante, hallar la aceleración de la partícula.

2.2. El movimiento de un punto sobre una línea recta se describe mediante la ecuación $x = (mv_0/k)(1 - e^{-kt/m})$, donde v_0 , m , k y e son constantes. Hallar la aceleración a como una función de la velocidad v .

2.3. El movimiento de una partícula está dado por las ecuaciones $x = v_0 t \cos \alpha$, $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$. Hallar:

- La trayectoria de la partícula.
- Las coordenadas del punto más alto de la trayectoria.
- $\dot{x}$ y $\dot{y}$ cuando la partícula cruza el eje x .

2.4. El movimiento de un punto está dado por las ecuaciones $x = at$, $y = b \cos \omega \pi t$. Las unidades son centímetros y segundos. Hallar la ecuación de la trayectoria del punto.

2.5. El bloque ABCD se mueve de tal manera que el punto B sigue una recta vertical sobre la pared y A se mueve a lo largo de una recta horizontal perpendicular a la pared. Cuando $\theta = 30^\circ$, el punto A se mueve con una velocidad de 2 m/seg hacia la izquierda y A tiene una aceleración de 12 m/seg² hacia la derecha. Hallar la velocidad y aceleración del punto E para esta posición del bloque rectangular. El punto E está sobre CD.

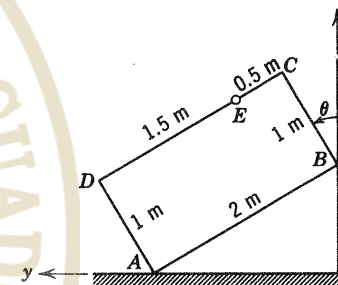


Fig. P-2.5

2.6. El cuerpo que se muestra se mueve en tal forma que B viaja a lo largo de la recta BO en tanto que A se mueve a lo largo de OA. Cuando A está a 1.5 m de O y su velocidad es de 187 m/min, hallar la velocidad de C que es un punto sobre la recta AB a 2.10 m de B.

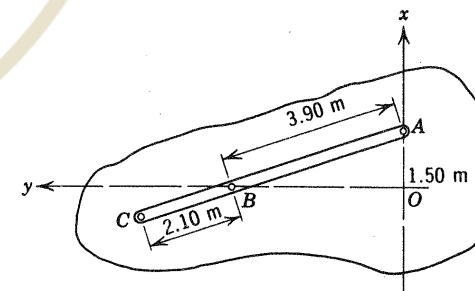


Fig. P-2.6

2.7. Un punto se mueve a lo largo de una recta con una velocidad en centímetros por segundo, $v = 3t^3 + 2t$. Determinar la aceleración y el desplazamiento cuando $t = 2$ seg. El punto parte desde el origen.

2.8. Un acelerómetro unido a un trineo experimental de cohetes indica la variación de aceleración que se muestra. Determinar la velocidad después de 10 seg, el desplazamiento después de 20 seg y la sobreaceleración máxima si el trineo parte desde el reposo.

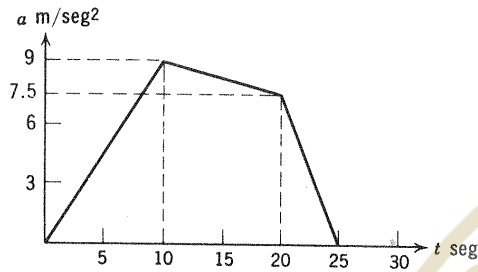


Fig. P-2.8

2.9. Una partícula se mueve a lo largo de una recta horizontal con aceleración constante. El diagrama velocidad-tiempo se muestra en la figura P-2.9. La velocidad varía de 10 m/seg hacia la derecha a 25 m/seg hacia la izquierda durante un intervalo de tiempo de 7 seg. Determinar el desplazamiento, la distancia total recorrida y la aceleración durante el intervalo de 7 seg.

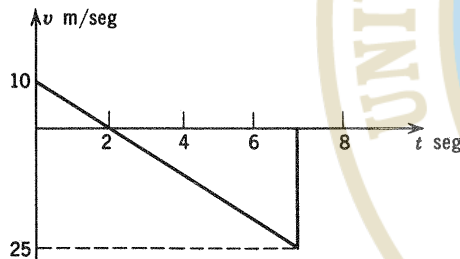


Fig. P-2.9

2.10. Una partícula se mueve sobre la trayectoria $y = \bar{e}x^2$ con una componente x constante de velocidad v_0 .

- Hallar la velocidad y aceleración de la partícula en el punto $P(1, 1/e)$. Las unidades están en metros y segundos.
- Recordando que la curvatura es cero en un punto de inflexión, deducir las coordenadas de los puntos de inflexión de $y = \bar{e}x^2$ a partir de consideraciones cinemáticas.

2.11. El centro de un rodillo se mueve hacia la izquierda con una velocidad lineal constante v_0 . Una barra AB se apoya sobre el rodillo y pivota alrededor del punto A . Determinar la velocidad y aceleración del punto B como una función de θ .

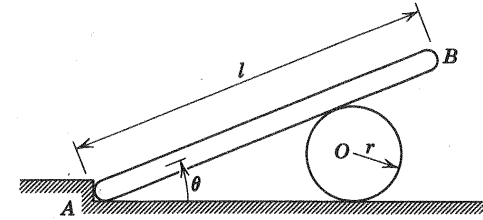


Fig. P-2.11

2.12. Un punto se mueve con una velocidad que está dirigida a un ángulo de $(\pi/2)t$ radianes respecto al eje x y tiene una magnitud constante de 15 cm/seg. En el instante $t = 0$, el punto estaba en el origen del sistema de coordenadas. Hallar la ecuación de la trayectoria del movimiento.

2.13. El bloque C desliza a lo largo de una ranura en OA y el bloque D desliza a lo largo de una guía lisa horizontal. Los bloques C y D están articulados entre sí. Si D se mueve con una velocidad constante $v\bar{D}$, hallar las expresiones para $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

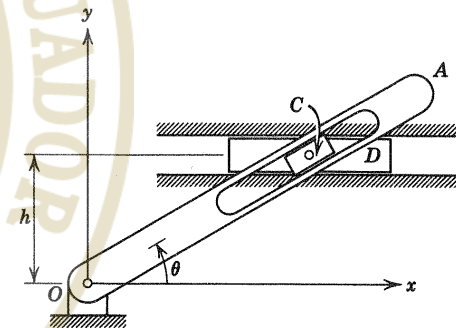


Fig. P-2.13

2.14. Una partícula se mueve sobre una línea recta. Su movimiento se describe mediante la ecuación $t = c \log_{10}(b + s)$, donde s es la distancia entre la partícula y un punto de referencia fijo y c y b son constantes. Hallar la velocidad v y la aceleración a de la partícula en cualquier instante de tiempo t .

2.15. El aparato que se muestra se utiliza para comprimir aire. La manivela gira en el sentido de las manecillas del reloj a 150 rpm. La carrera es de 60 cm. Determinar la aceleración del émbolo cuando $x = 10$ cm.

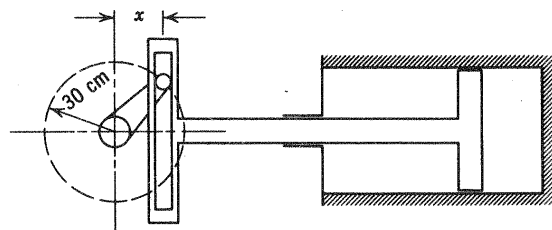


Fig. P-2.15

2.16. El bloque B se mueve hacia la derecha con una velocidad constante v_0 . Escribir las expresiones para la velocidad y aceleración del punto C , extremo inferior de la varilla BC , cuando desliza a lo largo del plano inclinado.

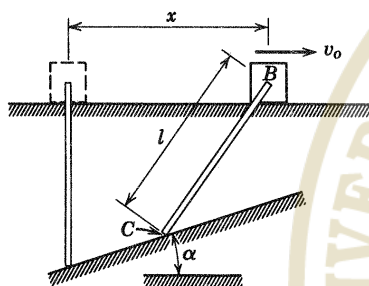


Fig. P-2.16

2.17. El movimiento de un péndulo simple de longitud l está dado por la ecuación desplazamiento-tiempo $s = s_0 \cos pt$, donde p es una constante igual a $\sqrt{g/l}$. Determinar el período τ para una oscilación completa, la velocidad máxima y la máxima aceleración normal de la lenteja.

2.18. Obtener una expresión para la velocidad del émbolo si la manivela gira con una rapidez angular θ .

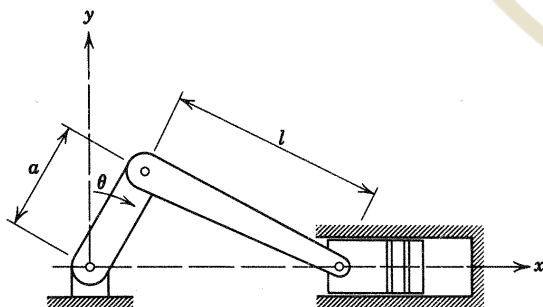


Fig P-2.18

2.19. El movimiento de un punto está dado por las ecuaciones $x = at$ y $y = bt - gt^2/2$. Hallar las aceleraciones normal y tangencial del punto como una función de su posición.

2.20. Una partícula se mueve sobre una trayectoria $y = A - Bx^2$. En $x = a$ la rapidez de la partícula es v . Hallar $\dot{x}$, $\dot{y}$ y la componente normal de la aceleración en este punto.

2.21. Una partícula se mueve sobre una trayectoria circular $x^2 + y^2 = r^2$ de manera que la distancia medida a lo largo de la trayectoria desde el punto fijo $(r, 0)$ es $s = ct^2$. Hallar $\dot{x}$, $\dot{y}$ y las componentes normal y tangencial de la aceleración de la partícula.

2.22. Un automóvil pasa sobre un declive de una carretera con una componente constante x de la velocidad $\dot{x} = v$. Considerar el declive como un arco parabólico y hallar la aceleración del automóvil en el intervalo $-l < x < l$.

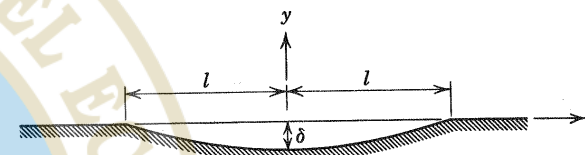


Fig. P-2.22

2.23. Una partícula describe una elipse de manera que su aceleración siempre está dirigida hacia el centro de la curva. Demostrar que la magnitud de la aceleración es proporcional a la distancia de la partícula al centro de la elipse.

2.24. La varilla sólida AC está obligada a deslizar en el miembro ranurado en tal forma que siempre permanecen perpendiculares. Además, está obligada a permanecer en contacto con un tope fijo B . Determinar la velocidad del punto A en términos de θ , ω y las constantes del problema. Expresar los resultados en términos de los vectores unitarios dados.

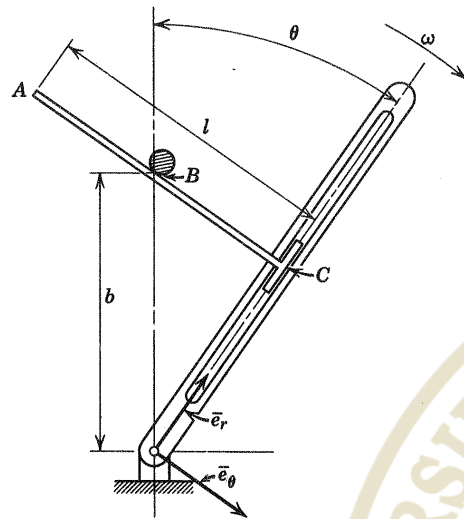


Fig. P-2.24

2.25. Un pequeño anillo M está colocado sobre un aro de alambre de radio r . Una varilla OA pasa por el anillo y gira alrededor del punto O sobre el aro con velocidad angular $\dot{\theta} = \omega$.

- Si $\dot{\theta} = \omega$ es una constante, hallar la velocidad y aceleración de M .
- Si M se mueve con rapidez constante $\dot{s}$, hallar $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

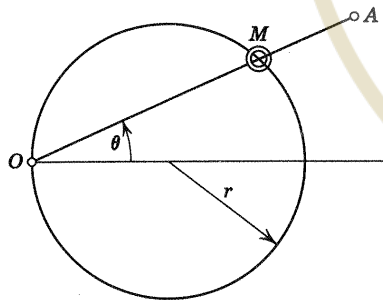


Fig. P-2.25

2.26. Obtener las expresiones para $\dot{\vec{r}}$ y $\ddot{\vec{r}}$ en coordenadas polares utilizando las ecuaciones de transformación $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

2.27. Una partícula se mueve sobre una trayectoria $r = b \sin 2\theta$. Hallar la velocidad y aceleración de la partícula en coordenadas polares.

2.28. El vector de posición de una partícula que se mueve en el espacio es $\vec{r} = h(\vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t + \vec{k}t)$, donde h es una constante. Hallar la velocidad y aceleración en las direcciones:

- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$;
- $\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b$;
- $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$.

2.29. Una partícula describe una espiral equiangular $r = e^{a\theta}$ de manera que su aceleración siempre está dirigida hacia el origen. Demostrar que la magnitud de la aceleración es proporcional a r^{-3} .

2.30. Un punto tiene un movimiento helicoidal definido por las ecuaciones $x = 2 \cos 4t$, $y = 2 \sin 4t$ y $z = 2t$, todas medidas en metros. Hallar el radio de curvatura de la trayectoria del punto.

2.31. Una partícula describe el círculo $r = 2a \cos \theta$, la componente de la aceleración dirigida hacia el origen siempre es cero. Demostrar que la componente transversal varía como $\csc^3 \theta$.

2.32. Hallar la velocidad angular de la barra AC para la posición general que se muestra. $\vec{V}_A$ es constante.

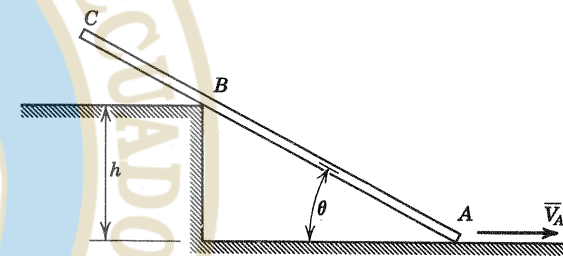


Fig. P-2.32

2.33. La velocidad angular de un engrane es $\omega = 6 - 2t^3$, donde ω está en radianes por segundo y es positiva en el sentido de las manecillas del reloj y t está en segundos. Hallar el desplazamiento angular θ en el intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 3$.

2.34. Una cuenta m viaja hacia A , partiendo en C , en el alambre AB . La cuenta n desliza sobre el alambre CD y está unida a m por una cuerda de 2.50 m. Después de 2 seg, la cuenta n se ha desplazado 50 cm. Hallar la velocidad constante de m .

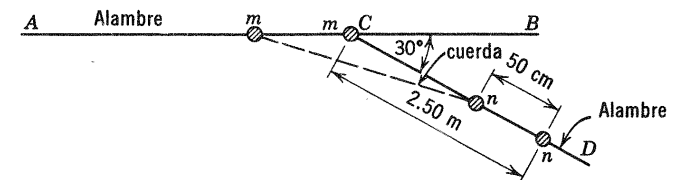


Fig. P-2.34

2.35. Una partícula se mueve sobre un círculo de acuerdo con la ecuación $s = t^4 - 8t$, donde s es el desplazamiento medido en metros a lo largo de la trayectoria circular y t está en segundos. Dos segundos después de haber partido desde el reposo, la aceleración total de la partícula es $48\sqrt{2}$ m/seg². Calcular el radio del círculo.

2.36. Un submarino dispara un torpedo con una velocidad $\bar{v}_t$ a un ángulo θ con relación al eje x en el instante en que un destructor se mueve en la dirección x y está directamente al frente y a la distancia H . La velocidad del destructor es constante e igual a $\bar{v}_d$. Hallar:

- El ángulo θ a que debe apuntarse el torpedo para asegurar el impacto en el destructor.
- El tiempo t que transcurre antes que el torpedo dé en el blanco.
- El valor de $\bar{v}_d$ arriba del cual el torpedo no puede pegar en el destructor.

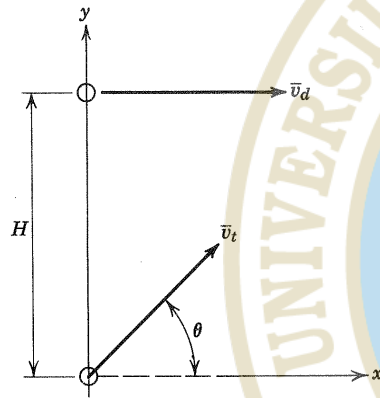


Fig. P-2.36

2.37. La aceleración o desaceleración máxima posible de un tren es a y su velocidad máxima es v . Hallar el tiempo mínimo en que puede viajar entre dos estaciones separadas una distancia s , partiendo del reposo hasta el momento en que se detiene.

2.38. El movimiento de una partícula está definido por las ecuaciones $x = 25(1 - e^{-t})$ y $y = -3t^2 + 15$, donde x y y están en metros y t en segundos. Determinar la velocidad y aceleración de la partícula en el instante t .

2.39. Un volante de radio R m parte desde el reposo y, con aceleración angular constante Q , efectúa N revoluciones completas. En este instante, una partícula sobre su periferia tiene una aceleración total de A m/seg². Hallar:

- El ángulo entre la aceleración total y el radio al punto en cuestión.
- La velocidad angular ω del volante.

2.40. Una partícula viaja en una trayectoria curvilínea con velocidad constante en la dirección y de 30 m/seg. La velocidad en la dirección x varía con

el tiempo de la siguiente manera: $v_x = 3t + 10$, donde v_x está en metros por segundo. Hallar el radio de curvatura de la trayectoria cuando $t = 10$ seg.

2.41. A se mueve en una trayectoria circular de 8 m de diámetro de manera que la longitud del arco que describe desde su posición inicial B está dada por la relación $s = t^4 + 2t^3 + 3$. La longitud está dada en metros y el tiempo en segundos. Hallar la aceleración del punto A y sus componentes normal y tangencial cuando $t = 2$ seg. Mostrar las direcciones.

2.42. Si A se mueve hacia abajo con una velocidad constante v , hallar la velocidad hacia arriba v_B de B después de t segundos. Las poleas son pequeñas comparadas con L y A se mueve verticalmente.

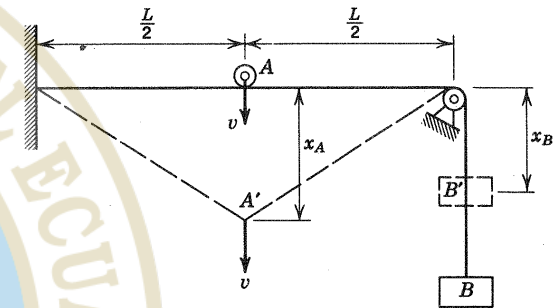


Fig. P-2.42

2.43. El bloque está originalmente en B . El anillo en A rodea el poste y a la cuerda y se mueve hacia abajo a razón de 1 m/seg. ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando el anillo está en D ?

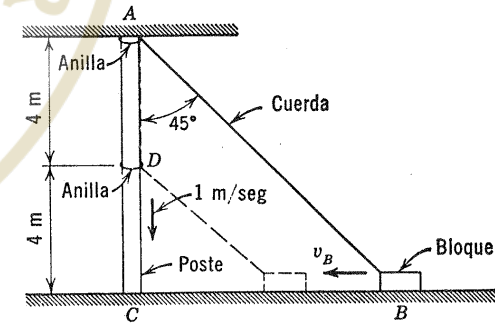


Fig. P-2.43

2.44. Un alambre semicircular delgado, pero rígido, de radio r está sostenido en su propio plano vertical mediante una articulación en O y una clavija lisa A . Si la clavija parte desde O y se mueve con rapidez constante v a lo largo del eje horizontal x , hallar la velocidad angular $\dot{\phi}$ del alambre en el instante en que $\phi = 60^\circ$.

2.45. Un rifle está montado en un disco de 3.60 m de diámetro que gira con una velocidad angular contraria a las manecillas del reloj de 250 rad/seg alrededor de un eje fijo que, como puede verse, pasa por su centro. Determinar la velocidad absoluta de la bala cuando sale del cañón en la posición que se muestra, suponiendo que su velocidad inicial es de 720 m/seg.

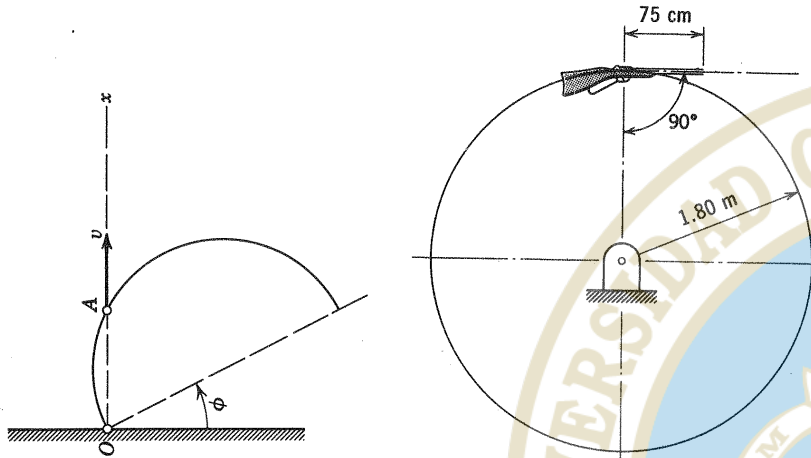


Fig. P-2.45

2.46. Los dos discos de fricción que se muestran giran sin deslizar entre sí. Determinar la aceleración de A con respecto a B . La aceleración de A es $-16\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ m/seg².

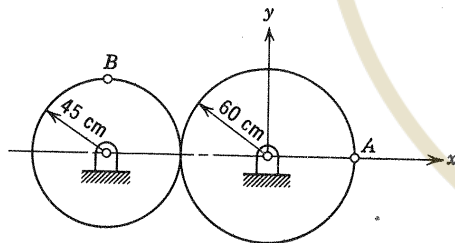


Fig. P-2.46

2.47. La varilla OA gira alrededor del punto fijo O con una velocidad angular contraria a las manecillas del reloj igual a 2ω . La varilla AB gira alrededor de A con una velocidad angular absoluta ω de sentido contrario a la anterior. En un instante inicial las dos varillas están en línea recta a lo largo del eje x . Deducir las ecuaciones de velocidad y aceleración del punto B suponiendo que las velocidades angulares son constantes.

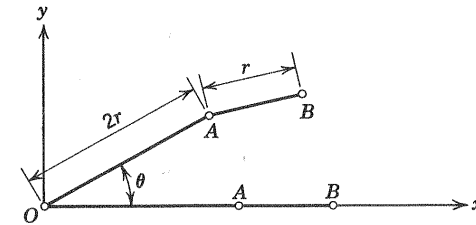


Fig. P-2.47

2.48. Dos muchachos utilizan un tubo doblado a manera de sube y baja, como se ve en la figura. Determinar la velocidad de A con respecto a B suponiendo que la velocidad angular del tubo es de 2 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj, cuando se hallan en la posición que se muestra.

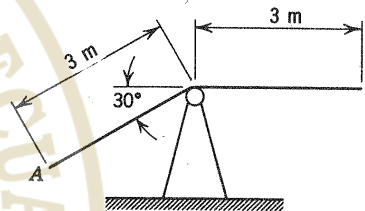


Fig. P-2.48

2.49. Determinar la aceleración de A si $a_B = 1.5$ m/seg² hacia la derecha y la velocidad angular de AC es de 2 rad/seg contraria a las manecillas del reloj y decrece a razón de 4 rad/seg².

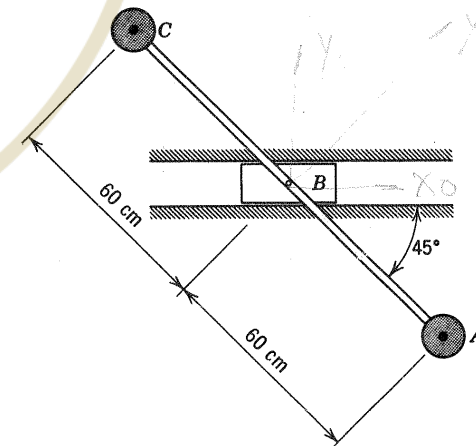


Fig. P-2.49

2.50. Un hombre camina en línea recta en el interior de un vagón de ferrocarril con una rapidez de 1.80 m/seg con respecto al tren. La rapidez del tren es de 135 Km/h y se mantiene constante; en este instante recorre una curva circular con radio de 198 m. Hallar la aceleración absoluta del hombre cuando:

- Camina en la dirección positiva del eje y .
- Camina en la dirección negativa del eje y .

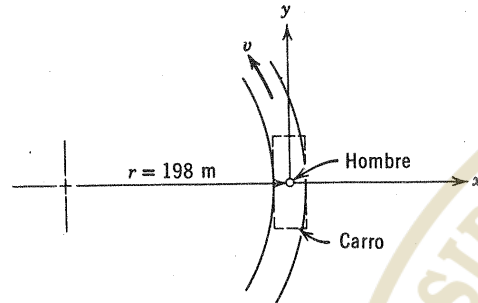


Fig. P-2.50

2.51. El disco grande A de radio a está girando con velocidad angular constante ω_1 alrededor del punto O y en el sentido que se muestra. El disco pequeño de radio b está unido al disco grande en C y está girando con velocidad angular constante ω_2 relativa a A y con el sentido que se muestra. Obtener la aceleración del punto P sobre el disco pequeño en este instante.

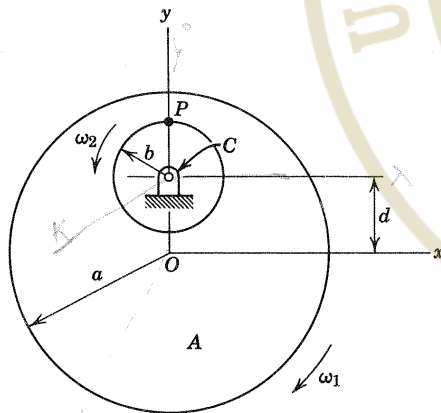


Fig. P-2.51

2.52. Un surtidor para prado está girando con ω y ω ambas en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Todas las partículas de agua viajan con velocidad constante u relativa al tubo. Hallar la aceleración de una partícula en el punto A .

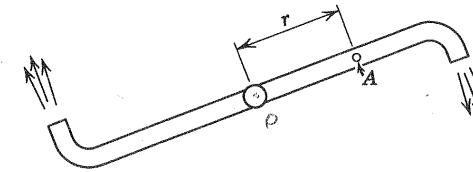


Fig. P-2.52

2.53. Un disco de radio r metros parte desde el reposo y gira en torno a su eje con aceleración angular constante de n rad/min². Un punto se mueve en la dirección opuesta a lo largo de la circunferencia del disco con una velocidad constante u m/min relativa al disco. Hallar la magnitud de la velocidad y de la aceleración del punto.

2.54. La barra horizontal AB gira con una velocidad angular de $-30\hat{j}_0$ rpm. Al mismo tiempo la barra horizontal CD , que es de 60 cm de longitud, gira con una velocidad angular relativa a AB de $-60\hat{j}_0$ rpm. Si $CB = BD$, determinar la magnitud de la velocidad lineal de C :

- Cuando CD es paralela a AB con C entre A y B .
- Cuando CD es perpendicular a AB .
- Cuando CD es paralela a AB con D entre A y B .

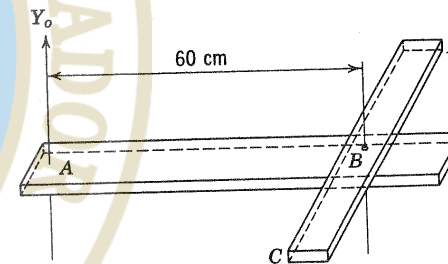


Fig. P-2.54

2.55. Un punto se mueve con rapidez uniforme $\dot{s}$ a lo largo de una cuerda de un disco. El disco gira con una velocidad angular constante ω alrededor de su eje. Hallar la magnitud de la velocidad y de la aceleración del punto. La distancia más corta del punto al centro del disco es h y el radio del disco es b . En $t = 0$, el punto está en el borde del disco y la cuerda es paralela al eje X_0 .

2.56. La barra AB está articulada al carrito en A . AB tiene una velocidad angular de 2 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj, y una aceleración angular de 1 rad/seg², en el mismo sentido. El carrito se mueve hacia la derecha con velocidad de 8 cm/seg y una aceleración de 1.20 m/seg². Hallar la aceleración de B .

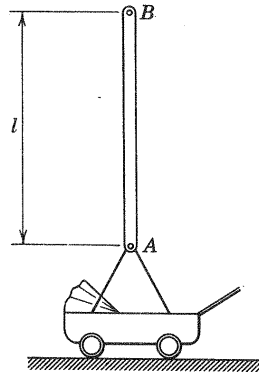


Fig. P-2.56

2.57. El eje CD gira alrededor de AB con velocidad angular constante $\bar{\omega}_1$; el disco gira con velocidad angular constante $\bar{\omega}_2$ relativa al eje. La cuenta P se mueve en el interior y a lo largo de la ranura radial con rapidez $\dot{s}$ relativa al disco y está disminuyendo en la razón $\ddot{s}$. Determinar la aceleración de P suponiendo que está a la mitad de su recorrido cuando la ranura está en la posición vertical que se muestra. Efectuar los cálculos cuando $\omega_1 = 3$ rad/seg, $\omega_2 = 10$ rad/seg, $\dot{s} = 5$ cm/seg, $\ddot{s} = 25$ cm/seg², $a = 8$ cm, $b = 2$ cm.

- Resolver utilizando un sistema móvil de coordenadas fijo en el disco.
- Resolver utilizando un sistema móvil de coordenadas fijo en el eje CD .

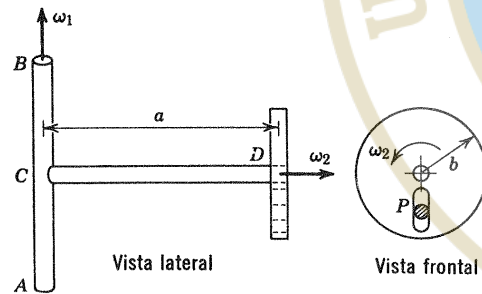


Fig. P-2.57

2.58. Un volantín gira en torno a un eje vertical con velocidad angular $\dot{\theta}$ y aceleración angular $\ddot{\theta}$. Además, el ángulo ϕ varía cuando la silla se desplaza hacia arriba debido a la rapidez. Hallar la aceleración del pasajero durante el período inicial en que $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$ existen. Durante el estado permanente del movimiento $\ddot{\theta} = \dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$. Demostrar que la aceleración llega a ser $(a + b \sin \phi) \dot{\theta}^2$.

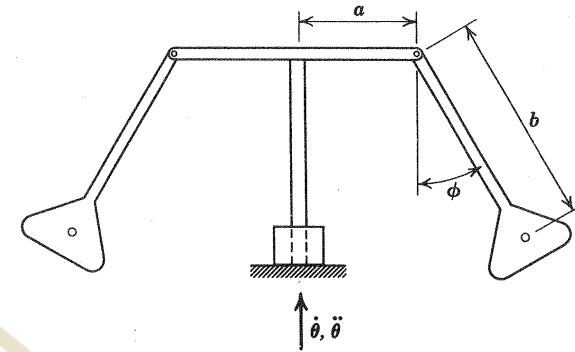


Fig. P-2.58

- El punto P se mueve sobre la barra que gira alrededor de O con una velocidad angular $\dot{\theta} = 2$ rad/seg en sentido de las manecillas del reloj y una aceleración angular de sentido contrario $\ddot{\theta} = 1.5$ rad/seg². La velocidad de P a lo largo de la barra es de 2.5 m/seg hacia M en el instante que interesa y está creciendo a razón de 2.5 m/seg cada segundo. Escribir una ecuación vectorial para determinar la aceleración absoluta de P , suponiendo que $OP = 3$ m y $\theta = 30^\circ$. El ángulo ϕ permanece constante.
- El ángulo θ se mantiene fijo ($\theta = 30^\circ$) pero la barra TL gira con velocidad angular $\dot{\phi} = 2$ rad/seg y aceleración angular $\ddot{\phi} = 1.5$ rad/seg². El movimiento de P relativo a la barra es el mismo que la parte (a). Determinar la aceleración absoluta de P suponiendo que $OP = 3$ m.

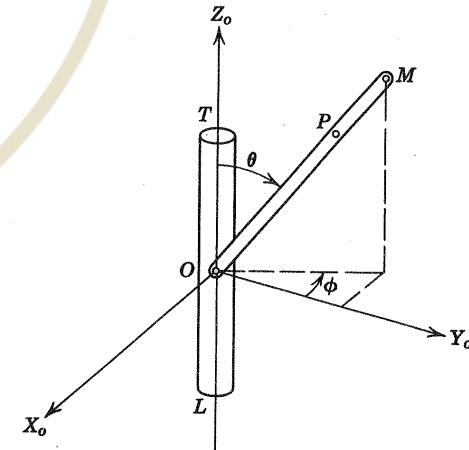


Fig. P-2.59

2.60. Determinar la aceleración angular y la velocidad angular de AB . La velocidad de A es de 90 cm/seg hacia arriba y la aceleración de A es de 1.80 m/seg² hacia abajo.

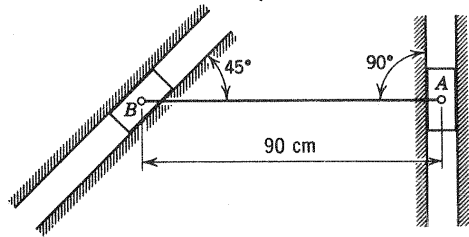


Fig. P-2.60

2.61. En la posición que se muestra la barra AB es horizontal y el disco tiene una velocidad angular constante contraria a las manecillas del reloj de 30 rad/seg. Hallar:

- La velocidad de B .
- La aceleración de B .

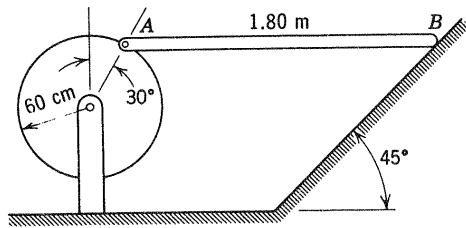


Fig. P-2.61

2.62. Un disco de 1.20 m de diámetro rueda sin deslizamiento sobre una vía horizontal. La velocidad de su centro en un instante dado, es de 1.20 m/seg hacia la derecha y la aceleración del centro es de 1.80 m/seg² en el mismo sentido. Hallar las velocidades y aceleraciones de los puntos A y B .

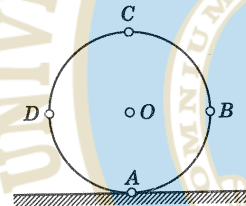


Fig. P-2.62

2.63. La carretilla de la rampa de lanzamiento se regresa a su posición con una velocidad constante de 8 m/seg al mismo tiempo que el portaaviones da una vuelta de radio de 3 Km a 50 Km/h. Determinar la aceleración de Coriolis de la carretilla.

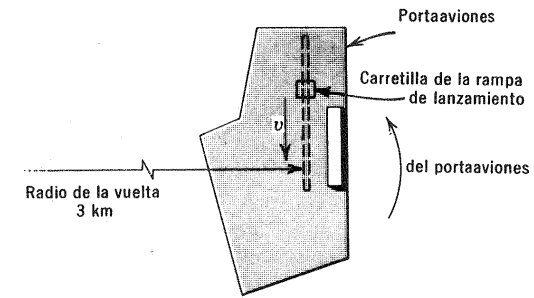


Fig. P-2.63

2.64. La barra delgada uniforme AB es de 12 m de longitud y descansa horizontalmente sobre un canal que, como se muestra, tiene paredes laterales a 45°. Si la aceleración angular ω de la barra es de 3 rad/seg/seg en el sentido de las manecillas del reloj, hallar la velocidad angular ω de la barra para la cual la aceleración del extremo A será cero.

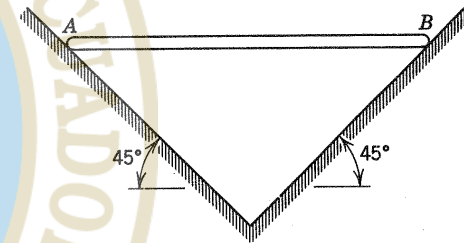


Fig. P-2.64

2.65. Hallar la velocidad de A y C , la aceleración absoluta de A y la aceleración angular de AC . $\omega_{OB} = 4$ rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj y es constante.

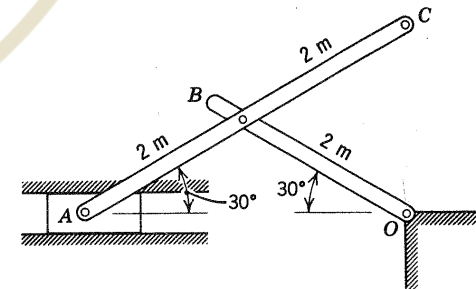


Fig. P-2.65

2.66. El sistema que se muestra en la figura consiste de una corredera A , un cilindro C y una varilla rígida AB . El sistema oscila debido a un dispositivo

de leva que no se muestra. Determinar la aceleración angular de AB y la del cilindro, suponiendo que A tiene una velocidad y aceleración de 1.20 m/seg y 1.50 m/seg^2 respectivamente, ambas hacia la derecha.

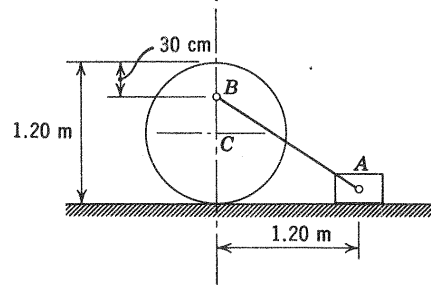


Fig. P-2.66

2.67. El sistema que se muestra está articulado en A . Las barras AB y BC son de 45 y 60 cm respectivamente. Hallar la aceleración del punto B y la velocidad angular de AB para el instante que se muestra. El bloque C tiene una velocidad de 90 cm/seg hacia la derecha y una aceleración de 1.20 m/seg^2 hacia la izquierda en ese instante.

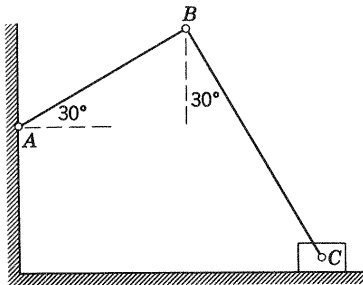


Fig. P-2.67

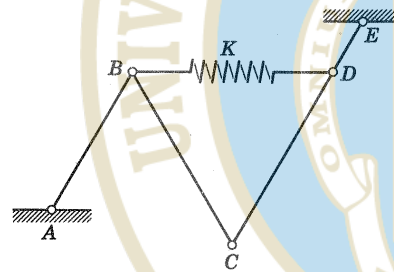


Fig. P-2.68

2.68. En un cierto instante el mecanismo de cuatro eslabones está en la posición que se muestra, el resorte está unido a un punto D del eslabón CE (el miembro CDE es una barra rígida y continua) y el pasador B está horizontal; los eslabones AB y CE son paralelos. Si la velocidad angular absoluta del eslabón AB es de 5 rad/seg , en sentido contrario a las manecillas del reloj, determinar la velocidad relativa de la articulación B con respecto al pasador D . Las longitudes de los eslabones son:

$$AB = 18 \text{ cm}$$

$$BC = 44 \text{ cm}$$

$$CE = 60 \text{ cm}$$

$$DE = 12 \text{ cm}$$

2.69. Los dos discos A y B se mantienen en contacto en el punto E debido al brazo OC sin que exista deslizamiento. El disco A está fijo y el brazo OC tiene una velocidad angular constante, en el sentido de las manecillas del reloj, de 2 rad/seg . Hallar la aceleración del punto D que está en la parte inferior del disco B , en la posición que se muestra.

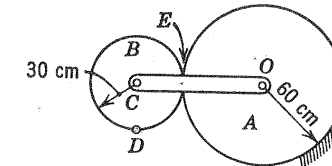


Fig. P-2.69

2.70. Una partícula P está obligada a moverse sobre la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ mediante el brazo ranurado OA , que gira con velocidad angular constante $\dot{\phi} = b\bar{k}$, al mismo tiempo la cardioide gira con velocidad angular $\dot{\psi} = c\bar{k}$. Hallar la velocidad y aceleración de P cuando $t = 3 \text{ seg}$. Se supone que $a = 15 \text{ cm}$, $b = \pi/9 \text{ rad/seg}$, $c = -\pi/18 \text{ rad/seg}$. En $t = 0$ la cardioide está en una posición tal que $\phi = \theta = 0$.

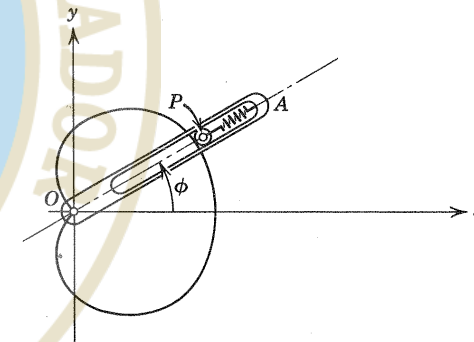


Fig. P-2.70

2.71. El rodillo en C se mueve en una guía vertical. El eslabón AB tiene una velocidad angular, en el sentido de las manecillas del reloj, de 1 rad/seg , y una aceleración angular de igual sentido de 1.2 rad/seg^2 . Hallar la aceleración del rodillo.

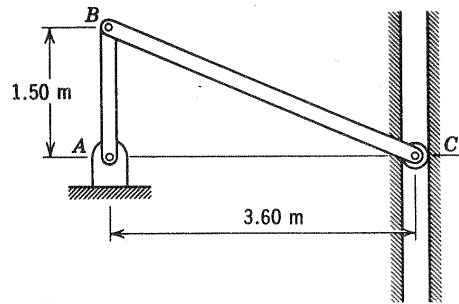


Fig. P-2.71

2.72. Localizar el centro instantáneo de velocidad cero en cada uno de los miembros numerados.

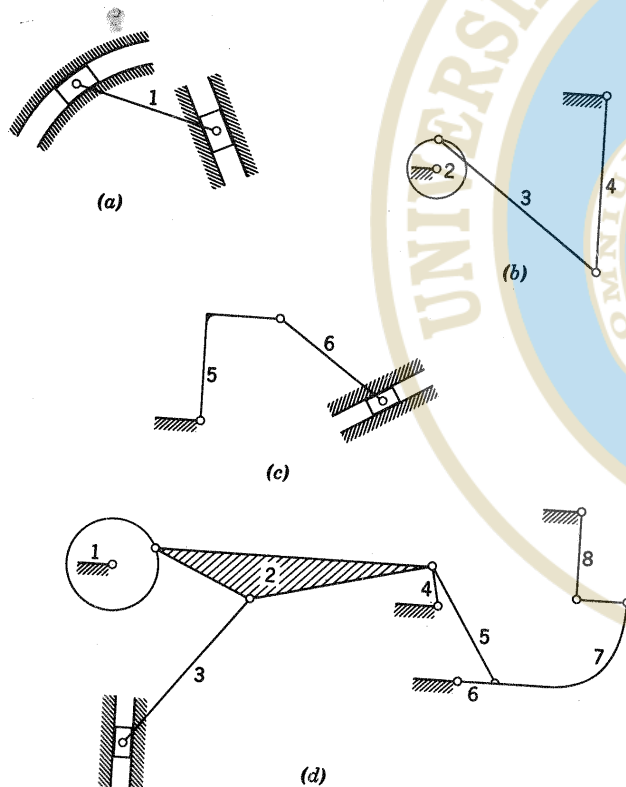


Fig. P-2.72

2.73. En el sistema de eslabones que se muestra, la barra AB tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj. Determinar la velocidad angular de la barra DC . Las longitudes de los miembros son l , m y n .

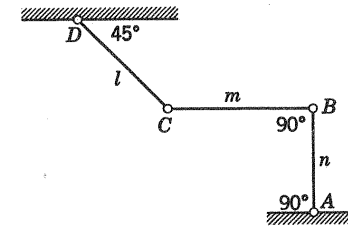


Fig. P-2.73

2.74. Hallar la velocidad angular de los cuerpos BC y CD .

$$\omega_{AB} = 6 \text{ rad/seg}, \quad \omega_{AB} = 8 \text{ rad/seg}^2.$$

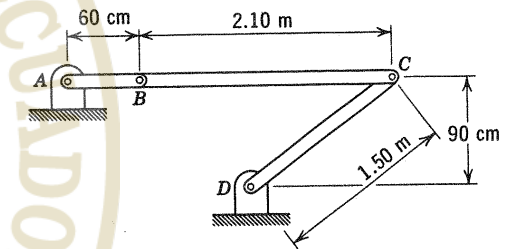


Fig. P-2.74

2.75. Hallar la velocidad angular de BC para la posición que se muestra. La velocidad angular del disco es de 70 rad/seg contraria a las manecillas del reloj.

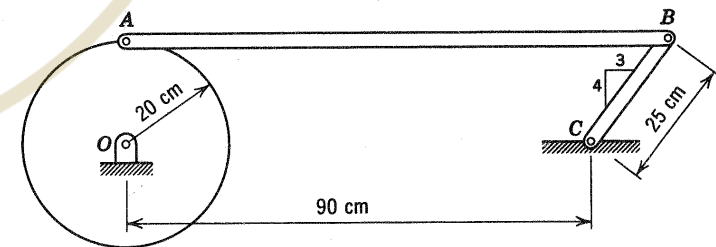


Fig. P-2.75

2.76. La rueda tiene una velocidad angular de 20 rad/seg, en el sentido que se muestra y el bloque A que desliza tiene una aceleración de 8 m/seg^2 hacia la derecha. El radio de la rueda es de 20 cm; $ED = 1.20 \text{ m}$ y es horizontal; $DB = 20 \text{ cm}$, $BC = 80 \text{ cm}$ y DBC es continua; $AB = 68 \text{ cm}$ y el bloque A se mueve horizontalmente. Calcular completamente todas las velocidades utilizando los centros instantáneos.

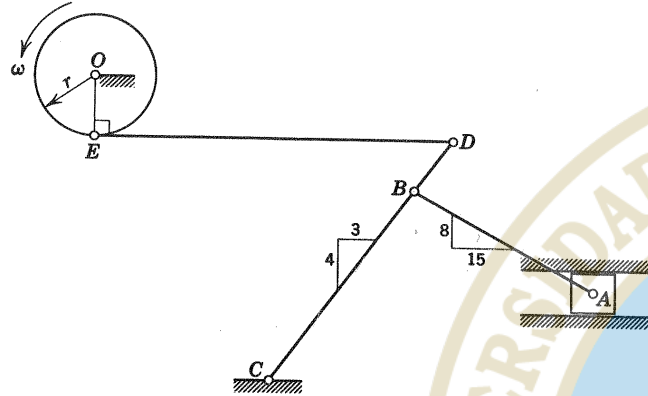


Fig. P-2.76

2.77. El sistema cuadrado de eslabones que se muestra opera los dos émbolos E y F y el sistema tiene una velocidad angular de 10 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj. Determinar la velocidad de D , E y F .

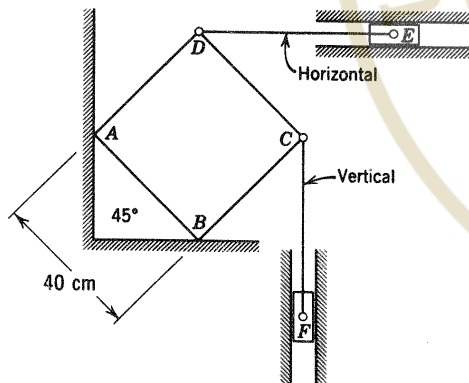


Fig. P-2.77

2.78. Los discos de fricción B y C giran sin que exista deslizamiento entre sí. El tambor A está firmemente sujeto al disco B . La velocidad angular de C es de 2 rad/seg y la aceleración angular es de 6 rad/seg^2 , ambas en el sentido de las manecillas del reloj. Determinar la velocidad y aceleración del cuerpo D .

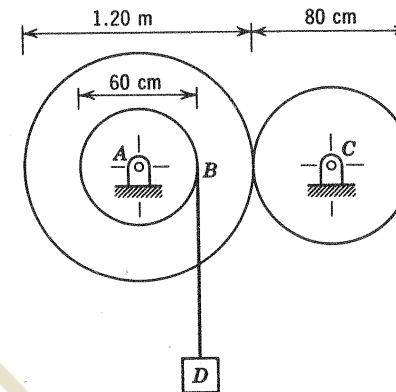


Fig. P-2.78

2.79. Un cable está enrollado en el cubo interior de una rueda y se tira hacia la derecha con una velocidad constante de 0.5 m/seg. Si la rueda no desliza, determinar la velocidad y aceleración del punto A . ¿Hacia dónde rodará la rueda? Explicar por qué.

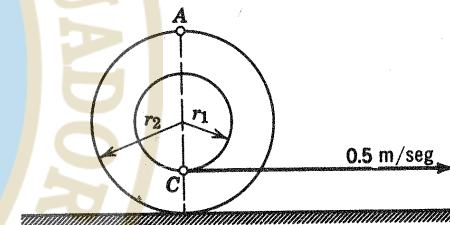


Fig. P-2.79

2.80. En el sistema de eslabones articulados que se muestra, la velocidad angular del eslabón BD es de 30 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj. Utilizando el método del centro instantáneo hallar la velocidad de los puntos C y D y la velocidad angular de los otros dos eslabones.

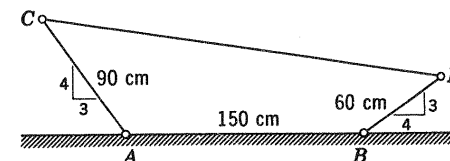


Fig. P-2.80

2.81. Localizar en el engrane el centro instantáneo de velocidad cero.

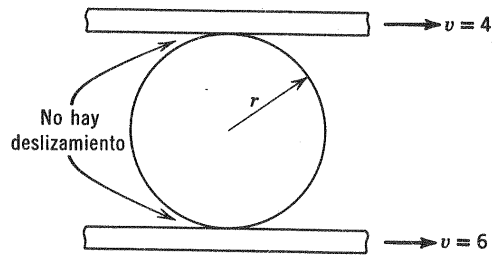


Fig. P-2.81

2.82. El disco rueda sin deslizamiento con una velocidad angular de 9 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj, mientras que el bloque desliza hacia abajo del plano inclinado. Hallar la velocidad del punto P .

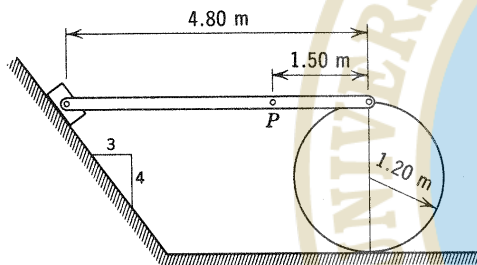


Fig. P-2.82

2.83. La rueda B está rodando sobre su cubo sin deslizamiento en tal forma que el punto A tiene la velocidad v que se muestra. Los cables C_1 y C_2 inextensibles y de masa despreciable están enrollados, como puede verse, de manera que no hay deslizamiento entre las poleas y los cables. Determinar la velocidad de O que es el centro de la rueda D .

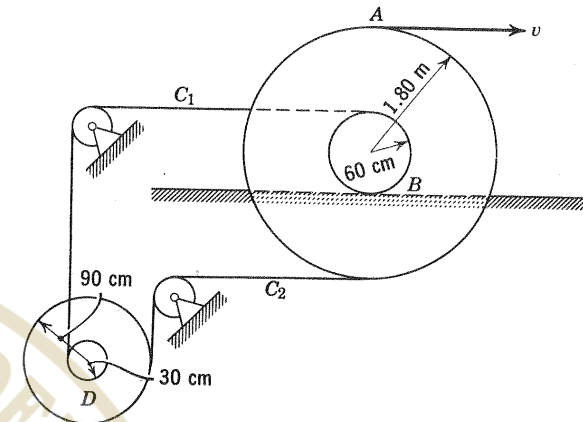


Fig. P-2.83

2.84. Determinar la velocidad del centro del disco. El eslabón vertical AB tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 4 rad/seg; el diámetro del disco mide 68 cm.

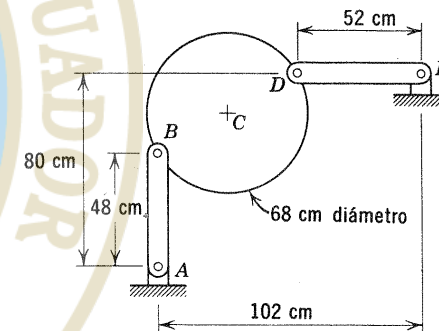


Fig. P-2.84

2.85. La velocidad angular del eslabón AB es de 2 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj y está aumentando a razón de 4 rad/seg/seg. Determinar la velocidad angular de CD y la aceleración angular de BC . Sugestión: primero resolver el problema de la velocidad empleando el método del centro instantáneo.

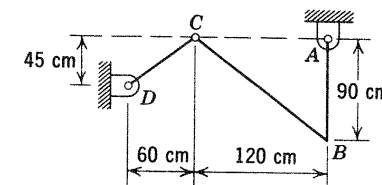


Fig. P-2.85

2.86. Una varilla recta AB se mueve en el plano de la página. El extremo A se mueve sobre la superficie de un cilindro CAD y el costado de la varilla desliza sobre el punto C . En el instante que interesa la recta OA es perpendicular al diámetro CD , el punto A tiene una rapidez de v_0 m/seg hacia la izquierda. Hallar la velocidad del punto que está en contacto con C en este momento.

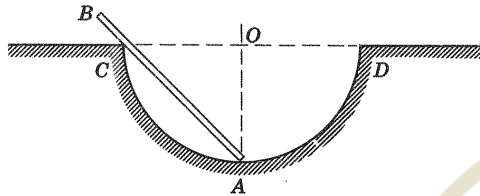


Fig. P-2.86

2.87. El engrane de los pedales para una cadena de bicicleta tiene 26 dientes y el engrane de la rueda, más pequeño, tiene 9 dientes. Si la rueda tiene un diámetro de 70 cm, hallar la velocidad de la bicicleta cuando los pedales se hacen girar a 1 revolución por segundo.

2.88. La rueda está rodando sin deslizamiento en una superficie horizontal sobre su cubo de 2.40 m de diámetro en el punto B . Una barra rígida DE está articulada al diámetro exterior de la rueda en D y resbala a lo largo de la superficie horizontal. Hallar la velocidad de E , suponiendo que la velocidad de A sea de 3 m/seg hacia la derecha. Usar el método de los centros instantáneos.

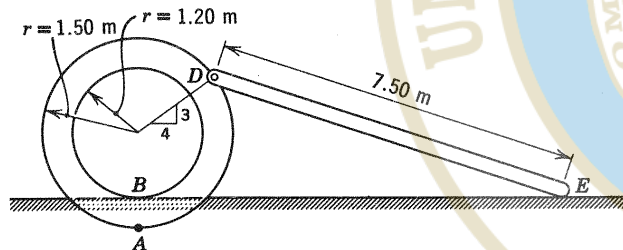


Fig. P-2.88

2.89. La rueda de 1.20 m de diámetro gira alrededor del eje fijo A con una velocidad angular, en el sentido de las manecillas del reloj, de 20 rad/seg y que está decreciendo a razón de 5 rad/seg/seg. En la posición que se muestra DC es horizontal y BC es vertical. Determinar las velocidades angulares absolutas de estos dos eslabones cuando se hallan en esa posición.

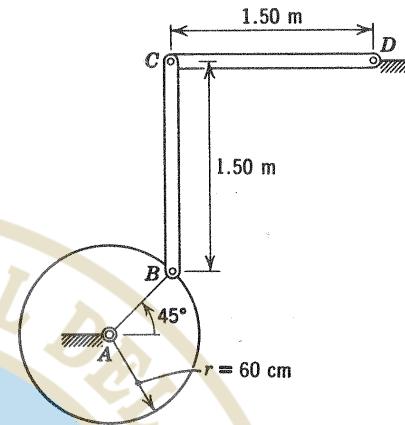


Fig. P-2.89,

2.90. Hallar la velocidad de A y la aceleración de B suponiendo que BC tiene una velocidad angular constante de 20 rad/seg.

2.91. La placa rectangular es "móvil" y, según se muestra, sus extremos están en contacto con el suelo y el plano inclinado. Si la aceleración de A es 7.5 m/seg² hacia la derecha y la velocidad angular del lado CD es cero, determinar la aceleración angular del lado AB .

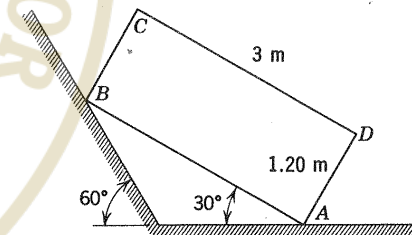


Fig. P-2.91

2.92. El bloque B desliza hacia arriba del plano inclinado con una velocidad de 3 m/seg y una aceleración de 1.80 m/seg². Hallar la aceleración del punto A .

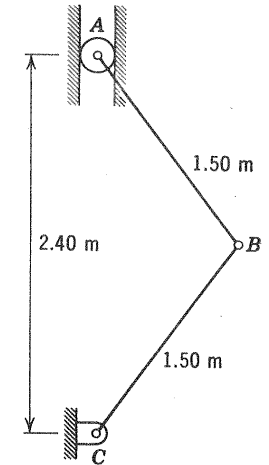


Fig. P-2.90

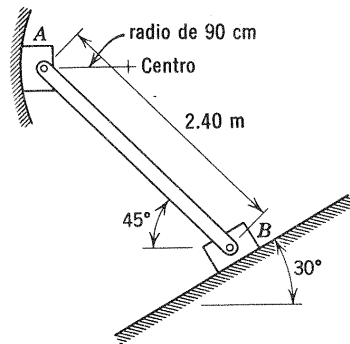


Fig. P-2.92

2.93. La velocidad angular absoluta de la barra BC es de 2 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj y la razón de cambio de la velocidad angular del eslabón AB es de 4 rad/seg^2 de sentido contrario. Determinar la aceleración del bloque C que desliza.

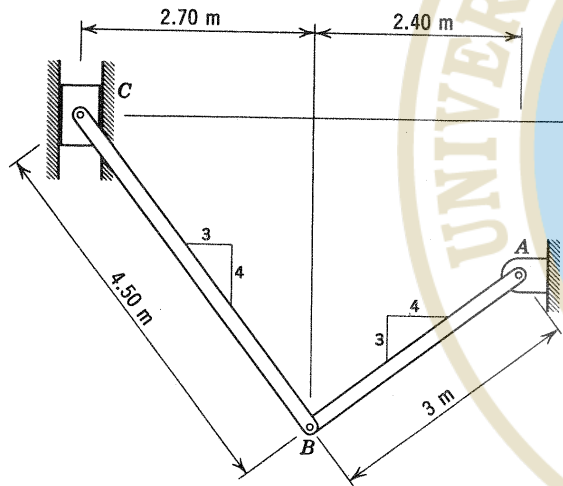


Fig. P-2.93

2.94. En la figura la barra AB gira alrededor de un pasador en A con una velocidad angular, en el sentido de las manecillas del reloj, de $3\sqrt{3} \text{ rad/seg}$ y C se mueve a lo largo de un plano horizontal. Determinar la velocidad y aceleración del punto P , que es el punto medio de CB , cuando:

- C está verticalmente abajo de A .
- B está verticalmente abajo de A .

La barra AB tiene una aceleración angular constante, en el sentido de las manecillas del reloj, de 2 rad/seg^2 .

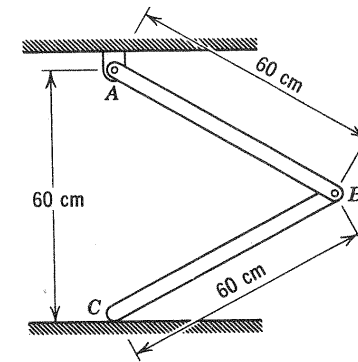


Fig. P-2.94

2.95. El cuerpo rígido ABC gira alrededor de un pivote sin fricción O con una velocidad angular de 5 rad/seg contraria a las manecillas del reloj y una aceleración angular de 10 rad/seg^2 de sentido opuesto. Determinar la velocidad y aceleración del bloque que desliza en el instante en que el mecanismo adopta la posición que se muestra.

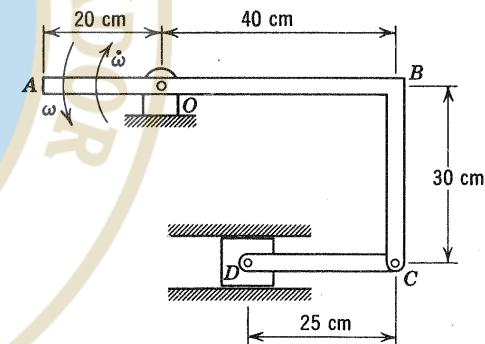


Fig. P-2.95

2.96. En el mecanismo que se muestra el punto A se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 60 cm/seg . El punto B tiene una velocidad de 60 cm/seg y una aceleración de 60 cm/seg^2 , ambas hacia la derecha. Hallar la velocidad y aceleración del punto C .

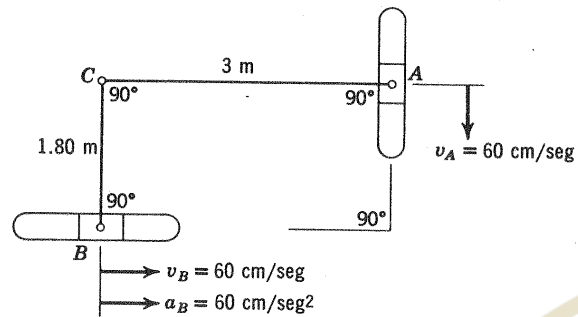


Fig. P-2.96

2.97. En el mecanismo de eslabones que se muestra, el punto C tiene una velocidad de 7.20 m/seg hacia la derecha y el eslabón AB tiene una aceleración angular de 5 rad/seg² contraria a las manecillas del reloj, cuando el mecanismo está en la posición que se ve. Determinar:

- La velocidad angular del eslabón AB .
- La aceleración del punto C .

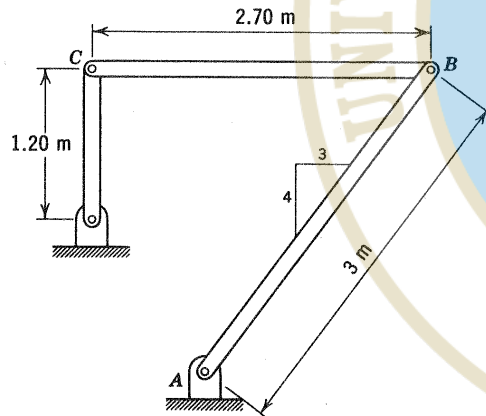


Fig. P-2.97

- En la posición que se indica, la velocidad del pasador B es $6 \vec{j}_0$ m/seg; determinar, para este instante, la velocidad de la mosca parada en el eslabón C .
- Determinar la aceleración de la mosca suponiendo que la aceleración de B sea horizontal.
- Se supone que la mosca está caminando hacia D con una rapidez de 60 cm/seg y que crece a razón de 90 cm/seg/seg. La velocidad angular de AB es de 10 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj y está decreciendo lentamente hacia abajo a razón de 20 rad/seg². Hallar la aceleración de la mosca.

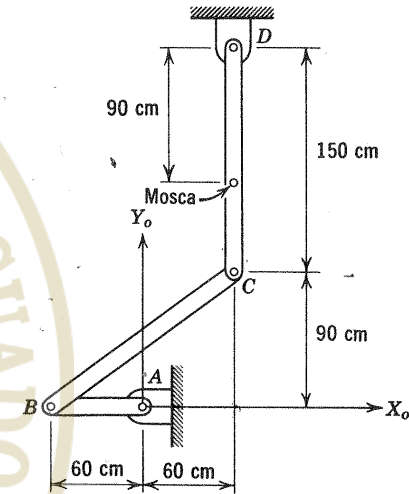
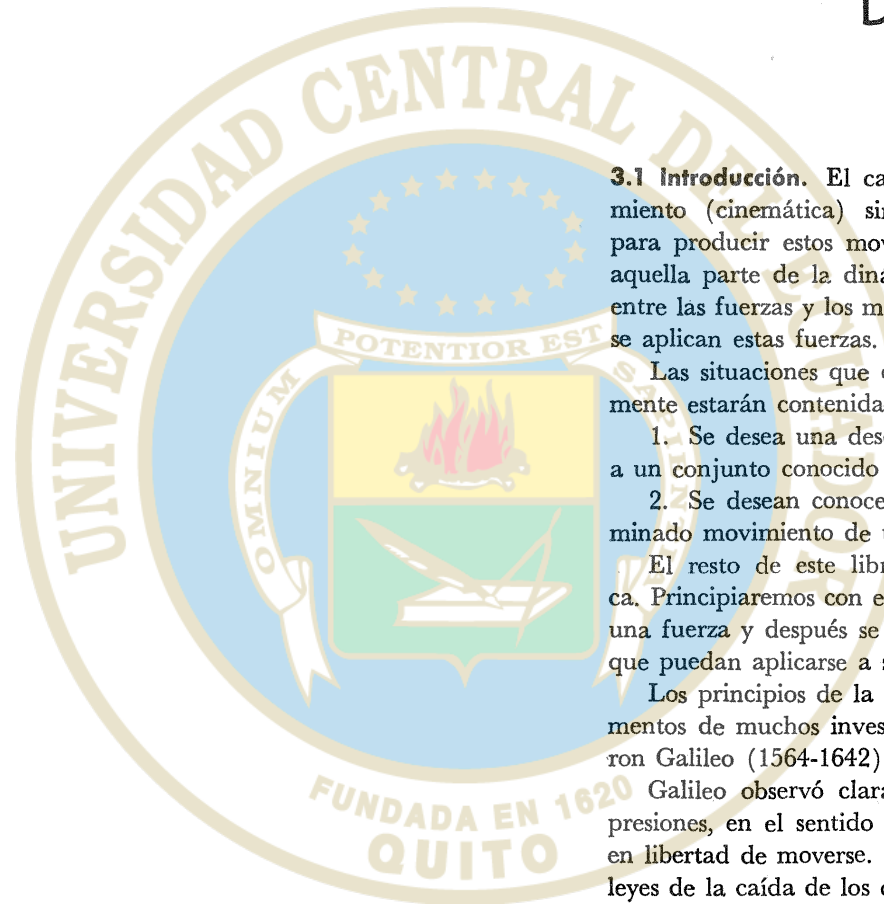


Fig. P-2.98

Dinámica de la partícula



3.1 Introducción. El capítulo anterior trató de la geometría del movimiento (cinemática) sin considerar las fuerzas que fueron necesarias para producir estos movimientos. Ahora fijaremos nuestra atención en aquella parte de la dinámica, llamada cinética, que estudia la relación entre las fuerzas y los movimientos resultantes de las masas sobre las que se aplican estas fuerzas.

Las situaciones que en cinética desea analizar un ingeniero, generalmente estarán contenidas en alguna de las dos categorías siguientes:

1. Se desea una descripción del movimiento de un sistema sometido a un conjunto conocido de fuerzas.
2. Se desean conocer las fuerzas necesarias para producir un determinado movimiento de un sistema.

El resto de este libro se consagrará a una discusión de la cinética. Principiaremos con el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza y después se extenderán estos argumentos básicos de manera que puedan aplicarse a sistemas de partículas y a cuerpos rígidos.

Los principios de la dinámica están basados en innumerables experimentos de muchos investigadores entre los cuales, los más notables fueron Galileo (1564-1642) y Newton (1642-1727).

Galileo observó claramente que todo cuerpo sometido a fuerzas o presiones, en el sentido de “empujar” o “tirar” era acelerado si estaba en libertad de moverse. Sus experimentos, de los cuales se dedujeron las leyes de la caída de los cuerpos, establecieron las bases justas de la cinética del movimiento. Además, Galileo observó que, a menos que alguna fuerza externa actuara sobre un cuerpo en movimiento, el cuerpo continuaría moviéndose con rapidez constante en línea recta. Por lo tanto anticipó la primera ley de Newton del movimiento, la llamada “ley de la inercia”. Galileo estableció los *hechos* que conciernen al movimiento de los cuerpos, pero no proporcionó una *teoría* del movimiento.

Fue la mayor contribución de Newton a la dinámica el formular esa teoría en forma cuantitativa. En 1686, Newton presentó sus llamadas "leyes del movimiento". Estas leyes se pueden enunciar como sigue:

Primera Ley. Una partícula de masa constante permanece en reposo o se mueve con velocidad constante en línea recta, a menos que sobre ella actúe una fuerza.

Segunda Ley. Una partícula sometida a la acción de una fuerza se mueve de manera que la razón de cambio con respecto al tiempo de su cantidad de movimiento lineal es igual a la fuerza.

Tercera Ley. Si dos partículas actúan una sobre otra, la fuerza ejercida por la primera sobre la segunda es igual en magnitud y opuesta en sentido a la fuerza ejercida por la segunda sobre la primera.

Ahora estableceremos nuevamente, en lenguaje moderno, la segunda ley de Newton.

3.2 Segundo axioma de Newton. Nuevamente establecida la segunda ley o axioma de Newton es:

La razón de cambio, con respecto al tiempo, de la cantidad de movimiento de una partícula, es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre ella y tiene la misma dirección y sentido que la fuerza.

Se debe comprender que existe una partícula que tiene masa, pero que ocupa un espacio o volumen cero. Esta doble igualdad —magnitud y dirección— implica una ecuación vectorial que puede escribirse

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}. \quad (3.1)$$

Se define el producto $m\dot{\mathbf{r}}$ como la cantidad de movimiento lineal de la partícula y con frecuencia se representa simbólicamente por $\bar{p}$. La cantidad escalar m se llama masa y es una medida de la oposición (inercia) que presenta un objeto para ser puesto en movimiento. La velocidad $\dot{\mathbf{r}}$, se mide en un sistema de referencia inercial o newtoniano; esto es, $\dot{\mathbf{r}}$ es una velocidad absoluta. Un sistema de referencia newtoniano es cualquier sistema en que los principios de Newton son válidos. Más adelante se demostrará que un sistema de referencia fijo en la Tierra es el adecuado para la exactitud que se exige en la mayoría de los problemas de ingeniería. El símbolo $\mathbf{F}$ representa la fuerza resultante que actúa sobre la partícula.

La ecuación 3.1 establece matemáticamente el axioma fundamental sobre el cual se basa el resto de este tema. La ecuación 3.1 es aplicable a una sola partícula de masa constante; de ahí que se puede reducir a

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

donde $\ddot{\mathbf{r}}$ es la aceleración absoluta de la partícula.

De la ecuación 3.2 la masa de una partícula se puede ahora definir con más precisión como la razón entre la fuerza que actúa sobre una partícula dada y la aceleración resultante.

La fuerza de atracción de la Tierra sobre las partículas cercanas a su superficie se conoce como peso. El peso de una partícula¹ varía de punto a punto sobre la Tierra, pero la variación es pequeña y en la mayoría de los casos se puede despreciar.

Para cuerpos libres situados en la proximidad de la superficie de la Tierra, la ecuación 3.2 se puede escribir en la forma:

$$\mathbf{W} = m\mathbf{a} = m\mathbf{g}. \quad (a)$$

En la ecuación *a* generalmente se utiliza el símbolo $\mathbf{g}$ para designar la aceleración de los cuerpos libres cercanos a la Tierra. Debido a que la masa es una característica invariante de los cuerpos, $\mathbf{g}$ también varía de punto a punto sobre la superficie de la Tierra, pero para los propósitos de la ingeniería se puede tomar como 9.81 m/seg², (32.2 pies/seg² o 386 pulg/seg²). En ingeniería normalmente se mide W en kilogramos y g en m/seg²; por lo tanto la masa m es

$$m = \frac{W}{g} \quad (b)$$

y tiene unidades de kg·seg²/m, su magnitud es

$$m = \frac{W \text{ kg}}{9.81} \quad (c)$$

Es importante admitir que la masa m es una constante invariante de proporcionalidad y de ahí que se puede expresar en cualesquiera unidades que relacionen la aceleración de un cuerpo (en cualesquiera unidades apropiadas) con la fuerza (en cualesquiera unidades apropiadas) que actúe sobre dicho cuerpo.

En virtud de la importancia de la masa como medida patrón, por convenio internacional se define la unidad de masa como la masa de cierto cilindro de platino-iridio (kilogramo internacional) que se conserva en la Comisión Internacional de Pesos y Medidas de Sèvres, Francia.

La expresión matemática para $\dot{\mathbf{r}}$ se dedujo para muchos de los sistemas de coordenadas comunes en el capítulo anterior. Para un sistema de coordenadas rectangulares, las ecuaciones escalares que representan la segunda ley de Newton son

¹ Housner and Hudson, *Applied Mechanics—Dynamics*, Van Nostrand, 1950, pág. 3.

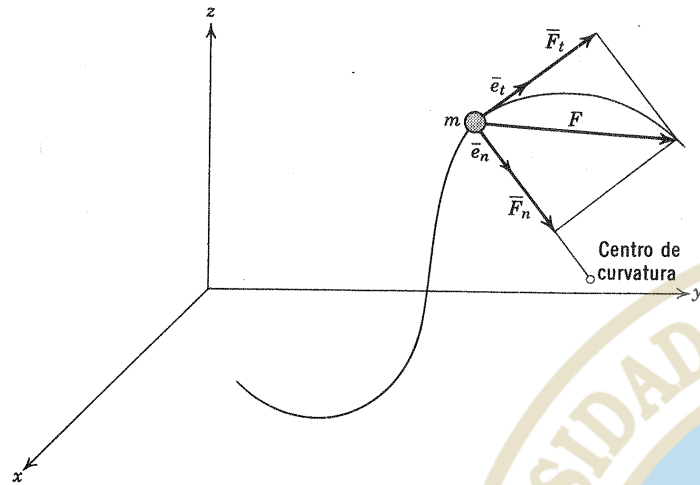


Fig. 3.1

$$\begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}, \\ F_y &= m\ddot{y}, \\ F_z &= m\ddot{z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Algunas veces es conveniente emplear las componentes de la aceleración que son tangente y normal a la trayectoria del movimiento de una partícula, tal como se ve en la figura 3.1. En este caso, la ecuación 3.2 se escribe en la siguiente forma:

$$\bar{F}_t = m\bar{a}_t = m\dot{s}\bar{e}_t, \quad (3.4)$$

$$\bar{F}_n = m\bar{a}_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n.$$

En términos de coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} \bar{F}_r &= m\bar{a}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\bar{e}_r, \\ \bar{F}_\phi &= m\bar{a}_\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\bar{e}_\phi, \\ \bar{F}_z &= m\bar{a}_z = m\ddot{z}\bar{e}_z. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Independientemente de si el segundo axioma de Newton se escribe en coordenadas cartesianas, cilíndricas o en cualquier otro sistema arbitrario, las ecuaciones de movimiento son para una sola partícula, siempre y cuando la aceleración absoluta de ésta esté descrita correctamente. Sin embargo, existen casos donde las relaciones expresadas por la segunda ley de Newton son válidas para un cuerpo de dimensiones finitas. Por ejemplo, si la aceleración de todo elemento del cuerpo es la misma, se

puede escribir la ecuación 3.2 como una suma para todas las partículas que constituyen el cuerpo,

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i. \quad (3.6)$$

Haciendo

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{F} \quad \sum_{i=1}^n m_i = M, \quad \text{y} \quad \ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}},$$

donde $\bar{F}$ es la fuerza resultante total que actúa sobre el cuerpo, M es la masa total del cuerpo y $\ddot{\mathbf{r}}$ es la aceleración de cada elemento del cuerpo, entonces

$$\bar{F} = M\ddot{\mathbf{r}}. \quad (3.7)$$

Esta ecuación, como aquí se dedujo, se limita a cuerpos rígidos con movimiento de traslación. Más adelante se demostrará que esta ecuación también se aplica a la descripción del movimiento del centro de masa de un cuerpo rígido que posea el tipo más general de movimiento.

Cuando se examinan las diversas formas de la segunda ley de Newton, es interesante observar las consecuencias que se derivan al permitir que las cantidades ahí presentes sean constantes. Para aclarar lo anterior, consideremos una situación donde la velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ sea constante. En este caso, la razón de cambio respecto al tiempo de la cantidad de movi-

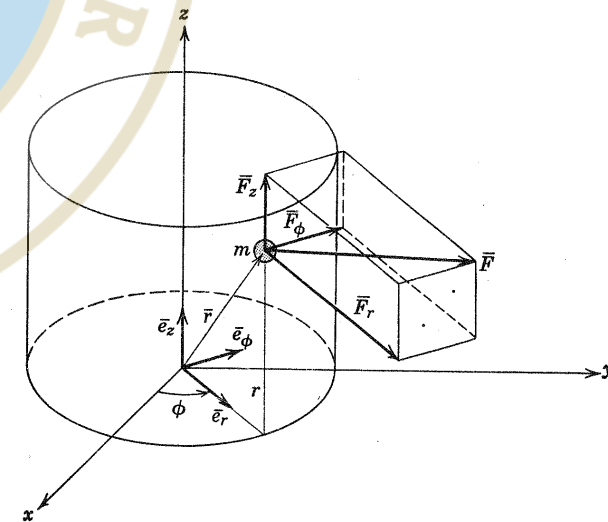


Fig. 3.2

miento y, consecuentemente, la fuerza son cero. El segundo axioma se reduce al primero, que trata del equilibrio de los cuerpos. Una situación alterna es la de suponer el caso donde $\vec{F} = 0$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = 0 \quad (3.8)$$

o sea

$$\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{r}} = \text{constante}, \quad (3.9)$$

que es el enunciado de un teorema de conservación: es decir que cuando la fuerza resultante que actúa sobre un sistema dado es cero, la cantidad de movimiento es una constante, es decir, se conserva.

3.3 Aplicaciones de la segunda ley de Newton a sistemas de fuerza constante. Primeramente se examinarán algunos ejemplos simples en los que las ecuaciones de movimiento se pueden integrar directamente por métodos elementales.

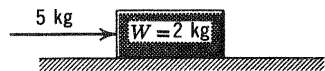


Fig. 3.3

Ejemplo 3.1. A una caja de 2 kg, se aplica una fuerza horizontal de magnitud constante de 5 kg dirigida hacia la derecha. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el plano es 0.40, calcular la rapidez del bloque después de haberse desplazado 20 m a partir del reposo. Ver figura 3.3.

A fin de aplicar la segunda ley de Newton al sistema que se examina, se debe aislar de todo lo que le rodea, es decir, se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre de la caja que muestre todas las fuerzas. Nótese que el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.4 es idéntico al diagrama de cuerpo libre que debería dibujarse si el problema fuera de estática. La fuerza F , es la fuerza de rozamiento que ejerce el plano sobre el bloque y que tiende a oponerse al movimiento de éste. La fuerza normal N , es la normal que previamente se consideró en estática.

Además de aislar el sistema que se analiza del medio que le rodea, se debe establecer un sistema de coordenadas antes de aplicar la ecuación 3.2. Obsérvese la orientación de los ejes de coordenadas. Para este sistema,

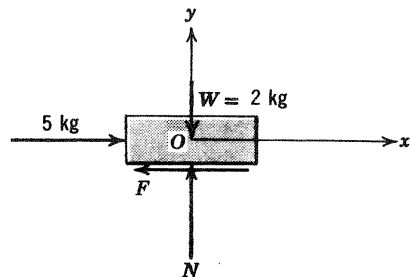


Fig. 3.4

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i}.$$

Utilizando la segunda ley de Newton en la forma expresada por la ecuación 3.3,

$$5 - F = \frac{W}{g} \ddot{x}$$

y

$$N - W = \frac{W}{g} \ddot{y}.$$

Puesto que $\ddot{y} = 0$, $N = W$. Entonces $F = 0.8 \text{ Kg}$ y

$$\ddot{x} = 2.1g.$$

Integrando,

$$\dot{x} = 2.1gt + C_1$$

y

$$x = 1.05gt^2 + C_1t + C_2.$$

De las condiciones iniciales se ve que C_1 y C_2 son cero.

Cuando $x = 20 \text{ m}$,

$$t = \left[\frac{20}{(1.05)(9.81)} \right]^{1/2} = 1.39 \text{ seg}$$

$$\dot{x} = (2.1)(9.81)(1.39) = 27.7 \text{ m/seg.}$$

Ejemplo 3.2. Un pequeño cuerpo descansa sobre un plano inclinado liso que gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular constante de 1 rad/seg. Si el cuerpo de 5 kg se une al eje de rotación mediante una cuerda, hallar la tensión en ésta. También determinar el valor de ω para el que la partícula abandona el plano.

La partícula describe una trayectoria circular con radio de 5 m y con una rapidez constante. Aquí son apropiadas las componentes normal, tangencial y binormal. Ver la figura 3.5.

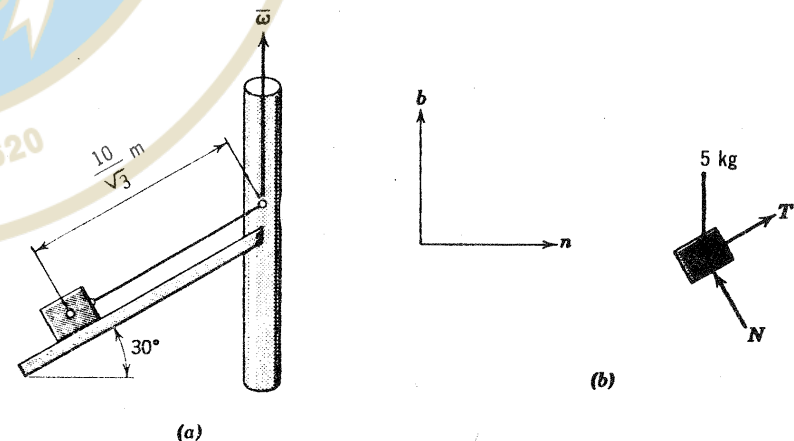


Fig. 3.5

Aplicando la ecuación de Newton en la dirección normal

$$F_n = ma_n = mr\omega^2$$

del diagrama de cuerpo libre de la partícula, se tiene

$$T \frac{\sqrt{3}}{2} - N \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{5}{g} (5) (1)^2 = \frac{25}{g} = 2.55.$$

En la dirección binormal $F_b = 0$.

$$N \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + T \left(\frac{1}{2} \right) - 5 = 0.$$

Eliminando N entre estas dos ecuaciones se obtiene

$$2T = 2.55 \sqrt{3} + 5$$

$$T = 4.71 \text{ kg}$$

Para hallar la velocidad angular en que la partícula abandona el plano, se hace $N = 0$. Entonces, de la ecuación binormal $T = 10 \text{ kg}$ y la ecuación normal llega a ser

$$10 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{g} (5) \omega^2,$$

$$\omega = 1.84 \text{ rad/seg.}$$

Ejemplo 3.3. Una canica está en libertad de rodar en un tubo hueco AC sin rozamiento. Si el tubo está obligado a moverse en el plano horizontal con una aceleración constante $\bar{a}_0 = a_0 \bar{i}_0$, hallar todas las fuerzas que actúan sobre la canica y la posición de ésta en cualquier instante. Si la canica parte del reposo en C ¿qué tiempo transcurrirá para que se mueva hasta el otro extremo del tubo? Ver la figura 3.6.

En este problema será conveniente establecer un sistema de coordenadas móvil fijo en el tubo que se traslada. Entonces se puede aplicar la ecuación general de movimiento relativo.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{a} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}.$$

Puesto que el sistema de coordenadas móvil no gira, esta ecuación se transforma en

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \bar{a} = a_0 \bar{i}_0 + a \bar{j}$$

La ecuación de movimiento

$$\bar{\mathbf{F}} = m \ddot{\mathbf{r}}$$

llega a ser

$$F_x \bar{i} + (F_z - mg) \bar{k} = m(a_0 \bar{i}_0 + a \bar{j}) = m[a_0(-\sin \alpha \bar{i} - \cos \alpha \bar{j}) + a \bar{j}].$$

Las ecuaciones escalares son

$$F_x = -ma_0 \sin \alpha,$$

$$F_z = mg,$$

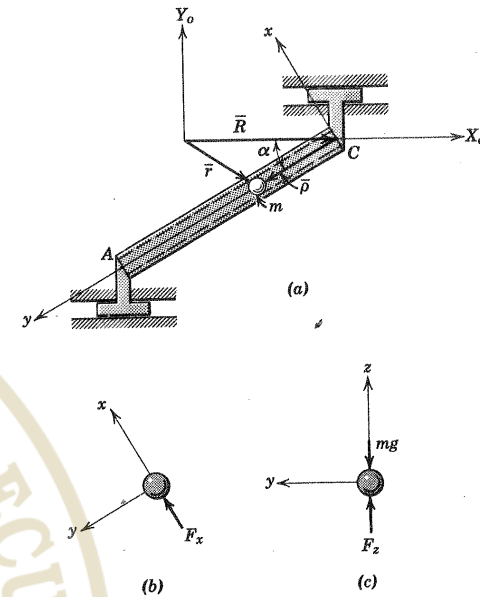


Fig. 3.6

$$a = a_0 \cos \alpha.$$

La fuerza sobre la partícula es

$$\bar{\mathbf{F}} = -ma_0 \sin \alpha \bar{i} + mg \bar{k}.$$

Para hallar la posición de la canica en cualquier instante se parte de

$$\ddot{\mathbf{r}} = a_0 \bar{i}_0 + a_0 \cos \alpha \bar{j}$$

e integrando dos veces.

$$\dot{\mathbf{r}} = a_0 t \bar{i}_0 + a_0 \cos \alpha t \bar{j} + \bar{C}_1,$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{a_0 t^2}{2} \bar{i}_0 + \frac{a_0 \cos \alpha t^2}{2} \bar{j} + \bar{C}_1 t + \bar{C}_2.$$

en $t = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = 0$ y se supone que $\bar{\mathbf{r}} = 0$. De manera que tanto $\bar{C}_1$ como $\bar{C}_2$ son cero. Para hallar el tiempo que transcurre para que la canica se mueva de C a A , se hace $\bar{\rho} = (l - d) \bar{j}$, donde la longitud del tubo es l y el diámetro de la canica es d .

$$l - d = \frac{a_0 \cos \alpha t^2}{2},$$

$$t = \left[\frac{2(l - d)}{a_0 \cos \alpha} \right]^{1/2}.$$

La posición de la canica en este instante es

$$\bar{r} = \bar{R} + \bar{\rho} = \frac{l-d}{\cos \alpha} \bar{i}_0 + (l-d) \bar{j}.$$

3.4 Aplicaciones a desplazamiento de sistemas de fuerza variable.

Ejemplo 3.4. Una cuenta de peso W se suelta desde el reposo en la posición A sobre el alambre curvo de la figura 3.7 y cae sin rozamiento bajo la acción de la gravedad. Determinar la fuerza resultante sobre el alambre cuando la cuenta pasa por el punto B . Se aplica en la figura 3.7b la ecuación tangencial de movimiento.

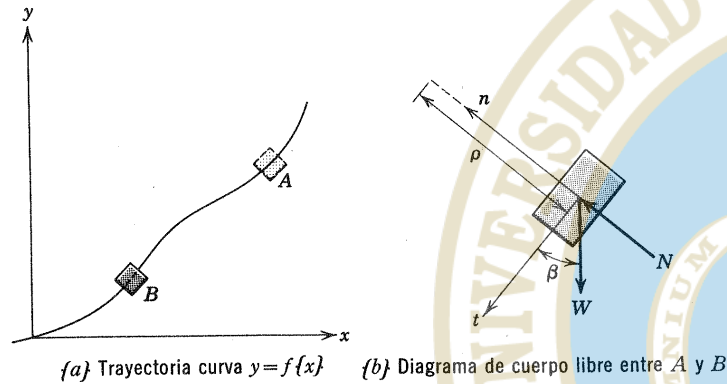


Fig. 3.7

$$ma_t = F_t,$$

$$\frac{W}{g} a_t = W \cos \beta,$$

o sea

$$a_t = g \cos \beta$$

La aceleración tangencial se puede relacionar con la rapidez a lo largo de la trayectoria en la siguiente forma

$$a_t = \ddot{s} = \frac{ds}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}, \quad (c)$$

donde ds es la longitud del arco a lo largo del alambre y se relaciona con la distancia vertical mediante

$$ds = \frac{-dy}{\cos \beta} \quad (d)$$

Sustituyendo las ecuaciones b y d en la ecuación c,

$$v dv = -g \cos \beta \frac{dy}{\cos \beta} = -g dy. \quad (e)$$

Integrando,

$$\int_0^v v dv = -g \int_{y_A}^{y_B} dy,$$

$$\frac{v_B^2}{2} = -g(y_B - y_A),$$

o sea

$$v_B^2 = 2g(y_A - y_B). \quad (f)$$

Nótese que la velocidad depende solamente de la carga en el sentido vertical. Para hallar la fuerza normal, escribimos la segunda ley de Newton en la dirección normal:

$$F_n = ma_n, \quad (g)$$

$$N - W \sin \beta = \frac{W}{g} \frac{v_B^2}{\rho},$$

$$N = W \left(\sin \beta + \frac{v_B^2}{g\rho} \right). \quad (h)$$

Para hacer el cálculo de la fuerza normal será necesario determinar β y ρ en el punto B a partir de la geometría de la curva. Este problema se ha simplificado considerablemente debido a la ausencia de rozamiento.

Ejemplo 3.5. Una partícula de peso W se mueve con rapidez uniforme v a lo largo de la curva cosenoidal ACB en un plano vertical. La curva está definida por la ecuación

$$y = a \cos \frac{2\pi x}{l}.$$

Hallar la fuerza normal ejercida por la trayectoria sobre la partícula cuando pasa por el punto más bajo C . Ver la figura 3.8.

La ecuación de Newton en la dirección normal da

$$N - W = \frac{W}{g} \frac{v^2}{\rho},$$

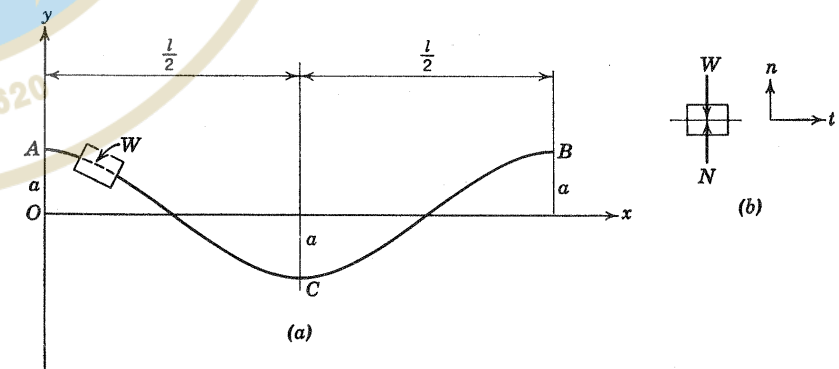


Fig. 3.8

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{-\frac{4\pi^2 a}{l^2} \cos \frac{2\pi x}{l}}{\left[1 + \left(\frac{2\pi a}{l} \sin^2 \frac{2\pi x}{l}\right)^2\right]^{3/2}},$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{x=l/2} = \frac{4\pi^2 a}{l^2}.$$

Entonces

$$N = W \left[1 + \frac{4\pi^2 v^2 a}{gl^2} \right].$$

Ejemplo 3.6. Determinar la fuerza normal que ejerce la varilla doblada sobre A y la fuerza que ejerce la varilla móvil sobre B cuando $\theta = 30^\circ$. Ver la figura 3.9.

$$\dot{\theta} = 10 \text{ rad/seg},$$

$$\ddot{\theta} = 0,$$

$$m = 9.81 \text{ kg},$$

$$r = a \sin 2\theta$$

$$a = 0.5 \text{ m}.$$

La velocidad y aceleración de una partícula en coordenadas polares son

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta,$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta.$$

En el punto de interés

$$r = a \sin 2\theta = 0.5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.25 \sqrt{3} \text{ m},$$

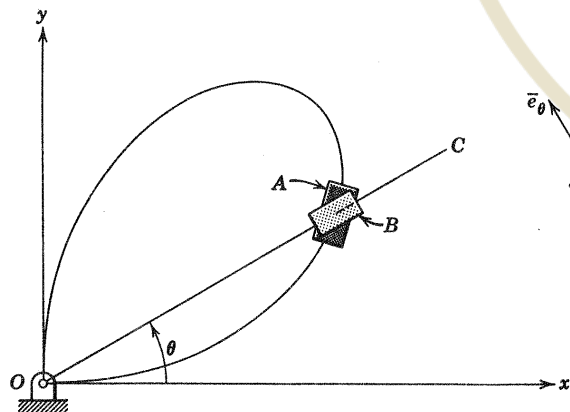


Fig. 3.9

$$\dot{r} = 2a \cos 2\theta \dot{\theta} = (2)(0.5)(1/2)(10) = 5 \text{ m/seg},$$

$$\ddot{r} = 2a[\cos 2\theta \ddot{\theta} - 2 \sin 2\theta \dot{\theta}^2] = -(4)(0.5) \frac{\sqrt{3}}{2} (100) = -100\sqrt{3}.$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -(100\sqrt{3} + 25\sqrt{3})\bar{e}_r + (100)\bar{e}_\theta \text{ m/seg}^2,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = 5\bar{e}_r + 2.5\sqrt{3}\bar{e}_\theta \text{ m/seg}.$$

Puesto que la velocidad de A es tangente a la trayectoria curva, la dirección de la fuerza ejercida por la trayectoria puede determinarse rápidamente sin necesidad de calcular la pendiente. Un vector unitario en la dirección de esta fuerza es

$$\frac{-\sqrt{3}\bar{e}_r + 2\bar{e}_\theta}{\sqrt{7}}.$$

$$\bar{F} = m\ddot{\mathbf{r}}.$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}A - \frac{1}{2}mg\right)\bar{e}_r + \left(B + \frac{2}{\sqrt{7}}A - \frac{\sqrt{3}}{2}mg\right)\bar{e}_\theta$$

$$= m(-125\sqrt{3}\bar{e}_r + 100\bar{e}_\theta).$$

Resolviendo para A y B , se obtiene

$$A = 3160 \text{ kg},$$

$$B = -2606 \text{ kg}.$$

Ejemplo 3.7. Considérese el sistema resorte-masa de la figura 3.10. El bloque pequeño tiene peso W ; el resorte tiene un módulo K y no estando alargado tiene una longitud a . La fuerza P es constante en magnitud y la cuerda permanece en contacto con la polea pequeña. Determinar la aceleración del bloque suponiendo que no hay rozamiento en las guías.

La componente escalar, en la dirección x , de la ecuación de movimiento de Newton es

$$m\ddot{x} = F_x,$$

$$\frac{W}{g}\ddot{x} = P \cos \left[\text{ang tang } \frac{c}{b-x} \right] - k(x-a),$$

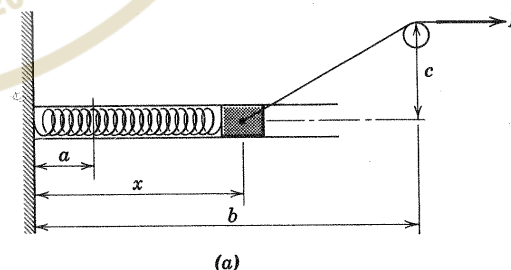
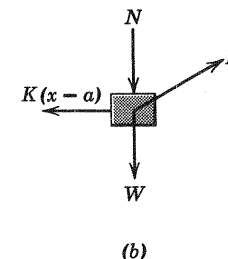


Fig. 3.10



o sea

$$\ddot{x} = \frac{gP}{W} \frac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} - \frac{gk}{W} (x-a).$$

3.5 Aplicaciones a sistemas de fuerza dependiente de la velocidad.

Los primeros tres ejemplos solamente contenían partículas bajo la influencia de un sistema de fuerzas que eran constantes. Existen muchos problemas donde las fuerzas no son constantes, sino que dependen del tiempo, del desplazamiento, de la velocidad o de algún otro parámetro. El tipo de problema de fuerza variable más común que hallan los ingenieros en su trabajo es el problema de la fuerza dependiente del desplazamiento y que se presentó en los ejemplos 3.4, 3.5, 3.6 y 3.7. El siguiente tipo más común de problema de fuerza variable es la situación en que la fuerza es dependiente de la velocidad. Ejemplo de problemas de esta clase son las defensas o parachoques de un automóvil y un amortiguador para el cierre automático de una puerta, para citar solamente dos dispositivos mecánicos.

Dos tipos de fuerzas dependientes de la velocidad se pueden ilustrar observando una caña de pescar. Es evidente que la mayor o menor curvatura del arco que forma una caña de pescar es una medida de la fuerza ejercida sobre el extremo de la caña. Un pescador observa que cuanto más rápido se mueven en el agua el corcho, la cuerda y el anzuelo, es mayor la curvatura del arco que forma la caña. Estas observaciones indican que la fuerza resistiva ejercida por el agua sobre el avío de pesca es dependiente de la velocidad. Es un hecho conocido que una partícula que se mueve en un fluido — gas o líquido — está sujeta a una fuerza resistiva que depende de la velocidad; es decir que $R = kv^n$, donde R es la fuerza resistiva, k es un coeficiente de arrastre o amortiguamiento, v es la velocidad de la partícula con relación al fluido y n depende de la velocidad relativa v . Los valores de n que describen la mayoría de las aplicaciones en ingeniería cubren dos clases de flujo relativo de fluidos. Cuando la rapidez relativa del flujo es moderada (el flujo recibe el nombre de "laminar"), el exponente toma el valor de 1. Cuando v es alta, se dice que el flujo es turbulento y el valor del exponente n se aproxima a 2.

Para flujo laminar $R = kv$.

Para flujo turbulento $R = kv^2$.

Consideremos un problema que incluya en el análisis fuerzas dependientes de la velocidad.

Ejemplo 3.8. Si una partícula esférica se mueve con pequeña velocidad en un fluido, experimentalmente se ha hallado² que la fuerza resistiva o fuerza de arrastre que actúa sobre el cuerpo es una función lineal de la velocidad, proporcional al diámetro del cuerpo y la viscosidad del medio fluido.

Como ejemplo, examinaremos la ecuación de movimiento de una partícula pequeña de diámetro d y peso específico γ_s que cae en virtud de su propio peso en un fluido de peso específico γ_w . Ver la figura 3.11.

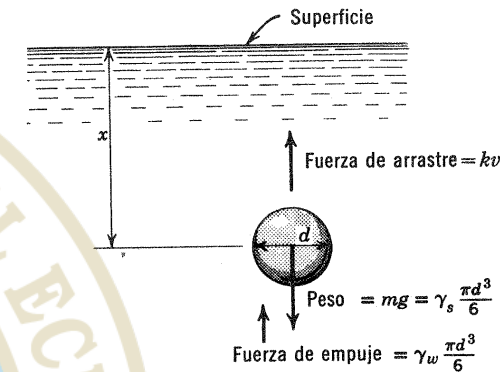


Fig. 3.11

La ecuación de movimiento para la partícula es

$$m\ddot{x} = F_x, \quad (a)$$

$$\left(\frac{\gamma_s \pi d^3}{6g}\right) \ddot{x} = (\gamma_s - \gamma_w) \frac{\pi d^3}{6} - kv. \quad (b)$$

De la ecuación b se ve que cuando $(\gamma_s - \gamma_w)(\pi d^3/6) = kv$, $\ddot{x}$ es igual a cero y por tanto la velocidad será constante. El valor de v para lo cual esto ocurre se llama velocidad límite v_t y en este caso

$$v_t = \frac{(\gamma_s - \gamma_w) \pi d^3}{k} \frac{1}{6}. \quad (c)$$

Si se hace $m = \gamma_s \pi d^3/6g$ y $B = (\gamma_s - \gamma_w)(\pi d^3/6)$ y se admite que $\dot{x} = dv/dt$, la ecuación b toma la forma

$$m \frac{dv}{dt} = B - kv. \quad (d)$$

Separando las variables, tenemos

$$m \frac{dv}{B - kv} = dt \quad (e)$$

² R. C. Binder, *Fluid Mechanics*, segunda edición, Prentice-Hall, 1952, págs. 172-173.

e integrando se obtiene la siguiente ecuación:

$$-\frac{m}{k} \ln (B - kv) + C_1 = t.$$

De la condición inicial: para $t = 0$, $v = 0$,

$$C_1 = \frac{m}{k} \ln (B).$$

Entonces

$$\frac{m}{k} \ln \frac{B}{B - kv} = t,$$

de la cual

$$\frac{B}{B - kv} = e^{(k/m)t},$$

y finalmente,

$$v = \frac{B}{k} [1 - e^{-(k/m)t}]$$

o sea

$$v = v_t [1 - e^{-(k/m)t}].$$

Se ha encontrado que el valor de k es $k = 3\mu\pi d$ para una partícula esférica, donde μ es la viscosidad del medio.³ Aquí se puede definir la viscosidad como la propiedad del fluido asociada con la fuerza necesaria para mover una partícula de fluido rebasando a otra. Si se supone que el fluido es agua a la temperatura ambiente, entonces

$$\mu = 1.02 \times 10^{-5} \text{ g-seg/cm}^2.$$

Por ejemplo, para una partícula de tierra de peso específico 2.67 que se sumerge, por su propio peso, en el agua, se halla que k es

$$k = 3(\pi)(1.02 \times 10^{-5})d = 9.59 \times 10^{-5}d \text{ g-seg/cm}.$$

La velocidad límite (ecuación c) será

$$v_t = \frac{(2.67 - 1.00)(\pi d^3)}{3\mu\pi d} \cdot \frac{1}{6}.$$

Por supuesto, teóricamente la velocidad límite se alcanzará para $t = \infty$, pero en muchos casos, se alcanza el 95 por ciento de la velocidad límite en un tiempo relativamente corto.

Para una partícula de tierra de 0.02 cm de diámetro que cae en el agua, determinaremos el tiempo necesario para que su velocidad alcance el 95 por ciento de v_t partiendo del reposo. Si la ecuación g se resuelve para t , se halla que $t = 1.79 \times 10^{-2}$ seg. Para todos los propósitos prácticos, la partícula de tierra se mueve en el agua bajo su propio peso a la velocidad límite, si el tiempo de movimiento es del orden de segundos.

Prácticamente, entonces, se puede usar la ecuación g para determinar la viscosidad del fluido si las velocidades límites no exceden del conjunto de va-

³ R. C. Binder, *Fluid Mechanics*, Segunda edición, Prentice-Hall, 1952, págs. 172-173.

lores para los que la fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad. El conjunto de valores válido para el caso que acaba de discutirse se ha determinado experimentalmente para muchas formas geométricas.

Ejemplo 3.9. Una partícula cargada se mueve en un campo electromagnético y adquiere un movimiento de acuerdo con la ecuación

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\vec{E} - \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}} \times \vec{H},$$

donde

m = masa,

$-e$ = carga eléctrica,

$\vec{E}$ = campo eléctrico (intensidad),

$\vec{H}$ = campo magnético (intensidad).

Si se toma $\vec{E} = E\hat{i}$ y $\vec{H} = H\hat{k}$, las ecuaciones escalares de movimiento son

$$\ddot{x} = -\frac{e}{m} E - \frac{e}{mc} \dot{y}H, \quad (a)$$

$$\ddot{y} = \frac{e}{mc} \dot{x}H, \quad (b)$$

$$\ddot{z} = 0.$$

Puesto que las ecuaciones están dinámicamente acopladas (las velocidades en una dirección de coordenadas producen aceleraciones en otra dirección), se puede facilitar la solución utilizando números complejos. Multiplicando la ecuación b por i y sumándola a la ecuación a

$$\ddot{x} + i\dot{y} = -\frac{e}{m} E + \frac{eH}{mc} (i\dot{x} - \dot{y}). \quad (c)$$

Haciendo ahora $x + iy = z$ y $\omega = eH/mc$. Entonces $\ddot{x} + i\dot{y} = \ddot{z}$ e $i\dot{x} - \dot{y} = i\dot{z}$. La ecuación c se transforma en

$$\ddot{z} - i\omega\dot{z} = -\frac{e}{m} E \quad (d)$$

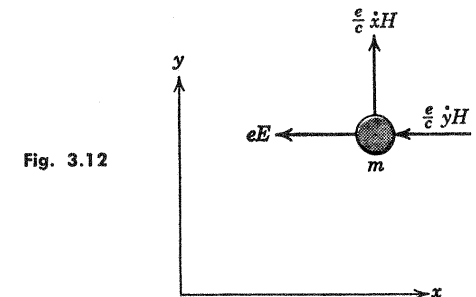


Fig. 3.12

o sea

$$\frac{d}{dt} (\dot{z} e^{-i\omega t}) = -\frac{e}{m} E e^{-i\omega t}. \quad (e)$$

Integrando, tenemos

$$\dot{z} e^{-i\omega t} = \frac{eE}{i\omega m} e^{-i\omega t} + C_1.$$

Tomando las condiciones iniciales $t = 0$, $\dot{z} = 0$, $z = 0$, se obtiene

$$\dot{z} = -\frac{ieE}{m\omega} (1 - e^{i\omega t}). \quad (f)$$

Integrando nuevamente,

$$z = -\frac{ieE}{m\omega} \left(t - \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t} \right) + C_2$$

o sea

$$z = -\frac{eE}{m\omega^2} [i\omega t - e^{i\omega t} + 1]. \quad (g)$$

Separando z en sus partes real e imaginaria, se deducen las ecuaciones paramétricas del movimiento de la partícula cargada:

$$x = -\frac{eE}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) \quad (h)$$

y

$$y = -\frac{eE}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t). \quad (i)$$

La trayectoria es una cicloide a lo largo de la parte negativa del eje y .

3.6 Aplicaciones a sistemas interconectados. Los ejemplos anteriores contenían una sola partícula o bien un cuerpo rígido tratado como partícula. Existe un gran número de problemas en que las partículas o cuerpos de dimensiones finitas están interconectados. El tipo y la disposición de la interconexión se debe considerar en la cinemática como se ilustrará en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.10. Examinemos los dos sistemas que se muestran en las figuras 3.13 y 3.14. En la figura 3.13 se tiene una masa de peso W sobre un plano liso

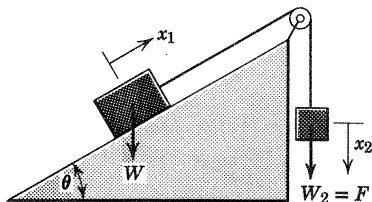


Fig. 3.13

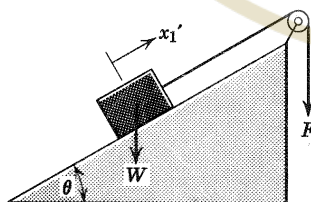


Fig. 3.14

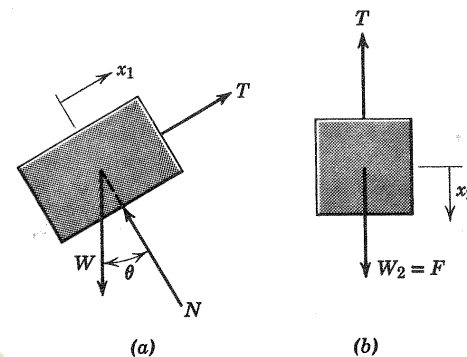


Fig. 3.15

unido por una cuerda flexible, inextensible y de masa despreciable, que pasa por una polea lisa, a otra masa de peso $W_2 = F$. En la figura 3.14 se tiene el mismo sistema excepto que W_2 se ha sustituido por una fuerza F . La pregunta que podemos formular es: "¿Los dos sistemas son dinámicamente equivalentes?" Suponiendo que el bloque está obligado a moverse a lo largo del plano, entonces, para el sistema de la figura 3.13, después de examinar el diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 3.15, podemos escribir las siguientes ecuaciones escalares:

$$T - W \sin \theta = \frac{W}{g} \ddot{x}_1, \quad (a)$$

$$W_2 - T = \frac{W_2}{g} \ddot{x}_2. \quad (b)$$

Puesto que la cuerda es inextensible, $x_1 = x_2$ y $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$. Sumando las ecuaciones a y b , obtenemos:

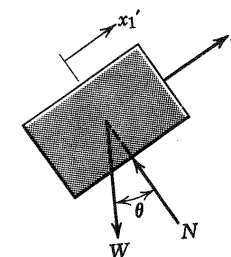
$$W_2 - W \sin \theta = \frac{W + W_2}{g} \ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{g}{W + W_2} (W_2 - W \sin \theta). \quad (c)$$

Para el segundo caso, de la figura 3.16 se tiene

$$F - W \sin \theta = \frac{W}{g} \ddot{x}_1'. \quad (d)$$

Fig. 3.16



Debido a que $F = W_2$, se halla que

$$\ddot{x}_1' = \frac{g}{W} (W_2 - W \sin \theta). \quad (e)$$

Comparando las ecuaciones c y e , se puede ver que el segundo sistema tendrá una aceleración diferente y por consiguiente tendrá distintos desplazamientos. Si $W = W_2 = F$ y $\theta = 30^\circ$, se halla $\ddot{x}_1 = g/4$ y $\ddot{x}_1' = g/2$. Además, en cada caso las aceleraciones son constantes. Integrando,

$$\dot{x}_1 = \frac{g}{W + W_2} (W_2 - W \sin \theta) t,$$

$$x_1 = \frac{g}{W + W_2} (W_2 - W \sin \theta) \frac{t^2}{2}$$

y

$$\dot{x}_1' = \frac{g}{W} (W_2 - W \sin \theta) t,$$

$$x_1' = \frac{W}{g} (W_2 - W \sin \theta) \frac{t^2}{2}$$

suponiendo que las condiciones iniciales son ceros.

Ejemplo 3.11. Determinar la aceleración de cada bloque en el sistema que se muestra en la figura 3.17. Las cuerdas flexibles, inextensibles y de peso despreciable pasan sobre poleas lisas y de masa despreciable.

Debido a que se desprecia la masa de las poleas, la tensión en el cable no cambia al pasar sobre ellas. Esto se muestra en los diagramas (d) y (e) . Escribiendo sucesivamente la ecuación de movimiento para cada uno de los diagramas de cuerpo libre que se muestran, se obtienen las cinco ecuaciones siguientes:

$$T_1 - A = \frac{A}{g} \ddot{y}_A, \quad (a)$$

$$T_3 - B = \frac{B}{g} \ddot{y}_B, \quad (b)$$

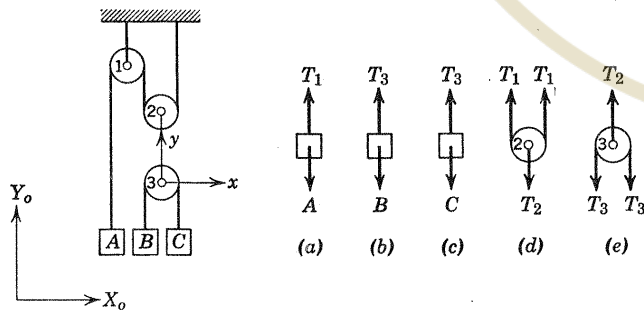


Fig. 3.17

$$T_3 - C = \frac{C}{g} \ddot{y}_C, \quad (c)$$

$$2T_1 - T_2 = (0) \ddot{y}_2, \quad 2T_1 = T_2, \quad (d)$$

$$T_2 - 2T_3 = (0) \ddot{y}_3, \quad T_2 = 2T_3. \quad (e)$$

Teniendo seis incógnitas y solamente cinco ecuaciones, antes que el problema pueda resolverse se debe escribir una relación adicional. Esta ecuación adicional proviene de consideraciones cinemáticas. Nótese que se han usado tres coordenadas independientes para describir las aceleraciones pero solamente dos de estas coordenadas son independientes, esto es, el sistema tiene únicamente 2 grados de libertad. Los desplazamientos y_A , y_B y y_C se pueden relacionar de la siguiente manera. Supongamos que A tiene un desplazamiento y_A positivo hacia arriba relativo a X_0Y_0 . Entonces la polea 3, en la que se ha situado xy , tendrá un desplazamiento $-y_A/2$. En seguida supondremos que B tiene un desplazamiento ρ positivo hacia arriba relativo a xy . Los desplazamientos absolutos de A , B y C se pueden ahora escribir.

$$y_A = y_A, \quad \dot{y}_A = \dot{y}_A; \quad (f)$$

$$y_B = -\frac{y_A}{2} + \rho, \quad \dot{y}_B = -\frac{\dot{y}_A}{2} + \dot{\rho}; \quad (g)$$

$$y_C = -\frac{y_A}{2} - \rho, \quad \dot{y}_C = -\frac{\dot{y}_A}{2} - \dot{\rho}. \quad (h)$$

Estas ecuaciones adicionales relacionan las aceleraciones y proporcionan una solución única para $\ddot{y}_A$, $\ddot{y}_B$ y $\ddot{y}_C$. Resolviendo estas ecuaciones simultáneas, se halla:

$$\ddot{y}_A = \left[\frac{2BC - AB - AC}{AB + BC + AC} \right] g,$$

$$\ddot{y}_B = \left[\frac{2AC - AB - BC}{AB + BC + AC} \right] g,$$

$$\ddot{y}_C = \left[\frac{2AB - BC - AC}{AB + BC + AC} \right] g;$$

$$T_1 = T_3 = T = \frac{3ABC}{AB + BC + AC}.$$

3.7 Justificación del análisis como una partícula. Los ejemplos anteriores se han limitado a cuerpos relativamente pequeños que han sido tratados como partículas. En los ejemplos 3.10 y 3.11, los cuerpos tuvieron movimiento de traslación pura y cada punto tuvo la misma aceleración; por lo tanto las ecuaciones que se utilizaron dieron los resultados correctos. Sin embargo, en el caso de la cuenta que se desliza en el alambre, cada punto no tiene la misma aceleración y podría esperarse un error en la solución. Consideremos un problema similar donde el cuerpo

no es pequeño e intentemos determinar la relación entre el tamaño del cuerpo y la trayectoria que describe.

La varilla que se muestra en la figura 3.18 se mueve con velocidad angular constante ω en una canal circular lisa. Se desea determinar la fuerza necesaria, a lo largo de la varilla, para mantenerla en esta trayectoria, teniendo en cuenta la influencia que la dimensión radial tiene sobre la magnitud de la fuerza.

Se supone que, para una aplicación particular, es aceptable un error de 5 por ciento y que en este caso las dimensiones son $\rho_a = 20$ m, $\rho_b = 22$ m y la anchura de la varilla, esto es, la dimensión normal al radio ρ_i , es pequeña.

Antes de hallar la fuerza, se debe hallar la aceleración. Para hacer esto, elegimos los orígenes (fijo y móvil) en el centro de la trayectoria circular, con el sistema de coordenadas móvil unido a la varilla, según se muestra. La ecuación de la aceleración para un elemento diferencial de la varilla es

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\omega} \times \bar{\rho}_i + \omega \times (\omega \times \bar{\rho}_i) + \ddot{\mathbf{a}} + 2\omega \times \bar{\mathbf{v}}.$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = 0 + 0 + \omega \bar{\mathbf{k}} \times (\omega \bar{\mathbf{k}} \times \rho_i \bar{\mathbf{j}}) + 0 + 0 = -\omega^2 \rho_i \bar{\mathbf{j}}.$$

La fuerza sobre cada partícula requerida para producir esta aceleración será

$$\bar{\mathbf{F}}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -m_i \omega^2 \rho_i \bar{\mathbf{j}}.$$

Se puede obtener la fuerza total integrando de $\rho_i = \rho_a$ a $\rho_i = \rho_b$.

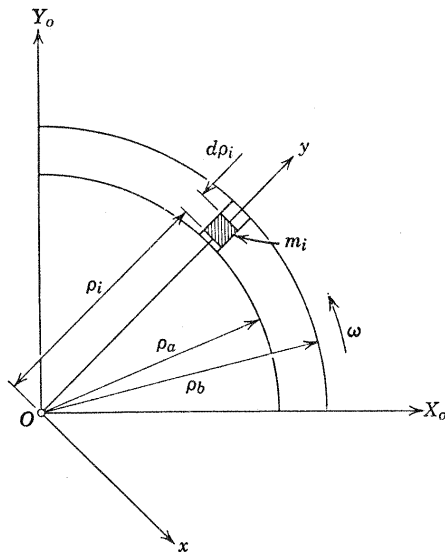


Fig. 3.18

$$\bar{\mathbf{F}} = \int_{\rho_a}^{\rho_b} -m_i \omega^2 \rho_i \bar{\mathbf{j}} = -\omega^2 \bar{\mathbf{j}} \int_{\rho_a}^{\rho_b} \rho_i m_i.$$

Obtendremos ahora una expresión para m_i en términos de la masa total M :

$$m_i = dM = \mu d\rho_i,$$

donde μ = masa/unidad de longitud = $M/(\rho_b - \rho_a)$. Por lo tanto

$$\bar{\mathbf{F}} = -\omega^2 \bar{\mathbf{j}} \int_{\rho_a}^{\rho_b} \frac{M}{\rho_a \rho_b - \rho_a} \rho_i d\rho_i,$$

$$\bar{\mathbf{F}} = -\omega^2 \bar{\mathbf{j}} \frac{M}{\rho_b - \rho_a} \left[\frac{\rho_i^2}{2} \right]_{\rho_a}^{\rho_b} = \frac{-\omega^2 M \bar{\mathbf{j}}}{2(\rho_b - \rho_a)} (\rho_b^2 - \rho_a^2),$$

$$\bar{\mathbf{F}} = -\omega^2 M \bar{\mathbf{j}} \frac{\rho_b + \rho_a}{2}.$$

Nótese que los resultados dependen del radio medio, no obstante, si $\rho_a = \rho_b$, o si el cuerpo es lo suficientemente pequeño, se puede utilizar cualquiera de estos valores. El error máximo para la dimensión dada es

$$e = \frac{21 - 20}{21} \times 100 = 4.7\%$$

Esto es, menos del 5 por ciento del error permisible. Por lo tanto, en este caso se puede tratar este cuerpo de dimensiones finitas como una partícula.

3.8 La ley de Newton y la rotación de la Tierra. Como otra aplicación de la segunda ley de Newton, consideremos el análisis de partículas sobre la Tierra con movimiento de rotación. La Tierra tiene un movimiento más bien complejo en un sistema inercial primario; por consiguiente las aceleraciones sobre la Tierra se componen de varias partes: una debido al movimiento de la Tierra en la galaxia, una debido a la aceleración del Sol y una más debido a la rotación de la Tierra alrededor del Sol. Esta

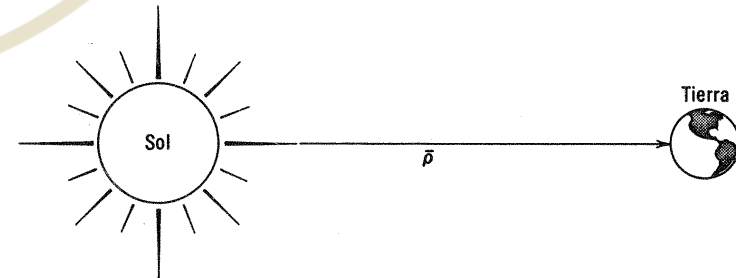


Fig. 3.19

última aceleración es la mayor de las mencionadas. Un cálculo del valor de ésta mostrará que, así como las otras, puede despreciarse. Supongamos que el centro del Sol no tiene aceleración y, por tanto, se puede usar como origen de un sistema inercial primario.

El vector de posición $\bar{\rho}$ efectúa una revolución por año alrededor del Sol; por lo tanto, su velocidad angular (aproximadamente constante) es

$$\omega = \frac{1 \text{ rev}}{\text{año}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \times \frac{1 \text{ año}}{365 \text{ días}} \times \frac{1 \text{ día}}{24 \text{ hs}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ seg}} \\ = 1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/seg.}$$

La aceleración de la Tierra relativa al sol es aproximadamente

$$\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}).$$

La magnitud de esta aceleración es

$$a = (1.99 \times 10^{-7} \text{ rad/seg})^2 \times 150 \times 10^6 \text{ Km} \times \frac{1000}{1 \text{ Km}} \\ = 0.594 \times 10^{-2} \text{ m/seg}^2.$$

o sea alrededor de 0.06 por ciento de g . Por lo tanto, para la mayoría de los problemas de ingeniería sobre la Tierra se puede despreciar este término. En vista de la magnitud del error que interviene, se puede considerar el centro de la Tierra como estando fijo (o cuando menos que no tiene aceleración). Por supuesto, que hay algunos problemas corrientes de ingeniería, como por ejemplo, el movimiento de satélites, especialmente alrededor del Sol o de otros planetas, que exigen la consideración de aquellos términos para lograr la precisión deseada. También un astrónomo debe tomar en cuenta estas aceleraciones en los cálculos que efectúa sobre los movimientos de los cuerpos celestes.

Para tener una idea de la significación (o insignificancia) de la rotación de la Tierra, consideremos fijo su centro y elijamos un sistema de referencia "fijo" con el origen en el centro de la Tierra. Se tomará el origen móvil sobre la superficie de la Tierra con el eje x en el plano de un meridiano y con la dirección positiva hacia el norte y el eje y a lo largo de la línea de la plomada (vertical), de ahí que el eje z apuntará hacia el este. Ver figura 3.20. Se aconseja al lector considerarse situado en el sistema de coordenadas móvil. El movimiento de este sistema de coordenadas tendrá una velocidad angular constante de una revolución por día o sea $\omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/seg}$. Consideremos ahora un punto P que se mueve sobre la Tierra y que se localiza en el sistema de coordenadas móvil mediante el vector $\bar{\rho}$.

La aceleración del punto es

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) + \bar{a} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}.$$

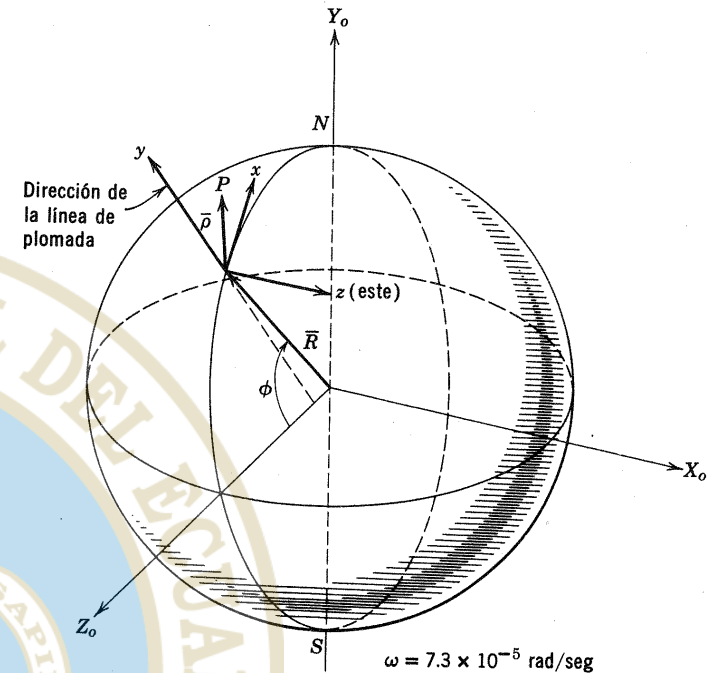


Fig. 3.20

El primer término $\ddot{\bar{R}}$ representa la aceleración de un punto que se mueve sobre una trayectoria circular; por tanto

$$\ddot{\bar{R}} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{R} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{R}).$$

El término $\dot{\bar{\omega}}$ representa la razón de cambio de $\bar{\omega}$ pero ya que la magnitud de un día es aproximadamente constante, $\dot{\bar{\omega}} = 0$. Por lo tanto, la primera de las ecuaciones se reduce a

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\bar{R} + \bar{\rho})] + \bar{a} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}.$$

La ecuación anterior representa, para una buena aproximación, la aceleración de un partícula sobre la superficie de la Tierra. Se puede hacer una simplificación más, si se observa que para aquellos problemas en la proximidad de la superficie de la Tierra $|\bar{\rho}|$ es pequeño (algunos cientos de metros o menos comparados con $|\bar{R}| \cong 6400 \text{ km}$). Por consiguiente

$$|\bar{R}| \gg |\bar{\rho}| \quad \text{y} \quad \ddot{\bar{r}} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{R}) + \bar{a} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}. \quad (3.10)$$

Esta aceleración se utiliza en la solución de los siguientes ejemplos

Ejemplo 3.12. Supongamos que se pesa un objeto sobre la superficie de la Tierra. Debido a que el cuerpo estará en reposo en el sistema de coordenadas móvil, $\bar{v}$ y $\bar{a}$ serán iguales a cero y la ecuación 3.10 se reduce a

$$\ddot{\mathbf{r}} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{R}}). \quad (a)$$

Si el peso se suspende de una cuerda, la dirección de ésta será la dirección de la línea de plomada y el peso será igual a la tensión en la cuerda.

Un diagrama de cuerpo libre del peso, muestra la tensión $\bar{\mathbf{T}}$ a lo largo de la vertical y la fuerza de atracción de la Tierra pasando por el centro de masa de esta última. Del segundo axioma de Newton,

$$\bar{\mathbf{T}} + m\bar{\mathbf{g}}' = m\ddot{\mathbf{r}} = m[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{R}})], \quad (b)$$

donde $m\bar{\mathbf{g}}'$, es el verdadero peso o atracción gravitacional. $\bar{\mathbf{T}}$ es el peso aparente y

$$\bar{\mathbf{T}} = m\bar{\mathbf{g}}, \quad \bar{\mathbf{T}} = -m\bar{\mathbf{g}}. \quad (c)$$

Ahora

$$\bar{\mathbf{R}} = R\bar{\mathbf{e}}_r, \quad \text{y} \quad \bar{\omega} = \omega(\sin\phi\bar{\mathbf{e}}_r + \cos\phi\bar{\mathbf{e}}_\phi). \quad (d)$$

Entonces $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{R}})$ llega a ser $R\omega^2(\sin\phi\cos\phi\bar{\mathbf{e}}_\phi - \cos^2\phi\bar{\mathbf{e}}_r)$, y la ecuación b toma la forma

$$m\bar{\mathbf{g}}(\cos\beta\bar{\mathbf{e}}_r + \sin\beta\bar{\mathbf{e}}_\phi) - m\bar{\mathbf{g}}'\bar{\mathbf{e}}_r = mR\omega^2(\sin\phi\cos\phi\bar{\mathbf{e}}_\phi - \cos^2\phi\bar{\mathbf{e}}_r). \quad (e)$$

Las ecuaciones escalares son

$$mg\cos\beta - m\bar{\mathbf{g}}' = -mR\omega^2\cos^2\phi, \quad (f)$$

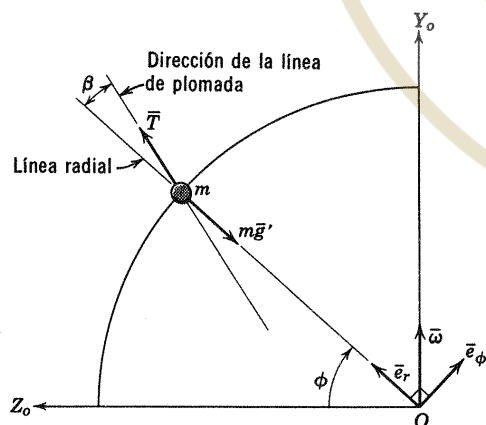
$$mg\sin\beta = mR\omega^2\sin\phi\cos\phi. \quad (g)$$

De la ecuación g ,

$$\beta = \text{ang sen} \left[\frac{R\omega^2\sin 2\phi}{2g} \right]. \quad (h)$$

A una latitud de $\phi = 45^\circ$, β es máxima y tiene el valor aproximado $\beta = 0.1^\circ$.

Fig. 3.21



Debido a que β es un ángulo muy pequeño, $\cos\beta \cong 1$. Entonces la ecuación f se puede escribir

$$g' - g = R\omega^2\cos^2\phi. \quad (i)$$

En el ecuador $\phi = 0$ y la desviación máxima en g es

$$\Delta g = g' - g = 0.032 \text{ m/seg}^2$$

y

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{0.032}{9.81} \times 100 \cong \frac{1}{3} \%$$

En otros problemas de interés, intervienen movimientos en que $\bar{v}$ y $\bar{a}$ no son iguales a cero.

La ecuación del movimiento es

$$\bar{\mathbf{F}} = m\ddot{\mathbf{r}},$$

donde

$$\ddot{\mathbf{r}} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{R}}) + \bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{v}}.$$

Al considerar situaciones donde la atracción gravitacional o gravitatoria de la Tierra es la única fuerza, entonces la ecuación de movimiento para la partícula llega a ser

$$m\bar{\mathbf{g}}' = m[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{R}}) + \bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{v}}]. \quad (3.11)$$

o bien

$$m\bar{\mathbf{g}}' - m[\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{R}})] = m\bar{\mathbf{a}} + 2m\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{v}}.$$

El primer miembro de la ecuación, como se vio en el ejemplo anterior, es igual a $m\bar{\mathbf{g}}$. Entonces

$$m\bar{\mathbf{a}} = m\bar{\mathbf{g}} - 2m\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{v}} \quad (3.12)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{g}} - 2\bar{\omega} \times \bar{\mathbf{v}}. \quad (3.13)$$

Puesto que

$$\bar{\omega} = \omega\cos\phi\bar{\mathbf{i}} + \omega\sin\phi\bar{\mathbf{j}},$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \dot{x}\bar{\mathbf{i}} + \dot{y}\bar{\mathbf{j}} + \dot{z}\bar{\mathbf{k}},$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \ddot{x}\bar{\mathbf{i}} + \ddot{y}\bar{\mathbf{j}} + \ddot{z}\bar{\mathbf{k}},$$

entonces

$$\bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{g}} - 2 \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ \omega\cos\phi & \omega\sin\phi & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}. \quad (3.14)$$

Nótese que se ha omitido el ángulo β ya que es un ángulo pequeño.

Las componentes escalares de $\bar{\mathbf{a}}$ se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\omega\dot{z}\sin\phi, \\ \ddot{y} &= -g + 2\omega\dot{z}\cos\phi, \\ \ddot{z} &= -2\omega\dot{y}\cos\phi + 2\omega\dot{x}\sin\phi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Integrando cada una de las ecuaciones 3.15,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2\omega z \sin \phi + C_1, \\ \dot{y} &= -gt + 2\omega z \cos \phi + C_2, \\ \dot{z} &= -2\omega y \cos \phi + 2\omega x \sin \phi + C_3.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Las ecuaciones 3.15 y 3.16 son las ecuaciones generales para la aceleración y la velocidad de una partícula sobre la superficie de la Tierra, sujeta a la fuerza gravitacional o gravitatoria. A fin de determinar los desplazamientos en el sistema de coordenadas móvil se deben resolver estas ecuaciones con las condiciones límites que se aplican al problema particular.

Supongamos que en el instante $t = 0$ la partícula está en el origen y tiene la velocidad $\vec{v}_0 = \dot{x}_0 \vec{i} + \dot{y}_0 \vec{j} + \dot{z}_0 \vec{k}$; entonces

$$C_1 = \dot{x}_0, \quad C_2 = \dot{y}_0, \quad \text{y} \quad C_3 = \dot{z}_0.$$

De ahí que,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2\omega z \sin \phi + \dot{x}_0, \\ \dot{y} &= -gt + 2\omega z \cos \phi + \dot{y}_0, \\ \dot{z} &= -2\omega(y \cos \phi - x \sin \phi) + \dot{z}_0.\end{aligned}\quad (3.17)$$

En seguida se sustituye $\dot{x}$ y $\dot{y}$ en la ecuación para $\dot{z}$ y se obtiene

$$\dot{z} = 2\omega g t \cos \phi - 4\omega^2 z - 2\omega \dot{y}_0 \cos \phi + 2\omega \dot{x}_0 \sin \phi.$$

En muchas situaciones ω^2 es pequeña comparada con $\dot{x}_0$ y $\dot{y}_0$, en tal caso se puede despreciar el segundo término. Entonces,

$$\dot{z} = \omega g t^2 \cos \phi - 2\omega \dot{y}_0 \cos \phi t + 2\omega \dot{x}_0 \sin \phi t + C_4$$

y

$$z = \frac{\omega g t^3}{3} \cos \phi - \omega \dot{y}_0 \cos \phi t^2 + \omega \dot{x}_0 \sin \phi t^2 + C_4 t + C_5.$$

Puesto que $\dot{z} = \dot{z}_0$ y $z = 0$ cuando $t = 0$, $C_4 = \dot{z}_0$ y $C_5 = 0$.

$$z = \frac{\omega g t^3}{3} \cos \phi + \omega t^2 (\dot{x}_0 \sin \phi - \dot{y}_0 \cos \phi) + \dot{z}_0 t. \quad (3.18)$$

Se sustituye z , como se determinó anteriormente, en las expresiones para $\dot{x}$ y $\dot{y}$ y se desprecian los términos con ω^2 . De manera que

$$\dot{x} = \dot{x}_0 - 2\omega \dot{z}_0 t \sin \phi$$

y

$$\dot{y} = -gt + \dot{y}_0 + 2\omega \dot{z}_0 t \cos \phi.$$

Integrando y calculando las constantes,

$$x = \dot{x}_0 t - \omega \dot{z}_0 t^2 \sin \phi, \quad (3.19)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + \dot{y}_0 t + \omega \dot{z}_0 t^2 \cos \phi.$$

Ejemplo 3.13. Se deja caer una piedrecita en un pozo de 1.20 m de diámetro y 20 m de profundidad. Investigar la posibilidad de que la piedra choque con la pared antes de alcanzar el fondo.

Debido a que la piedra se deja caer a lo largo de la línea de plomada, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$. Entonces

$$\begin{aligned}x &= 0, \\ y &= -\frac{gt^2}{2}, \\ z &= \frac{\omega g t^3}{3} \cos \phi,\end{aligned}$$

o bien expresando la desviación z de la línea de plomada como una función de la profundidad $-h$ del pozo,

$$\begin{aligned}y &= -h = -\frac{gt^2}{2} \\ z &= \frac{\omega g}{3} \left(\frac{2h}{g} \right)^{3/2} \cos \phi.\end{aligned}$$

En este caso $h = 20$ m, $g = 9.81$ m/seg², $\omega = 7.3 \times 10^{-5}$ rad/seg. Supongamos $\phi = 60^\circ$ (el pozo está situado en Anchorage, Alaska). Entonces

$$z = 0.87 \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Siendo este valor mucho menor que los 60 cm de radio del pozo, es evidente que la piedra no chocará con la pared antes de llegar al agua.

Ejemplo 3.14. Se dispara un proyectil hacia el norte a una latitud $60^\circ N$, con $\dot{x}_0 = 880$ m/seg y $\dot{y}_0 = 490$ m/seg, $\dot{z}_0 = 0$. Despreciando la resistencia del aire, hallar las coordenadas del punto de impacto.

Cuando el proyectil hace impacto $y = 0$; así que

$$\dot{y}_0 = \frac{gt}{2} \quad \text{ó sea} \quad t = \frac{2 \times 490}{9.81} = 100 \text{ seg.}$$

$$x = \dot{x}_0 t = 880 \times 100 = 88 \text{ Km.}$$

$$z = \omega t^2 \left[\frac{gt}{3} \cos \phi + \dot{x}_0 \sin \phi - \dot{y}_0 \cos \phi \right].$$

Por consiguiente

$$z = (7.3 \times 10^{-5}) (100)^2 \left[\frac{(9.8) (100)}{3} \left(\frac{1}{2} \right) + 880 \frac{\sqrt{3}}{2} - 490 \left(\frac{1}{2} \right) \right] = 495 \text{ m.}$$

Es evidente que la rotación de la Tierra es un factor importante en la artillería de largo alcance. Cuando se consideran los proyectiles dirigidos balísticos de largo alcance el efecto es aún más importante.

3.9 Trabajo y energía. La sección anterior se destinó a la segunda ley de movimiento de Newton, que es una relación vectorial entre fuerza, masa y aceleración. Esta relación es adecuada para manejar todos los problemas de cinética; sin embargo, existen numerosas situaciones donde la aplicación directa de esta ecuación no es muy conveniente. Por ejemplo, si se desea la velocidad del bloque del ejemplo 3.7, podría resultar muy laboriosa la integración directa de la ecuación para $\ddot{x}$. Para facilitar la solución de éste y otros problemas, podemos efectuar algunas transformaciones matemáticas en la ecuación 3.1 de tal manera que se deduzcan relaciones útiles entre los desplazamientos y las velocidades.

Consideremos una partícula de masa m_i que se mueve a lo largo de una trayectoria bajo la acción de una fuerza $\vec{F}_i$, como se muestra en la figura 3.22.

Del segundo axioma de Newton, la ecuación de movimiento en forma vectorial es

$$\vec{F}_i = \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i).$$

Si multiplicamos escalarmente ambos miembros de la ecuación por $\dot{\vec{r}}_i$, obtenemos

$$\vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} (m_i \dot{\vec{r}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i.$$

Debido a que la masa de la partícula es constante, la ecuación anterior se puede reescribir en la forma

$$\vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i)$$

o sea

$$\vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = m_i v \frac{dv}{dt},$$

donde v es la magnitud escalar de la velocidad o sea la rapidez de la partícula.

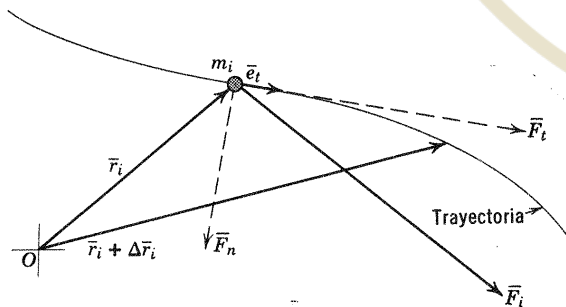


Fig. 3.22

Se ve entonces que después de multiplicar ambos miembros de la ecuación por dt , se llega a

$$\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i v dv.$$

De la discusión anterior de cinemática $d\vec{r}_i = ds \vec{e}_t$ donde ds es la diferencial de la longitud del arco y $\vec{e}_t$ un vector unitario tangente a la trayectoria en la dirección de movimiento de la partícula. Si se integran ambos miembros de la ecuación entre límites apropiados, obtenemos

$$\int \vec{F}_i \cdot \vec{e}_t ds = \int_{v_1}^{v_2} m_i v dv = \frac{m_i}{2} (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1. \quad (3.20)$$

La integral del primer miembro de la ecuación 3.20 se define como el trabajo efectuado sobre la partícula por la fuerza $\vec{F}_i$. El término $\frac{1}{2} m_i v^2$ es la energía cinética T de la partícula. Por lo tanto, el trabajo efectuado sobre la partícula por la fuerza $\vec{F}_i$ al moverse a lo largo de una trayectoria, es igual al cambio en la energía cinética de la partícula.

Es importante observar que el desplazamiento $d\vec{r}_i$ es tangente a la trayectoria de la partícula: por lo tanto el producto escalar $\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$ representa la componente, $\vec{F}_t$ de la fuerza tangente a la trayectoria, multiplicada por el desplazamiento $d\vec{r}_i$. Es evidente, de la definición del producto escalar, que si $d\vec{r}_i$ está en la misma dirección que $\vec{F}_t$, entonces el trabajo efectuado sobre la partícula es positivo. La integración se debe llevar a cabo a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula.

Si hubiésemos optado por escribir las ecuaciones escalares de movimiento de la segunda ley de Newton en lugar de la ecuación vectorial, entonces tendríamos

$$F_x = \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}),$$

$$F_y = \frac{d}{dt} (m_i \dot{y}),$$

$$F_z = \frac{d}{dt} (m_i \dot{z}).$$

Multiplicando cada miembro de la primera de estas ecuaciones por $\dot{x}$ y suponiendo m_i constante, se obtiene

$$F_x \dot{x} = m_i \dot{x} \frac{d}{dt} (\dot{x}) = m_i \ddot{x} \dot{x} = \frac{m_i}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x})^2$$

o sea

$$F_x \frac{dx}{dt} = m_i \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt}.$$

Multiplicando por dt ,

$$F_x dx = m_i \dot{x} d\dot{x}.$$

Integrando, obtenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = m_i \int_{x_1}^{x_2} \dot{x} d\dot{x} = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2). \quad (3.21)$$

Análogamente para las direcciones y y z .

$$\int_{y_1}^{y_2} F_y dy = \frac{1}{2} m_i (\dot{y}_2^2 - \dot{y}_1^2), \quad (3.22)$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \frac{1}{2} m_i (\dot{z}_2^2 - \dot{z}_1^2). \quad (3.23)$$

Las relaciones de trabajo y energía son útiles donde se desea determinar el cambio de velocidad de una partícula después que ciertas fuerzas han actuado sobre ella en una trayectoria conocida. Si las fuerzas que actúan sobre la partícula son una función de la posición de la partícula o son constantes, las integrales de las ecuaciones 3.21 a 3.23 se pueden calcular directamente para conocer la rapidez de la partícula.

La expresión $\bar{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$ recibe el nombre de potencia P . La potencia se puede escribir

$$\bar{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v^2 \right) \quad (3.24)$$

o sea

$$P = \frac{dT}{dt} = \dot{T},$$

que dice que la potencia es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de la energía cinética.

Ejemplo 3.15. Un pequeño bloque de peso W se desliza hacia abajo en un alambre recto de A a B . El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el alambre es μ y la velocidad en A es v_0 . ¿Cuál es la velocidad en B ? Ver las figuras 3.23 y 3.24.

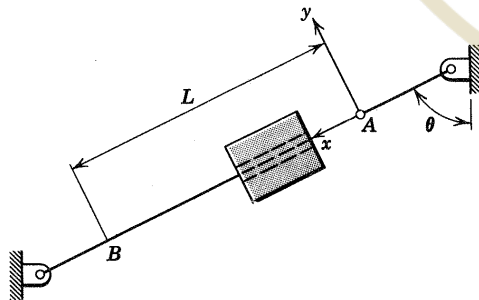


Fig. 3.23

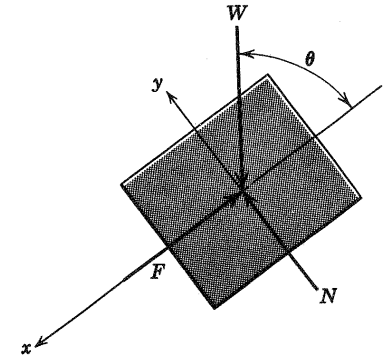


Fig. 3.24

Eligiendo A como origen de un sistema de coordenadas, con x a lo largo del alambre y y y z en cualesquiera direcciones normales, nuestras condiciones iniciales son

$$x = 0, \quad \dot{x} = v_0 \quad \text{para} \quad t = 0.$$

Para tener la seguridad de que todas las fuerzas estén incluidas en el análisis, se dibuja un diagrama de cuerpo libre del bloque.

En general se deben considerar las ecuaciones 3.21 a 3.23. No obstante, con esta elección de coordenadas, $dy = dz = 0$. Por lo tanto, solamente es necesario considerar las fuerzas en la dirección x . De la ecuación 3.21,

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2),$$

obtenemos

$$\int_0^L (W \cos \theta - F) dx = \frac{1}{2} \frac{W}{g} (\dot{x}_B^2 - \dot{x}_A^2). \quad (a)$$

En vista de que el bloque está en movimiento,

$$F = \mu N$$

y se puede obtener N considerando la ecuación escalar en la dirección y del segundo axioma de Newton.

$$F_y = m \ddot{y} = 0,$$

$$N = W \sin \theta = 0,$$

$$F = \mu W \sin \theta.$$

La sustitución en la ecuación a y la integración producen

$$WL \cos \theta - \mu WL \sin \theta = \frac{W}{2g} (\dot{x}_B^2 - v_0^2),$$

que cuando se resuelve para la rapidez en B da

$$\dot{x}_B = [2gL(\cos \theta - \mu \sin \theta) + v_0^2]^{1/2}. \quad (b)$$

Se debe observar que la rapidez en el punto B es independiente de la masa de la partícula.

Ejemplo 3.16. Una fuerza $\vec{F} = (y + 2z)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j} + (xz + yz^2 + y^2z)\vec{k}$ kg actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva $y = 2z^2$ cm en el plano yz. Calcular el trabajo efectuado por esta fuerza cuando la partícula se mueve desde el origen hasta el punto $(x = 0, y = 8, z = 2)$.

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_y^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz.$$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_0^0 (y + 2z) dx = 0,$$

$$\int_{y_1}^{y_2} F_y dy = \int_0^8 (0 + y^2) dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^8 = \frac{512}{3} \text{ kg-cm},$$

$$\int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \int_0^2 (0 + 2z^4 + 4z^5) dz = \left[\frac{2z^5}{5} + \frac{4z^6}{6} \right]_0^2 = \frac{64}{5} + \frac{128}{3} \text{ kg-cm}.$$

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{512}{3} + \frac{64}{5} + \frac{128}{3} = \frac{3392}{15} = 226 \text{ kg-cm}.$$

Ejemplo 3.17. Se supone que el peso W en el problema del ejemplo 3.5 se suelta desde el punto A con velocidad cero. ¿Cuál es la fuerza normal sobre W en el punto C ?

La aplicación directa de la relación de trabajo y energía

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_2 - T_1$$

da

$$2Wa = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_C^2.$$

Puesto que en todo instante $\vec{N}$ es normal a $d\vec{r}$ no efectúa trabajo, mientras que W trabaja solamente en su desplazamiento vertical, en C tenemos

$$N = W \left[1 + \frac{4\pi^2 v_C^2 a}{gl^2} \right] = W \left[1 + \frac{16\pi^2 a^2}{l^2} \right].$$

Aquí, una combinación de la ecuación de trabajo y energía y la segunda ley de Newton conduce a la solución más directa.

Ejemplo 3.18. Una masa m se deja caer desde el reposo a una distancia vertical h sobre un resorte de constante k . Determinar la deflexión δ máxima del resorte, la velocidad máxima de m y la potencia máxima desarrollada si $h = 0$.

En el punto de deflexión máxima del resorte el trabajo efectuado sobre m es

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = mg(h + \delta) - \int_0^\delta kx dx = T_2 - T_1. \quad (a)$$

Ya que m se deja caer desde el reposo y nuevamente llega al reposo cuando el resorte se comprime una distancia δ , el cambio en la energía cinética es cero. La ecuación para δ llega a ser

$$mg(h + \delta) - \frac{1}{2} k\delta^2 = 0$$

o sea

$$\delta^2 - \frac{2mg}{k} \delta - \frac{2mgh}{k} = 0.$$

Entonces

$$\delta = \frac{mg}{k} \pm \left[\left(\frac{mg}{k} \right)^2 + \frac{2mgh}{k} \right]^{1/2} \quad (b)$$

o sea que debido a la deflexión estática del resorte $\delta_{st} = mg/k$, esta ecuación para δ se puede escribir

$$\delta = \delta_{st} \pm [\delta_{st}^2 + 2h\delta_{st}]^{1/2} \quad (c)$$

Nótese que aun cuando h sea igual a cero, $\delta = 2\delta_{st}$.

Para obtener la velocidad máxima, primero hallamos una expresión general para la velocidad y después se calcula el máximo. Denotando la deformación del resorte por x , se tiene

$$mg(h + x) - \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv^2 = T. \quad (d)$$

En lugar de resolver para v y calcular el máximo, también podemos calcular el máximo de la energía cinética.

$$\frac{dT}{dx} = mg - kx = 0$$

o bien

$$x = \frac{mg}{k} = \delta_{st}. \quad (e)$$

Se ve que m adquiere su velocidad máxima cuando pasa por la posición de equilibrio estático. Sustituyendo este valor de x en la ecuación (d), se obtiene

$$v_{\max} = \left[2gh + \frac{mg^2}{k} \right]^{1/2}. \quad (f)$$

Para hallar la potencia máxima desarrollada con $h = 0$, escribimos

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = (mg - kx) \left(2gx - \frac{kx^2}{m} \right)^{1/2}. \quad (g)$$

Haciendo $\frac{dP}{dx} = 0$ se deduce

$$x = \frac{mg}{k} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad (h)$$

que es la posición de máxima potencia. Sustituyendo este valor de x en la ecuación g, se halla que

$$P_{\max} = \frac{mg^2}{2} \left[\frac{m}{k} \right]^{1/2}. \quad (i)$$

3.10 Sistemas conservativos y energía potencial. Examinaremos algunas de las características del modelo que se ve en la figura 3.25, para

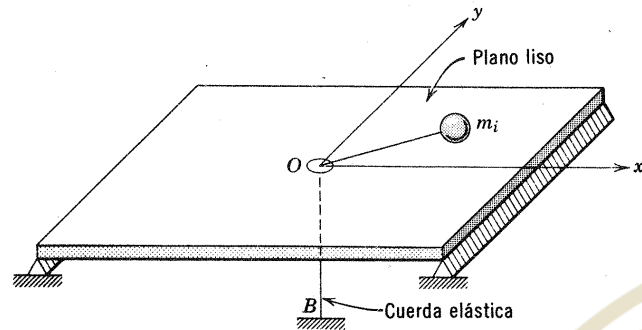


Fig. 3.25

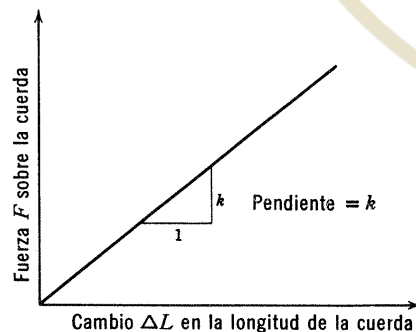
adquirir un conocimiento de cómo el trabajo es efectuado por las fuerzas que actúan sobre una partícula.

El sistema que nos interesa ahora es una partícula de masa m_i situada sobre una superficie plana, lisa y horizontal. Se une a la masa una cuerda elástica que pasa sin rozamiento a través de un orificio de la superficie plana y se amarra en B a un soporte rígido. Por simplicidad, la longitud de la cuerda elástica es tal que cuando la masa m_i está en el origen O , la cuerda tiene su longitud original o sea que no está alargada. Supongamos que la cuerda tiene las características de un resorte lineal o en otras palabras cuando se dibuja la fuerza en la cuerda contra los alargamientos que produce, se obtiene una línea recta como la de la figura 3.26. Se ve que la fuerza F está relacionada con el cambio en la longitud de la cuerda mediante la ecuación

$$F = k \Delta L.$$

Volviendo a nuestro sistema, determinaremos el trabajo efectuado por las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando se mueve hacia diversas posiciones sobre la superficie plana.

Fig. 3.26



Las fuerzas que actúan sobre la partícula son las siguientes:

1. La fuerza de la cuerda ($k \Delta L$).
2. El peso ($W = m_i g$).
3. La reacción del plano (R).

Si solamente consideramos movimientos de la partícula sobre el plano, entonces el peso y la reacción sobre la partícula, debida al plano, son vectores colineales cuya suma total es cero. De ahí que la única fuerza que puede efectuar algún trabajo será la fuerza de la cuerda.

En la figura 3.27, $\vec{r}_i$ es el vector que define la posición de la partícula en el plano. La fuerza $\vec{F}_i$ que actúa sobre la partícula siempre estará dirigida hacia el origen debido a que la cuerda flexible solamente puede transmitir fuerza a lo largo de su eje longitudinal.

La magnitud de $\vec{F}_i$ está dada por

$$|\vec{F}_i| = k|\vec{r}_i| \quad \text{o sea} \quad F_i = kr_i.$$

La descripción de $\vec{F}_i$ como vector es

$$\vec{F}_i = -F_i \vec{e}_r = -kr_i \cos \theta \vec{i} - kr_i \sin \theta \vec{j} + 0\vec{k}.$$

De la figura 3.27, se tiene

$$\cos \theta = \frac{x}{r_i} \quad \text{y} \quad \sin \theta = \frac{y}{r_i}.$$

Por lo tanto,

$$\vec{F}_i = -kx\vec{i} - ky\vec{j} + 0\vec{k}. \quad (3.25)$$

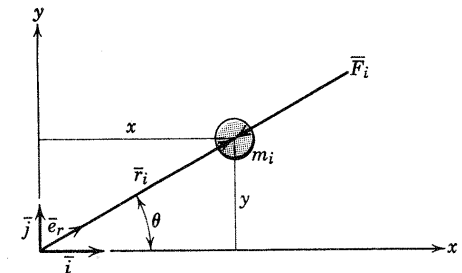
Recordamos de la sección anterior que el trabajo W se expresó mediante la siguiente integral:

$$W = \int \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz. \quad (3.26)$$

Para el presente caso hallamos que

$$W = - \int_x^{x_2} kx dx - \int_y^{y_2} ky dy = - \frac{k}{2} [x^2]_{x_1}^{x_2} - \frac{k}{2} [y^2]_{y_1}^{y_2}, \quad (3.27)$$

Fig. 3.27



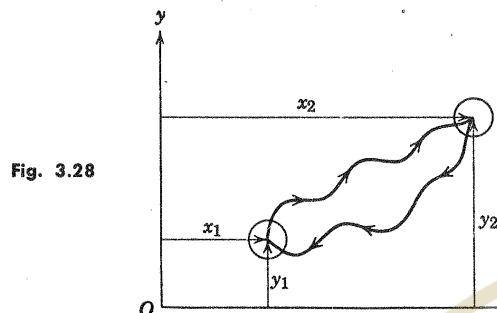


Fig. 3.28

donde x_2, y_2 y x_1, y_1 representan las posiciones final e inicial de la masa, respectivamente.

Es importante hacer notar que en este caso, el trabajo efectuado (*por las fuerzas que actúan sobre la partícula*) es completamente independiente de la trayectoria y solamente depende de las coordenadas de los puntos extremos de la trayectoria. Además, si tomamos cualquier trayectoria arbitraria de x_1, y_1 a x_2, y_2 y una trayectoria diferente y arbitraria para regresar a x_1, y_1 , como se puede ver en la figura 3.28, se deduce de la ecuación 3.27, que el trabajo total efectuado por las fuerzas es cero. Todo sistema de fuerzas que tenga la característica de que el trabajo efectuado por las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando ésta se mueve de una posición x_1, y_1, z_1 a una posición x_2, y_2, z_2 , es función exclusivamente de las coordenadas de los dos puntos, se llama sistema *conservativo* de fuerzas.

También se puede escribir la ecuación 3.27 en la siguiente forma:

$$W = -\frac{k}{2} [x^2 + y^2]_{x_1, y_1}^{x_2, y_2},$$

y debe entenderse que esto significa que el trabajo efectuado por las fuerzas sobre la partícula cuando se mueve de x_1, y_1 a x_2, y_2 es

$$W = -\frac{k}{2} [(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2)]. \quad (3.28)$$

El trabajo efectuado por las fuerzas cuando la partícula se mueve desde el origen hasta cualquier posición x, y es simplemente

$$W = -\frac{k}{2} (x^2 + y^2). \quad (3.29)$$

Para propósitos de identificación, al segundo miembro de la ecuación 3.29 le llamaremos una *función de trabajo*.

Calcularemos dW cuando x y y reciben incrementos dx y dy . Entonces

$$dW = -\frac{k}{2} [(x + dx)^2 + (y + dy)^2 - x^2 - y^2] = -kx dx - ky dy \quad (3.30)$$

obteniéndose la última igualdad cuando se desprecian términos de segundo orden. Se ve que dW es justamente la diferencial total de la función de trabajo, que podría haberse obtenido de las reglas generales de la diferenciación parcial, de la manera siguiente:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy = -kx dx - ky dy. \quad (3.31)$$

Comparando las ecuaciones 3.31 y 3.25 se obtienen las siguientes relaciones entre las fuerzas y la función de trabajo:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ F_y &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ F_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por lo tanto, se ve que para un sistema conservativo de fuerzas donde el trabajo efectuado por las fuerzas es independiente de la trayectoria de movimiento, las fuerzas deben deducirse de la *función de trabajo* W que contiene como variables solamente las coordenadas del espacio. Además, como

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

y si tal función W existe, entonces $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ debe ser la diferencial *exacta* de la función W . Esto es,

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \quad (3.33)$$

y consecuentemente

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial W}{\partial x}, \\ F_y &= \frac{\partial W}{\partial y}, \\ F_z &= \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.34)$$

para un sistema conservativo. De las ecuaciones 3.34 es evidente que deben satisfacerse las siguientes relaciones entre las fuerzas, siempre que las derivadas parciales sean continuas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z},\end{aligned}\quad (3.35)$$

o sea que

$$\nabla \times \vec{F} = 0,$$

donde ∇ es el operador $\vec{i}(\partial/\partial x) + \vec{j}(\partial/\partial y) + \vec{k}(\partial/\partial z)$.

Las fuerzas de rozamiento y las fuerzas dependientes de la velocidad no satisfacen estos criterios.

Físicamente sabemos que cuando la partícula se mueve alejándose del origen, la energía se almacena en la cuerda elástica. Si la partícula se *detuviera* en algún punto (x, y) se tendría un *potencial* (V) para efectuar trabajo, igual a la cantidad de energía almacenada en la cuerda elástica, según lo expresa la ecuación 3.29. Además, para un pequeño incremento Δx y Δy de x y y sabemos que este potencial, para efectuar trabajo, se incrementará en ΔV . Sin embargo, si examinamos la ecuación 3.31, para un incremento positivo en x y y de Δx y Δy observamos que ΔW es negativo; de ahí se deduce que en el límite

$$dV = -dW \quad (3.36)$$

para un sistema conservativo. La energía potencial es un término relativo y el punto o superficie de referencia desde donde se mide es arbitrario. Por lo tanto, en nuestro ejemplo, podemos integrar la ecuación 3.36 agregando una constante de integración arbitraria:

$$V = -W + C_1 = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + C_1, \quad (3.37)$$

donde C_1 es la constante de integración y depende de aquello que deseamos establecer como referencia. Se sigue ahora que

$$\begin{aligned}F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z},\end{aligned}\quad (3.38)$$

o sea

$$\vec{F} = -\nabla V$$

para un sistema conservativo tal como el que se ha descrito. Estas relaciones también son ciertas para otros sistemas conservativos.

3.11 Conservación de la energía. Supongamos que se tiene un sistema conservativo tal como el que se ha descrito. Con relación a la ecuación 3.36, tenemos

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \int_W^{W_2} dW = - \int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{1}{2} m_i (v_2^2 - v_1^2), \quad (3.39)$$

de la cual

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{2} m_i v_2^2 - \frac{1}{2} m_i v_1^2 = T_2 - T_1. \quad (3.40)$$

La ecuación 3.40 se puede escribir como sigue:

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2 = E = \text{constante} \quad (3.41)$$

La ecuación 3.41 establece que para un sistema conservativo de fuerzas la suma de las energías cinética y potencial permanece constante durante el movimiento de la partícula.

3.12 Sistemas mixtos de fuerzas. Es posible concebir sistemas de fuerzas que contengan tanto fuerzas conservativas como no conservativas. Por ejemplo, en el sistema de la figura 3.25 podría haberse incluido una fuerza de rozamiento en la superficie de contacto entre la partícula y el plano. El trabajo efectuado por la fuerza de rozamiento siempre será negativo y su magnitud dependerá de la longitud de la trayectoria recorrida. Por lo tanto, una fuerza de rozamiento no satisface los criterios para un sistema de fuerzas conservativo.

Sin embargo, en los sistemas de esta clase a menudo es conveniente separar las fuerzas en partes conservativas y no conservativas. Denotaremos la fuerza conservativa que actúa sobre una partícula por $\vec{F}_c$ y la fuerza no conservativa por $\vec{F}_n$. Entonces, de acuerdo con la ecuación 3.39, podemos escribir

$$\int \vec{F}_c \cdot d\vec{r}_i + \int \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_i = \frac{m_i}{2} (v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1. \quad (3.42)$$

De la ecuación 3.39 se deduce que

$$\int \vec{F}_c \cdot d\vec{r}_i = V_1 - V_2.$$

Ahora se puede escribir la ecuación 3.42 como sigue:

$$V_2 + T_2 = V_1 + T_1 + \int \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_i. \quad (3.43)$$

Puesto que $\vec{F}_n \cdot d\vec{r}_i$ es negativa, la ecuación 3.43 establece que la energía final $V_2 + T_2$ es igual a la energía inicial $V_1 + T_1$ menos el trabajo no conservativo.

Ejemplo 3.19. El bloque W de la figura 3.29 está en libertad de deslizar sin rozamiento a lo largo de la barra vertical. Además, el bloque está sometido a la acción de un resorte de constante k y longitud L no estando alargado. Puesto que no hay fuerzas de rozamiento presentes este es un sistema conservativo. La fuerza normal N es perpendicular en todo instante al desplazamiento y por consiguiente efectúa trabajo cero y no tiene potencial. La fuerza de gravedad W es constante y su potencial es solamente una función de su posición vertical con relación a la Tierra. Ya se ha demostrado que la fuerza del resorte es conservativa.

Si se da al peso una velocidad v_0 hacia abajo cuando el resorte está en la posición horizontal, hallar su velocidad en términos de θ .

Para este sistema podemos utilizar

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2. \quad (a)$$

Tomando como referencia, para energía potencial cero, la posición inicial, la ecuación a se transforma en

$$0 + \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_0^2 = \frac{1}{2} kS^2 - Wd + \frac{1}{2} \frac{W}{g} v^2. \quad (b)$$

Centramos nuestra atención en la velocidad v , los parámetros dados y el alargamiento S del resorte. De la geometría,

$$(L + S) \cos \theta = L, \\ S = \frac{L}{\cos \theta} - L = L \left[\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \right].$$

Sustituyendo y resolviendo para v , obtenemos

$$\frac{W}{2g} v^2 = \frac{W}{2g} v_0^2 + WL \tan \theta - \frac{1}{2} kL^2 \left[\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \right]^2, \\ v = \left[v_0^2 + 2g(L \tan \theta) - \frac{g}{W} kL^2 \left[\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \right]^2 \right]^{1/2}. \quad (d)$$

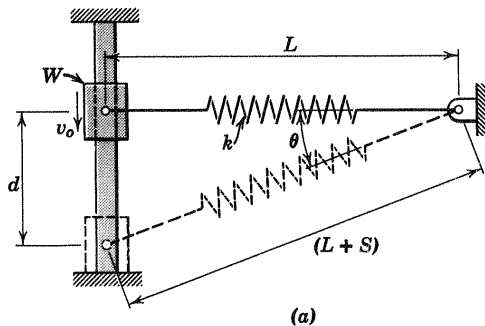


Fig. 3.29

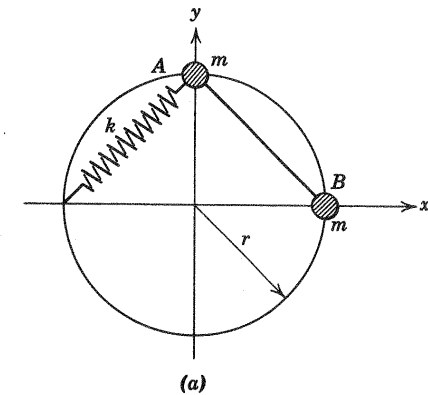


Fig. 3.30

Ejemplo 3.20. Cada una de las dos cuentas de masa m se desliza sobre un aro vertical de alambre liso. Las cuentas están unidas mediante una varilla rígida AB de peso despreciable, y además están sometidas a la acción de un resorte de constante k y longitud r no estando alargado. Si se suelta este sistema desde el reposo en la posición que se muestra en la figura 3.30, y la cuenta B se mueve hasta la parte inferior del aro, determinar lo siguiente:

1. La rapidez angular de la varilla.
2. Todas las fuerzas que actúan sobre la partícula A .

Supongamos que m sea lo suficientemente grande para que esto sea posible.

Debido a que éste es un sistema conservativo, podemos utilizar la ecuación

$$T + V = \text{const.} \quad (a)$$

Si se toma el centro del aro como punto de referencia, esta ecuación toma la forma

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 - mgr + \frac{1}{2} k r^2 = mgr + \frac{1}{2} k (\sqrt{2} r - r)^2. \quad (b)$$

Puesto que la varilla es de peso despreciable e inextensible, debemos tener $v_A = v_B = v$. Entonces

$$v = \left[2gr - \frac{kr}{m} (\sqrt{2} - 1) \right]^{1/2} \quad (c)$$

y

$$\omega = \frac{v}{r} = \left[\frac{2g}{r} - \frac{k}{mr} (\sqrt{2} - 1) \right]^{1/2}. \quad (d)$$

El diagrama de cuerpo libre de la partícula A se muestra en la figura 3.30b. La ecuación de movimiento de la partícula es

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}.$$

$$\left(N_A - kr - S \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{i} + \left(-mg - \frac{\sqrt{2}}{2} S \right) \vec{j} = m \left(-\frac{v^2}{r} \vec{i} + \dot{y}_A \vec{j} \right). \quad (e)$$

En vista de que hay tres incógnitas en esta ecuación, también se debe considerar el movimiento de la partícula B .

$$\frac{\sqrt{2}}{2} S \vec{i} + \left(N_B - mg + \frac{\sqrt{2}}{2} S \right) \vec{j} = m \left(\ddot{x}_B \vec{i} + \frac{v^2}{r} \vec{j} \right). \quad (f)$$

También tenemos la ecuación de cinemática

$$\dot{y}_A = \ddot{x}_B. \quad (g)$$

Resolviendo estas cinco ecuaciones escalares para las cinco incógnitas, encontramos

$$N_A = kr - m \left(\frac{g}{2} + \frac{v^2}{r} \right),$$

$$N_B = m \left(\frac{3}{2} g + \frac{v^2}{r} \right),$$

$$S = -\frac{mg}{\sqrt{2}},$$

$$\dot{y}_A = \ddot{x}_B = -\frac{g}{2}.$$

Ejemplo 3.21. Para demostrar la aplicación de los principios del trabajo y la energía a un sistema no conservativo, supongamos que en el ejemplo 3.19 el coeficiente de rozamiento entre W y la barra vertical es μ . Entonces podemos utilizar la ecuación

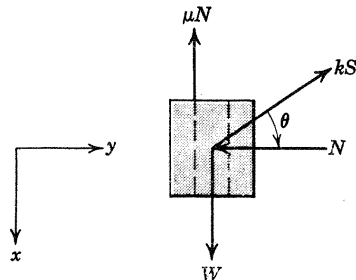


Fig. 3.31

$$V_2 + T_2 = V_1 + T_1 + \int \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_i.$$

Con los mismos datos que antes, esta ecuación llega a ser

$$\frac{1}{2} kS^2 - Wd + \frac{1}{2} \frac{W}{g} v^2 = 0 + \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_0^2 + \int \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_i,$$

$$\int \vec{F}_n \cdot d\vec{r}_i = - \int \mu kS \cos \theta \, dx.$$

De la geometría de la figura 3.29a,

$$\cos \theta = \frac{L}{L+S}, \quad x^2 + L^2 = (L+S)^2,$$

donde x es la distancia vertical de W medida hacia abajo de su posición inicial. La integral puede escribirse

$$-\mu kL \int_0^S \frac{S \, dS}{[2LS + S^2]^{1/2}} = -\mu kL \left\{ (2LS + S^2)^{1/2} - L \log \left[\frac{1}{L} (S + L + (2LS + S^2)^{1/2}) \right] \right\}.$$

Entonces

$$\frac{1}{2} \frac{W}{g} v^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_0^2 - \frac{1}{2} kS^2 + Wd - \mu kL \left\{ (2LS + S^2)^{1/2} - L \log \left[\frac{1}{L} (S + L + (2LS + S^2)^{1/2}) \right] \right\}.$$

La velocidad final, en términos del alargamiento S del resorte, es

$$v = \left\{ v_0^2 - \frac{gkS^2}{W} + \frac{2g}{W} (W - \mu kL) (2LS + S^2)^{1/2} + \frac{2\mu kL^2 g}{W} \log \left[\frac{1}{L} (S + L + (2LS + S^2)^{1/2}) \right] \right\}.$$

Ejemplo 3.22. Se utiliza una cuerda elástica para detener la carrera de un aeroplano (peso bruto 980 kg) que aterriza con $v_1 = 100$ Km/h. Determinar la constante k de resorte necesaria, si la longitud del cable (no estando alargado) es igual a $2H = 100$ m y el aparato se debe detener en una distancia $x_1 = 25$ m. Se supone que el sistema es conservativo.

Si S indica el alargamiento en el cable, entonces

$$S = 2(x_1^2 + H^2)^{1/2} - 2H. \quad (a)$$

La energía potencial V_2 almacenada en el cable en la posición x_1 es

$$V_2 = 2k[(x_1^2 + H^2)^{1/2} - H]^2. \quad (b)$$

Del teorema de conservación

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

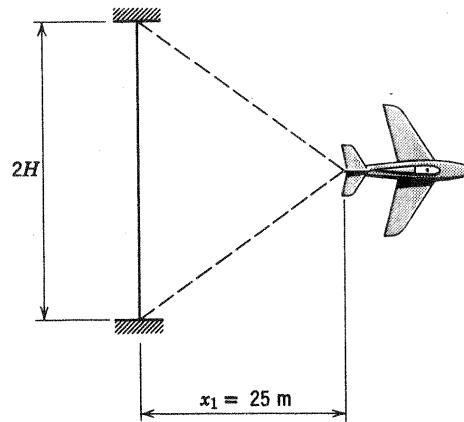


Fig. 3.32

se deduce que

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + 0 = 0 + 2k[(x_1^2 + H^2)^{1/2} - H]^2, \quad (c)$$

de la cual

$$k = \frac{m v_1^2}{4[(x_1^2 + H^2)^{1/2} - H]^2} \quad (d)$$

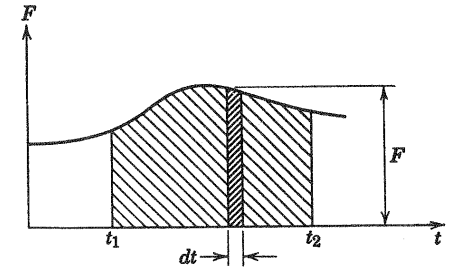
Para nuestro ejemplo,

$$k = \frac{(100)(27.8)^2}{4[(25^2 + 50^2)^{1/2} - 50]^2} = 540 \text{ kg/m}.$$

3.13 El principio de impulso y cantidad de movimiento. Hasta estos momentos se han discutido dos técnicas generales para el análisis de los problemas en cinética de la partícula. El método de fuerza, masa y aceleración (aplicación directa de la segunda ley de Newton) se aplicó cuando la aceleración está directamente implicada y se desea determinar una aceleración o una fuerza en cualquier instante. Se debe integrar la ecuación diferencial resultante para determinar las relaciones de velocidad y desplazamiento. Cuando las fuerzas que actúan sobre la partícula se pueden expresar como funciones de la posición del cuerpo, es útil el método del trabajo y la energía cinética para la determinación de las relaciones velocidad-desplazamiento. Cuando el problema contiene fuerzas que se especifican como una *función del tiempo*, generalmente el principio de impulso y cantidad de movimiento proporciona la relación más directa entre las velocidades y las fuerzas.

En los casos donde la fuerza sea una de las interacciones mutuas entre las partículas, es posible determinar las relaciones de las velocidades de las partículas sin necesidad de un conocimiento profundo del sistema de fuerzas, planteando el problema mediante las técnicas del impulso y cantidad de movimiento.

Fig. 3.33



La ecuación de impulso y cantidad de movimiento se obtiene a partir de la segunda ley de Newton, escribiendo la ecuación de movimiento en la siguiente forma:

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}}) = \frac{d}{dt}(\bar{p}) = \dot{\bar{p}}. \quad (3.44)$$

Multiplicando ambos miembros por dt e integrando, obtenemos, para masa constante,

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \int_{\dot{\mathbf{r}}_1}^{\dot{\mathbf{r}}_2} d(m\dot{\mathbf{r}}) = m\dot{\mathbf{r}}_2 - m\dot{\mathbf{r}}_1 = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \Delta\bar{p}. \quad (3.45)$$

La cantidad $\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt$ se llama *impulso* de la fuerza $\bar{F}$ entre t_1 y t_2 . El término $m\dot{\mathbf{r}}$ se llama *cantidad de movimiento* de la partícula. Por lo tanto la ecuación 3.45 establece que el impulso es igual al *cambio* en la cantidad de movimiento lineal. Tanto el impulso como la cantidad de movimiento son cantidades vectoriales con dimensiones de fuerza por tiempo.

En virtud de que el impulso y la cantidad de movimiento son cantidades vectoriales, se pueden escribir en términos de componentes en cualesquiera coordenadas convenientes para un problema. Por ejemplo, en coordenadas rectangulares, las ecuaciones escalares son

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= m\dot{x}_2 - m\dot{x}_1 = \Delta p_x, \\ \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= m\dot{y}_2 - m\dot{y}_1 = \Delta p_y, \\ \int_{t_1}^{t_2} F_z dt &= m\dot{z}_2 - m\dot{z}_1 = \Delta p_z. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Si se conoce la fuerza $\bar{F}$ como una función del tiempo, el impulso está representado por el área bajo el diagrama fuerza-tiempo entre los límites t_1 y t_2 .

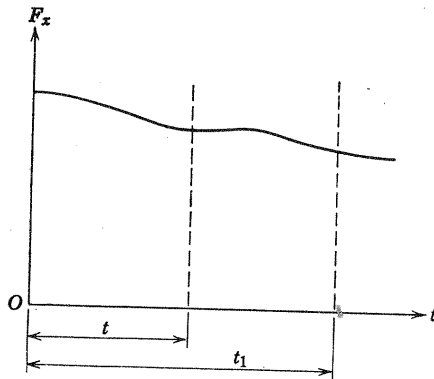


Fig. 3.34

La ecuación 3.46 se puede utilizar para determinar el desplazamiento de una partícula. Consideremos la primera de estas ecuaciones escalares, ya que argumentos idénticos se pueden aplicar para las otras. La figura 3.34 muestra una gráfica F_x contra el tiempo y deseamos determinar la componente x del desplazamiento en el instante t_1 , sujeta a las condiciones iniciales en $t = 0$.

De la primera de las ecuaciones 3.46, la velocidad $\dot{x}$ en cualquier instante t se puede escribir como sigue:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_0^t F_x dt + \dot{x}_0 = \frac{dx}{dt}, \quad (3.47)$$

donde

$\dot{x}_0$ = velocidad inicial para $t = 0$.

Efectuando otra integración para determinar el desplazamiento x en el instante t_1 se deduce que

$$x = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} \left[\int_0^t F_x dt \right] dt + \dot{x}_0 t_1 + x_0, \quad (3.48)$$

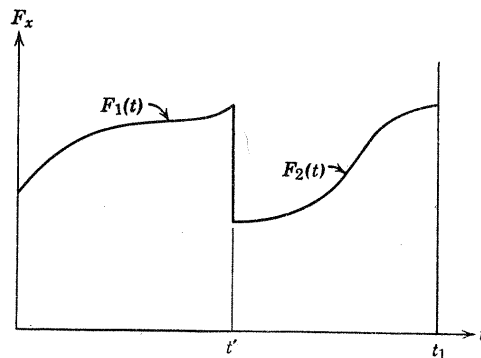


Fig. 3.35

donde

x_0 = desplazamiento inicial.

Debe tenerse cuidado en el uso de las ecuaciones 3.47 y 3.48 ya que una sola función analítica puede no describir F_x en todo el intervalo de $t = 0$ a $t = t_1$.

Por ejemplo, supongamos que $F_1(t)$ describe F_x como una función del tiempo en el intervalo $t = 0$ a $t = t'$ y $F_2(t)$ describe F_x en el intervalo de tiempo $t = t'$ a $t = t_1$, como se muestra en la figura 3.35.

En el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t'$, se deduce que

$$\int F_x dt = \int_0^t F_1(t) dt.$$

En el intervalo de tiempo $t' \leq t \leq t_1$.

$$\int F_x dt = \int_0^{t'} F_1(t) dt + \int_{t'}^t F_2(t) dt.$$

Para este caso la ecuación 3.48 llega a ser

$$x = \frac{1}{m} \int_0^{t'} \left[\int_0^t F_1(t) dt \right] dt + \frac{1}{m} \int_{t'}^{t_1} \left[\int_0^{t'} F_1(t) dt + \int_{t'}^t F_2(t) dt \right] dt + \dot{x}_0 t_1 + x_0. \quad (3.49)$$

Este argumento se puede extender a cualquier número de funciones que podrían ser necesarias para describir la fuerza. Este concepto es extremadamente útil cuando se desea predecir desplazamientos de una partícula de datos fuerza-tiempo determinados experimentalmente, que no pueden estar establecidos satisfactoriamente con una sola función de tiempo sobre un ciclo temporal completo que interese.

La integral $\int_0^{t_1} \left[\int_0^t F_x dt \right] dt$ también puede examinarse gráficamente⁴ y conduce a conceptos útiles e interesantes. Veamos las figuras 3.36a y b, donde F_x y $\int_0^t F_x dt$ se dibujan respectivamente como funciones del tiempo.

Primeramente observaremos que la integral $\int_0^{t_1} \left[\int_0^t F_x dt \right] dt$ es el área bajo la curva $\int_0^t F_x dt$ entre los límites $t = 0$ y $t = t_1$ de la figura 3.36b. De la figura 3.36a, esta área se puede expresar como

⁴ Timoshenko y Young, *Engineering Mechanics*, Tercera edición, McGraw-Hill, págs. 275-279.

$$\int_0^{t_1} \left[\int_0^t F_x dt \right] dt = \int_0^{t_1} F_x(t_1 - t) dt. \quad (3.50)$$

Interpretada geoméricamente, la ecuación 3.50 es simplemente el *momento estático* del área bajo la curva $F_x t$ con respecto al eje t_1 . Definiendo t_c como la distancia desde t_1 al centroide del área bajo la curva $F_x t$ y A como el área bajo la curva $F_x t$ entre $t = 0$ y $t = t_1$; de la ecuación 3.48, se sigue que

$$x = \frac{1}{m} A t_c + \dot{x}_0 t + x_0. \quad (3.51)$$

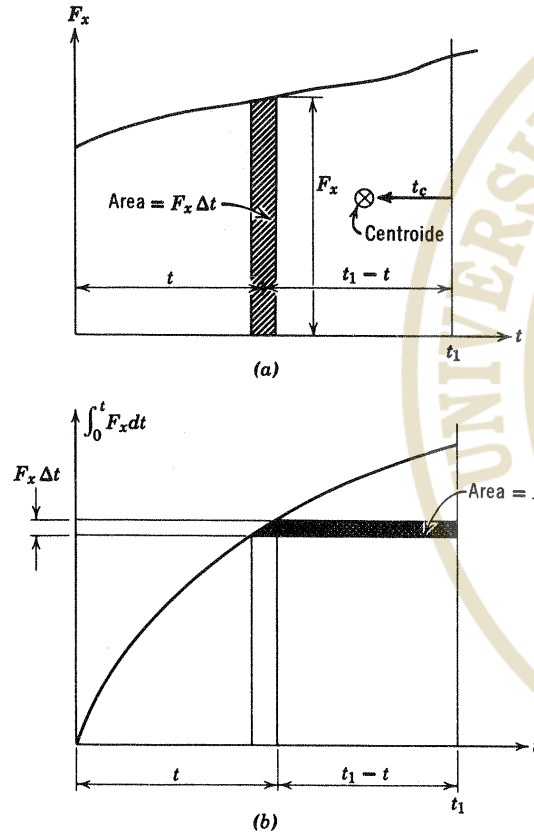


Fig. 3.36

Ejemplo 3.23. Dada la gráfica que se ve en la figura 3.37, de F_x contra el tiempo, determinar el desplazamiento de una partícula de masa m en el instante t_1 ; utilizar la ecuación 3.48 y comprobar mediante el uso de la ecuación 3.51. Se supone que el desplazamiento y la velocidad iniciales son cero.

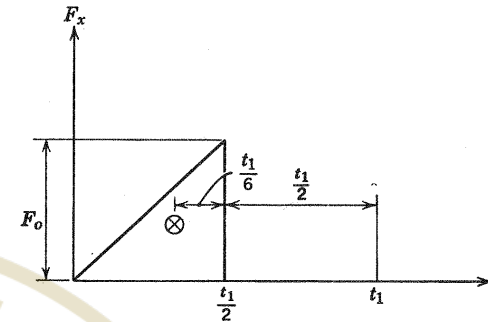


Fig. 3.37

Con $\dot{x}_0$ y x_0 nulos en el instante $t = 0$, el desplazamiento está dado por

$$x = \frac{1}{m} \int_0^{t_1} \left[\int_0^t F_1(t) dt \right] dt + \frac{1}{m} \int_{t_1/2}^{t_1} \left[\int_{t_1/2}^t F_1(t) dt + \int_{t_1/2}^t F_2(t) dt \right] dt$$

De la figura 3.37 se obtienen las siguientes igualdades:

$$t' = \frac{t_1}{2},$$

$$F_1(t) = \frac{2F_0 t}{t_1},$$

$$F_2(t) = 0,$$

$$x = \frac{1}{m} \int_0^{t_1/2} \left[\int_0^t \frac{2F_0 t}{t_1} dt \right] dt + \frac{1}{m} \int_{t_1/2}^{t_1} \left[\int_{t_1/2}^t \frac{2F_0 t}{t_1} dt \right] dt = \frac{F_0 t_1^2}{6m}.$$

Utilizando la ecuación 3.51,

$$A = \frac{1}{2} F_0 \frac{t_1}{2} = \frac{F_0 t_1}{4},$$

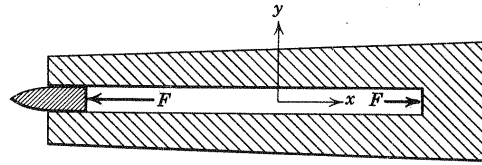
$$t_c = \frac{4t_1}{6}.$$

Por lo tanto

$$x = \left(\frac{F_0 t_1}{4m} \right) \left(\frac{4t_1}{6} \right) = \frac{F_0 t_1^2}{6m}.$$

3.14 Conservación de la cantidad de movimiento lineal. La ecuación de impulso y cantidad de movimiento es particularmente útil cuando se está tratando con un sistema de partículas, puesto que en ese caso frecuentemente se puede eliminar el cálculo del impulso si solamente se desea la relación entre las velocidades y las masas. Por ejemplo, un cañón y el proyectil se pueden considerar como un sistema de dos partículas si se desprecia la masa de los gases que se expanden. Ver la figura 3.38.

Fig. 3.38



Durante el intervalo de tiempo, extremadamente corto, de la explosión, la fuerza $\bar{F}$ debida a la presión del gas que actúa sobre la bala y el cañón varía de una manera desconocida. Un cálculo del impulso de esta fuerza sería extremadamente difícil. No obstante, se puede obtener la relación entre la velocidad de la bala y la velocidad de retroceso del cañón sin considerar el cálculo detallado del impulso.

Debido a que las fuerzas $\bar{F}$ se comportan como acción y reacción entre el proyectil y el cañón, en todo momento deben ser iguales y opuestas. En consecuencia, sus impulsos, en el intervalo de la explosión, son iguales y opuestos, ya que las fuerzas sobre el proyectil y el cañón actúan exactamente igual durante el mismo período. Así, si las velocidades iniciales y por consiguiente las cantidades de movimiento iniciales de las partículas son cero, si ninguna fuerza externa actúa sobre el sistema y si m_p y m_c son las masas del proyectil y del cañón respectivamente, tenemos la siguiente ecuación de cantidad de movimiento para la bala:

$$\int_0^t -\bar{F} dt = m_p(\bar{v}_{2p} - 0). \quad (3.52)$$

(A fin de que esto sea una igualdad, $\bar{v}_{2p}$ debe estar dirigida hacia la izquierda.) Y para el cañón:

$$\int_0^t \bar{F} dt = m_c(\bar{v}_{2c} - 0). \quad (3.53)$$

En esta ecuación $\bar{v}_{2c}$ debe estar dirigida hacia la derecha. $\int_0^t \bar{F} dt$ tiene el mismo valor absoluto en cada ecuación. Sumando las ecuaciones 3.52 y 3.53, se tiene

$$m_p \bar{v}_{2p} + m_c \bar{v}_{2c} = 0. \quad (3.54)$$

Por tanto, las cantidades de movimiento inicial y final del sistema son cero.

Debemos observar que en el caso en que no haya fuerzas externas y las fuerzas internas sean iguales y opuestas la cantidad de movimiento del sistema permanece constante. Algunas conclusiones generales se pueden obtener de este ejemplo. De la tercera ley de Newton — acción y reacción — las fuerzas internas en un sistema de partículas ocurren en pares iguales y opuestos de manera que la resultante de las fuerzas internas será igual a cero. La cantidad de movimiento permanecerá constante

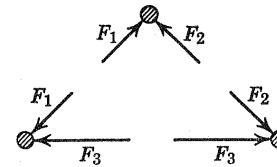


Fig. 3.39

aunque se apliquen fuerzas externas siempre que la resultante de éstas sea cero.

Si se suman ecuaciones de la forma de 3.45, para cada partícula,

$$\sum_{i=1}^n \int \bar{F} dt = \sum_{i=1}^n \Delta(m_i \bar{v}_i), \quad (3.55)$$

y si se satisface la condición anterior — resultante de las fuerzas externas igual a cero — tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta(m_i \bar{v}_i) &= \sum_{i=1}^n [(m_i \bar{v}_i)_2 - (m_i \bar{v}_i)_1] \\ &= \sum_{i=1}^n (m_i \bar{v}_i)_2 - \sum_{i=1}^n (m_i \bar{v}_i)_1 \\ &= \Delta \sum_{i=1}^n (m_i \bar{v}_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

o sea

$$\sum_{i=1}^n (m_i \bar{v}_i) = \text{constante}, \quad (3.56)$$

que es el principio de *conservación de la cantidad de movimiento*.

3.15 Un experimento de cantidad de movimiento. Consideremos un modelo simple, dos masas, inicialmente en reposo, sobre una superficie lisa. Un resorte de poco peso une a las dos partículas de manera que se mueven una hacia la otra con velocidades apreciables cuando se les deja en libertad. Se podrían formular dos preguntas: 1) ¿qué puede decirse acerca de la velocidad y desplazamiento de m_1 y m_2 cuando se conoce la masa de cada una? 2) Si se miden los desplazamientos, ¿se puede determinar una de las masas si se conoce la otra?

Para cada masa se dibuja el diagrama de cuerpo libre (Figs. 3.40b y c).

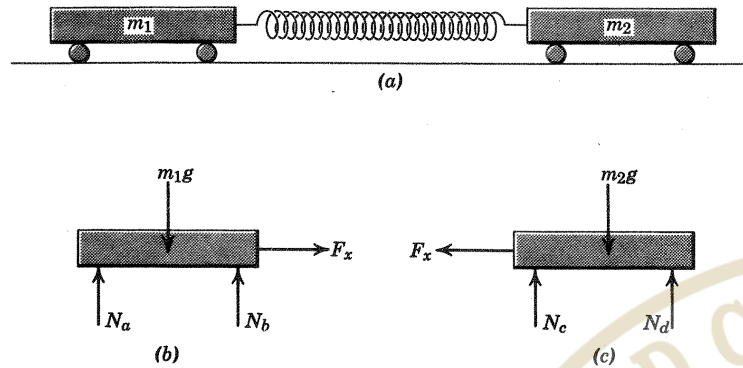


Fig. 3.40

Si se escribe la componente x de la ecuación de impulso y cantidad de movimiento, a partir de la figura 3.40b, se tiene

$$\int F_x dt = m_1(\dot{x}_1 - 0). \quad (3.57)$$

Similarmente, para la segunda masa tenemos

$$\int -F_x dt = m_2(\dot{x}_2 - 0). \quad (3.58)$$

Debido a que las fuerzas en cada extremo del resorte son las mismas, la suma de las ecuaciones 3.57 y 3.58 dará una simple relación entre las velocidades y las masas,

$$m_1 \dot{x}_1 = -m_2 \dot{x}_2. \quad (3.59)$$

Si deseamos relacionar las masas con los desplazamientos debemos escribir la ecuación 3.59 en la forma

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} = -m_2 \frac{dx_2}{dt}. \quad (3.59a)$$

Se puede multiplicar esta ecuación por dt e integrarse para dar la siguiente relación que contiene directamente los desplazamientos:

$$m_1 x_1 = -m_2 x_2 \quad (3.60)$$

Por lo tanto, los valores absolutos de los desplazamientos son inversamente proporcionales a las masas respectivas.

$$\frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{m_2}{m_1} \quad (3.60a)$$

Si la distancia inicial total entre los dos objetos es d , entonces

$$|x_1| + |x_2| = d. \quad (3.61)$$

Si se conocen las dos masas, se pueden usar las ecuaciones 3.60a y 3.61 para hallar la distancia que recorre cada partícula hasta el momento en que chocan. La sustitución da

Esto es

$$\frac{m_2}{m_1} |x_2| + |x_2| = d.$$

$$|x_2| = \frac{d}{1 + (m_2/m_1)} \quad (3.62)$$

$$|x_1| = \frac{d}{1 + (m_1/m_2)}$$

Como otra aplicación útil supongamos que se desea comparar la masa de objetos desconocidos con alguna masa patrón. Fácilmente podemos medir la distancia recorrida por cada masa desde su posición inicial hasta el punto de impacto. Se supone que m_1 es la masa patrón; la ecuación 3.60a da

$$m_2 = \frac{|x_1|}{|x_2|} m_1. \quad (3.63)$$

La ecuación 3.63 proporciona un método para determinar la masa de un objeto en términos de alguna masa patrón.

Ejemplo 3.24. Como se muestra en la figura 3.41 se colocan dos cuñas en contacto sobre un plano liso horizontal y después se sueltan. Determinar el desplazamiento de la cuña más grande cuando W se ha desplazado hasta la base de la mayor.

El sistema que consiste de W y nW , no tiene fuerzas externas que actúen sobre él, en la dirección x , así que

$$\sum_i m_i \dot{x}_i = 0 \quad (a)$$

o sea

$$\frac{nW}{g} v_{nW} + \frac{W}{g} \dot{x}_W = 0. \quad (b)$$

La velocidad absoluta de W en la dirección x es

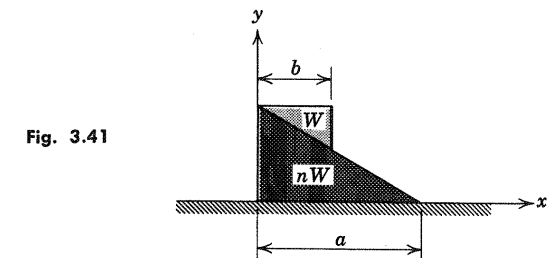


Fig. 3.41

$$\ddot{\mathbf{x}}_W = v_{nW}\vec{i} + u_x\vec{i}, \quad (c)$$

donde $u = u_x\vec{i} + u_y\vec{j}$ es la velocidad de W relativa a nW . Entonces la ecuación b llega a ser

$$\frac{nW}{g} v_{nW} + \frac{W}{g} (v_{nW} + u_x) = 0$$

o sea

$$v_{nW} = -\frac{u_x}{n+1} = \frac{dx_{nW}}{dt}. \quad (d)$$

Integrando, tenemos

$$x_{nW} = -\frac{u_x t}{n+1} = -\frac{a-b}{n+1}.$$

Nótese que este resultado es independiente del tipo de la superficie de la cuña, siempre que el movimiento relativo sea posible.

Ejemplo 3.25. Se dispara un proyectil desde un cañón montado en una plataforma que está inicialmente en reposo, pero en libertad de rodar sin rozamiento a lo largo de un carril horizontal. Si el proyectil sale con una velocidad u relativa al cañón, determinar la velocidad de retroceso de éste y el alcance del proyectil. Ver la figura 3.42.

Puesto que no hay fuerzas externas que actúen en la dirección x , tenemos

$$\sum_i m_i \dot{x}_i = 0. \quad (a)$$

Sustituyendo se tiene

$$Mv_c + m\dot{x}_p = 0. \quad (b)$$

Se puede determinar la velocidad absoluta $\vec{v}_p$ de la bala mediante una ecuación de movimiento relativo.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \vec{v} = v_c\vec{i} + u(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j}) = \vec{v}_p. \quad (c)$$

De esta ecuación, $\dot{x}_p = v_c + u \cos\alpha$. La sustitución de $\dot{x}_p$ en la ecuación b da

$$v_c = -\frac{m}{M+m} u \cos\alpha. \quad (d)$$

Entonces la velocidad del proyectil llega a ser

$$\vec{v}_p = u \cos\alpha \left(\frac{M}{M+m} \right) \vec{i} + u \sin\alpha \vec{j} \quad (e)$$

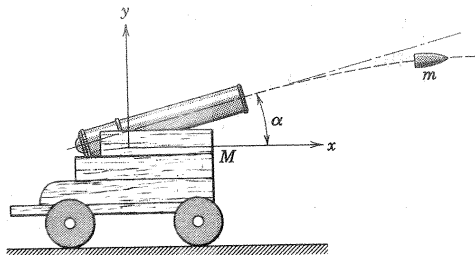


Fig. 3.42

y

$$v_p = u \left[1 - \frac{m(m+2M)}{(m+M)^2} \cos^2\alpha \right]^{1/2}. \quad (f)$$

El ángulo al que sale el proyectil del cañón es

$$\beta = \arctan\left(\frac{\dot{y}_p}{\dot{x}_p}\right) = \arctan\left(\frac{M+m}{M} \tan\alpha\right). \quad (g)$$

El tiempo necesario para que el proyectil alcance su altura máxima se puede determinar por el impulso y cantidad de movimiento.

$$\int F_y dt = \Delta p_y. \quad (h)$$

Denotando este tiempo por t_1 y sustituyendo en la ecuación h , se tiene

$$-mgt_1 = 0 - mu \sin\alpha$$

y

$$t_1 = \frac{u \sin\alpha}{g}. \quad (i)$$

Por simetría, el tiempo que permanece el proyectil en el aire es

$$2t_1 = \frac{2u \sin\alpha}{g}.$$

Debido a que en la dirección x no hay fuerzas que actúen sobre el proyectil durante el tiempo que permanece en el aire, la cantidad de movimiento inicial en esta dirección se conserva, o sea

$$\int F_x dt = \Delta p_x = 0.$$

Entonces el alcance es

$$x = \dot{x}_p(2t_1) = \frac{Mu^2}{g(M+m)} \sin 2\alpha. \quad (j)$$

3.16 Choque. El fenómeno de colisión entre dos cuerpos donde existen fuerzas activas y reactivas de magnitudes muy grandes durante un intervalo de tiempo muy corto se llama *choque*. La magnitud de las fuerzas y la duración del choque depende de las formas de los cuerpos, de sus

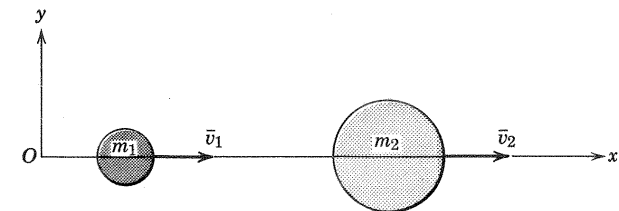


Fig. 3.43

velocidades y de sus propiedades elásticas. La comprobación experimental de las fuerzas de choque es relativamente difícil de obtener por la razón del tiempo extremadamente corto durante el cual actúan las fuerzas de contacto.

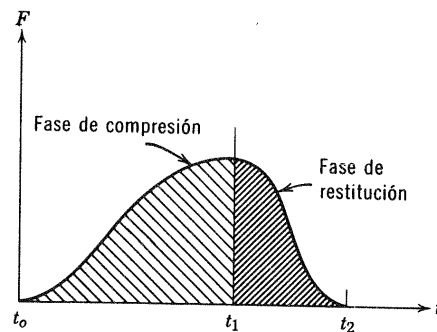
Choque directo. Examinaremos el choque directo de dos partículas con masas m_1 y m_2 . Se supone que se mueven a lo largo del eje x de un sistema de coordenadas con velocidades iniciales $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$. Si $\bar{v}_1 > \bar{v}_2$ las dos partículas chocarán (Fig. 3.43). El choque consistirá de dos fases:

1. La fase de *compresión* existe durante el intervalo entre el contacto inicial (t_0) y la deformación máxima. En el instante de máxima deformación (t_1) las dos partículas viajan con la misma velocidad $\bar{v}$.

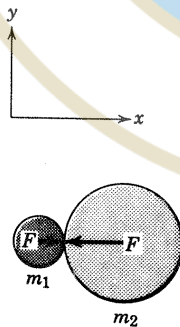
2. La fase de *restitución* principia en el instante de máxima deformación (t_1) y continúa hasta que las partículas finalmente se separan (t_2). Durante la restitución las fuerzas en el interior de las partículas actúan para restablecerlas a su forma original.

Si se pudieran determinar las fuerzas de choque entre dos partículas como una función del tiempo, el diagrama fuerza-tiempo del choque podría ser como el de la figura 3.44. En general el impulso durante la compresión no será igual al impulso durante la restitución a causa de las pérdidas de energía.

Indicaremos las velocidades finales por $\bar{v}_1'$ y $\bar{v}_2'$ y las expresaremos como funciones de las velocidades iniciales $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$. Primeramente consideremos la fase de compresión y escribiremos la ecuación de impulso y cantidad de movimiento para cada partícula. Para m_1 , tenemos



(a)



(b)

Fig. 3.44

$$-\bar{I}_C = -\int_{t_0}^{t_1} \bar{F} dt = m_1(\bar{v} - \bar{v}_1) \quad (3.64)$$

y para m_2

$$\bar{I}_C = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F} dt = m_2(\bar{v} - \bar{v}_2), \quad (3.65)$$

donde $\bar{I}_C$ se llama impulso de compresión y es el área bajo la porción izquierda de la curva en la figura 3.44. Para la fase de restitución las ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento son

$$-\bar{I}_R = -\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = m_1(\bar{v}_1' - \bar{v}), \quad (3.66)$$

$$\bar{I}_R = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = m_2(\bar{v}_2' - \bar{v}), \quad (3.67)$$

donde $\bar{I}_R$ es el impulso de restitución. Los experimentos indican que $\bar{I}_C$ e $\bar{I}_R$ están relacionados por una constante e , llamada coeficiente de restitución. e es una medida de la cantidad de energía que se dispone de la compresión para separar (restituir) los dos objetos. Entonces el impulso de restitución es alguna fracción del impulso de compresión.

$$\bar{I}_R = e\bar{I}_C. \quad (3.68)$$

Sustituyendo el segundo miembro de las ecuaciones 3.64 y 3.66 en la ecuación 3.68 y dividiendo entre m_1 , tenemos

$$(\bar{v}_1' - \bar{v}) = e(\bar{v} - \bar{v}_1). \quad (3.69)$$

Sustituyendo el segundo miembro de las ecuaciones 3.65 y 3.67 en la ecuación 3.68 y dividiendo entre m_2 , obtenemos

$$(\bar{v}_2' - \bar{v}) = e(\bar{v} - \bar{v}_2). \quad (3.70)$$

Restando la ecuación 3.70 de la ecuación 3.69, hallamos

$$\bar{v}_1' - \bar{v}_2' = -e(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) \quad (3.71)$$

La ecuación 3.71 muestra que la *velocidad de rebote relativa* es opuesta a la *velocidad de incidencia relativa*, mientras que sus magnitudes están relacionadas por el coeficiente de restitución. La cantidad e es una medida de la elasticidad de las partículas y es un número sin dimensiones que toma valores entre cero y uno. Los valores de e son razonablemente constantes sobre un intervalo limitado de velocidades de choque, pero se debe tener cuidado al utilizar los valores tabulados de e . En seguida, se dan algunos valores particulares:⁵

⁵ Higdon y Stiles, *Engineering Mechanics—Volumen II, Dynamics*, Segunda edición, Prentice-Hall, 1955, pág. 509.

Vidrio sobre vidrio	0.93-0.95
Marfil sobre marfil	0.88-0.89
Acero sobre acero	0.50-0.80
Plomo sobre plomo	0.12-0.18
Hierro sobre plomo	0.11-0.15
Corcho sobre corcho	0.50-0.60
Arcilla sobre arcilla (húmeda)	0

Donde exista un choque “perfectamente elástico”, e tiene el valor de 1.0 y las velocidades de incidencia y rebote serán de igual magnitud. Para un choque “perfectamente plástico”, e tiene el valor 0 y las dos partículas permanecerán en contacto, o sea $\bar{v}_1' = \bar{v}_2'$.

Puesto que no hay fuerzas externas actuando durante la colisión, se cumple la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. Esto es, la cantidad de movimiento antes del choque será igual a la cantidad de movimiento después del mismo.

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2'. \quad (3.72)$$

Las ecuaciones 3.71 y 3.72 se pueden resolver como simultáneas para la obtención de las velocidades $\bar{v}_1'$ y $\bar{v}_2'$ en función de las masas y de las velocidades iniciales.

Pérdida de energía durante el choque. Si comparamos las energías cinéticas asociadas con las velocidades inicial y final encontraremos que la energía final será, en el caso general, un poco menor. ¿Qué le sucede al resto de la energía?:

1. Parte de la energía se disipa en calor por la deformación e histéresis.
2. Parte de la energía se disipa en sonido y vibraciones elásticas de alta frecuencia.

Para cualquier sistema, la energía antes de un proceso es igual a la energía después del proceso (si todas las energías se toman en cuenta).

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \bar{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \bar{v}_2'^2 + \Delta E. \quad (3.73)$$

El término ΔE se puede llamar “pérdida de energía” (es un número positivo) aunque realmente no se pierde, sino más bien es la cantidad de energía mecánica que se convierte en otras formas de energía tal como se mencionó anteriormente. Si se tienen calculadas las velocidades finales, se puede utilizar la ecuación 3.73 para determinar esta “energía perdida”.

Se puede demostrar que la sustitución de los valores de $\bar{v}_1'$ y $\bar{v}_2'$

(obtenidas de las ecuaciones 3.71 y 3.72) en la ecuación 3.73 da, para la “energía perdida”,

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2(m_1 + m_2)} [m_1 m_2 e^2 (v_1 - v_2)^2 + (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2]. \quad (3.74)$$

Cuando e es igual a uno, la ecuación 3.74 se reduce a cero, la colisión es perfectamente elástica y no hay pérdida de energía. Cuando e es igual a cero, la colisión es perfectamente plástica y si se observa la ecuación 3.74, se ve que hay una pérdida máxima de energía cinética.

Choque oblicuo. El caso que se ha discutido fue de choque directo. Las ecuaciones 3.71 y 3.74 se aplican solamente a las componentes de la velocidad a lo largo de la línea de choque. En el caso de choque oblicuo, si se toma el eje x como la línea de choque, tenemos

$$\dot{x}_1' - \dot{x}_2' = -e(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \quad (3.75)$$

Si las partículas son lisas, no hay fuerzas que actúen en la dirección y durante el choque. Por lo tanto, las ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento para la dirección y , llegan a ser

$$\begin{aligned} 0 &= m_1(\dot{y}_1' - \dot{y}_1), \\ 0 &= m_2(\dot{y}_2' - \dot{y}_2). \end{aligned} \quad (3.76)$$

En consecuencia, las componentes de la velocidad perpendiculares a la línea de choque no cambiarán y

$$\begin{aligned} \dot{y}_1' &= \dot{y}_1, \\ \dot{y}_2' &= \dot{y}_2. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Durante el choque oblicuo cambian las velocidades en la dirección x y permanecen constantes en la dirección y .

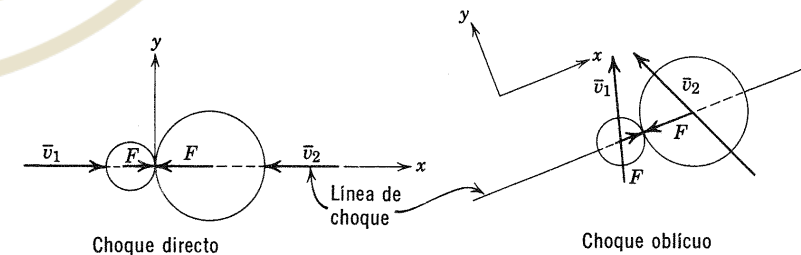


Fig. 3.45

Ejemplo 3.26. Dos bolas idénticas se mueven sobre un plano horizontal (bolas de billar sobre la mesa) y se produce un choque. Determinar las velocidades después de la colisión, suponiendo que las velocidades iniciales y el coeficiente de restitución son conocidos para este problema. Una de las bolas se está moviendo hacia la izquierda con una velocidad de 4 m/seg, mientras que la otra impulsada por el *taco*, se está moviendo con una velocidad de 10 m/seg en la dirección que se ve en la figura 3.46. Se supone que para estas condiciones $e = 0.8$. Resolver el problema para las siguientes situaciones: *a*) cuando la línea de choque está en la dirección de movimiento de la primera bola y *b*) cuando la línea de choque es perpendicular a la dirección de movimiento de la primera bola.

Parte a: De la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x ,

$$m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = m\dot{x}_1' + m\dot{x}_2'. \quad (a)$$

De la componente x de la ecuación 3.71,

$$\dot{x}_1' - \dot{x}_2' = -e(\dot{x}_1 - \dot{x}_2). \quad (b)$$

Sustituyendo en la ecuación *a* para las componentes iniciales y dividiendo entre m , se tiene

$$+6 + (-4) = \dot{x}_1' + \dot{x}_2'. \quad (c)$$

La ecuación *b* da

$$\dot{x}_1' - \dot{x}_2' = -0.8[6 - (-4)]. \quad (d)$$

Resolviendo simultáneamente, obtenemos

$$\dot{x}_1' = -3 \text{ m/seg}$$

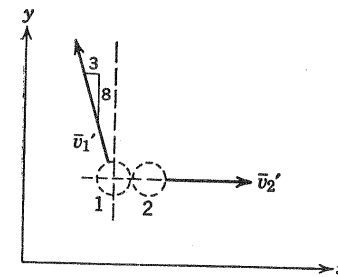
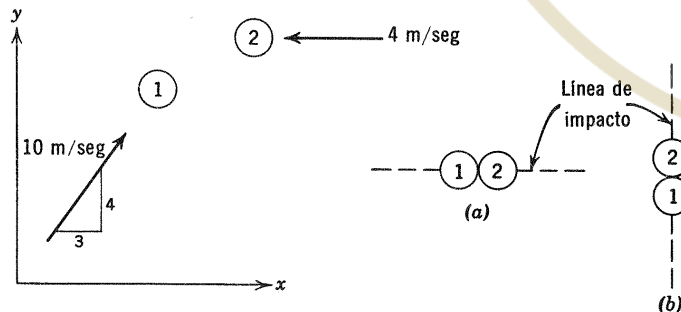
y

$$\dot{x}_2' = +5 \text{ m/seg.}$$

Si se desprecia el rozamiento, las componente en y de la velocidad no cambian; por tanto

$$\dot{y}_1' = \dot{y}_1 = 8 \text{ m/seg}$$

$$\dot{y}_2' = \dot{y}_2 = 0 \text{ m/seg.}$$



Entonces las velocidades finales son

$$\bar{v}_1' = -3\bar{i} + 8\bar{j} \text{ m/seg}$$

$$\bar{v}_2' = 5\bar{i} \text{ m/seg.}$$

Las dos bolas se mueven como se indica en la figura 3.47.

Parte b: La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento da

$$m\dot{y}_1' + m\dot{y}_2' = m\dot{y}_1 + m\dot{y}_2. \quad (e)$$

La ecuación del choque da

$$\dot{y}_1' - \dot{y}_2' = -e(\dot{y}_1 - \dot{y}_2). \quad (f)$$

En la dirección x las velocidades no cambian; por lo tanto

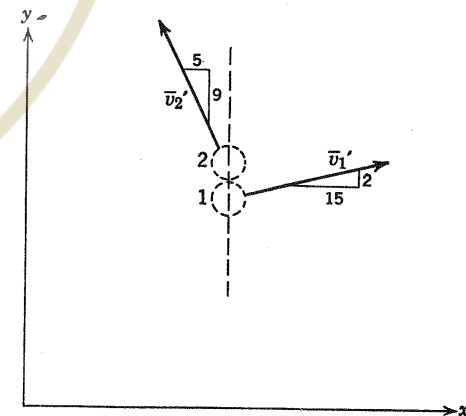
$$\dot{x}_1' = \dot{x}_1$$

y

$$\dot{x}_2' = \dot{x}_2.$$

Resolviendo estas ecuaciones, se tiene

$$\dot{y}_1' = 0.8 \text{ m/seg,}$$



$$\dot{y}_2' = 7.2 \text{ m/seg},$$

$$\dot{x}_1' = 6 \text{ m/seg},$$

$$\dot{x}_2' = -4 \text{ m/seg}.$$

El movimiento después del choque se ilustra en la figura 3.48 y las velocidades finales son

$$\bar{v}_1' = 6\bar{i} + 0.8\bar{j} \text{ m/seg},$$

$$\bar{v}_2' = -4\bar{i} + 7.2\bar{j} \text{ m/seg}.$$

Ejemplo 3.27. Desde una altura h se deja caer un objeto de masa m sobre una superficie rígida. Encontrar una expresión para el coeficiente de restitución en términos de h y el tiempo necesario para un número infinito de rebotes. Ver la figura 3.49.

La aplicación de la ecuación 3.71

$$v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2),$$

y la ecuación de trabajo y energía dan

$$[2gh]^{1/2} = (-e) \{-[2gh]^{1/2}\}$$

o sea

$$e = \left[\frac{h'}{h} \right]^{1/2}.$$

El tiempo necesario para que el objeto caiga a una distancia h se puede determinar del impulso y cantidad de movimiento. La aplicación de

$$\int F_y dt = \Delta p_y$$

da

$$-mgt_h = -m[2gh]^{1/2}$$

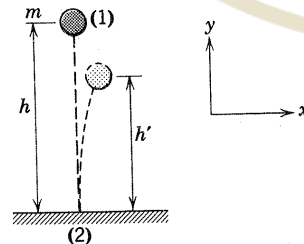
y

$$t_h = \frac{[2gh]^{1/2}}{g} = \left[\frac{2h}{g} \right]^{1/2}.$$

El tiempo para que suba la altura h' es

$$t_{h'} = \frac{[2gh']^{1/2}}{g} = \left[\frac{2h'}{g} \right]^{1/2}.$$

Fig. 3.49



El tiempo total para un rebote es

$$t_h + t_{h'} = \left[\frac{2h}{g} \right]^{1/2} + \left[\frac{2h'}{g} \right]^{1/2} = \left[\frac{2h}{g} \right]^{1/2} + \left[\frac{2he^2}{g} \right]^{1/2} = \left[\frac{2h}{g} \right]^{1/2} (1 + e) \quad (e)$$

haciendo uso de la ecuación b.

El tiempo para el siguiente rebote completo desde la altura h' será

$$\left[\frac{2h'}{g} \right]^{1/2} (1 + e) = \left[\frac{2h}{g} \right]^{1/2} e(1 + e).$$

El tiempo total para todo el fenómeno es

$$T = \left[\frac{2h}{g} \right]^{1/2} (1 + e)(1 + e + e^2 + \dots)$$

o sea

$$T = \left[\frac{2h}{g} \right]^{1/2} \left(\frac{1 + e}{1 - e} \right). \quad (f)$$

Cuando se resuelve para e la última ecuación se obtiene el resultado deseado y que es

$$e = \frac{T[g/2h]^{1/2} - 1}{T[g/2h]^{1/2} + 1}$$

Ejemplo 3.28. Desde una distancia h se deja caer una masa m sobre una masa M que está sostenida por un resorte de constante k . Si se observa que M se desplaza verticalmente una distancia δ , determinar el coeficiente de restitución para estos dos objetos y la altura a que rebotará m . Ver la figura 3.50.

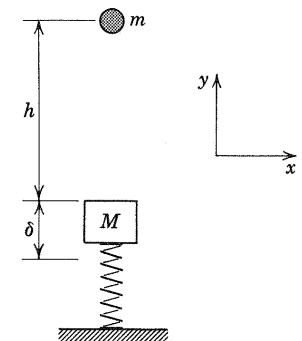
La velocidad de m , precisamente, antes del choque es $[2gh]^{1/2}$. Durante el choque, M no se mueve, de manera que podemos utilizar la conservación de la cantidad de movimiento lineal. Debido a que la fuerza externa resultante es cero, esta ecuación y la ecuación 3.71 son

$$mv'_m + Mv'_M - m(-[2gh]^{1/2}) = 0, \quad (a)$$

$$v'_m - v'_M = -e(-[2gh]^{1/2}). \quad (b)$$

Resolviendo simultáneamente, se tiene

Fig. 3.50



$$v'_m = \frac{Me - m}{M + m} [2gh]^{1/2} \quad (c)$$

y

$$v'_M = \frac{-m(1 + e)}{M + m} [2gh]^{1/2} \quad (d)$$

Aplicando a M la conservación de energía

$$T + V = E = \frac{1}{2} M v'^2_M + \frac{1}{2} k \delta_{es}^2 =$$

$$\frac{1}{2} M \left[\frac{m(1 + e)}{M + m} \right]^2 (2gh) + \frac{1}{2} k \delta_{es}^2 \quad (e)$$

donde $\delta_{es} = Mg/k$. Otra sustitución daría por resultado

$$0 - Mg\delta + \frac{1}{2} k(\delta + \delta_{es})^2 = Mgh \left[\frac{m(1 + e)}{M + m} \right]^2 + \frac{1}{2} k \delta_{es}^2$$

y finalmente

$$e = \delta \left[1 + \frac{M}{m} \right] \left[\frac{k}{2Mgh} \right]^{1/2} - 1. \quad (f)$$

Si se aplica la conservación de energía a m después del choque se obtiene la altura h' del rebote; el lector puede demostrar que es

$$h' = h \left[\frac{\delta}{mg} \left(\frac{Mgk}{2h} \right)^{1/2} - 1 \right]^2. \quad (g)$$

PROBLEMAS

3.1. Se utiliza una grúa para levantar las cajas A , B y C . Si el cable puede soportar una fuerza de 1500 kg sin romperse, determinar la aceleración hacia arriba que hará que el cable se rompa.

$$A = 100 \text{ kg},$$

$$B = 500 \text{ kg},$$

$$C = 400 \text{ kg}.$$

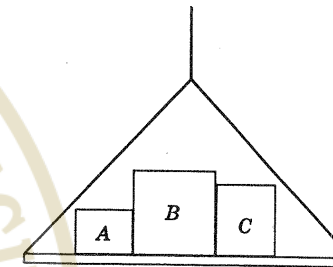


Fig. P-3.1

3.2. Un automóvil que pesa 1200 kg puede acelerar uniformemente de 15 a 45 Km/h en 4 seg. Despreciando la resistencia a la rodadura y al viento, ¿cuál deberá ser la "fuerza de tracción" entre las ruedas y el suelo?

3.3. Como se puede ver, una carga pende de un montacargas. Determinar el ángulo θ que forma el cable que soporta la carga con la vertical, cuando el montacargas se mueve con una aceleración de a m/seg² hacia la derecha.

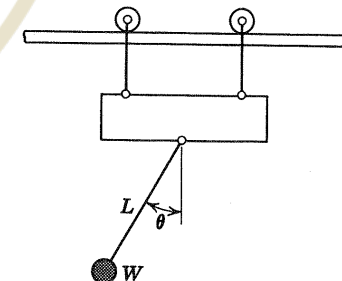


Fig. P-3.3

3.4. Como se puede ver, dos cuñas descansan sobre un plano horizontal liso, existiendo un tope para la cuña mayor. Determinar la fuerza que ejerce el tope cuando la cuña menor se mueve:

- a) Si las superficies de la cuñas son lisas.
b) Si el coeficiente de rozamiento entre las cuñas es μ .

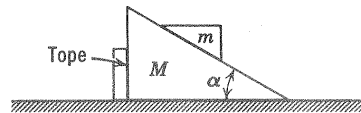


Fig. P-3.4

3.5. Un peso de 2 kg está suspendido por una cuerda de 1.2 m de longitud. Se le da un golpe y adquiere una velocidad horizontal de 6 m/seg. Hallar la tensión en la cuerda inmediatamente después del golpe.

3.6. Cuando un aeroplano sale de picada su rapidez es de 300 m/seg y el radio de la trayectoria es de 600 m. Hallar la fuerza que el piloto ejerce sobre el respaldo del asiento cuando el aeroplano está en la posición horizontal.

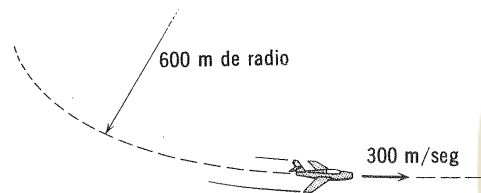


Fig. P-3.6

3.7. Hallar la aceleración del bloque de 50 kg, si el coeficiente de rozamiento es 0.6 y P es de 40 kg y forma un ángulo de 30° con la horizontal.

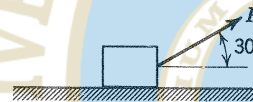


Fig. P-3.7

3.8. Una pequeña bola se deja caer en un recipiente hemisférico hueco y liso de radio interior R , que está girando alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante ω rad/seg. Finalmente, la bola quedará en reposo en el interior del recipiente. Determinar el ángulo θ que define esta posición de equilibrio en relación con el recipiente.

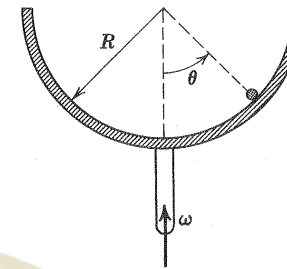


Fig. P-3.8

3.9. Durante el movimiento acelerado la bola de 5 kg forma un ángulo constante θ . Las masas de la polea y del bloque A que desliza, así como todas las fuerzas de rozamiento se desprecian. Determinar:

- a) El ángulo θ .
b) La tensión en la cuerda que une a A con el peso de 15 kg.

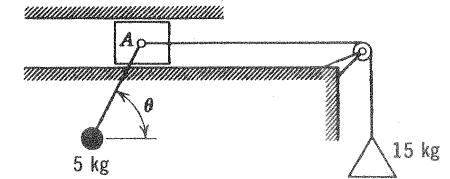


Fig. P-3.9

3.10. Una balanza está perfectamente nivelada en el interior de un elevador cuando éste está en reposo. Determinar lo que le sucede a la balanza si el elevador adquiere una aceleración:

- a) Hacia arriba.
b) Hacia abajo.

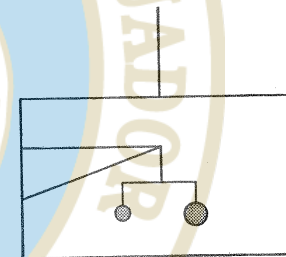


Fig. P-3.10

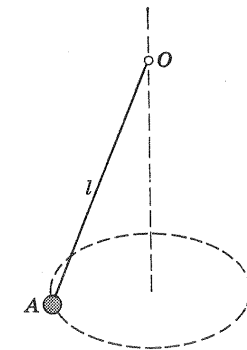


Fig. P-3.11

3.11. Una pequeña esfera de peso W está atada a una cuerda OA de longitud l y gira en una trayectoria circular horizontal con velocidad uniforme v . Determinar la fuerza de tensión T en la cuerda en términos de las cantidades dadas.

3.12. Dos bloques A y B se deslizan hacia abajo del plano inclinado CD que forma un ángulo $\alpha = 30^\circ$ con la horizontal, bajo la acción de la fuerza de gravedad. Si los pesos de los bloques son $W_A = 5$ kg y $W_B = 10$ kg y los coeficientes de rozamiento cinético entre ellos y el plano inclinado son $\mu_A = 0.15$ y $\mu_B = 0.30$, hallar la fuerza P que existe entre los bloques durante el movimiento.

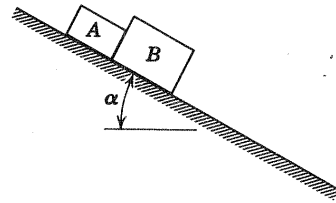


Fig. P-3.12

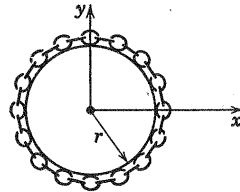


Fig. P-3.13

3.13. Una cadena de n eslabones se acomoda sin apretar sobre un tambor de radio r . El tambor gira a una velocidad angular ωk . Entre el tambor y la cadena existe suficiente contacto de manera que la cadena no se mueve en relación con el tambor, pero todas las fuerzas de contacto normales pueden despreciarse. Si la cadena pesa μ kg por unidad de longitud, hallar la tensión en la cadena.

3.14. Un cable de longitud L y peso μ kg por unidad de longitud se hace girar alrededor de un eje vertical con velocidad angular ω . Hallar el alargamiento del cable si ω es lo suficientemente grande para que el cable esté próximo a la posición horizontal. La constante de resorte del cable es AE/L kg por unidad de longitud, donde A es el área de la sección transversal del cable y E el módulo de elasticidad. Resuélvase aislando un elemento infinitesimal del cable.

3.15. Determinar la aceleración de las dos cuñas m y M si todas las superficies son lisas.

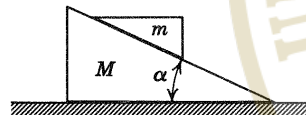


Fig. P-3.15

3.16. Hallar la rapidez mínima en m/seg de una motocicleta que se mueve sobre la superficie interior de un cilindro que tiene su eje vertical y un radio de 28 m; el coeficiente de rozamiento es 0.25. Se supone que el peso del vehículo y el motociclista es de 250 kg.

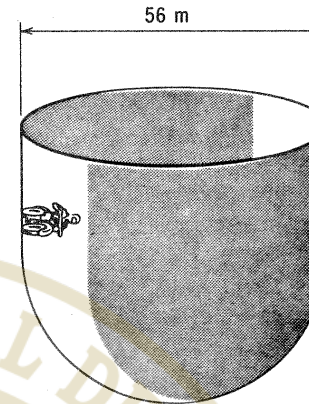


Fig. P-3.16

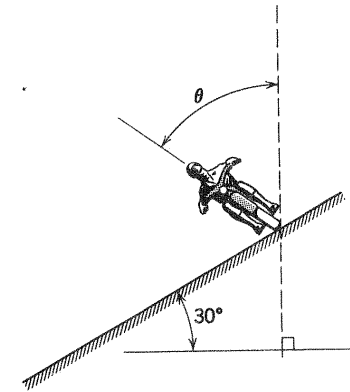


Fig. P-3.17

3.17. Un hombre y una motocicleta juntos pesan 325 kg y toman una curva en un plano de 30° con la horizontal. El radio de la curva peraltada es de 75 m y la rapidez es de 108 km/h. ¿Qué ángulo θ debe formar el motociclista con la vertical?

3.18. Un bloque pequeño que pesa 25 kg descansa sobre un bastidor que gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular de 60 rpm. El resorte tiene una constante de 4 kg/cm. La fuerza en el resorte es igual a kx , donde k es la constante y x es el alargamiento o compresión del resorte. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el bastidor se supone que es despreciable. Determinar el alargamiento del resorte. Cuando el resorte no está alargado su longitud es de 60 cm.

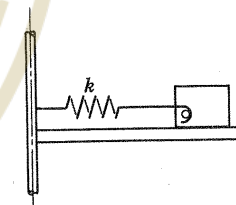


Fig. P-3.18

3.19. Una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza $\vec{F} = F\vec{i}$. La masa de la partícula varía de acuerdo con la ecuación $m = m_0/[1 - v^2/c^2]^{1/2}$, donde m_0 es la masa en reposo y c es la velocidad de la luz. Si la partícula parte del origen en $t = 0$ con velocidad cero, hallar la velocidad y el desplazamiento de m como una función del tiempo. Comparar los resultados con el caso en que m es constante.

3.20. Un foco cuelga del techo de un trailer que está acelerando a razón de 1.20 m/seg^2 . Hallar el ángulo que forma el cable con la vertical. El foco pesa 225 g.

3.21. Para comprobar el radio de una curva de ferrocarril, se observa que un peso de 9.1 kg produce un efecto de 9.45 kg sobre un dinamómetro suspendido del techo de la locomotora que describe la curva a 17.8 m/seg. ¿Cuál es el radio de la curva?

3.22. Un péndulo se sostiene en reposo en la posición que se muestra mediante la cuerda horizontal. Si repentinamente se corta la cuerda, ¿por qué factor quedará momentáneamente reducida la tensión original en el alambre OA ?

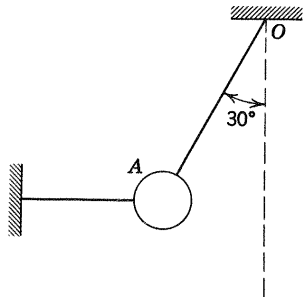


Fig. P-3.22

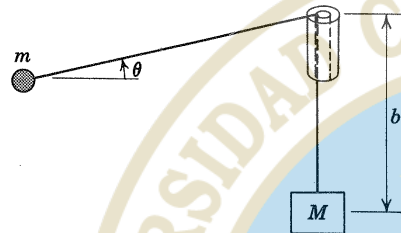


Fig. P-3.23

3.23. Un cable de longitud L tiene atada una masa m en un extremo y una masa M en el otro. El cable pasa por un tubo de vidrio liso. La masa m se hace girar alrededor del eje vertical del tubo, de tal manera que M permanece a una distancia b por debajo de la parte superior del mismo. Determinar la velocidad angular necesaria y el ángulo θ resultante. $M > m$.

3.24. Una partícula de masa m se mueve en un canal cilíndrico, partiendo del reposo en $\theta = 0^\circ$. Hallar la fuerza normal sobre la partícula como una función de θ .

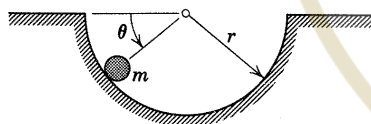


Fig. P-3.24

3.25. Una esfera sumamente pequeña está atada a una cuerda de 50 cm y gira con el cono. Hallar la rapidez de la rotación que haga que la esferita se separe justamente del cono.

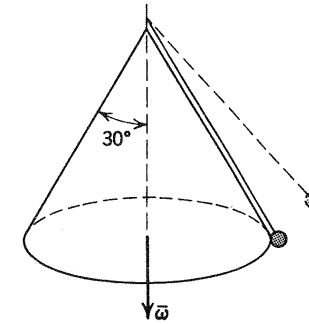


Fig. P-3.25

3.26. Un brazo gira alrededor de un eje que pasa por O . Si la rapidez es menor de 1800 rpm, el bloque rectangular de 500 g tomará la posición mostrada. Si la rapidez es mayor de 1800 rpm, el bloque tomará la posición mostrada por la línea punteada. Hallar la constante del resorte k .

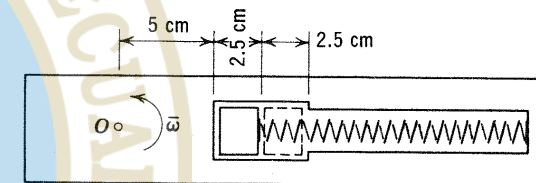


Fig. P-3.26

3.27. El bloque pequeño situado sobre la mesa giratoria pesa 1 kg y está a 60 cm del centro. La mesa giratoria tiene una aceleración angular de 1 rad/seg^2 . El coeficiente de rozamiento es 0.45. Determinar la velocidad angular para que el bloque comience a deslizarse.

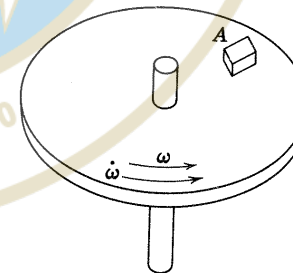


Fig. P-3.27

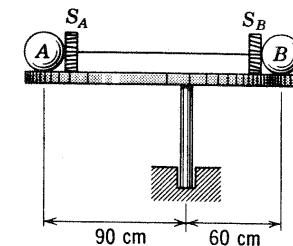


Fig. P-3.28

3.28. Las esferas A y B pesan 5 y 20 kg, respectivamente. Estas esferas están colocadas sobre una mesa giratoria, unida por una cuerda elástica, que hace que se apoyen sobre los topes S_A y S_B . Cuando la mesa está en reposo la ten-

sión en la cuerda es de 15 kg. ¿Cuáles serán las fuerzas entre las esferas y los topos cuando la mesa se hace girar a 20 rpm alrededor de la vertical?

3.29. Un cuerpo de peso W kg descansa sobre un plano inclinado en la forma que se muestra. El coeficiente de rozamiento estático entre el cuerpo y el plano es μ . ¿Cuál es la máxima aceleración horizontal que puede tener hacia la izquierda todo el sistema, sin que se mueva el cuerpo sobre el plano?

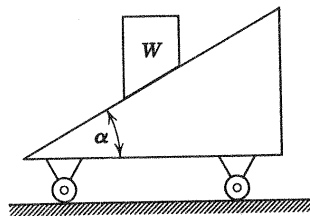


Fig. P-3.29

3.30. ¿Qué contrapeso W mantendrá la máquina de Corliss en la posición que se ve a una rapidez de rotación $n = 120$ rpm? Cada esfera pesa 16.1 lb. Despreciese el peso de los otros miembros.

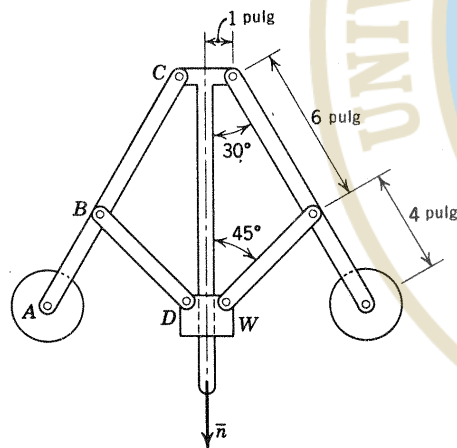


Fig. P-3.30

3.31. Hallar la aceleración de A y B en el sistema de poleas que se muestra. A y B tienen el mismo peso W y se puede despreciar la masa de las poleas.

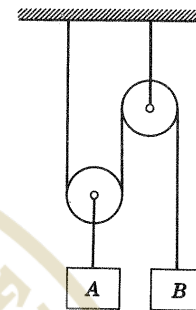


Fig. P-3.31

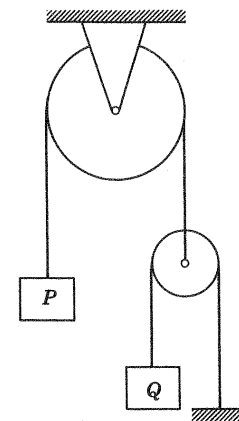


Fig. P-3.32

3.32. Despreciando el rozamiento, la inercia y el peso de las dos poleas, hallar la aceleración del peso Q , suponer que $Q = nP$, donde n es un parámetro.

3.33. Despreciando las masas de todas las poleas, hallar la aceleración del peso W .

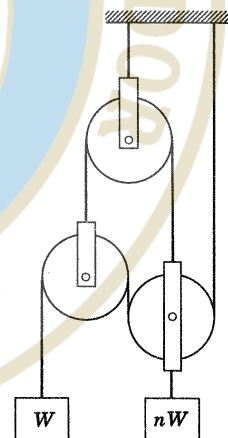


Fig. P-3.33

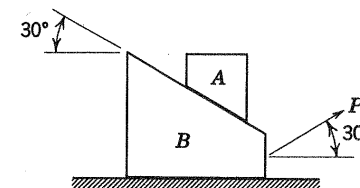


Fig. P-3.34

3.34. A pesa 50 kg, B pesa 150 kg y el coeficiente de rozamiento para A y B es $1/3$ y para B y el piso es $1/5$. Habrá un conjunto de valores de P para el que no hay movimiento relativo entre A y B . ¿Cuál es el límite superior de P ? ¿Cuál es la reacción de B sobre A para este límite superior?

3.35. Este aparato se utiliza para comprimir aire. La manivela gira a 150 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. La carrera es de 45 cm. El émbolo pesa 40 kg y tiene 25 cm de diámetro. La varilla del émbolo pesa 20 kg. Determinar la fuerza del pasador de la manivela sobre el sistema del émbolo cuando $x = 7.5$ cm, la presión del aire es de 4 kg/cm² en ese instante.

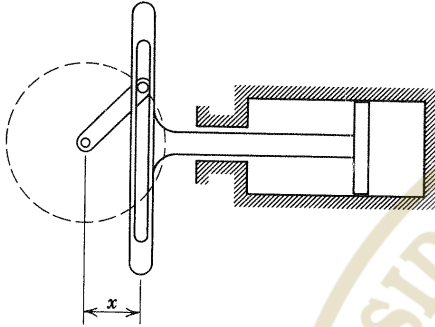


Fig. P-3.35

3.36. En el sistema que se ve, todas las superficies son lisas. Hallar la aceleración de la masa M . A partir de esta expresión hallar la relación entre los parámetros tal que la aceleración de M sea cero.

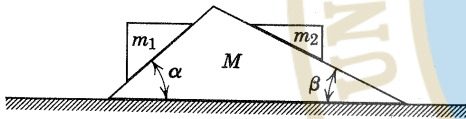


Fig. P-3.36

3.37. Un cuerpo cae al suelo desde una altura h . Suponiendo que la fuerza de gravedad sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la Tierra, hallar el tiempo T en segundos que transcurrirá para que llegue a la superficie terrestre y la velocidad V en el instante en que choca con ella. Despreciar el efecto de la resistencia del aire. El radio de la Tierra es R . Si $h = R$, comparar T con el tiempo de la caída libre de una partícula bajo la acción de una fuerza constante mg .

3.38. Un cuerpo que pesa 22.5 kg se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de $20\hat{k}$ m/seg. La resistencia del aire es $-0.015 v\hat{k}$ kg, donde v es la velocidad del cuerpo en metros por segundo. ¿En cuánto tiempo alcanzará el cuerpo su posición más alta?

3.39. Un cuerpo que pesa Q kg se lanza hacia arriba con una velocidad inicial v_0 m/seg. El aire ofrece una resistencia igual a fv^2 kg, donde v es la velocidad del cuerpo en metros por segundo. ¿Cuántos segundos T se moverá el cuerpo hacia arriba? ¿Qué altura H alcanzará?

3.40. Una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza de gravedad $-mg\hat{k}$ y una fuerza resistiva $-mk\dot{r}$. Si las condiciones iniciales son $r = \bar{v}_0$, $\dot{r} = 0$ para $t = 0$, demostrar que la velocidad límite es $-(g/k)\hat{k}$ y que

$$\vec{r} = \frac{\bar{v}_0}{k} (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k} \hat{k} + \frac{g}{k^2} (1 - e^{-kt}) \hat{k}.$$

3.41. El brazo ranurado OB lleva, en el plano horizontal, el pequeño pasador A cuya posición está determinada por la rotación del brazo alrededor de la leva fija. OB gira en sentido contrario a las manecillas del reloj con una velocidad angular ω y una aceleración angular $\dot{\omega}$. Hallar la fuerza de OB sobre el pasador y la fuerza del pasador sobre la leva como funciones de θ . El pasador A tiene una masa m .

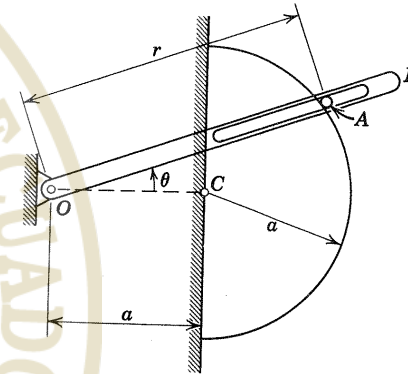


Fig. P-3.41

3.42. Una partícula de masa m se mueve, bajo la acción de una fuerza central F , sobre una trayectoria cuya ecuación es $r^2 = a \cos 2\phi$, que es un lemniscato. r es la distancia desde el centro de atracción y a una constante. Inicialmente $r = r_0$ y la velocidad v_0 está dirigida a un ángulo α del radio vector entre el punto y el centro de atracción. Hallar la fuerza F como una función de r .

3.43. Una partícula P de masa m se mueve alrededor de un punto fijo O bajo la acción de una fuerza central F que depende solamente de la distancia $OP = r$. La velocidad del punto es $v = a/r$, donde a es una constante. Hallar la fuerza F y la trayectoria del movimiento de la partícula.

3.44. Una partícula de masa m que tiene una carga eléctrica negativa $-e$, entra a un campo electrostático uniforme de intensidad E con una velocidad v_0 normal a la dirección del campo. Hallar la trayectoria de la partícula en el campo, cuando se halla bajo la acción de una fuerza $F = -eE$ opuesta a la dirección del campo. Despréciase la acción de la gravedad.

3.45. Una partícula de masa m que tiene una carga eléctrica negativa $-e$, entra en un campo magnético de intensidad H con una velocidad $v_0\hat{i}$. Hallar la tra-

yectoria del movimiento de la partícula después de que entra en el campo si la fuerza que actúa sobre ella es $\vec{F} = -(e/c)\vec{r} \times H\vec{k}$, donde c es la velocidad de la luz. Despréciase la acción de la gravedad.

3.46. Un anillo se desliza sobre una varilla lisa de longitud l . La varilla gira alrededor de un extremo en un plano horizontal con rapidez angular constante ω . En $t = 0$, el anillo está a una distancia r_0 del centro de rotación y su velocidad relativa v es cero. Hallar el tiempo t en que el anillo saldrá de la varilla.

3.47. El tubo AB gira alrededor de un eje vertical CD con una velocidad angular constante ω . En $t = 0$, una partícula de masa m está a una distancia a de O y tiene velocidad relativa cero. Despreciando el rozamiento, hallar el movimiento de m .

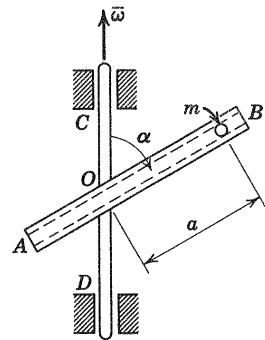


Fig. P-3.47

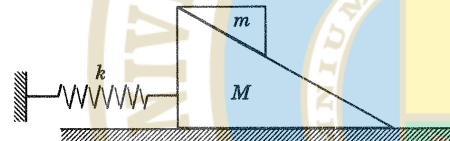


Fig. P-3.48

3.48. Como se puede ver, una cuña de masa m descansa sobre una masa M . Un resorte de constante k sostiene la cuña M y no está alargado cuando se suelta m desde el reposo en la parte superior de M . Hallar la fuerza del resorte y la posición de m como funciones del tiempo. Hallar también la relación entre los parámetros de manera que m no abandone la superficie de M . Todas las superficies son lisas.

3.49. Se dispara un proyectil verticalmente hacia arriba con una velocidad $v_0\vec{j}$. Demostrar que cuando regresa a la Tierra la desviación hacia el oeste es

$$z = -\frac{4}{3} \frac{\omega v_0^3 \cos \phi}{g^2},$$

donde ϕ es la latitud. Partir de la ecuación 3.13, despreciando los términos que contienen ω^2 comparados con los términos que contienen ω . En particular, nótese que el tiempo de ascenso es v_0/g . Obsérvese que la velocidad hacia el oeste alcanza su valor máximo en la parte superior del vuelo. Si $v_0 = 400$ m/seg, hallar z en un punto de proyección sobre el ecuador.

3.50. Se supone que se dispara un proyectil con velocidad inicial $\dot{x}_0, \dot{z}_0, \dot{y}_0 = 0$ desde el origen de un sistema de coordenadas fijo a la Tierra. Demostrar que la trayectoria de la partícula tiene la representación compleja

$$U = (\dot{U}_0 t) e^{i(\omega t \sin \phi + \psi)},$$

donde $U = x + iz$, ϕ es la latitud y la velocidad inicial tiene la forma compleja $\dot{U}_0 e^{i\psi}$. Despréciense los términos que contienen $\dot{y}$ que son pequeños comparados con los términos que contienen $\dot{x}$ y $\dot{z}$. En el momento apropiado utilizar una serie para $e^{+2i\omega \sin \phi}$ y despreciar los términos que contienen ω^2 .

3.51. Un peso está oscilando en el plano vertical y está unido por una cuerda a O . La rapidez en el punto más bajo es de 40 m/seg. ¿Cuál es la rapidez en la parte superior T ?

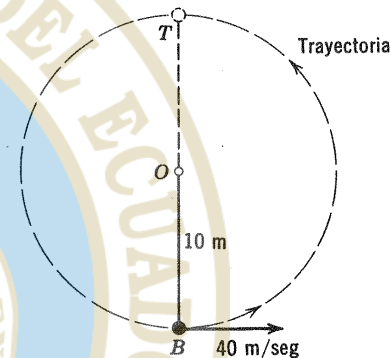


Fig. P-3.51

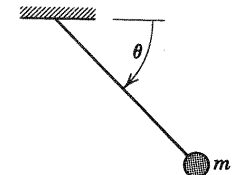


Fig. P-3.52

3.52. Una partícula de masa m está atada a una cuerda de longitud R y se suelta desde el reposo en la posición que se muestra. Hallar la tensión en la cuerda en el punto más bajo de su trayectoria.

3.53. Una cuenta está ensartada en un alambre delgado y rígido y puede deslizarse sin rozamiento. El alambre tiene la forma de la parábola $y = 2x^2$ en el plano vertical. La cuenta inicia su movimiento sin velocidad inicial en la posición $x = 1$ m, $y = 2$ m. Calcular la rapidez de la cuenta cuando pasa por el punto $x = 0$, $y = 0$ de la parábola.

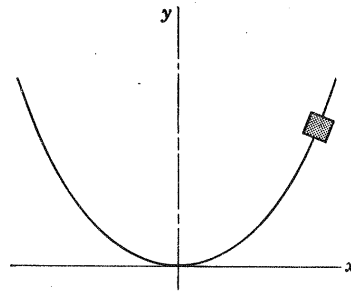


Fig. P-3.53

3.54. Un pequeño bloque parte desde el reposo en el punto A y desliza hacia abajo del plano inclinado AB, como se muestra en la figura. ¿Qué distancia s recorrerá a lo largo del plano horizontal BC antes de llegar al reposo? El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y cualquier plano es $\mu = 0.3$. Supóngase que la velocidad con que se inicia su movimiento a lo largo de BC es la misma velocidad que alcanzó al deslizar de A a B.

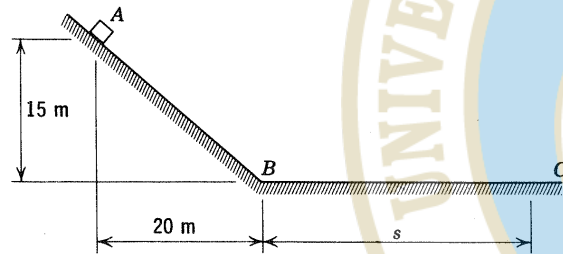


Fig. P-3.54

3.55. Un cuerpo que pesa 40 kg se lanza a lo largo de un plano horizontal rugoso con una velocidad de 3 m/seg. Llega al reposo después de recorrer una distancia de 4 m. Hallar el coeficiente de rozamiento cinético.

3.56. Una bala que pesa 45 g se mueve horizontalmente a 1200 m/seg y atraviesa una pared de madera saliendo con una velocidad de 600 m/seg. Si la resistencia media de la madera a la penetración es de 5000 kg, ¿qué espesor tiene la pared?

3.57. Un trineo y su tripulación pesan en total 440 kg. Si bajan por un declive sinuoso sin detenerse y la resistencia combinada del aire y el rozamiento es constante y de 21.3 kg, ¿qué rapidez final adquirirán si el recorrido es de 1000 m de longitud y la diferencia de alturas entre la parte superior e inferior es de 100 m?

3.58. Una fuerza variable F se aplica en tal forma que hace desplazar a A 5 cm de la posición de equilibrio. Calcular el trabajo efectuado por F .

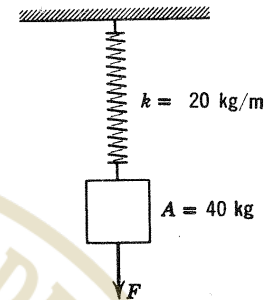


Fig. P-3.58

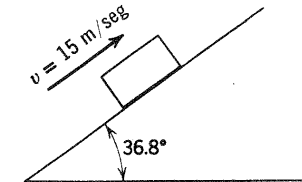


Fig. P-3.59

3.59. Un paquete que pesa 25 kg se lanza hacia arriba de un plano inclinado 36.8° con una velocidad inicial de 15 m/seg. El coeficiente de rozamiento cinético entre el plano y el paquete es 0.15.

- Determinar la máxima distancia que recorrerá el paquete sobre el plano.
- Determinar el mínimo coeficiente de rozamiento estático para sostener el paquete en esta posición y determinar la velocidad con que pasará por su posición original si el coeficiente estático es justamente menor que el valor mínimo.

3.60. Una bala que pesa 45 g se mueve horizontalmente a 1200 m/seg y atraviesa una barricada vertical de madera saliendo con una velocidad horizontal de 600 m/seg. Si la resistencia media de la madera a la penetración es de 2500 kg, ¿qué espesor tiene la barricada?

3.61. El sistema estáticamente inestable se suelta desde la posición que se ve en la figura P-3.61 ¿cuál será el valor de h cuando el peso de 4.9 kg alcance la posición de equilibrio? También determinar la velocidad del peso de 4.9 kg en la posición de equilibrio y el valor de h cuando alcanza la posición más baja.

3.62. Una partícula empieza a moverse en la parte superior de una superficie hemisférica con una velocidad v_0 . ¿Dónde abandonará la superficie? ¿A qué valor de v_0 dejará la superficie tan pronto como ésta empiece a moverse?

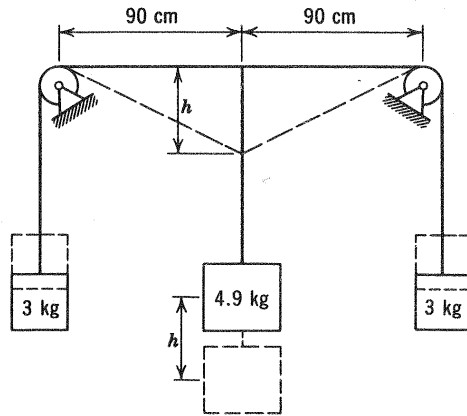


Fig. P-3.61

3.63. Una partícula de peso W rueda desde el reposo de la parte superior de un paraboloide de revolución. La superficie se genera por la rotación de la curva $y = -x^2$ alrededor del eje y . Hallar la fuerza normal ejercida sobre la partícula como una función de x . ¿Qué valor de la velocidad inicial v_0 hará que la partícula abandone la superficie?

3.64. Las huellas dejadas por las cuatro ruedas de un automóvil sobre una carretera horizontal, al ser medidas por un oficial de policía resultan ser de 22 metros de longitud. El conductor del automóvil asegura que no se excedió de la velocidad límite de 75 km/h antes de aplicar los frenos. Además, el conductor soltó los frenos antes de detenerse y observó que continuaba a la velocidad de 30 km/h después de dejar las marcas. De la experiencia de las condiciones que prevalecen sobre una carretera, se sabe que el coeficiente de rozamiento cinético cuando menos es de 0.8. Si el policía estuviera familiarizado con las leyes de la mecánica, ¿llegaría a la conclusión de que el conductor era culpable por exceso de velocidad?

3.65. Un peso de 15 kg comprime estáticamente un resorte 0.75 cm. Después se coloca sobre el resorte un peso de 40 kg y se mantiene en reposo con una deflexión de 12 cm. Determinar la altura sobre el resorte a que llegará el peso de 40 kg, si se suelta desde el reposo en esta posición.

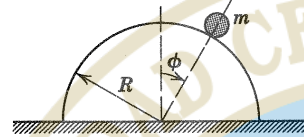


Fig. P-3.62

3.66. En la posición que se ve, el bloque se pone en movimiento mediante la fuerza constante de 35 kg. Determinar la velocidad del bloque después de que se ha desplazado 60 cm a partir del reposo. Originalmente el resorte estaba comprimido 30 cm de su longitud. Se supone que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es 0.1, $k = 1.6 \text{ kg/m}$ y el bloque pesa 100 kg.

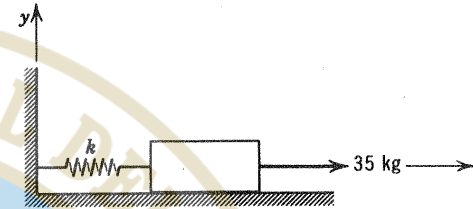


Fig. P-3.66

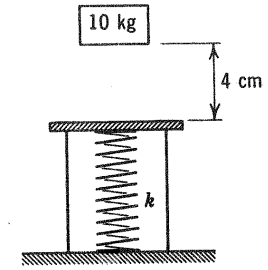


Fig. P-3.67

3.67. El resorte de módulo $k = 2 \text{ kg/cm}$ está comprimido por la placa, de manera que la fuerza en el resorte es de 4 kg. El peso de 10 kg se deja caer desde una altura de 4 cm por encima de la placa.

- Determinar la fuerza en el resorte cuando la velocidad es máxima.
- Determinar la fuerza en el resorte cuando el desplazamiento es máximo.

3.68. Un resorte tiene una masa total m , una constante k y una longitud l cuando estando sobre un plano con su eje horizontal se suspende por un extremo. ¿Cuál es la deflexión estática δ_{es} y la energía potencial almacenada en el resorte? Se supone que las espiras son uniformes; esto es, si el resorte se comprime una cantidad δ , el desplazamiento de un punto a una distancia x del extremo fijo del resorte será $(x/l)\delta$.

3.69. Un cuerpo que pesa 4900 kg se arrastra a lo largo de un plano horizontal por una fuerza P , que varía uniformemente en la forma que se muestra. Todas las fuerzas resistivas están representadas por F , que también varía uniformemente. Si la velocidad inicial del cuerpo es de 1.57 m/seg, determinar la velocidad máxima del cuerpo durante un desplazamiento de 200 m y la potencia desarrollada por el cuerpo en el punto de máxima velocidad.

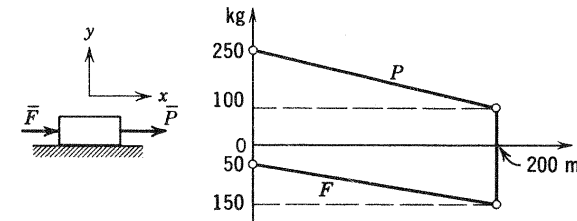


Fig. P-3.69

3.70. En un juego de canicas sobre una superficie plana $ABCD$ que forma con la horizontal el ángulo que se indica, debe lanzarse una canica desde A de manera que pase por una abertura F de una pared y pegar en un punto H a fin de hacer un blanco perfecto. Hallar la dirección y la velocidad de la canica en el punto A . Hallar la compresión necesaria en el resorte si la constante de éste es igual a 12.5 kg/cm y la canica pesa 20 g . (El rozamiento a la rodadura se desprecia. $\text{Sen } \alpha = 0.518$).

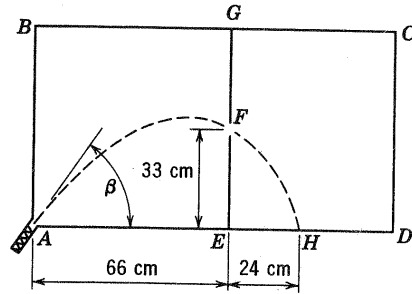


Fig. P-3.70

3.71. El paquete de 98 kg choca con el resorte con una velocidad de 8 m/seg . Si la compresión inicial del resorte es de 10 cm , ¿cuánto más se comprimirá el resorte?

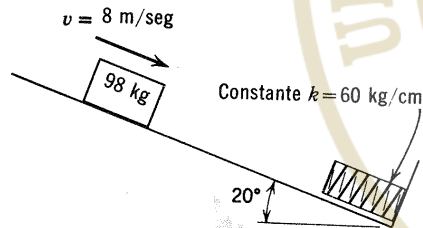


Fig. P-3.71

3.72. Dos cuentas se deslizan sobre los alambres lisos CD y DE . Si el sistema está en reposo en la posición que se ve, determinar la velocidad de A cuando llega a D . El peso de A es 1.61 kg y el de B 5 kg ; el resorte tiene un módulo de 1 kg/m y una longitud de 14 cm cuando no está alargado. La longitud de la barra delgada AB es 30 cm y puede despreciarse su peso.

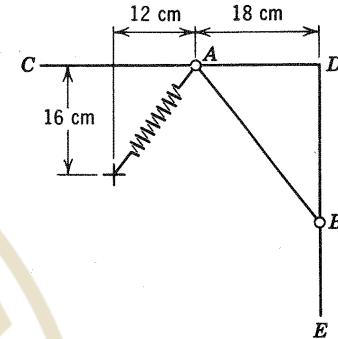


Fig. P-3.72

3.73. Una esfera de 1 kg , de peso específico 0.3 , se deja caer de una altura de 20 m hasta un depósito que contiene agua. Se supone que no hay pérdidas debido al choque o al rozamiento del fluido; determinar la máxima profundidad que alcanza la esfera.

3.74. Un palo de 3 m que pesa 1 kg y tiene peso específico de 0.3 , se sostiene con su extremo inferior situado a una altura de 18 m sobre un depósito que contiene agua. Hallar la máxima profundidad alcanzada por el extremo inferior del palo cuando se deja caer desde el reposo. Se supone que no hay pérdidas debidas al rozamiento o al choque y que el palo siempre permanece vertical.

3.75. Se diseña un plano inclinado de acero para transportar cajas hasta una plataforma de embarque desde una superficie horizontal situada a 5 m de altura. Se da a las cajas una velocidad inicial de 1 m/seg hacia abajo del plano. Las cajas deben deslizarse en el plano y después, a lo largo de la plataforma de embarque horizontal, se deben desplazar una distancia de 5 m hasta el sitio en que se detienen. Si el coeficiente de rozamiento a lo largo del plano y de la plataforma es 0.30 , ¿a qué ángulo con la horizontal se debe instalar el plano?

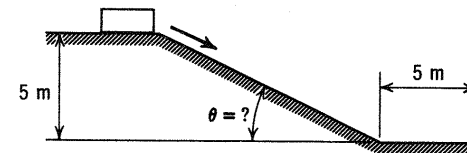


Fig. P-3.75

3.76. Un bloque de peso W desliza hacia abajo de un plano inclinado a un ángulo α con una velocidad inicial v_0 y recorre una distancia s antes de llegar al reposo. Determinar el coeficiente de rozamiento suponiendo que es constante durante el tiempo que el bloque está en movimiento.

3.77. El bloque de 30.6 kg desliza desde el reposo hacia abajo del plano inclinado y después sobre el plano horizontal hasta ser detenido por el resorte. Si el resorte es comprimido 30.5 cm por el bloque, determinar el módulo del resorte. El coeficiente de rozamiento para ambas superficies es $\mu = 0.2$.

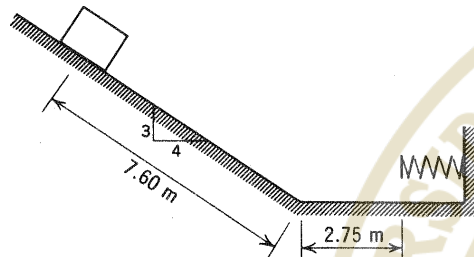


Fig. P-3.77

3.78. Un automóvil de peso W empieza a moverse a una altura h_0 sobre un plano inclinado, al llegar a un segundo plano regresa al primero y se repite el movimiento. Si la resistencia a la rodadura se toma constante e igual a $0.1W$, hallar la expresión para la altura h del punto más alto en que estará en reposo el automóvil, después de haber pasado por el punto inferior n veces. Expresar la respuesta en términos de n , h_0 y las constantes del problema.

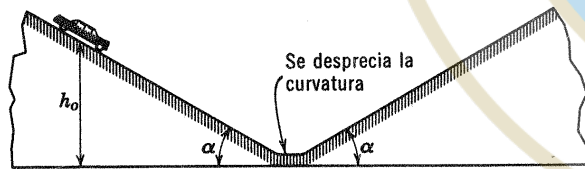


Fig. P-3.78

3.79. Una pequeña bala de masa m y dimensiones despreciables se dispara con un rifle en una dirección normal a una tabla. La bala sale del rifle con una velocidad inicial de 800 m/seg, choca en la tabla y la atraviesa en 2×10^{-4} seg. Si la bala sale de la tabla con una velocidad de 732 m/seg, determinar el espesor de la tabla. Se supone que la fuerza de oposición a la penetración es constante.

3.80. El bloque de 4.9 kg, desliza a lo largo del plano horizontal, debido a la fuerza horizontal P , la fuerza varía con el tiempo de acuerdo con la gráfica. El coeficiente de rozamiento cinético μ_k es igual a $1/3.22$. Determinar la velocidad en $t = 8.0$ seg si $v_x = 5$ m/seg en $t = 0$.

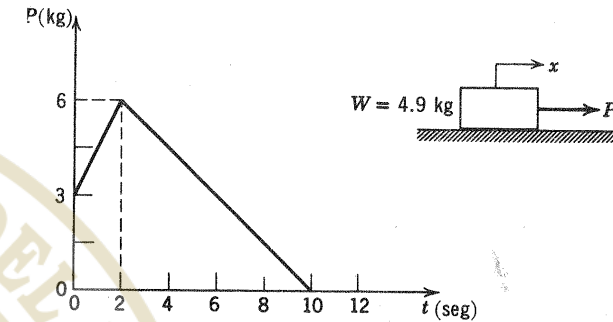


Fig. P-3.80

3.81. Un hombre de 75 kg está sentado en una canoa de 40 kg y dispara una bala de rifle de 50 g horizontalmente y en dirección de la proa de la canoa. Despreciando el rozamiento del agua, hallar la velocidad v con que se moverá la canoa si la velocidad de la bala al salir del rifle es de 800 m/seg.

3.82. Se dispara una bala de 60 g al centro de los tres bloques y los mueve a la misma velocidad. Hallar la velocidad suponiendo que cada bloque pesa 60 g y la velocidad de la bala antes del choque es de 700 m/seg. Despréciese el rozamiento de la superficie donde se hallan.

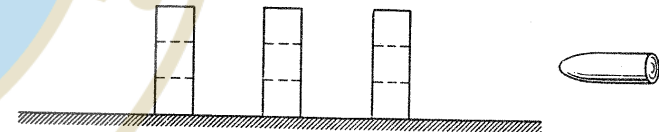


Fig. P-3.82

3.83. Una bala de 28 g se mueve a 1600 km/h, choca contra un bloque de madera y penetra en él 15 cm. El bloque de madera pesa 4.6 kg. ¿Con qué rapidez se moverá el bloque inmediatamente después que la bala ha alcanzado la penetración máxima en él? Despréciese el rozamiento de la superficie horizontal sobre la que está situado el bloque.

3.84. Se dispara una bala con una velocidad de 350 m/seg y penetra en un bloque de roble hasta una profundidad de 30 cm. Si la bala se hubiera disparado contra una tabla de la misma madera de 5 cm de espesor, hallar su velocidad después de atravesar la tabla. Se supone que la resistencia de la madera a la penetración es constante. Durante el movimiento la bala sigue una trayectoria horizontal.

3.85. Al penetrar en un obstáculo de madera una bala tropieza con fuerzas de oposición como las que se ven en la gráfica. Determinar la velocidad de la bala al salir de la madera.

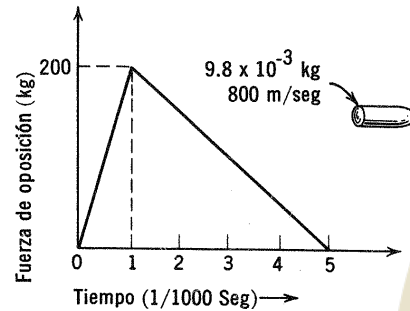


Fig. P-3.85

3.86. Una partícula de 200 kg se mueve en la dirección positiva x con una velocidad de 25 m/seg. Se aplica a la partícula una fuerza F_x dada por la gráfica. Determinar:

- La velocidad después de 4 seg.
- La velocidad después de 9 seg.

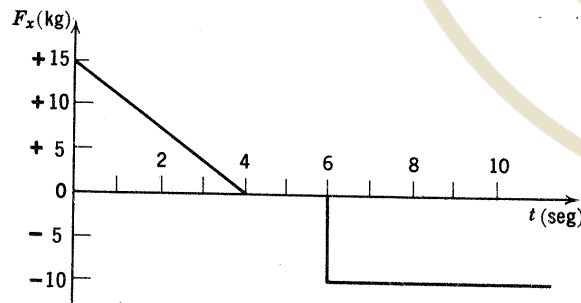


Fig. P-3.86

3.87. Un bloque de 98 kg se somete a la acción de una fuerza P constante de 60 kg. El valor de la fuerza de rozamiento al deslizamiento, como se puede ver, es una función de tiempo. Determinar la velocidad del bloque 3 seg después de haberse aplicado la fuerza P .

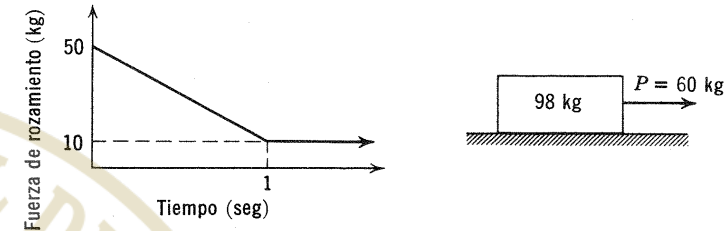


Fig. P-3.87

3.88. El bloque de 10 kg que se ve sobre el plano inclinado liso de 30° , se mueve con una velocidad inicial de 19.6 m/seg a lo largo del eje x . Una fuerza F , que varía con el tiempo como se indica en (a), se aplica al bloque paralelamente al plano y al eje y . Determinar la velocidad del bloque 8 seg después de haberse aplicado la fuerza F .

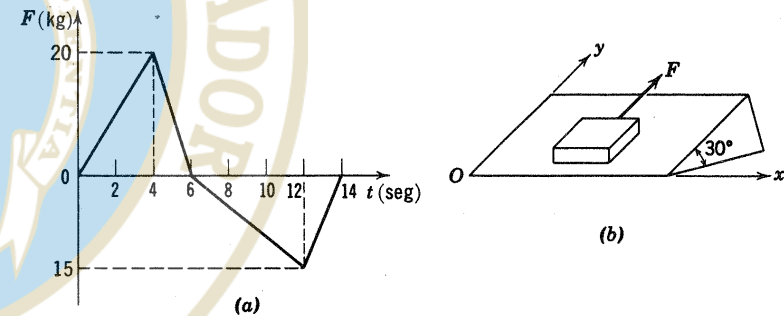


Fig. P-3.88

3.89. Una sección horizontal de una banda de transmisión se mueve a 10 m/seg. Una caja se baja hasta la banda. En el instante de contacto con la banda la velocidad de la caja es cero. El coeficiente de rozamiento es 0.25. La velocidad de la banda no cambia. ¿Qué distancia recorrerá la caja, relativa a la banda, antes de detenerse en su deslizamiento?

3.90. Una cadena de longitud l y peso μ kg por unidad de longitud descansa sobre un plano horizontal liso. Una parte a de la cadena está extendida como se muestra y se apoya en un eslabón. Una fuerza $F(t)$ actúa en un extremo de la cadena. Si la velocidad del eslabón D es $v = 3t^3$, hallar:

- El impulso ejercido sobre la cadena.
- El trabajo efectuado por $F(t)$, suponiendo que no hay pérdida de energía, para poner en movimiento todos los eslabones de la cadena.

En $t = 0$ la cadena está en la posición que se muestra.

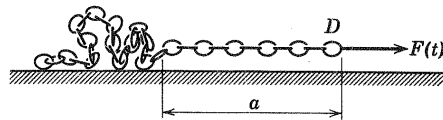


Fig. P-3.90

3.91. Dibujar los diagramas de aceleración-tiempo, velocidad-tiempo y desplazamiento-tiempo para los 2 primeros segundos del movimiento del bloque A . La velocidad inicial de A es de 5 m/seg hacia la derecha.

3.92. Un cañón de 4 kg montado contra un resorte como se muestra, dispara una bala de 30 g con una velocidad de 500 m/seg. El retroceso del cañón hace que el resorte se comprima 8 cm.

- ¿Cuál es el módulo del resorte?
- ¿Después del choque tendrá el cañón tanta energía como la bala?
- ¿Qué tiempo le tomará al resorte comprimirse?

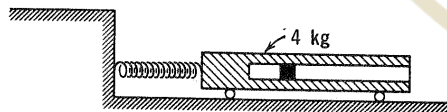


Fig. P-3.92

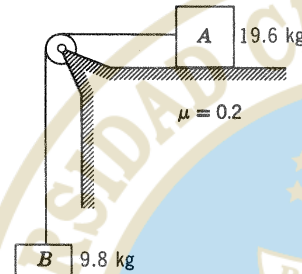


Fig. P-3.91

3.93. Los bloques A y B originalmente se sostienen en reposo sobre el plano de 30° que se muestra. El coeficiente de rozamiento al deslizamiento en la base del bloque B es 0.4 y en la base del bloque A es 0.2. El bloque B se suelta desde el reposo y 1 seg más tarde se suelta A . Si A alcanza a B cuando éste se ha movido durante 6 seg, ¿qué distancia separaba los bloques originalmente? El bloque B pesa el doble del bloque A .

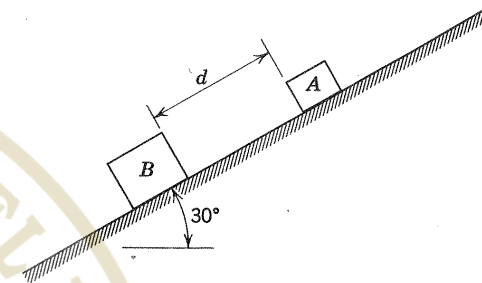


Fig. P-3.93

3.94. Dos masas m_1 y m_2 descansan sobre una superficie horizontal lisa y están unidas mediante un resorte de constante k . Las masas están obligadas a moverse a lo largo del eje x . Si se mueven las masas hasta que el resorte se comprima una longitud δ y después se sueltan desde el reposo, hallar la velocidad de m_1 cuando el resorte está en su longitud normal. ¿Cuál es el alargamiento máximo del resorte?

3.95. Una pelota de hockey se desliza sobre el hielo y choca contra uno de los costados de la pista con una velocidad de 30 m/seg y a un ángulo de 60° , rebotando a un ángulo de 30° respecto del costado. Determinar el coeficiente de restitución.

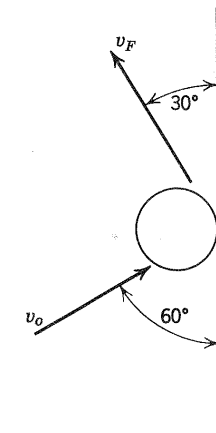


Fig. P-3.95

3.96. Dos bolas tienen inicialmente las velocidades que se muestran. Hallar sus velocidades después del choque si e es igual a 0.5.

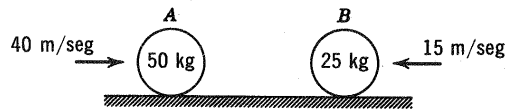


Fig. P-3.96

3.97. Un bloque de 19.6 kg tiene una energía cinética de 256 kg-m y choca con un bloque de 9.8 kg que está en reposo. Si el coeficiente de restitución es $1/2$, determinar la pérdida total de energía cinética durante el choque.

3.98. Una pequeña bola de acero se deja caer desde el reposo desde una altura inicial h_0 sobre una placa de acero, produciéndose una serie de n rebotes. Hallar la altura máxima a que llegará la pelota después de chocar con la placa n veces. El coeficiente de restitución es e .

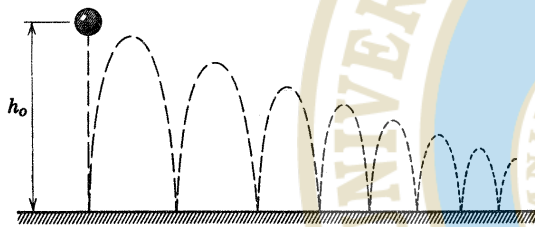


Fig. P-3.98

3.99. Dos masas tienen un choque central directo con las velocidades que se muestran. Si el coeficiente de restitución es e , hallar la velocidad común de las partículas durante el choque:

- En términos de las velocidades iniciales.
- En términos de los velocidades finales.



Fig. P-3.99

3.100. Una bala de 161 g que se mueve a 800 m/seg choca con un bloque de 16.1 kg introduciéndose en él. Si el bloque se desliza sobre un plano horizontal liso con una velocidad de 16 m/seg después del impacto, con la dirección que se muestra, determinar la velocidad v del bloque justamente antes del choque. También determinar el cambio en la energía cinética del sistema.

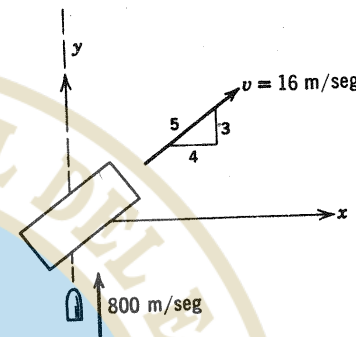


Fig. P-3.100

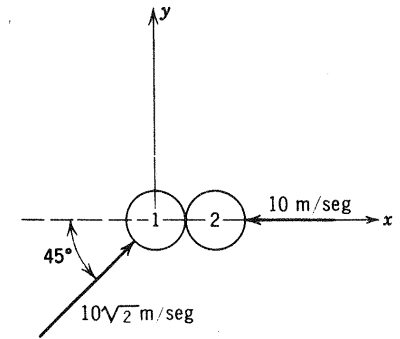


Fig. P-3.101

3.101. Dos bolas de billar de pesos y diámetros iguales se mueven en las direcciones y con las velocidades que se indican. Si e es 0.9, hallar las velocidades de las bolas después del choque.

3.102. El bloque A se mueve horizontalmente a lo largo del eje y con una velocidad v_A y choca con el bloque B adhiriéndose a éste. Inicialmente el bloque B se movía horizontalmente a lo largo del eje x con una velocidad v_B . Los dos bloques tienen la misma masa m . Determinar el porcentaje de pérdida de energía para este choque.

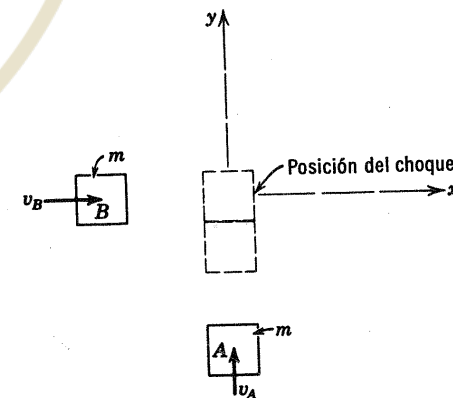


Fig. P-3.102

3.103. Un camión de pasajeros de 12,000 kg que viaja a 47 km/h choca de frente con un automóvil de 1650 kg que viaja en sentido opuesto a 62.6 km/h. A causa de la magnitud de la deformación producida, ambos vehículos se mueven juntos después del choque. Determinar la velocidad común y hallar la pérdida de energía cinética.

3.104. Calcular el porcentaje de pérdida de energía cinética que tiene lugar durante el choque central directo. $m_1 = m_2$; $\bar{v}_1 = -\bar{v}_2$. El coeficiente de restitución es e .

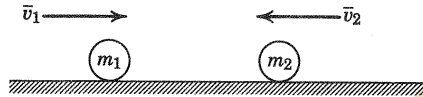


Fig. P-3.104

3.105. Una masa M , inicialmente en reposo, es golpeada por una masa m que se mueve con una rapidez u antes del choque. Si la línea de choque forma un ángulo α con el vector velocidad $\bar{u}$, hallar la velocidad $\bar{u}'$ de m después del choque. Tómese el eje x a lo largo de la línea de choque. El coeficiente de restitución es e . También hallar el ángulo entre la trayectoria de m y el eje x después del choque.

3.106. Una partícula de masa m choca con una partícula de masa desconocida. Ambas partículas tienen velocidad v_0 , pero en sentido contrario, antes del choque. Después del choque la masa desconocida queda en reposo. Si el choque es central directo y el coeficiente de restitución es e , hallar:

- La masa desconocida.
- La velocidad de la masa m después del choque.
- El porcentaje de pérdida de energía.

3.107. Tres bolas de mástique se mueven en la forma que se indica y al chocar en un punto continúan moviéndose como una sola. Hallar:

- La velocidad de la masa combinada inmediatamente después del choque.
- La pérdida de energía.

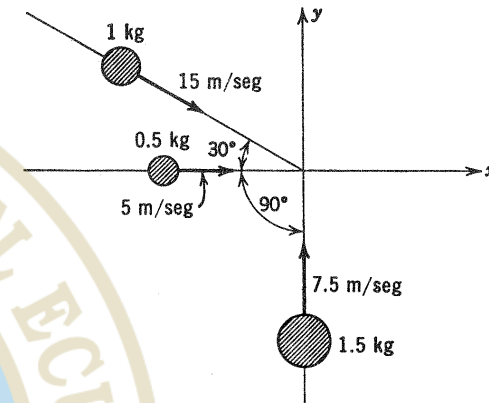


Fig. P-3.107

3.108. Como se muestra, dos esferas están suspendidas mediante cuerdas. Si la esfera A se suelta desde el reposo cuando $\theta_A = 90^\circ$, determinar:

- La velocidad de cada esfera inmediatamente después del choque.
- La máxima altura que alcanza la esfera B .

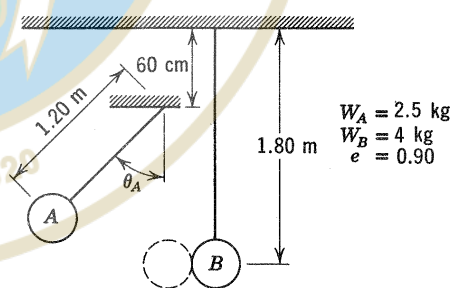


Fig. P-3.108

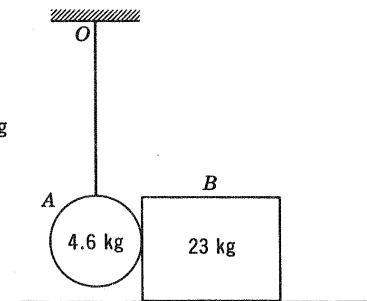


Fig. P-3.109

3.109. Un bloque de 23 kg descansa sobre un plano horizontal. La esfera de 4.6 kg se levanta a una altura de 2 m de su posición inferior y se suelta. El choque entre los cuerpos se produce cuando la cuerda que sostiene la esfera es vertical. Si el coeficiente de restitución entre la esfera y el bloque es 0.6 y el

coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0.2, determinar en que tiempo se detendrá el bloque después de la colisión. ¿Con qué dirección se moverá la esfera después del choque?

3.110. La caja B está llena de serrín y descansa sobre un plano liso. Una bala de rifle $M-1$ de 30 g choca contra la caja con una velocidad de 950 m/seg incrustándose en ella. Suponiendo que la bala haya alcanzado su máxima penetración en la caja antes de que ésta choque con el resorte, determinar la distancia que habrá de comprimirse el resorte para detener la caja. La caja pesa 5 kg. El resorte inicialmente no está comprimido y tiene un módulo de 70 kg/m.

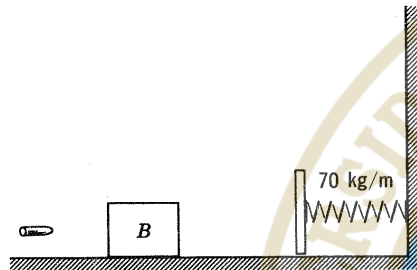


Fig. P-3.110

3.111. Una caja de 9.2 kg desliza horizontalmente a lo largo de una superficie lisa cuando un pedazo de plastilina de 5.6 kg cae sobre ella. Después del choque la combinación de masas choca contra un resorte de peso despreciable, comprimiéndolo 15 cm. Si el resorte inicialmente no estaba comprimido, hallar su constante.

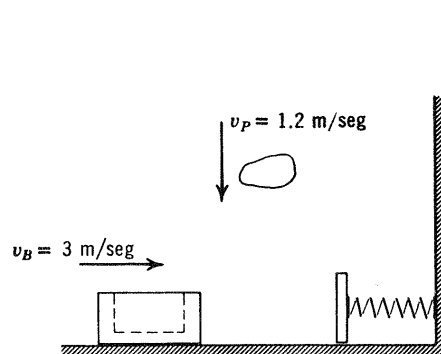


Fig. P-3.111

3.112. Dos esferas idénticas están suspendidas por cuerdas de diferente longitud. La esfera A se suelta desde la posición indicada por líneas punteadas y choca con B directa y centralmente. Se observa que la esfera B se desplaza un

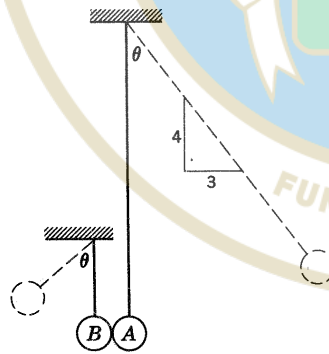


Fig. P-3.112

ángulo igual. Si la longitud de la cuerda de A es 12 m y la de la cuerda de B es 3 m, determinar el coeficiente de restitución para estas condiciones.

3.113. Los dos cuerpos A y B tienen masas iguales. El bloque A se mueve durante 4 seg antes de alcanzar la superficie lisa que se muestra. Después de que A alcanza la superficie lisa, se produce con B un choque central directo. El coeficiente de restitución para los dos cuerpos es 0.20 y el coeficiente de rozamiento cinético entre A y el plano áspero es 0.20. Determinar la velocidad de cada cuerpo después del impacto.

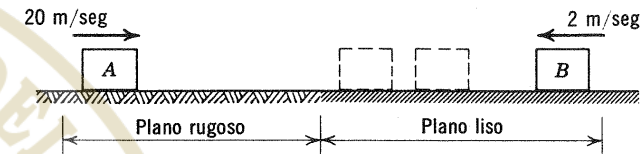


Fig. P-3.113

3.114. Un conjunto de n partículas, cada una de masa m , como se puede ver, están alineadas a lo largo de un plano liso. Una masa idéntica m se lanza hacia la primera partícula con una velocidad v . Si el coeficiente de restitución para cada choque es e . Hallar el número n tal que la velocidad de la n -ésima masa sea λv ($0 < \lambda < 1$).

Si una simple partícula de masa nm es golpeada por la masa m , resolver el problema anterior para n y comparar los resultados.

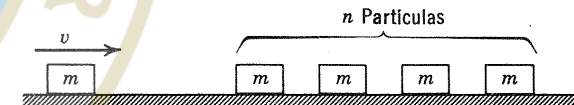


Fig. P-3.114

3.115. Al bloque mayor de 23 kg, se le imprime una velocidad inicial de 6 m/seg en un punto situado a 3 m del bloque más pequeño, chocando finalmente con éste que tiene un peso de 9.2 kg. Determinar la distancia que recorrerá el bloque pequeño hasta detenerse. Se supone que el coeficiente de rozamiento es 0.1 y el coeficiente de restitución es 0.9.



Fig. P-3.115

3.116. Un martillo de acero de peso W_1 , gira alrededor del punto O , cae y golpea el bloque de acero de peso W_2 , que está montado sobre ruedas lisas. El choque es perfectamente elástico. Sobre el bloque de acero está montada una pequeña viga en voladizo con un pequeño peso W_3 en su extremo libre. La constante de resorte para la flexión de W_3 relativa a W_2 es k . ¿Cuál es el valor máximo de x , que es el desplazamiento de W_3 relativo a W_2 , después del choque?

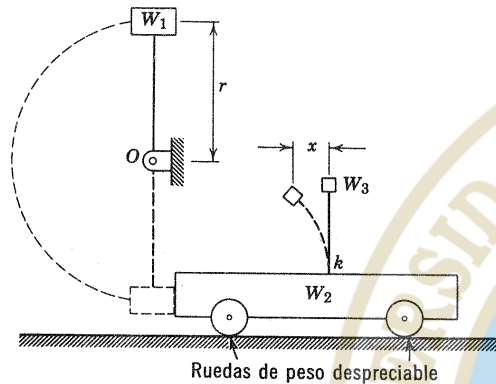


Fig. P-3.116

Dinámica de un sistema de partículas

4.1 Introducción. Hasta ahora se ha estudiado el movimiento de las partículas individuales definidas como *masas puntuales*. Por supuesto, tales partículas realmente no existen, aunque el concepto es conveniente y se aproxima bastante a ciertos casos físicos. Tales casos son aquellos donde las dimensiones del cuerpo son pequeñas comparadas con la geometría de la trayectoria del movimiento y donde la forma y/o la orientación del cuerpo no dan lugar a fuerzas importantes o variaciones de fuerza. Como ejemplos de tales partículas en movimiento se puede mencionar un satélite que gira alrededor de la Tierra o el movimiento de un electrón en un campo de fuerza.

Por otra parte, existen muchos problemas de dinámica que no pueden ser satisfactoriamente planteados por un modelo matemático basado en una masa puntual. Dichos problemas exigen el análisis de un sistema de tales partículas, ya sea rígidamente ligadas entre sí — llamado cuerpo rígido — o en libertad de moverse unas con respecto a otras — llamado cuerpo deformable. Ejemplos de problemas de cuerpos rígidos son aquellos donde la deformación producida sobre cualquier sustancia real por un sistema de fuerzas, tiene una influencia despreciable sobre el movimiento que se estudia, como en el caso de la trayectoria, en el aire, de un cohete rígido o el movimiento de un volante montado sobre un eje. Ejemplos de cuerpos deformables dinámicos se hallan en el análisis del movimiento de flúidos y en cuerpos elásticos vibrantes.

El “modelo” apropiado que se elige para el análisis de un problema en particular depende de los resultados que se desean. Por ejemplo, si deseamos analizar la trayectoria de un cohete y solamente necesitamos resultados aproximados, supondremos el modelo más simple: una partícula. Si deseamos determinar una predicción más exacta de la trayectoria del mismo cohete, supondremos el siguiente modelo más complejo: un cuerpo rígido. Sin embargo, si estamos intentando obtener una precisión

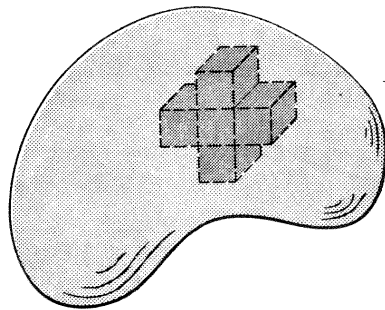


Fig. 4.1

real en nuestras predicciones del movimiento y el cohete está sujeto a pequeñas variaciones, pero medibles, entonces podríamos intentar tomar en consideración la deformación del cohete bajo las fuerzas que actúan y la influencia de esta deformación sobre el movimiento resultante.

Debido a que las dos últimas categorías implican un sistema de partículas, primero discutiremos la dinámica de dichos sistemas desde un punto de vista más general y después discutiremos en detalle la *dinámica del cuerpo rígido*. En este texto, no se hará una discusión detallada de la mecánica de los cuerpos deformables, en donde intervienen cuerpos elásticos y plásticos, así como flúidos.

¿Qué es un sistema de partículas? Un sistema de partículas es un grupo arbitrario de entidades submicroscópicas más o menos discretas, tales como las moléculas que integran un pedazo de materia, o bien se puede ver como un grupo de masas puntuales macroscópicas, pero pequeñas (siendo cada una lo suficientemente grande para contener muchos millones de moléculas), que se combinan para formar lo que el ingeniero observa como una distribución *continua* de materia. Ejemplo de este último concepto, es un pedazo de metal, que escogemos para dividirlo en las partículas que se muestran en la figura 4.1. Debe admitirse que la estructura real del metal finalmente se descompondría en moléculas y átomos. No obstante, el análisis dinámico del movimiento de ese pedazo de metal, cuando está sometido a la acción de fuerzas, no toma en cuenta la estructura atómica ni el movimiento atómico y se puede concebir el metal como materia continua que arbitrariamente se subdivide en partículas de cualquier forma conveniente (ver la figura 4.1).

4.2 Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas. Consideremos un sistema de n partículas dentro de una región o envoltura A . Una sola partícula de este grupo, designada partícula i , tiene una masa

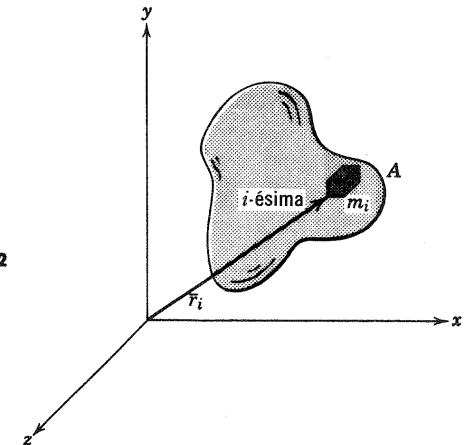


Fig. 4.2

m_i y se localiza por su vector de posición $\vec{r}_i$. Entonces la velocidad y aceleración de la partícula son $\dot{\vec{r}}_i$ y $\ddot{\vec{r}}_i$.

Las fuerzas que actúan sobre la i -ésima partícula pueden incluir algunas o todas las siguientes:

1. Fuerzas externas:

- Fuerzas debidas a campos gravitacionales externos de la Tierra o cualquier otro cuerpo de masa relativamente muy grande.
- Fuerzas debidas a campos eléctricos externos (si la partícula está cargada).
- Fuerzas debidas a campos magnéticos externos (si la partícula pertenece a un grupo sensible a las fuerzas magnéticas).
- Fuerzas debidas a dispositivos productores de fuerzas externas tales como resortes, palancas, choques de masas, superficies con rozamiento, dispositivos que producen arrastres, esfuerzos humanos, etc.
- Fuerzas entre partículas debidas a la interacción mutua de la i -ésima partícula con otras partículas *exteriores* al volumen A .

2. Fuerzas internas:

- Fuerzas entre partículas debidas a la interacción mutua de la i -ésima partícula con otras partículas *interiores* en el volumen A .

Debido a que es importante conservar separadas las dos categorías de fuerza citadas, adoptaremos la siguiente notación:

$\bar{F}_{ii}$ = fuerzas externas, $\bar{F}_{ij}$ = fuerzas internas.

De acuerdo con el tercer axioma de Newton la fuerza $\bar{F}_{ij}$ que ejerce la partícula m_j sobre la partícula m_i es igual y opuesta a la fuerza $\bar{F}_{ji}$ que ejerce m_i sobre m_j . Esto se puede expresar por la ecuación

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0. \quad (4.1)$$

Para un sistema de tres partículas, existirá un sistema de fuerzas internas atractivas como el que se muestra en la figura 4.3.

Ahora se puede escribir la ecuación de movimiento para la i -ésima partícula

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \bar{F}_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.2)$$

La fuerza externa resultante que actúa sobre m_i está dada cuando j es igual a i . Los términos restantes de la suma son las fuerzas internas que actúan sobre m_i .

Sumando las ecuaciones de la forma 4.2 para las n partículas contenidas en el volumen A , el resultado es

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i,j} \bar{F}_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.3)$$

y que representa una suma de las n ecuaciones de movimiento.

Las fuerzas internas aparecen en parejas iguales y opuestas en la doble suma del segundo miembro de la ecuación 4.3 y por la ecuación 4.1 se anulan entre sí quedando solamente las fuerzas externas. La ecuación 4.3 llega a ser

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \bar{F}_{ii}. \quad (4.4)$$

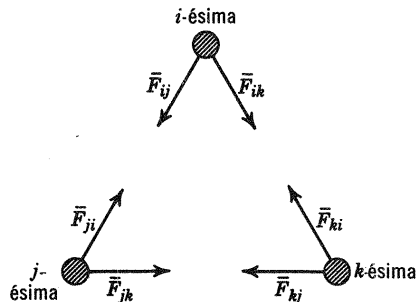


Fig. 4.3

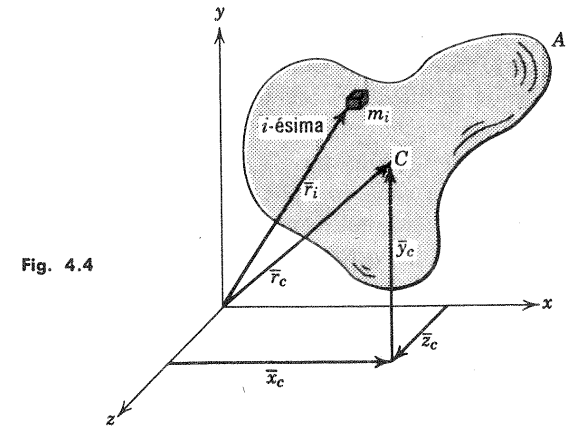


Fig. 4.4

Consideremos ahora el centro de masa de este grupo de n partículas. El radio vector $\bar{r}_c$ que define el centro de masa C está dado por

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} \quad (4.5)$$

Ahora, si cada una de las masas m_i se supone constante con respecto al tiempo y se deriva dos veces la ecuación 4.5, tenemos

$$\ddot{\bar{r}}_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \quad (4.6)$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema. Cuando se sustituye en la ecuación 4.4 y $\sum_i \bar{F}_{ii}$ se hace igual a $\bar{F}$, el resultado es

$$M \ddot{\bar{r}}_c = \bar{F} \quad (4.7)$$

La ecuación 4.7 constituye el principio del movimiento del centro de masa y es una relación importante en la mecánica. La ecuación 4.7 establece que el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si toda la masa de las partículas estuviera concentrada en el centro de gravedad como una sola partícula, y bajo la acción de la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Por supuesto esta afirmación es cierta si las partículas están rígidamente ligadas (como

en un cuerpo rígido) o se mueve una con relación a otra (como en un fluido) o bien se trata de un grupo de partículas finitas discretas.

Por lo tanto, el movimiento de traslación del *centro de masa* de un sistema de partículas se determina por los mismos métodos que se han discutido previamente para el movimiento de una partícula. Debe recalarse que el movimiento del centro de masa es independiente de los puntos de aplicación de las fuerzas externas. Como más adelante se verá, los movimientos de rotación quedarán influidos por los puntos de aplicación de las fuerzas externas. En general, no debe suponerse que la $\bar{F}$ de la ecuación 4.7 pasa por el centro de masa.

En el caso de una distribución continua de materia de densidad de volumen ρ , m_i se sustituye por $\rho d\tau$, donde $d\tau$ es el elemento de volumen. Haciendo $\sum_i m_i$ o $\int_A \rho d\tau$ igual a M , la ecuación 4.5 se puede escribir

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \int_A \rho \bar{r}_i d\tau. \quad (4.8)$$

De la ecuación 4.8, las coordenadas del centro de masa son

$$x_c = \frac{1}{M} \int_A \rho x_i d\tau, \quad y_c = \frac{1}{M} \int_A \rho y_i d\tau, \quad z_c = \frac{1}{M} \int_A \rho z_i d\tau. \quad (4.9)$$

Consideremos ahora un sistema de partículas que es una colección de varios subsistemas y supongamos que M_j es la masa total y $\bar{R}_j$ es el centro de masa del subsistema de partículas $m_{1j}, m_{2j}, \dots$ situadas en $\bar{r}_{1j}, \bar{r}_{2j}, \dots$ respectivamente. El vector de posición $\bar{r}_c$ del centro de masa está dado por

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i,j} m_{ij} \bar{r}_{ij} = \frac{1}{M} \sum_j \left\{ \sum_i m_{ij} \bar{r}_{ij} \right\} = \frac{1}{M} \sum_j M_j \bar{R}_j. \quad (4.10)$$

Consecuentemente, cuando se quiere determinar la posición del centro de masa de cualquier sistema, es permisible sustituir cualquier subsistema por una sola partícula cuya masa es la masa total del subsistema y está situada en el centro de masa de dicho subsistema.

4.3 Cantidad de movimiento lineal e impulso de un sistema de partículas. Aunque muchos problemas de la dinámica lineal de los sistemas de partículas se resuelven por medio de la ecuación 4.7, es útil formular la ecuación lineal de movimiento en términos de la cantidad de movimiento lineal del grupo de partículas. Regresaremos a la figura 4.3 y a la ecuación 4.4, si admitimos que en la suma de fuerzas solamente existen fuerzas externas, podemos escribir lo siguiente:

$$\sum_i m_i \ddot{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \bar{v}_i = \bar{F},$$

donde $\bar{v}_i = \dot{r}_i$ es la velocidad de la partícula i . El producto ($\bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$) se define como la cantidad de movimiento lineal de la partícula i .

La suma para las n partículas en el volumen A ($\sum_i m_i \bar{v}_i$) se define como la *cantidad de movimiento lineal* ($\bar{p}$) del sistema de partículas contenidas en A . La ecuación de movimiento para cualquier sistema de partículas, se puede escribir

$$\boxed{\bar{F} = \dot{\bar{p}}}. \quad (4.11)$$

Por lo tanto, la fuerza resultante $\bar{F}$ que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la razón de variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal del grupo, ya sea que las partículas estén rígidamente ligadas como en un cuerpo rígido o estén en movimiento relativo una a otra.

Si no actúa ninguna fuerza externa, la ecuación 4.11 establece que la cantidad de movimiento lineal total del sistema de partículas permanece constante. Este es un enunciado de la *ley de la conservación de la cantidad de movimiento lineal*.

Si la ecuación 4.11 se multiplica por dt y se integra en un cierto intervalo de tiempo, el resultado es

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \int_{\bar{p}_1}^{\bar{p}_2} d\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = \Delta \bar{p}. \quad (4.12)$$

De la ecuación 4.12 se ve que el cambio en la cantidad de movimiento de un sistema de partículas que se produce en un cierto intervalo de tiempo, es igual al impulso de las fuerzas externas que actúan.

La forma de la ecuación lineal de movimiento dada en la ecuación 4.12 es particularmente útil para problemas donde intervienen fluidos y el movimiento del centro de masa es de poco interés.

Ejemplo 4.1. Un sistema de tres partículas está ligado mediante barras de peso despreciable, según se ve en la figura 4.5. Si el sistema está inicialmente en reposo en el plano horizontal xy , determinar la aceleración de la partícula hacia la derecha bajo la acción de una fuerza constante $\bar{F} = F\bar{i}$.

Antes que pueda hallarse la aceleración de la partícula hacia la derecha, es necesario hallar la aceleración del centro de masa. Esta está dada por

$$M\ddot{r}_c = \bar{F},$$

$$3m\ddot{r}_c = F\bar{i},$$

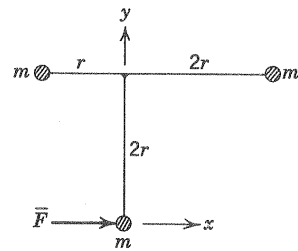


Fig. 4.5

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \frac{F}{3m} \mathbf{i}.$$

El punto del sistema que tiene la aceleración $(F/3m)\mathbf{i}$ está dado por

$$\bar{\mathbf{r}}_c = \frac{\sum_i m_i \bar{\mathbf{r}}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m(-r\mathbf{i} + 2r\mathbf{j}) + m(2r\mathbf{i} + 2r\mathbf{j})}{3m} = \frac{r}{3}\mathbf{i} + \frac{4}{3}r\mathbf{j}.$$

Utilizando la ecuación lineal de movimiento estamos en posibilidad de determinar la aceleración de un punto del sistema que es el centro de masa y tiene por coordenadas $(r/3, 4r/3)$. Si se hubiera aplicado F en el centro de masa el problema podría resolverse completamente. Esto es, el sistema tendría movimiento de traslación y el movimiento de cualquier punto sería el mismo.

Sin embargo, en este sistema también existe un movimiento de rotación y para completar la solución es necesaria una discusión adicional del movimiento de un sistema de partículas.

Ejemplo 4.2. Consideremos una hoja fija y lisa que desvía un chorro de agua. Si la cantidad de agua que fluye por unidad de tiempo es constante, determinar la reacción del chorro sobre la hoja. El chorro tiene una velocidad $\bar{v}$, la área de la sección transversal es A y la densidad ρ . Ver figura 4.6.

Puesto que el flujo es permanente, las fuerzas sobre el fluido serán constantes y la ecuación 4.12 se puede escribir

$$\Delta \bar{p} = \bar{F} \Delta t.$$

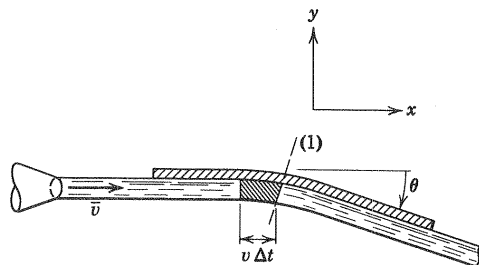


Fig. 4.6

Durante cada intervalo de tiempo Δt pasa una masa de fluido $(\rho A v) \Delta t$ por el punto de transición (1) donde ocurre un cambio en la cantidad de movimiento de las partículas del fluido. Para esta masa la ecuación de impulso y cantidad de movimiento es

$$\rho A v \Delta t [(v \cos \theta \mathbf{i} - v \sin \theta \mathbf{j}) - v \mathbf{i}] = \bar{F} \Delta t.$$

Las ecuaciones escalares son

$$-\rho A v^2 (1 - \cos \theta) = F_x,$$

$$-\rho A v^2 \sin \theta = F_y.$$

Por supuesto las reacciones sobre la hoja son iguales y opuestas a las fuerzas que actúan sobre la corriente de fluido.

Resolveremos ahora este problema cuando a la hoja se le dé la velocidad

$$\bar{u} = u \mathbf{i}_0 \quad \text{donde} \quad u < v.$$

Para este problema es conveniente fijar un sistema de coordenadas en la hoja móvil. La expresión general para la velocidad de un elemento de fluido en contacto con la hoja es

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \bar{\omega} \times \bar{\rho} + \bar{v}.$$

que aquí toma la forma

$\dot{\mathbf{r}} = u \mathbf{i}_0 + (v - u) \bar{e}$ donde $\bar{e} = \mathbf{i}_0$ o bien $\cos \theta \mathbf{i}_0 - \sin \theta \mathbf{j}_0$ dependiendo del lado del punto de transición (1) en que se encuentre el elemento.

Nótese que solamente un elemento de longitud $(v - u) \Delta t$ pasa por el punto de transición en el tiempo Δt .

$$\Delta \bar{p} = \bar{F} \Delta t$$

y

$$\rho A (v - u) \Delta t \{ [u \mathbf{i}_0 + (v - u) (\cos \theta \mathbf{i}_0 - \sin \theta \mathbf{j}_0)] -$$

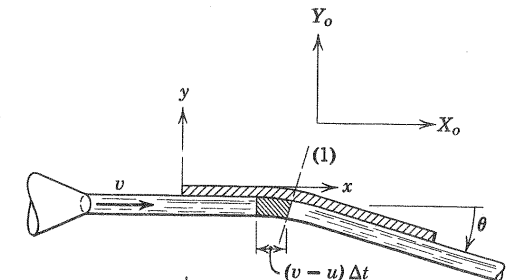
$$[u \mathbf{i}_0 + (v - u) \mathbf{i}_0] \} = \bar{F} \Delta t.$$

Las ecuaciones escalares son

$$-\rho A (v - u)^2 (1 - \cos \theta) = F_x$$

$$-\rho A (v - u)^2 \sin \theta = F_y.$$

Fig. 4.7



La potencia producida por la hoja es

$$P = \bar{F} \cdot \bar{u} = \rho A (v - u)^2 (1 - \cos \theta) u.$$

Para hallar la velocidad de la hoja que dará la máxima potencia, calculamos:

$$\frac{dP}{du} = \rho A (1 - \cos \theta) [(v - u)^2 + 2u(v - u)(-1)] = 0,$$

$$(v - u)^2 = 2u(v - u),$$

$$v - u = 2u,$$

o sea

$$u = \frac{v}{3}.$$

4.4 Movimiento de un sistema de masa variable. El segundo axioma de Newton, en la forma dada por la ecuación 3.1, se puede escribir

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}(\bar{p}) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \bar{v}_i \right) \quad (4.13)$$

Debido a que esta ecuación es cierta solamente cuando la masa es constante, una forma segura de atacar el problema de masa variable es mediante el uso de la ecuación 4.12.

Ejemplo 4.3. Hallar la ecuación de movimiento de un cohete en vuelo, suponiendo que los gases de la combustión salen por el escape del cohete con una velocidad fija $\bar{v}$, relativa al cohete.

El sistema que estamos considerando consiste de la masa M del cohete y el escape de los gases ΔM que son expulsados en el tiempo Δt . En cualquier

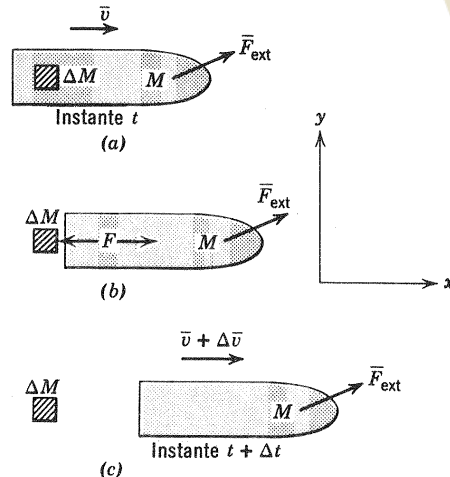


Fig. 4.8

instante t estos gases se mueven con el cohete. En el instante $t + \Delta t$ los gases son expulsados del cohete por la fuerza resultante F de la presión del gas que actúa tanto sobre el cohete como sobre los gases expelidos durante el intervalo de tiempo Δt . Esta secuencia se muestra en la figura 4.8.

La ecuación 4.12 se puede escribir

$$\bar{F} \Delta t = \bar{p}_{t+\Delta t} - \bar{p}_t$$

Para los gases expulsados esta ecuación es

$$-\bar{F} \Delta t = \Delta M (\bar{v} + \Delta \bar{v} + \bar{v}_j) - \Delta M \bar{v}$$

y para el cohete

$$(+\bar{F} + \bar{F}_{\text{ext}}) \Delta t = M(\bar{v} + \Delta \bar{v}) - M\bar{v}$$

Sumando estas dos ecuaciones, se tiene

$$\bar{F}_{\text{ext}} \Delta t = \Delta M \Delta \bar{v} + \Delta M \bar{v}_j + M \Delta \bar{v}.$$

Dividiendo entre Δt y haciendo que $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos

$$\bar{F}_{\text{ext}} = \frac{dM}{dt} \bar{v}_j + M \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

la ecuación escalar de movimiento es

$$F_{\text{ext}} + \frac{dM}{dt} v_j = M \frac{dv}{dt}, \quad (4.14)$$

donde F_{ext} es la fuerza resultante externa en la dirección del movimiento y $\bar{v}_j = -v_j \bar{i}$. El término $(dM/dt)v_j$ se llama empuje del cohete. Nótese que una dM/dt positiva representa una pérdida en la masa y una v_j positiva es opuesta a la dirección del movimiento.

Ejemplo 4.4. Una cadena de longitud L metros y peso μ metros por unidad de longitud está suspendida del extremo superior de manera que el extremo inferior apenas toca el piso. La cadena se suelta y los eslabones que llegan al piso no tienen interferencia con los eslabones que están en reposo. Hallar la

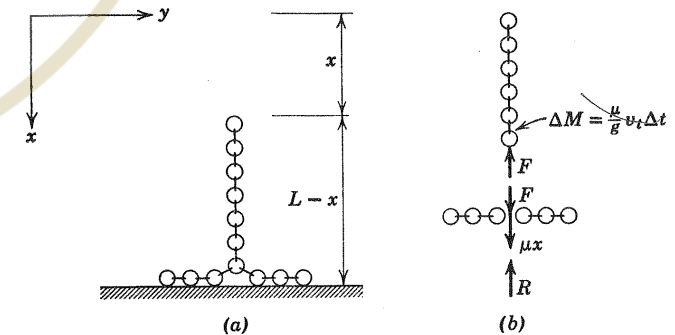


Fig. 4.9

fuerza que ejerce el piso sobre la cadena como una función de la distancia desde la que cae el extremo superior. Ver figura 4.9.

La ecuación 4.12 aplicada a ΔM es

$$F \Delta t = \Delta M [v_{t+\Delta t} - v_t].$$

F es la única fuerza sobre ΔM (Fig. 4.9b) ya que los eslabones de arriba no ejercen ninguna fuerza. La velocidad final de ΔM es cero y la velocidad inicial v_t es precisamente la velocidad de caída libre $\sqrt{2gx}$.

Puesto que $\Delta M = \frac{\mu}{g} v_t \Delta t$,

$$F = \frac{\mu}{g} v_t^2 = 2\mu x.$$

Entonces, de la figura 4.9b

$$R = \mu x + F = 3\mu x.$$

En el instante en que el último eslabón ha llegado al reposo el piso ejerce una fuerza sobre la cadena igual a tres veces el peso de ésta.

Ejemplo 4.5. Un aeroplano aterriza en un campo corto y se utiliza una cadena para reducir la distancia de aterrizaje. Si el aeroplano tiene un peso W y toca tierra con una velocidad v_0 , determinar el peso μ de cadena por unidad de longitud que se requiere para detener el aeroplano en una distancia s . También el aeroplano proporciona con sus frenos una fuerza constante P . Se supone que el aeroplano engancha con la cadena inmediatamente que toca tierra y que se desprecia todo rozamiento.

En un tiempo Δt se pone en movimiento la masa de cadena $(\mu/g)v\Delta t$. La fuerza necesaria para este cambio en la cantidad de movimiento es

$$F \Delta t = \frac{\mu}{g} v \Delta t [v - 0],$$

$$F = \frac{\mu v^2}{g}.$$

La ecuación de movimiento para el aeroplano en el instante en que una longitud x de la cadena se ha retirado de su posición original es

$$-P - F = \left(\frac{W + \mu x}{g} \right) \frac{dv}{dt},$$

$$-P - \frac{\mu \dot{x}^2}{g} = \frac{W + \mu x}{g} \ddot{x},$$

$$\left(\frac{W}{\mu} + x \right) \ddot{x} + \dot{x}^2 = -\frac{Pg}{\mu}.$$

Haciendo

$$z = \dot{x}^2, \quad \frac{dz}{dx} = 2\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = 2\ddot{x}.$$

Entonces

$$\left(\frac{W}{\mu} + x \right) \frac{1}{2} \frac{dz}{dx} + z = -\frac{Pg}{\mu},$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2z}{(W/\mu) + x} = \frac{-(2Pg/\mu)}{(W/\mu) + x},$$

$$\frac{d}{dx} \left[z \left(\frac{W}{\mu} + x \right)^2 \right] = -\frac{2Pg}{\mu} \left(\frac{W}{\mu} + x \right),$$

$$\dot{x}^2 \left(\frac{W}{\mu} + x \right)^2 = -\frac{2Pg}{\mu} \left[\frac{W}{\mu} x + \frac{x^2}{2} \right] + C$$

Cuando $x = 0$, $\dot{x} = v_0$; por lo tanto $C = v_0^2 (W/\mu)^2$. Así que

$$\dot{x}^2 \left(\frac{W}{\mu} + x \right)^2 = -\frac{2Pg}{\mu} \left[\frac{W}{\mu} x + \frac{x^2}{2} \right] + v_0^2 \left(\frac{W}{\mu} \right)^2.$$

Al final del aterrizaje $x = s$, $\dot{x} = 0$.

$$0 = -\frac{2Pg}{\mu} \left[\frac{W}{\mu} s + \frac{s^2}{2} \right] + v_0^2 \left(\frac{W}{\mu} \right)^2$$

$$0 = -2PgWs - Pgs^2\mu + v_0^2 W^2,$$

$$\mu = \frac{v_0^2 W^2}{Pgs^2} - \frac{2W}{s} \text{ kg/unidad de longitud}$$

Ejemplo 4.6. Un aro delgado de masa M y radio r rueda desde el reposo sin deslizar sobre un plano inclinado. Determinar la aceleración del centro de masa. Ver figura 4.10.

La ecuación del movimiento del centro de masa es

$$M\ddot{\mathbf{r}}_c = \bar{\mathbf{F}}.$$

Con ayuda del diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 4.10, las ecuaciones escalares de movimiento llegan a ser

$$M\ddot{y}_c = F_y = Mg \sin \alpha - F_f, \quad (a)$$

$$M\ddot{x}_c = F_x = N - Mg \cos \alpha = 0 \quad (\ddot{x}_c = 0).$$

o sea

$$N = Mg \cos \alpha. \quad (b)$$

Puesto que el aro rueda sin deslizamiento no existe relación entre N y F_f y la ecuación b no es de utilidad en este problema. La ecuación lineal a con-

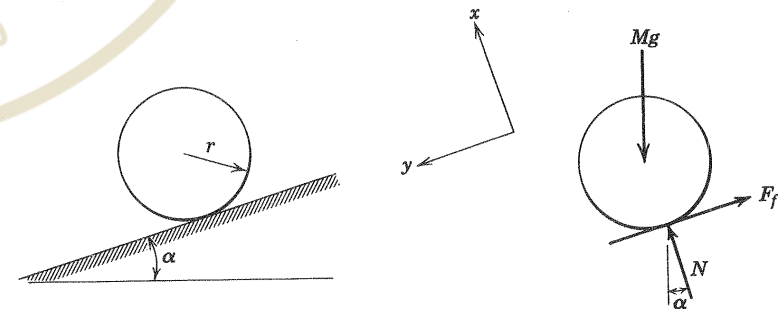


Fig. 4.10

tiene dos incógnitas y el problema no puede resolverse sin otra ecuación. Como puede observarse, este problema introduce un grado de libertad angular o de rotación y exige la consideración de las ecuaciones del movimiento angular.

Para el caso en que $F_f = 0$, $y_c = g \sin \alpha$. Entonces el aro tiene movimiento de traslación y la ecuación de movimiento del centro de masa es suficiente para describir el movimiento.

4.5 Ecuación de la cantidad de movimiento angular para una sola partícula. La cantidad de movimiento lineal $\bar{p}$, para una sola partícula, es $m\bar{v} = m\dot{\bar{r}}$. Entonces, por definición, el *momento de la cantidad de movimiento lineal* con respecto al origen O de un sistema inercial y que se denota por $\bar{H}_0$, es

$$\bar{H}_0 = \bar{r} \times m\dot{\bar{r}} = \bar{r} \times \bar{p}. \quad (4.15)$$

El momento de la cantidad de movimiento también se llama *cantidad de movimiento angular* o simplemente *momento angular*, pero puesto que no necesita existir movimiento angular para que exista el momento angular, el momento de la cantidad de movimiento es un término más descriptivo.

Multiplicando vectorialmente por $\bar{r}$ los dos miembros de la ecuación de Newton, tenemos

$$\bar{r} \times \frac{d}{dt} (m\dot{\bar{r}}) = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (4.16)$$

El primer miembro de esta ecuación se puede escribir

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\dot{\bar{r}})$$

efectuando la operación indicada

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = \dot{\bar{r}} \times m\dot{\bar{r}} + \bar{r} \times \frac{d}{dt} (m\dot{\bar{r}}).$$

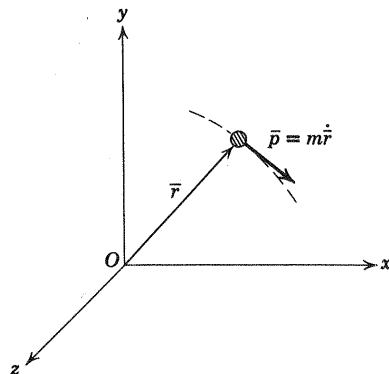


Fig. 4.11

El primer término del segundo miembro es cero a causa del paralelismo de los vectores. Entonces la ecuación 4.16 toma la forma

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\dot{\bar{r}}) = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (4.17)$$

El primer miembro de la ecuación 4.17 es la razón de variación con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento con relación a O mientras que el segundo miembro es por definición el momento de la fuerza resultante, que actúa sobre la partícula, con respecto al origen O . Por consiguiente,

$$\dot{\bar{H}}_0 = \bar{M}. \quad (4.18)$$

Esta es una forma de la ecuación de movimiento de Newton que es conveniente para el análisis del movimiento de un cuerpo rígido. En palabras establece que *la razón de variación con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento con respecto a un punto O de un sistema inercial primario, es igual al momento de la fuerza resultante respecto al mismo punto O .*

Ahora, si $\bar{r}$ ó $\bar{F}$ es cero, o bien si $\bar{r}$ y $\bar{F}$ son vectores paralelos, entonces $\dot{\bar{H}}_0 = 0$ y

$$\bar{H}_0 = \text{vector constante}. \quad (4.19)$$

Este es el teorema de la conservación del momento de la cantidad de movimiento. Establece que *si el momento de la fuerza resultante con respecto a un punto O es cero, entonces el momento de la cantidad de movimiento permanece constante en magnitud y dirección respecto al punto O .*

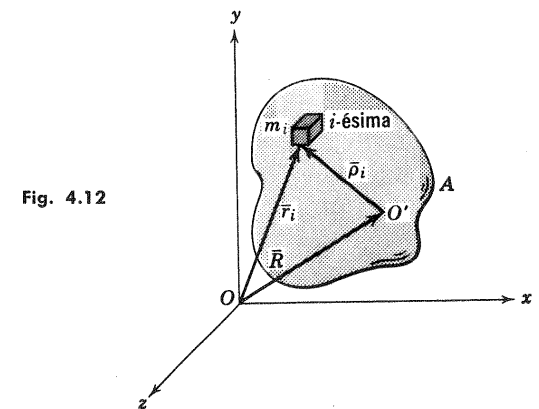


Fig. 4.12

4.6 Ecuación de la cantidad de movimiento angular para un sistema de partículas con respecto a un origen arbitrario. De una manera similar al caso de una sola partícula, podemos deducir una expresión para el momento de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas. Llevaremos a cabo esto primero con respecto al origen de un sistema inercial y después con respecto a un origen arbitrario para llegar al resultado más general. Después examinaremos los centros particulares de momentos que simplificarán la expresión general.

El punto O es el origen de un sistema newtoniano y O' es un origen arbitrario que puede tener aceleración con relación a O .

La ecuación de movimiento para la i -ésima partícula (ecuación 4.2) es

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_j \bar{\mathbf{F}}_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4.20)$$

Tomando momentos con respecto a O de los dos miembros de la ecuación 4.20, obtenemos

$$\bar{\mathbf{r}}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \bar{\mathbf{r}}_i \times \sum_j \bar{\mathbf{F}}_{ij}. \quad (4.21)$$

El primer miembro de la ecuación 4.21 se puede escribir como la derivada con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento tal como se hizo en la sección 4.5. Haciendo este cambio y al mismo tiempo sumando las n ecuaciones de la forma 4.21, se tiene

$$\frac{d}{dt} \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i,j} \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ij}. \quad (4.22)$$

La suma del segundo miembro de la ecuación 4.22 representa la suma vectorial de los momentos tomados con respecto a O de las fuerzas externas e internas. La suma de momentos debidos a las fuerzas internas es cero si las líneas de acción de todas las fuerzas internas están a lo

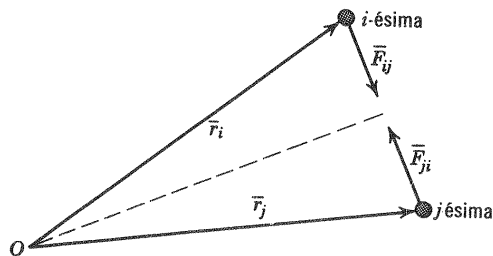


Fig. 4.13

largo de las rectas que unen las partículas (ver Fig. 4.13). Por ejemplo, la suma de los momentos de las partículas i y j es

$$\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} + \bar{\mathbf{r}}_j \times \bar{\mathbf{F}}_{ji} = (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j) \times \bar{\mathbf{F}}_{ij} = 0$$

ya que los vectores $(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j)$ y $\bar{\mathbf{F}}_{ij}$ son paralelos.

Bajo estas condiciones la ecuación 4.22 ahora se puede escribir

$$\frac{d}{dt} \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ii}. \quad (4.23)$$

El primer miembro de la ecuación 4.23 es la derivada con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento total con relación a O y que denotaremos por $\bar{\mathbf{H}}_0$ y el segundo miembro de la ecuación 4.23 es la suma vectorial de todos los momentos externos que actúan sobre el sistema. En forma de ecuación, nuevamente tenemos

$$\dot{\bar{\mathbf{H}}}_0 = \bar{\mathbf{M}} \quad (4.24)$$

Para un sistema de partículas, la derivada con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento total del sistema con respecto al origen de un sistema inercial, es igual a la suma vectorial de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto a este origen.

Generalizaremos ahora la ecuación 4.24, para ello se toman momentos con respecto a O' que es un origen arbitrario. Partiendo de la ecuación 4.20 y tomando los momentos de ambos miembros con respecto a O' (ver Fig. 4.12), obtenemos

$$\bar{\rho}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \bar{\rho}_i \times \sum_j \bar{\mathbf{F}}_{ij}, \quad (4.25)$$

o sea

$$\sum_i \bar{\rho}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \bar{\rho}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ii}, \quad (4.26)$$

donde nuevamente suponemos el caso usual de fuerzas internas centrales de manera que la suma en el segundo miembro de la ecuación 4.26, se toma solamente sobre i . De la figura 4.12

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \bar{\mathbf{R}} + \bar{\rho}_i \quad \text{y} \quad \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i = \dot{\bar{\mathbf{R}}} + \dot{\bar{\rho}}_i.$$

Sustituyendo $\dot{\bar{\mathbf{r}}}_i$ por su valor y $\left[\sum_i \bar{\rho}_i \times \bar{\mathbf{F}}_{ii} \right]$ por $\bar{\mathbf{M}}'$, la ecuación 4.26 se transforma en

$$\sum_i \rho_i \times \frac{d}{dt} m_i (\ddot{\mathbf{R}} + \dot{\rho}_i) = \overline{\mathbf{M}}', \quad (4.27)$$

$$\sum m_i \bar{\rho}_i \times \ddot{\mathbf{R}} + \sum_i \bar{\rho}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \dot{\rho}_i) = \overline{\mathbf{M}}', \quad (4.28)$$

$$\bar{\rho}_c \times M \ddot{\mathbf{R}} + \frac{d}{dt} \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\rho}_i = \overline{\mathbf{M}}', \quad (4.29)$$

y finalmente

$$\bar{\rho}_c \times M \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{H}}' = \overline{\mathbf{M}}', \quad (4.30)$$

donde $\mathbf{H}'$ es el momento de la cantidad de movimiento con relación al origen O' . Para pasar de la ecuación 4.27 a la 4.28, se efectuó el producto vectorial. Nótese que $\ddot{\mathbf{R}}$ no interviene en la suma. Para pasar de la ecuación 4.28 a la 4.29 se introdujo la definición de centro de masa (ecuación 4.5) y el segundo término del primer miembro de la ecuación 4.28 se sustituyó por una identidad (ver la sección 4.5). Para pasar de la ecuación 4.29 a la 4.30 el segundo término de la izquierda se escribió de nuevo como la derivada con respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento $\mathbf{H}'$, donde $\mathbf{H}'$ es la resultante del momento de la cantidad de movimiento con respecto al origen arbitrario O' .

La ecuación 4.30 difiere de la ecuación 4.24 en el término $\bar{\rho}_c \times M \ddot{\mathbf{R}}$. Para simplificar la ecuación 4.30 preguntamos: ¿qué condiciones harán que este producto vectorial sea cero? Este término adicional será nulo si:

1. $\ddot{\mathbf{R}}$ es cero; esto es, la aceleración de O' relativa a O es cero. Este es el caso de la ecuación 4.24. O bien,
2. $\bar{\rho}_c$ es cero, que significa que O' está situado en el centro de masa. O bien,
3. $\ddot{\mathbf{R}}$ y $\bar{\rho}_c$ son paralelos. Ahora $\bar{\rho}_c$ es un vector que va de O' al centro de masa, y si la aceleración $\ddot{\mathbf{R}}$ de O' está dirigida hacia o alejándose del centro de masa, $\bar{\rho}_c$ y $\ddot{\mathbf{R}}$ serán colineales y su producto vectorial será cero. (Este resultado será de utilidad para ruedas simétricas que giran sin deslizamiento.)

Por lo tanto, para cualquiera de las tres condiciones establecidas anteriormente, la ecuación angular (4.30) se reduce a una ecuación de forma idéntica a la ecuación 4.24:

$$\boxed{\dot{\mathbf{H}}' = \overline{\mathbf{M}}'} \quad , \quad (4.30a)$$

donde $\mathbf{H}'$ y $\overline{\mathbf{M}}'$ se toman con respecto al origen O' de cualquier sistema de coordenadas que satisfaga las condiciones anteriores 1, 2 ó 3.

Ejemplo 4.7. Regresaremos ahora al ejemplo 4.6, donde se requería la ecuación angular para la solución. El aro delgado de masa M y radio r rueda desde el reposo sin deslizamiento sobre un plano inclinado. Determinar la aceleración del centro de masa. Ver figura 4.14.

Como anteriormente se hizo, aplicando la ecuación de movimiento de centro de masa, tenemos

$$M \ddot{\mathbf{r}}_c = \overline{\mathbf{F}},$$

$$M \ddot{y}_c = F_y = Mg \sin \alpha - F_f.$$

La ecuación angular $\dot{\mathbf{H}} = \overline{\mathbf{M}}$ se puede escribir

$$\frac{d}{dt} \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\rho}_i = \overline{\mathbf{M}}.$$

Esta ecuación se toma con respecto a un sistema de ejes no giratorios situado en el centro de masa, condición 2 de esta sección.

Utilizando la expresión para la velocidad $\dot{\rho}_i = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i$, tenemos

$$\frac{d}{dt} \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) = \overline{\mathbf{M}}$$

o sea

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \rho_i^2 \omega \bar{k} = \overline{\mathbf{M}} = r F_f \bar{k}.$$

Ya que ρ_i es la misma para todas las m_i , podemos escribir la ecuación escalar como sigue:

$$M r^2 \dot{\omega} = r F_f.$$

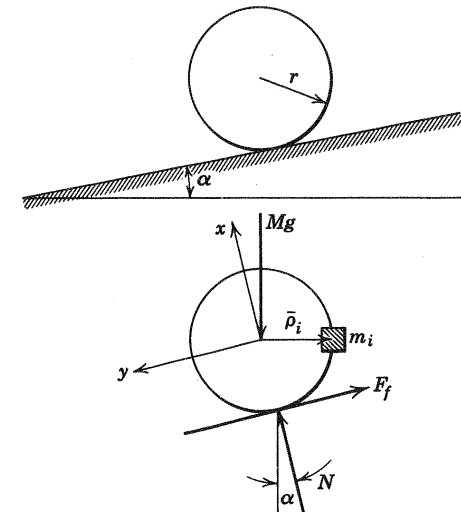


Fig. 4.14

Para un aro que rueda sin deslizamiento se tiene la relación cinemática

$$\ddot{y}_c = r\dot{\omega}.$$

Entonces

$$Mr^2 \frac{\ddot{y}_c}{r} = rF_f.$$

Sustituyendo este valor de F_f en la ecuación lineal,

$$M\ddot{y}_c = Mg \operatorname{sen} \alpha - M\ddot{y}_c$$

y

$$\ddot{y}_c = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{2}.$$

Ejemplo 4.8. Con ayuda de la ecuación 4.30a podemos ahora completar la solución del problema que se inició en el ejemplo 4.1 de este capítulo.

Utilizando el centro de masa del sistema de la figura 4.5 como el origen O' y aplicando

$$\frac{d}{dt} \sum \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i = \bar{M} \dot{\bar{r}}_c$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d} \left[r \left(\frac{5}{3} \bar{i} + \frac{3}{2} \bar{j} \right) \times m\omega \bar{k} \times r \left(\frac{5}{3} \bar{i} + \frac{2}{3} \bar{j} \right) + r \left(-\frac{4}{3} \bar{i} + \frac{2}{3} \bar{j} \right) \right. \\ \left. \times m\omega \bar{k} \times r \left(-\frac{4}{3} \bar{i} + \frac{2}{3} \bar{j} \right) + r \left(-\frac{1}{3} \bar{i} - \frac{4}{3} \bar{j} \right) \times m\omega \bar{k} \times r \left(-\frac{1}{3} \bar{i} - \frac{4}{3} \bar{j} \right) \right] = r \left(-\frac{1}{3} \bar{i} - \frac{4}{3} \bar{j} \right) \times F \bar{i} \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos

$$\frac{22}{3} mr^2 \dot{\omega} \bar{k} = \frac{4}{3} rF \bar{k},$$

o sea

$$\dot{\omega} = \frac{2}{11} \frac{F}{rm} \bar{k}.$$

Entonces

$$\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{R}} + \dot{\omega} \times \bar{\rho} = \frac{F}{3m} \bar{i} + \frac{2}{11} \frac{F}{rm} \bar{k} \times r \left(\frac{5}{3} \bar{i} + \frac{2}{3} \bar{j} \right) = \frac{F}{33m} [7\bar{i} + 10\bar{j}].$$

Esta es la aceleración de la partícula hacia la derecha en la posición mostrada en la figura 4.5.

4.7 Cálculo de la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas con respecto a un origen inercial. El momento de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas con respecto a un origen dado, se puede expresar convenientemente en dos partes. Con refe-

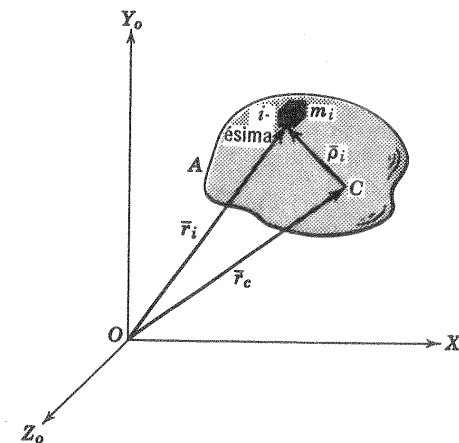


Fig. 4.15

rencia a la figura 4.15, el momento de la cantidad de movimiento con respecto a O para el sistema es

En términos de $\bar{r}_c$ y $\bar{\rho}_i$

$$\bar{H}_0 = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \dot{\bar{r}}_i. \quad (4.31)$$

$$\bar{H}_0 = \sum_i m_i (\bar{r}_c + \bar{\rho}_i) \times (\dot{\bar{r}}_c + \dot{\bar{\rho}}_i), \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_0 = \sum_i m_i [\bar{r}_c \times \dot{\bar{r}}_c + \bar{r}_c \times \dot{\bar{\rho}}_i + \bar{\rho}_i \times \dot{\bar{r}}_c + \bar{\rho}_i \times \dot{\bar{\rho}}_i], \\ \bar{H}_0 = \bar{r}_c \times M \dot{\bar{r}}_c + \bar{r}_c \times \frac{d}{dt} \sum_i m_i \bar{\rho}_i - \dot{\bar{r}}_c \times \sum_i m_i \bar{\rho}_i + \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i. \end{aligned} \quad (4.33)$$

En esta ecuación, el segundo y tercer términos de la derecha son cero por definición del centro de masa y el último término es el momento de la cantidad de movimiento con respecto al centro de masa. La ecuación 4.33 se puede escribir

$$\bar{H}_0 = \bar{r}_c \times M \dot{\bar{r}}_c + \bar{H}_c. \quad (4.34)$$

El momento angular de un sistema de partículas con respecto a un origen inercial O se puede expresar como la suma del momento de la cantidad de movimiento de una partícula con masa igual a la masa total del sistema y con una velocidad igual a la del centro de masa del sistema, más el momento angular del sistema relativo al centro de masa.

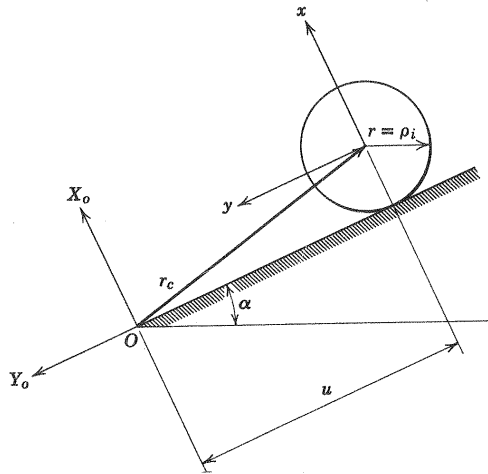


Fig. 4.16

Ejemplo 4.9. Hallar la cantidad de movimiento angular con respecto al origen O del aro del ejemplo 4.6, 10 segundos después de haberse soltado desde el reposo. $\alpha = 30^\circ$.

$$\begin{aligned}\bar{H}_0 &= \bar{r}_c \times M\dot{\bar{r}}_c + \bar{H}_c, \\ \bar{H}_c &= \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i, \\ \bar{H}_c &= \sum_i m_i \bar{\rho}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i), \\ \bar{H}_c &= \sum_i m_i \rho_i^2 \bar{\omega} \bar{k} = Mr^2 \bar{\omega} \bar{k}.\end{aligned}$$

Ahora, $\dot{y}_c = (g \sin \alpha)/2 = g/4$.

Al concluir los 10 seg $\dot{y}_c = \frac{5}{2} g$ y $\omega = 5g/2r$. Entonces

$$\begin{aligned}\bar{H}_0 &= (\bar{r}_{i0} - u\bar{j}_0) \times M \frac{5}{2} g \bar{j}_0 + Mr^2 \frac{5g}{2r} \bar{k}, \\ \bar{H}_0 &= \frac{5Mgr}{2} \bar{k} + \frac{5Mgr}{2} \bar{k} = 5Mgr \bar{k}.\end{aligned}$$

4.8 Cálculo de la energía cinética de un sistema de partículas. La energía cinética de un sistema de partículas también se puede expresar en dos partes en una forma semejante a la expresión para la cantidad de movimiento angular. Para la partícula i la energía cinética es

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i (\dot{\bar{r}}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i). \quad (4.35)$$

Sustituyendo $\dot{\bar{r}}_i = \dot{\bar{r}}_c + \dot{\bar{\rho}}_i$ y sumando sobre todas las partículas, tenemos

$$\begin{aligned}T &= \sum_i T_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\bar{r}}_c + \dot{\bar{\rho}}_i) \cdot (\dot{\bar{r}}_c + \dot{\bar{\rho}}_i), \\ T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i [\dot{\bar{r}}_c \cdot \dot{\bar{r}}_c + 2\dot{\bar{r}}_c \cdot \dot{\bar{\rho}}_i + \dot{\bar{\rho}}_i \cdot \dot{\bar{\rho}}_i], \\ T &= \frac{1}{2} M v_c^2 + \dot{\bar{r}}_c \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \bar{\rho}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2. \quad (4.36)\end{aligned}$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación 4.36 es cero por la definición del centro de masa. Entonces la ecuación 4.36 se transforma en

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2. \quad (4.37)$$

La energía cinética total puede expresarse como la suma de la energía cinética de una partícula con una masa igual a la masa total del sistema y con una velocidad igual a la del centro de masa del sistema, más la energía cinética del sistema relativa al centro de masa. Este último término se escribirá más adelante de manera distinta, cuando se discuta el movimiento del cuerpo rígido.

Ejemplo 4.10. Hallar la energía cinética del aro del ejemplo 4.6, 10 seg después de haberse soltado desde el reposo. $\alpha = 30^\circ$.

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2.$$

Ya que

$$\begin{aligned}|\dot{\bar{\rho}}_i| &= |\omega \rho_i|, \\ \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\bar{\rho}}_i^2 &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} Mr^2 \omega^2.\end{aligned}$$

Del ejemplo 4.9

$$v_c = \frac{5}{2} g \quad \text{y} \quad \omega = \frac{5g}{2r}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} M \left(\frac{5g}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} Mr^2 \left(\frac{5g}{2r} \right)^2, \\ T &= \frac{25}{4} Mg^2.\end{aligned}$$

PROBLEMAS

4.1. Un aro delgado de masa m y radio a se coloca en un plano inclinado. Se supone que el coeficiente de rozamiento cinético μ es pequeño, de manera que el aro desliza y rueda simultáneamente. Describir el movimiento del centro de masa.

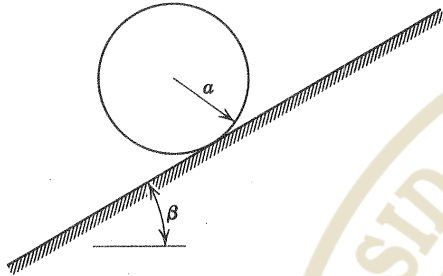


Fig. P-4.1

4.2. Una partícula grande tiene una masa M y una velocidad v . Repentinamente se rompe en varias partículas pequeñas que se mueven en todas direcciones. Determinar el movimiento resultante del centro de masa de las diversas partículas.

4.3. Dos partículas m_1 y m_2 están unidas por una cuerda que pasa por una polea lisa, como en la máquina de Atwood. Hallar la aceleración del centro de masa de m_1 y m_2 , despreciando la masa de la polea.

4.4. Localizar el centro de masa de tres partículas de masas m , $2m$, $3m$ situadas en los vértices de un triángulo equilátero.

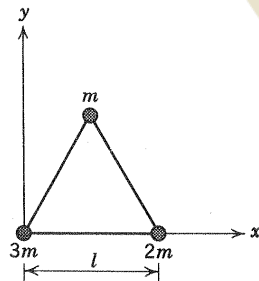


Fig. P-4.4

4.5. Localizar el centro de masa para el sistema de cuatro partículas que se muestra. La arista del cubo tiene la dimensión a .

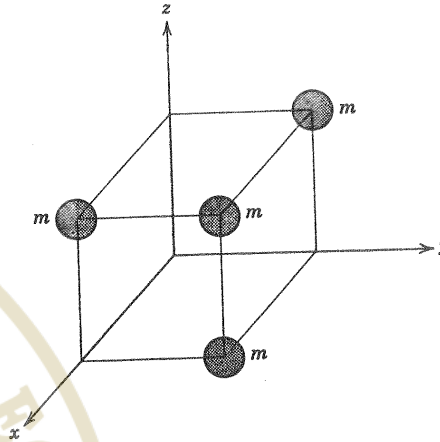


Fig. P-4.5

4.6. Localizar el centro de masa de un hemisferio de densidad uniforme.

4.7. Localizar el centro de masa de un cascarón hemisférico.

4.8. Localizar el centro de masa de un hemisferio si el peso específico γ varía linealmente a lo largo del radio desde un valor 3γ en el centro de la base hasta un valor de γ en la superficie.

4.9. Hallar el centro de masa de los sistemas que se muestran considerando subsistemas apropiados.

- Cuatro barras delgadas cada una de masa m y longitud l .
- Un hemisferio homogéneo y un cono circular recto.
- Cuatro barras y un aro delgados, el material de que están hechos tiene la misma masa por unidad de longitud.

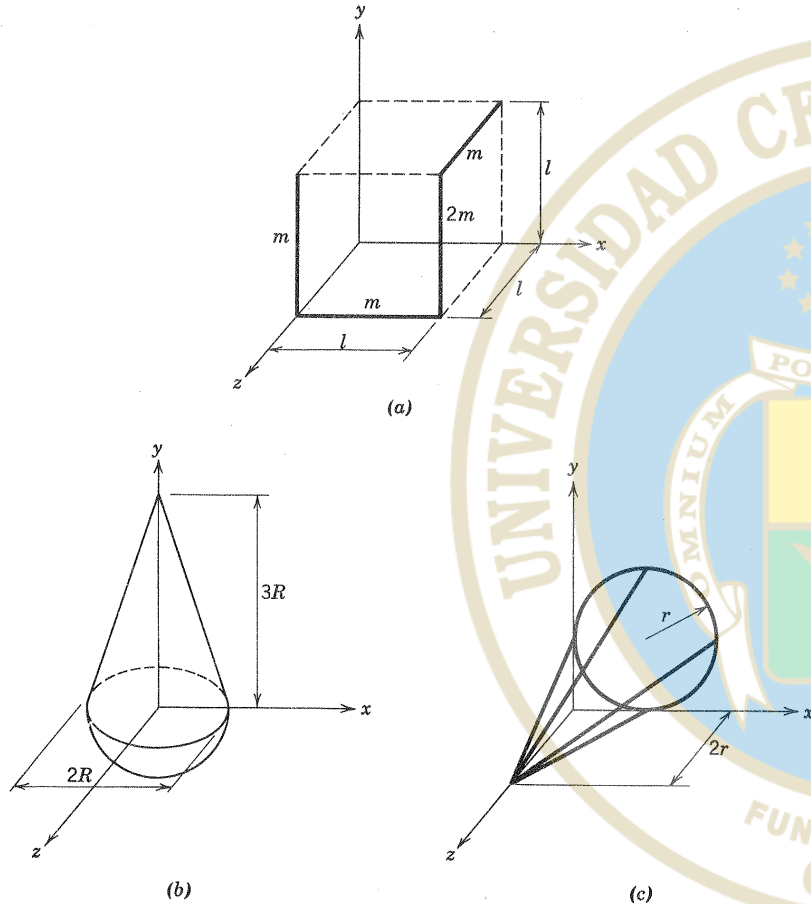


Fig. P-4.9

4.10. Se tira de un cable de longitud l con una velocidad v , tal como se muestra, el cable está en un plano horizontal. Hallar la velocidad del centro de masa como una función de θ .

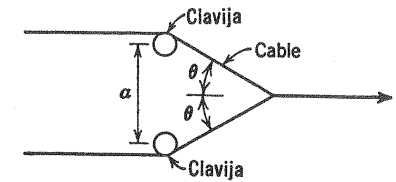


Fig. P-4.10

4.11. Dos partículas de masas $3m$ y $5m$ se mueven con velocidades $3v$ y $2v$ respectivamente, en la dirección que se muestra. Determinar (en la posición indicada):

- La posición del centro de masa.
- La velocidad del centro de masa.
- La energía cinética del sistema.
- La cantidad de movimiento lineal del sistema.

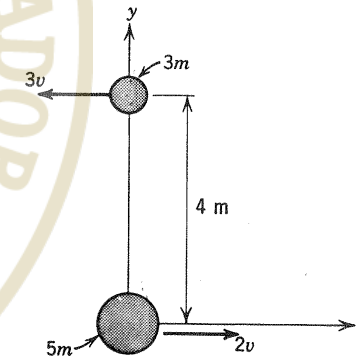


Fig. P-4.11

4.12. Determinar la energía cinética y la cantidad de movimiento lineal de la máquina de Atwood en términos del tiempo, si el sistema se suelta desde el reposo en $t = 0$. Ver problema 4.3.

4.13. Tres partículas inician su movimiento con velocidades constantes desde la posición que se muestra, si $\vec{v}_1 = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ m/seg, $\vec{v}_2 = 6\vec{i}$ m/seg y $\vec{v}_3 = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ m/seg, determinar:

- La velocidad del centro de masa.
- La ecuación de la trayectoria del centro de masa.
- La energía cinética T del sistema.
- La cantidad de movimiento lineal $\vec{p}$ del sistema.

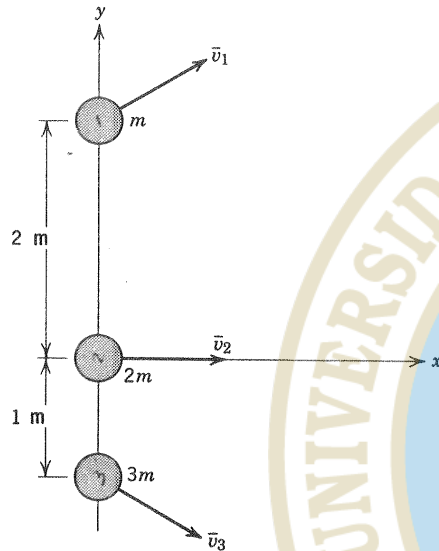


Fig. P-4.13

4.14. Un tubo doblado para dar un cambio de dirección de 180° , se acopla y se fija en su sitio mediante un total de n pernos en los dos bordes. Si el tubo tiene un área A de sección transversal y por él pasa un fluido de densidad ρ , bajo una presión p y a una velocidad v , hallar la fuerza en cada perno.

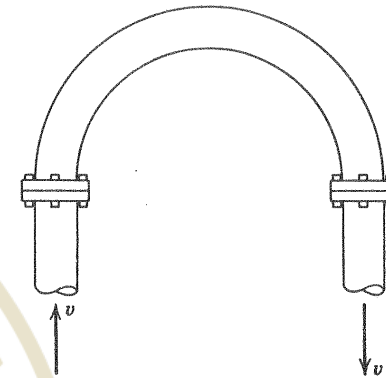


Fig. P-4.14

4.15. El agua fluye a través del conducto que se ve a razón de $1.4 \text{ m}^3/\text{seg}$. La presión del agua es de 1000 kg/m^2 aguas arriba y de 91 kg/m^2 aguas abajo. Determinar la fuerza resultante que ejerce el agua sobre las paredes del estrechamiento.

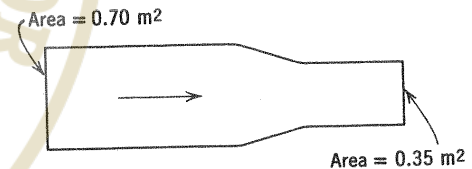


Fig. P-4.15

4.16. Un chorro de agua ($\gamma = 1000 \text{ kg/m}^3$) choca contra un álabe fijo de metal con una velocidad de 182 m/seg. Determinar la fuerza resultante necesaria para sostener el álabe. El chorro tiene un área de 19 cm^2 .

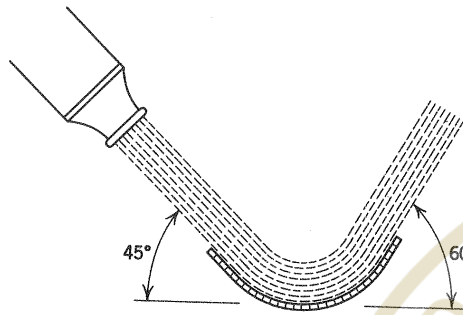


Fig. P-4.16

4.17. Si el álabe del problema 4.16 se mueve con una velocidad $u[(\hat{i} - \hat{j})/\sqrt{2}]$, hallar el valor de u de manera que la paleta desarrolle la máxima potencia. ¿Cuál es la potencia máxima?

4.18. Un fluido se descarga del tubo que se ve a razón de $Q \text{ m}^3/\text{seg}$. El área de la salida es $A_2 \text{ m}^2$ y de la entrada $A_1 \text{ m}^2$. La presión medida en la entrada es $p_1 \text{ kg/m}^2$ y la presión a la salida es la atmosférica. Determinar la fuerza y el par resultantes que ejercen las bridas de soporte sobre el tubo.

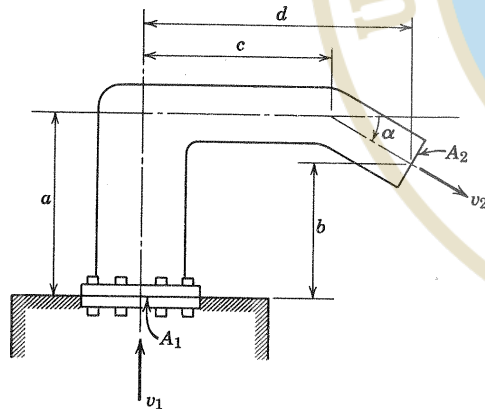


Fig. P-4.18

4.19. Una corriente de fluido de densidad ρ , área A de sección transversal y velocidad v es desviada por la superficie de un bloque de masa M que desliza

sin rozamiento sobre un plano horizontal. El fluido se desvía un ángulo α relativo al bloque.

- Hallar la fuerza que ejerce el fluido sobre el bloque.
- Si el bloque empieza a moverse desde el reposo en $t = 0$ con velocidad cero, hallar la velocidad del bloque como una función del tiempo.

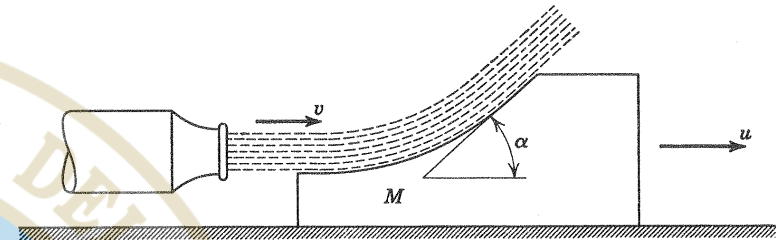


Fig. P-4.19

4.20. Si en el problema 4.19 el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano horizontal y el bloque es μ_k , hallar la velocidad final que alcanza el bloque.

4.21. Una caja de arena se desliza desde el reposo hacia abajo de un plano liso con inclinación α . La masa de la caja es m_b y la masa inicial de la arena es m_a . La arena sale de la caja hacia abajo del plano con una velocidad v_r relativa a la caja y a una razón constante de $k \text{ kg/seg}$. Hallar la velocidad de la caja cuando ha salido toda la arena.

4.22. Una gota de lluvia de peso inicial $w_0 \text{ kg}$ cae desde el reposo a través de una nube de espesor $a \text{ m}$. Al caer la gota gana peso a razón de $b \text{ kg/seg}$. Las gotitas de la nube están en reposo con relación al suelo. Al movimiento de la gota se opone una fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad. Demostrar que la ecuación diferencial del movimiento es

$$v \frac{dv}{dx} + \frac{(b + gk)v^2}{w_0 + bx} = g.$$

4.23. Demostrar cómo se mediría el empuje de un cohete haciendo una prueba cuando está fijo. Suponiendo que se conoce la razón con que se quema el combustible, ¿cuál es la velocidad de los gases que escapan con relación al cohete?

4.24. Un cohete cuyo peso total es $W_r + W_f$ se lanza verticalmente desde la superficie de la Tierra. El combustible se quema a una razón constante de $k \text{ kg/seg}$ y los gases son expulsados a una velocidad constante v_f relativa al cohete. Suponiendo que la atracción gravitacional es constante y despreciando la resistencia del aire, hallar la velocidad del cohete como una función del tiempo. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando todo el combustible W_f se ha agotado?

4.25. El extremo de una cadena cae por el orificio de una mesa lisa y hace que los eslabones restantes le sigan. Se supone que los eslabones en reposo adquieren su velocidad instantáneamente debido a un choque plástico con los eslabones en movimiento. Despreciando todas las resistencias de rozamiento, hallar la velocidad de la cadena en términos de x , que es la longitud de la cadena en movimiento. La cadena tiene una longitud l y un peso μ kg/unidad de longitud. En $x = 0$, $v = 0$. También hallar la pérdida de energía cuando $x = l$ y el tiempo necesario para que el último eslabón abandone la mesa.

4.26. Una cadena uniforme de masa μ por unidad de longitud está arrollada sobre un saliente horizontal situado en la parte superior de un plano liso inclinado a un ángulo α . Una masa M está fija en un tramo de la cadena y se empuja del saliente con velocidad cero. Demostrar que la ecuación diferencial del movimiento es $(M + \mu x)(dv/dt) + \mu v^2 = (M + \mu x)g \sin \alpha$, donde x es la longitud de la cadena a lo largo del plano.

4.27. En cada uno de los siguientes sistemas, las partículas tienen una masa m y una velocidad v como se indica. Para cada sistema calcular las siguientes cantidades:

- $\bar{p}$.
- $\bar{H}_O$.
- $\bar{H}_{O'}$.
- T .

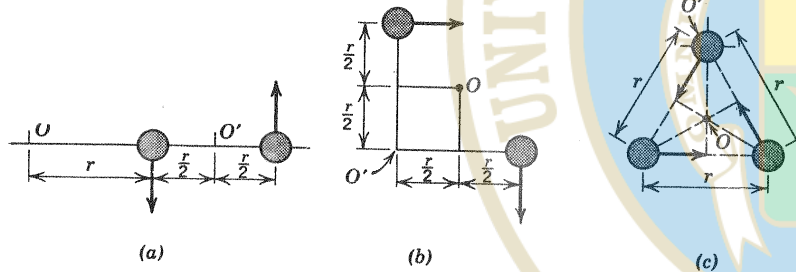


Fig. P-4.27

4.28. Una partícula de masa m gira alrededor de un punto A sobre el plano horizontal liso xy . La velocidad angular de la cuerda inextensible de masa despreciable y de longitud r , que la une con el punto A , es ω . Dar una respuesta a lo siguiente:

- Con respecto al punto A :
 - ¿Cuál es la energía cinética de la partícula?
 - ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento lineal?
 - ¿Cuál es la magnitud de la cantidad de movimiento angular?
 - ¿La cantidad de movimiento lineal es constante?
 - ¿La cantidad de movimiento angular es constante?

- Con respecto al origen:
 - ¿Cuál es la energía cinética de la partícula?
 - ¿La cantidad de movimiento angular es constante?
 - Si su respuesta en la parte (2) es Sí, ¿cuál es este valor constante?
 - Si su respuesta en la parte (2) es No, dé los valores máximo y mínimo de la cantidad de movimiento angular.

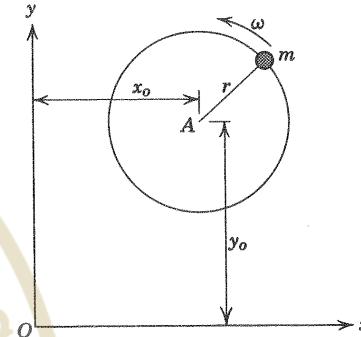


Fig. P-4.28

4.29. Un péndulo simple se suelta desde el reposo en $\theta = 30^\circ$ y choca plásticamente ($e = 0$) con otro péndulo que está suspendido verticalmente quieto. Inmediatamente después del choque hallar para el sistema lo siguiente:

- $\bar{p}$.
- $\bar{H}_O$.
- T .
- $\bar{T}$ (la tensión en cada cable).

Hallar también la altura máxima h alcanzada por las partículas y las tensiones $\bar{T}$ de los cables en esa posición.

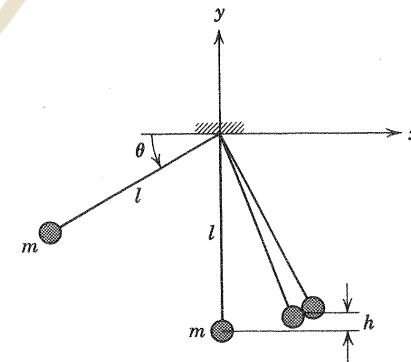


Fig. P-4.29

4.30. Cada una de cuatro partículas de masa m está unida a un aro de masa despreciable que está en libertad de moverse sobre el plano horizontal liso xy . Para este sistema de partículas, hallar:

- Las coordenadas del punto del sistema que tiene aceleración cero en el instante en que se aplica $\vec{F} = F(\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j})$.
- La posición angular ϕ del aro como una función del tiempo si $\vec{F}$ se mantiene a un ángulo fijo con el aro. Tomar $\phi = \dot{\phi} = 0$ para $t = 0$.
- La trayectoria del centro de masa del sistema si $\vec{F} = F_x \vec{i}_0 + F_y \vec{j}_0$ es una fuerza constante. Para $t = 0$, $\vec{r}_c = \dot{\vec{r}}_c = 0$.

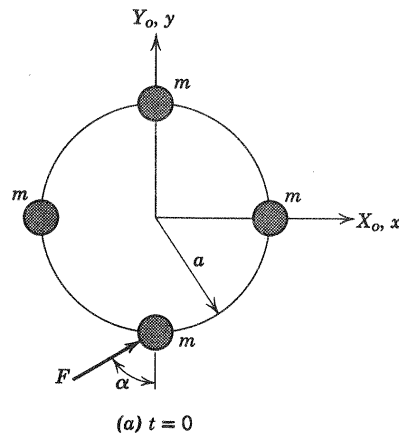
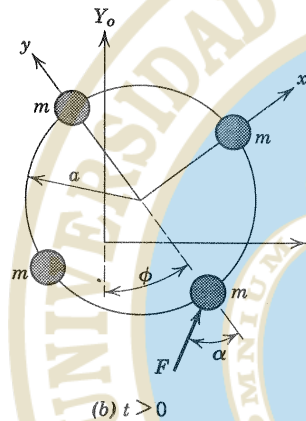


Fig. P-4.30



4.31. Dos partículas, cada una de masa m , se deslizan con una rapidez constante v relativa al cono, a lo largo de dos generatrices de éste. Si se hace girar el cono a una velocidad angular constante $\omega \vec{k}$ y solamente se considera la masa de las partículas, hallar el momento $M\vec{k}$ necesario para hacer girar el cono como una función del tiempo. En $t = 0$ las partículas parten desde el vértice.

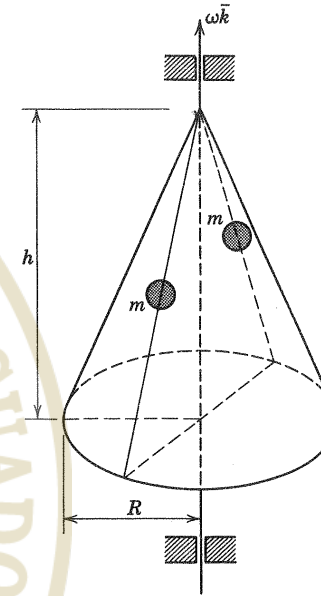


Fig. P-4.31

4.32. Dos partículas de masa m_1 y m_2 están unidas por una cuerda inextensible de peso despreciable y de longitud l . Las dos partículas se mueven bajo la acción de la gravedad, en tal forma que la cuerda siempre está sometida a una fuerza de tensión. Demostrar que la velocidad angular ω de la cuerda es una constante y hallar la tensión en la cuerda como una función de m_1 , m_2 , l y ω .

4.33. Una masa m se mueve sobre una trayectoria horizontal de radio r_0 con una rapidez v_0 . Mediante la fuerza $\vec{F}$ el radio de la trayectoria se reduce a r . Hallar:

- La nueva velocidad de m .
- El trabajo efectuado por F .

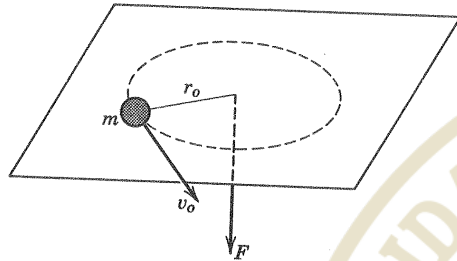


Fig. P-4.33

4.34. El sistema de cuatro partículas y varillas ligeras está inicialmente en reposo en el plano horizontal xy y puede girar libremente alrededor de un pivote en O . Las otras dos masas giran libremente en torno al eje z con velocidad angular $\omega \vec{k}$ y llegan a caer en O .

- Hallar la velocidad angular resultante de las barras cruzadas.
- Calcular el porcentaje de pérdida de energía cinética.

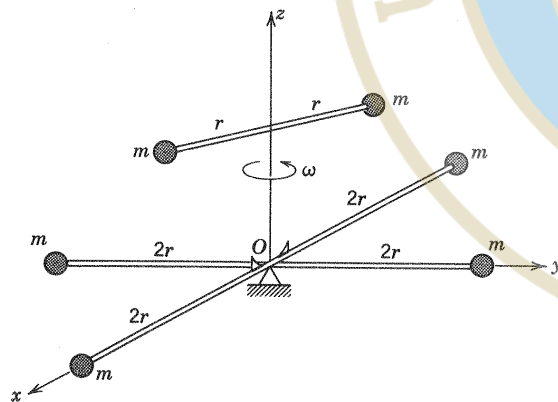


Fig. P-4 34

4.35. Cuatro masas m situadas en un dispositivo de barras en cruz de peso despreciable giran en un plano horizontal con velocidad angular $\omega \vec{k}$ alrededor de un punto fijo O . Una masa $2m$ con una velocidad $\vec{v} = 2 r \omega \vec{j}$ tiene un choque plástico con una de las masas m en la posición que se muestra. Para este sistema de cinco partículas, calcular para el choque ($e = 0$), en la posición indicada, lo siguiente:

- $\Delta \vec{H}_O$.
- ΔT .
- $\Delta \vec{p}$.

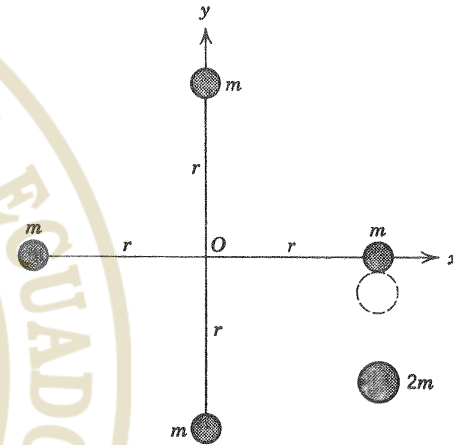


Fig. P-4.35

4.36. Resolver el problema 4.35 si el punto O no está fijo y el movimiento tiene lugar sobre un plano horizontal liso.

4.37. Un tubo helicoidal de radio R está sostenido de tal manera que puede girar libremente alrededor del eje vertical z . Agua de densidad ρ fluye por el tubo y sale con una velocidad v relativa al mismo. El tubo tiene un área A de sección transversal y forma un ángulo constante α con el plano horizontal. Hallar la velocidad angular del tubo.

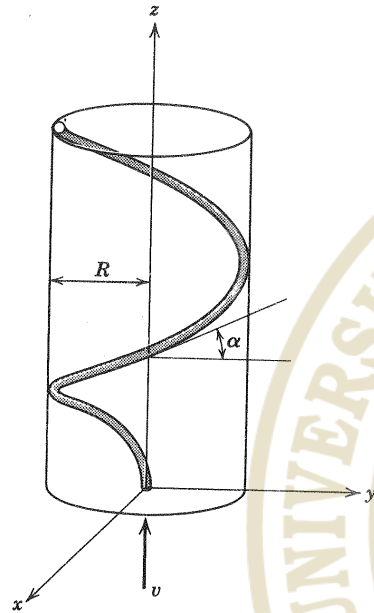


Fig. P-4.37

4.38. Dos partículas tienen las posiciones y velocidades que se indican. Para este sistema hallar lo siguiente:

- $\vec{r}_c$.
- $\vec{H}_0$.
- $\vec{H}_c$.
- T .
- La energía cinética relativa al centro de masa.

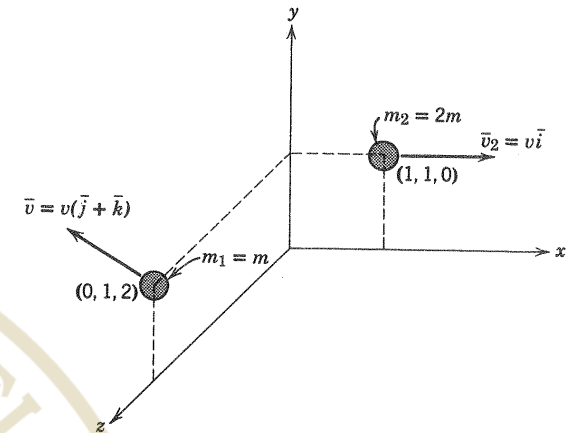


Fig. P-4.38

4.39. Tres partículas idénticas cada una de masa m están unidas por barras rígidas de peso despreciable y de longitud l . Si la partícula de la derecha tiene una velocidad constante $v_0 \vec{i}$, hallar:

- $\vec{r}_c$.
- T .
- $\vec{p}$.
- $\vec{H}_c$.

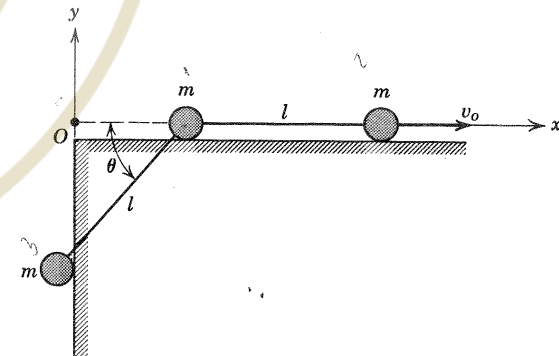


Fig. P-4.39

4.40. Hallar la energía cinética del cable del problema 4.10 como una función de θ .

4.41. Una barra delgada de longitud l y masa M adquiere una velocidad angular $\omega \bar{k}$. Hallar $\bar{H}_0$ y T integrando sobre toda la longitud de la barra.

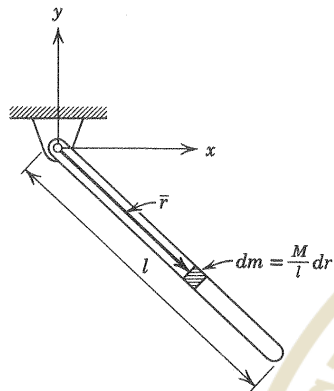


Fig. P-4.41

4.42. El aro que se muestra tiene una velocidad angular ω_z alrededor de su propio eje y al mismo tiempo gira alrededor del eje y con velocidad angular ω_y . Los ejes están fijos al aro. Analizar el aro como un sistema de partículas y deducir una expresión para la energía cinética T y la cantidad de movimiento angular $\bar{H}_0$ del aro en términos de M , r , ω_y y ω_z .

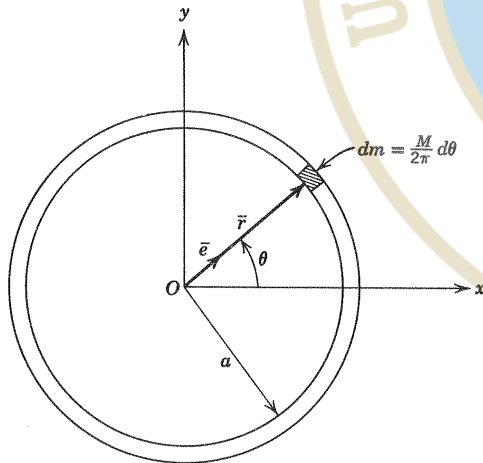


Fig. P-4.42

4.43. La barra delgada de masa M , longitud l y centrada con un pasador en el origen, gira alrededor del eje x con velocidad angular constante θ . Al mismo tiempo la barra gira en torno al eje Z_0 con velocidad angular constante ϕ . El sistema xyz está fijo a la barra y el eje x se mueve en el plano X_0Y_0 . Hallar la componente del momento M_y . Resolver el problema tratando la barra como un sistema de partículas. Nótese que la velocidad angular de la barra es $\bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{i} + \dot{\phi} \sin \theta \bar{j} + \dot{\phi} \cos \theta \bar{k}$.

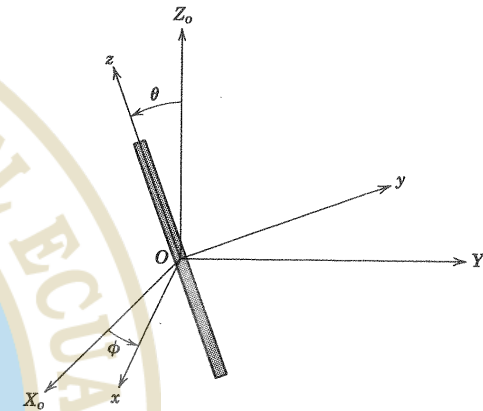


Fig. P-4.43

4.44. Un aro de masa total M y radio a tiene un pasador en un punto de su circunferencia y se encuentra en un plano vertical. Cuando el aro se suelta desde el reposo, hallar $\bar{\omega}$. Trátese como un sistema de partículas.

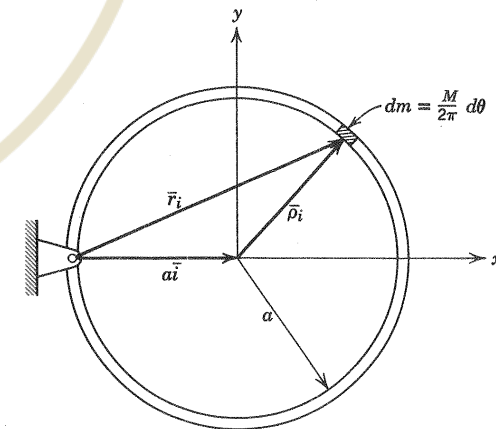


Fig. P-4.44

4.45. Dos partículas de masa m están unidas a un aro de masa despreciable. Si el aro se mueve sin deslizamiento sobre el plano horizontal, hallar la aceleración del centro de masa cuando el aro se suelta desde el reposo en la posición que se muestra. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para evitar el deslizamiento?

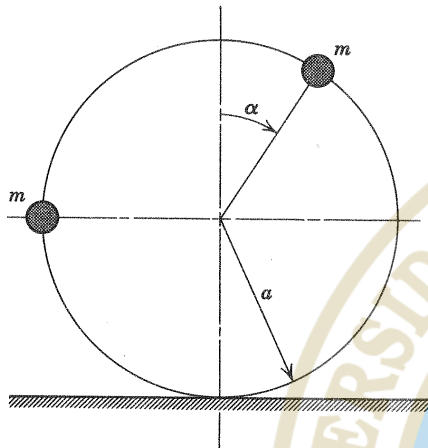


Fig. P-4.45

Dinámica de los cuerpos rígidos

5.1 Introducción. En el capítulo 4 se vieron los fundamentos para el análisis dinámico de los sistemas de partículas. Ahora se aplicarán esos fundamentos al estudio del movimiento general de un cuerpo rígido como ejemplo específico de un sistema de partículas, que están rígidamente fijadas una con relación a otra. Tal cuerpo se puede observar como una distribución continua de materia que se subdivide en pequeños elementos arbitrarios de volumen $d\tau$, que son las partículas del sistema.

La posición de un cuerpo rígido en completa libertad de moverse en el espacio de tres dimensiones se puede definir unívocamente mediante seis coordenadas independientes. Consideremos el siguiente método para fijar la posición de un cuerpo rígido. Se localiza un punto del cuerpo por sus tres coordenadas. En seguida, se da la dirección de una recta en el cuerpo, que pasa por el punto, mediante sus tres cosenos directores. Sin embargo, solamente dos de éstos son independientes. Finalmente, se localiza la posición de un plano en el cuerpo que contiene a la recta, mediante un ángulo que se mide desde un plano de referencia fijo. Así pues, estas seis cantidades sirven para fijar la posición de cada partícula del cuerpo rígido. Por cada coordenada independiente que se requiere para fijar la posición de un sistema de partículas, diremos que el sistema tiene un grado de libertad. Por lo tanto, un cuerpo rígido sin ninguna restricción tiene seis grados de libertad.

El movimiento general de un cuerpo rígido queda definido por seis ecuaciones diferenciales escalares (o dos vectoriales) que corresponden a los seis grados de libertad, tres grados lineales y tres angulares (o de rotación). Sin embargo, por lo que toca a las ecuaciones lineales, ya hemos visto que el movimiento del *centro de masa de cualquier sistema de partículas incluyendo un cuerpo rígido* es idéntico al de una sola

partícula con masa igual a la del cuerpo rígido y sujeta a las mismas fuerzas externas. En forma de ecuación podemos escribir

$$M\ddot{\mathbf{r}}_c = \bar{\mathbf{F}}. \quad (5.1)$$

Las tres ecuaciones escalares (o una sola ecuación vectorial) que describen el movimiento angular de un cuerpo rígido necesitan ser discutidas y desarrolladas en detalle. Estas ecuaciones se obtienen de la consideración del momento de la cantidad de movimiento de un cuerpo rígido.

5.2 El momento de la cantidad de movimiento de un cuerpo rígido.

En esta sección calcularemos la cantidad de movimiento angular $\bar{H}'$ para un cuerpo rígido con respecto a un origen arbitrario O' . Para este sistema de partículas los vectores de posición $\bar{\rho}_i$ son de magnitud constante.

Situaremos en O' un sistema móvil de coordenadas xyz y para nuestras consideraciones, fijo en el cuerpo. Los ejes x, y, z y el cuerpo giran con velocidad angular $\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$ con relación al sistema inercial primario $X_0 Y_0 Z_0$.

El elemento de volumen $d\tau$ de la i -ésima partícula se localiza en el sistema xyz mediante su vector de posición

$$\bar{\rho}_i = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

La ecuación angular general para un sistema de partículas es

$$\bar{\rho}_c \times M\ddot{\mathbf{R}} + \frac{d}{dt} \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i = \bar{\mathbf{M}}'. \quad (5.2)$$

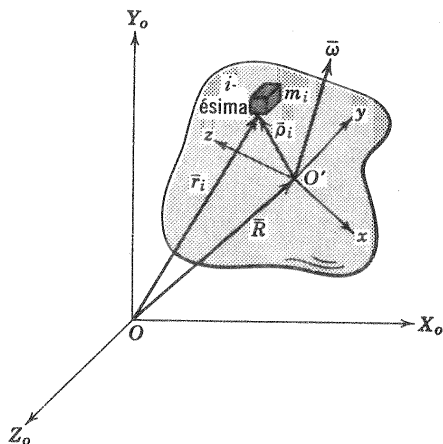


Fig. 5.1

Si ahora exigimos que O' satisfaga una de las condiciones (sección 4.6) que hace que el primer término del primer miembro de esta ecuación sea cero, entonces la ecuación 5.2 toma la forma

$$\frac{d}{dt} \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i = \frac{d}{dt} (\bar{H}') = \bar{\mathbf{M}}'. \quad (5.3)$$

En el caso de una distribución continua de materia, m_i se sustituye por $\rho d\tau = dm$, $\bar{\rho}_i = \bar{\rho}$, y la suma se transforma en una integral. Entonces tenemos

$$\int_A (\bar{\rho} \times \dot{\bar{\rho}}) dm = \bar{H}'. \quad (5.4)$$

Para un cuerpo rígido las distancias entre las partículas no cambian y los vectores $\bar{\rho}$ son de magnitud constante. Entonces la velocidad de dm relativa a O' llega a ser $\dot{\bar{\rho}} = \bar{\omega} \times \bar{\rho}$. La introducción de esta suposición de cuerpo rígido, en la ecuación 5.4, hace que se tenga

$$\int_A [\bar{\rho} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho})] dm = \bar{H}'. \quad (5.5)$$

El triple producto vectorial que aparece en la integración se puede desarrollar directamente por la regla del factor medio. Haciendo esto $\bar{H}'$ se puede escribir

$$\begin{aligned} \int_A [\bar{\rho} \cdot \bar{\rho}] \bar{\omega} - (\bar{\rho} \cdot \bar{\omega}) \bar{\rho} dm \\ = \int_A [(x^2 + y^2 + z^2)(\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}) \\ - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})] dm \end{aligned}$$

Finalmente, las componentes cartesianas de $\bar{H}'$ son

$$\begin{aligned} H'_x &= \omega_x \int_A (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_A xy dm - \omega_z \int_A zx dm, \\ H'_y &= -\omega_x \int_A xy dm + \omega_y \int_A (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int_A yz dm, \\ H'_z &= -\omega_x \int_A zx dm - \omega_y \int_A yz dm + \omega_z \int_A (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las componentes de la velocidad angular quedan fuera de los signos de integración, puesto que son las mismas para todo elemento de masa del cuerpo y por ende son constantes para las integraciones. Estas integrales que aparecen en las ecuaciones 5.6 están definidas con respecto a los ejes xyz , son *constantes* geométricas del cuerpo rígido determinadas solamente por la forma del cuerpo y la distribución de masa. Si no hubiéramos

fijado rígidamente en el cuerpo el sistema móvil de coordenadas, estas integrales no serían constantes excepto para el caso especial donde un cuerpo gira alrededor de un eje de revolución. Es posible tener un sistema de coordenadas xyz girando con una velocidad angular diferente a la del cuerpo rígido, pero en general es más conveniente fijar el sistema xyz en el cuerpo.

Introduciendo la siguiente notación para las integrales que aparecen en las ecuaciones 5.6, las componentes de la cantidad de movimiento se pueden escribir en una forma más concisa.

Haciendo

$$\int_A (y^2 + z^2) dm = I_{xx}, \text{ etc.},$$

e

$$\int_A xy dm = I_{xy}, \text{ etc.}$$

Las ecuaciones 5.6 toman la forma

$$\begin{aligned} H'_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z, \\ H'_y &= -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ H'_z &= -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Una disposición de nueve términos tales como los que aparecen en el segundo miembro de las ecuaciones 5.7 recibe el nombre de matriz o tensor. El tensor particular que da $\bar{H}'$ para un cuerpo rígido se llama el tensor del momento de la cantidad de movimiento o simplemente tensor de inercia. Los términos I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} se llaman *momentos de inercia* y los términos I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} se llaman *productos de inercia*.

H'_x , H'_y y H'_z explícitamente expuestos en las ecuaciones 5.7 son las componentes escalares del vector momento angular $\bar{H}'$; de ahí que

$$\bar{H}' = H'_x \bar{i} + H'_y \bar{j} + H'_z \bar{k}. \quad (5.8)$$

La ecuación general para la rotación de un cuerpo rígido (ecuación 5.3) es

$$\bar{M}' = \frac{d}{dt}(\bar{H}') = \dot{H}'_x \bar{i} + \dot{H}'_y \bar{j} + \dot{H}'_z \bar{k} + H'_x \frac{d\bar{i}}{dt} + H'_y \frac{d\bar{j}}{dt} + H'_z \frac{d\bar{k}}{dt}. \quad (5.9)$$

Recordando que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{i}}{dt} &= \bar{\omega} \times \bar{i} = \omega_z \bar{j} - \omega_y \bar{k}, \\ \frac{d\bar{j}}{dt} &= \bar{\omega} \times \bar{j} = \omega_x \bar{k} - \omega_z \bar{i}, \\ \frac{d\bar{k}}{dt} &= \bar{\omega} \times \bar{k} = \omega_y \bar{i} - \omega_x \bar{j} \end{aligned}$$

y de la ecuación 5.7

$$\begin{aligned} \dot{H}'_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z, \\ \dot{H}'_y &= -I_{xy}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y - I_{yz}\dot{\omega}_z, \\ \dot{H}'_z &= -I_{xz}\dot{\omega}_x - I_{yz}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z, \end{aligned}$$

La ecuación 5.9 toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{M}' &= (\dot{H}'_x - \omega_z H'_y + \omega_y H'_z) \bar{i} + (\dot{H}'_y - \omega_x H'_z + \omega_z H'_x) \bar{j} \\ &\quad + (\dot{H}'_z - \omega_y H'_x + \omega_x H'_y) \bar{k}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

La ecuación de movimiento del centro de masa es

$$\bar{F} = M\bar{r}_c = M(\ddot{x}_c \bar{i} + \ddot{y}_c \bar{j} + \ddot{z}_c \bar{k}), \quad (5.11)$$

donde $\bar{r}_c$ es un vector de posición que va del origen de un sistema inercial primario al centro de masa de un cuerpo rígido.

La ecuación 5.10 junto con la ecuación 5.11 dan las seis ecuaciones escalares que describen el movimiento de cualquier cuerpo rígido.

Es importante hacer notar que en la ecuación 5.10, ω_x , ω_y , ω_z están referidas al sistema móvil de coordenadas xyz y debe tomarse especial cuidado al relacionar $\bar{\omega}$ con algunas direcciones fijas si las soluciones de esta ecuación han de dar ángulos, que definen la orientación del cuerpo rígido en el espacio.

Antes de poder aplicar eficazmente estas ecuaciones en el análisis del movimiento de un cuerpo rígido, será necesario discutir brevemente la determinación de los momentos y productos de inercia.

5.3 Cálculo de los momentos y productos de inercia. Los momentos y productos de inercia de un cuerpo rígido deben ser conocidos antes que pueda describirse el movimiento angular. Con referencia a la figura 5.2,

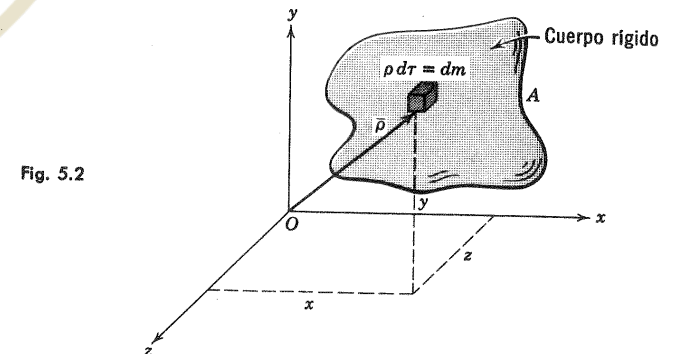


Fig. 5.2

las siguientes integrales definen los momentos de inercia de un cuerpo rígido con respecto a los tres ejes de coordenadas x , y , z :

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_A (y^2 + z^2) dm, \\ I_{yy} &= \int_A (z^2 + x^2) dm, \\ I_{zz} &= \int_A (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \quad (5.12)$$

En cada integral el término contenido en los paréntesis representa el cuadrado de la distancia perpendicular desde el eje bajo consideración al elemento de masa. Esto es, $(y^2 + z^2)$ es el cuadrado de la distancia del elemento de masa dm al eje x . En algunas ocasiones los momentos de inercia se escriben en la forma $I_{xx} = Mk_x^2$, etc., donde M es la masa total del cuerpo y la cantidad k_x se llama *radio de giro* del cuerpo con respecto al eje x .

Los productos de inercia están definidos por las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A xy dm = I_{yx}, \\ I_{yz} &= \int_A yz dm = I_{zy}, \\ I_{zx} &= \int_A zx dm = I_{xz}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Los momentos de inercia siempre serán positivos a causa de los cuadrados de las distancias que contienen. Sin embargo, los productos de inercia pueden ser positivos, negativos o cero. Esto se puede ver observando las integrales en las ecuaciones 5.13. En el caso de un cuerpo rígido que tiene dos planos de simetría perpendiculares, los productos de inercia serán cero si dos de los planos coordenados coinciden con los planos de simetría. Por ejemplo, en la figura 5.3 se ve que para el elemento de masa dm situado en el punto x_1, y_1 , existe un elemento correspondiente de igual masa situado en x_2, y_1 , donde $x_2 = -x_1$. Por lo tanto,

$$x_1 y_1 dm + x_2 y_1 dm = 0$$

e

$$I_{xy} = \int_A xy dm = 0.$$

por idénticos argumentos se demostrará que $I_{zx} = I_{yz} = 0$.

Cuando se conocen los momentos y productos de inercia con relación a un sistema de ejes, rápidamente se pueden determinar con respecto a

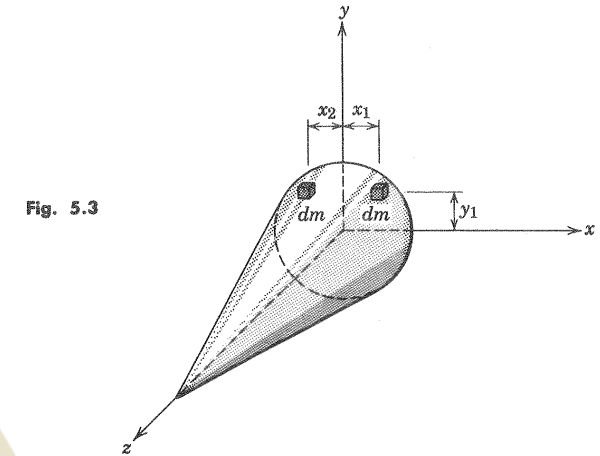


Fig. 5.3

otro sistema de ejes paralelos por medio de una fórmula de traslación. Esta fórmula se simplifica considerablemente, si uno de los ejes pasa por el centro de masa. Por consiguiente, deduciremos la fórmula de traslación para ejes paralelos uno de los cuales pasa por el centro de masa del cuerpo. Si consideramos el momento de inercia del cuerpo rígido de la figura 5.4, con respecto al eje y , tenemos

$$I_{yy} = \int_A [(x_c + x')^2 + (z_c + z')] dm,$$

donde

$$\bar{\rho}_c = x_c \bar{i} + y_c \bar{j} + z_c \bar{k}$$

$$\bar{\rho}' = x' \bar{i} + y' \bar{j} + z' \bar{k}.$$

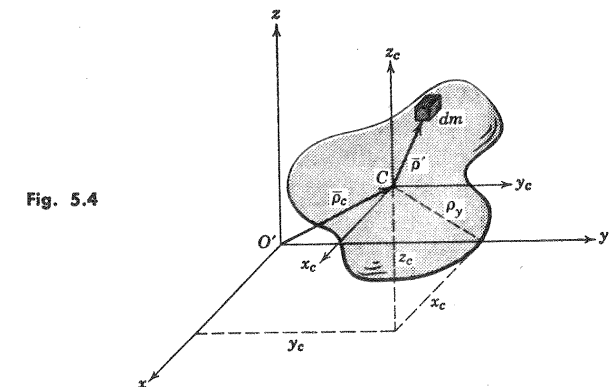


Fig. 5.4

$$I_{yy} = (x_c^2 + y_c^2) \int_A dm + \int_A (x'^2 + z'^2) dm + 2x_c \int_A x' dm + 2z_c \int_A z' dm.$$

Las dos últimas integrales valen cero puesto que el origen del sistema de coordenadas $x_c y_c z_c$ está en el centro de masa del cuerpo rígido, esto es, y_c pasa por el centro de masa. Observamos que $x_c^2 + z_c^2$ es el cuadrado de la distancia perpendicular ρ_y^2 del eje y al origen de los ejes $x_c y_c z_c$. De ahí que la primera integral es simplemente

$$(x_c^2 + z_c^2) \int_A dm = M \rho_y^2.$$

La segunda integral es el momento de inercia con respecto al eje y_c , es decir,

$$\int_A (x'^2 + z'^2) = I_{y_c y_c}.$$

De manera que

$$I_{yy} = I_{y_c y_c} + M \rho_y^2. \quad (5.14)$$

Debe recordarse que pueden hacerse traslaciones entre ejes que son paralelos mediante la ecuación 5.14 *solamente si un eje pasa por el centro de masa del cuerpo*; no obstante, se puede usar la fórmula de traslación en dos pasos sucesivos para hacer el traslado de un eje a cualquier eje paralelo, usando un eje paralelo a los dos que pasa por el centro de masa como paso intermedio.

Una fórmula similar se cumple para la traslación de los productos de inercia.

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + M x_c y_c, \quad (5.15)$$

donde x_c y y_c son componentes de ρ_c (ver la Fig. 5.4) y nuevamente los ejes $x_c y_c z_c$ son paralelos al sistema xyz y el origen C está en el centro de masa del cuerpo rígido.

El cálculo real de los momentos y productos de inercia se puede llevar a cabo por dos métodos. Primero, utilizando las definiciones y efectuando las integraciones necesarias. Segundo, dividiendo el cuerpo en subsistemas, esto es, formas geométricas más simples para las cuales se conocen los momentos y los productos de inercia o se hallan en las tablas (ver apéndice A). Después, usando la fórmula de traslación y sumando por separado los valores, se obtienen los resultados que se desean.

En forma de ecuación

$$I_{xx} = \sum_j (I_{x_c x_c})_j + \sum_j M_j (\rho_{x_c}^2)_j, \quad (5.16)$$

$$I_{xy} = \sum_j (I_{x_c y_c})_j + \sum_j M_j (x_c)_j (y_c)_j, \quad (5.17)$$

donde la suma se extiende a todas las formas geométricas en que se ha dividido el cuerpo rígido.

Ejemplo 5.1. Calcular el momento de inercia I_{zz} y el producto de inercia I_{xy} para un paralelepípedo rectangular. Por integración directa tenemos

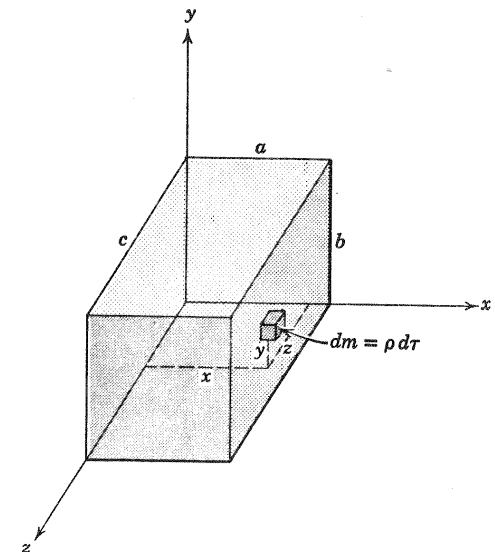
$$\begin{aligned} I_{zz} &= \iiint (x^2 + y^2) dm, \\ &= \int_0^c \int_0^b \int_0^a \rho (y^2 + x^2) dx dy dz, \\ &= \int_0^c \int_0^b \rho \left(\frac{a^3}{3} + y^2 a \right) dy dz \\ &= \int_0^c \rho \left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{a b^3}{3} \right) dz, \\ I_{zz} &= \rho \frac{abc}{3} (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

$$\rho(abc) = M,$$

$$I_{zz} = M \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \right).$$

Puesto que

Fig. 5.5



El producto de inercia es

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \rho \int_0^c \int_0^b \int_0^a xy \, dx \, dy \, dz, \\ &= \rho \int_0^c \int_0^b \frac{a^2 y}{2} \, dy \, dz, \\ &= \rho \int_0^c \frac{a^2 b^2}{4} \, dz, \\ I_{xy} &= \rho \frac{a^2 b^2 c}{4} = M \left(\frac{ab}{4} \right). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2. Consideremos ahora un cuerpo rígido donde se puede hallar el momento de inercia sumando los momentos de inercia de las formas geométricas elementales que constituyen el cuerpo rígido. La rueda de la figura 5.6 consiste de una llanta delgada con diámetro de 75 cm y peso de 12 kg, su espesor es despreciable; un tambor cilíndrico de 12.5 cm de diámetro y con peso de 6 kg y cuatro rayos que pesan 3 kg cada uno. Para hallar I_{zz} en esta rueda es conveniente usar una tabla (como la tabla 5.1) donde se tabulan el momento de inercia $I_{c.c.}$ y el término de traslación $M\rho_z^2$ para cada elemento a fin de facilitar los cálculos.

En la descripción del movimiento del cuerpo rígido las ecuaciones angulares se simplifican enormemente si se elige un sistema de ejes (ejes principales) para los cuales los productos de inercia son cero. Afortunadamente, siempre existe tal sistema de ejes. Un teorema muy importante llamado el *teorema de los ejes principales* establece: En cualquier punto de un cuerpo rígido es posible hallar un sistema de ejes rectangulares de coordenadas tal que los productos de inercia sean cero y solamente existan los tres momentos de inercia. Estos valores de los momentos de inercia se llaman “momentos principales de inercia” con relación a los ejes

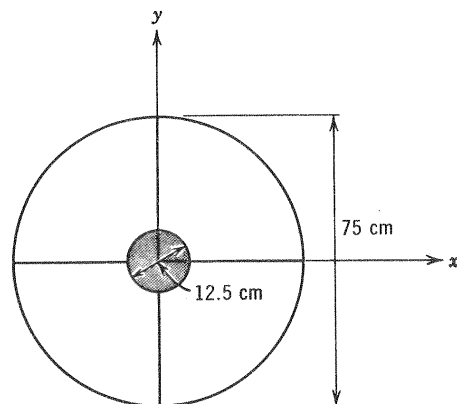


Fig. 5.6

TABLA 5.1

Parte	$I_{c.c.}$	$M\rho_z^2$	I_{zz}
Llanta	$Mr^2 = \left(\frac{12}{9.8}\right) (0.375)^2 = 0.16$	0	0.16
Tambor	$\frac{1}{2} Mr^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{6}{9.8}\right) (0.0625)^2 = 0.0012$	0	0.0012
4 rayos	$(4) \left(\frac{1}{12}\right) ML^2 = \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{3}{9.8}\right) (0.3125)^2 = 0.01$	$(4) \left(\frac{3}{9.8}\right) (0.2187)^2 = 0.059$	0.069
$\sum_i (I_{c.c.})_i = 0.1712$			$\sum_i M_i (\rho_z^2)_i = 0.059$
			$I_{zz} = 0.2302 \text{ kg-m}^2/\text{seg}^2$

principales. Queda más allá de la finalidad de este libro demostrar este teorema o presentar el método de hallar los ejes principales para un cuerpo rígido arbitrario.^{1,2} Sin embargo, según se estableció previamente, para cualquier cuerpo rígido que tiene dos planos de simetría perpendiculares, se puede determinar por observación un sistema de ejes principales, es decir, haciendo que dos de los planos de coordenadas coincidan con los planos de simetría. El resto de este capítulo está destinado al movimiento de ciertos cuerpos rígidos que tienen dos planos de simetría perpendiculares y, consecuentemente, los ejes principales se pueden elegir por observación.

5.4 Traslación de un cuerpo rígido. El tipo más simple de movimiento de un cuerpo rígido es en el que cada partícula del cuerpo tiene el mismo desplazamiento y por ende la misma velocidad y aceleración. O de otra manera, la traslación es el movimiento para el que $\bar{\omega} = 0$. Entonces las ecuaciones de movimiento tienen esta forma sencilla

$$\bar{F} = M(\ddot{x}_c\bar{i} + \ddot{y}_c\bar{j} + \ddot{z}_c\bar{k}), \quad (5.18)$$

$$\bar{M}' = M'_x\bar{i} + M'_y\bar{j} + M'_z\bar{k} = 0. \quad (5.19)$$

En la ecuación 5.18 los ejes coordenados generalmente se pueden elegir de manera que una o dos de las componentes de la aceleración sean cero. La ecuación 5.19 se debe tomar con respecto a un punto O' situado en tal forma que el término $\bar{\rho}_c \times M\ddot{\bar{R}}$ de la ecuación 4.30 sea cero. El único punto que satisface este requisito es el centro de masa. Esta ecuación da la información sobre las fuerzas de reacción necesarias para mantener un cuerpo rígido en traslación.

El término $\bar{\rho}_c \times M\ddot{\bar{R}}$ puede conservarse, entonces la ecuación de momentos para la traslación es

$$\bar{\rho}_c \times M\ddot{\bar{R}} = \bar{M}'. \quad (5.20)$$

La ventaja de usar esta ecuación es que ahora se puede tomar como O' cualquier punto conveniente. De esta manera se pueden eliminar de nuestra consideración las fuerzas concurrentes desconocidas, evitando las ecuaciones simultáneas. En principio ninguna ventaja se gana si se conserva este término.

¹ Housner and Hudson, *Applied Mechanics, Dynamics*, Van Nostrand, 1950, págs. 154-159.

² McCuskey, *Introduction to Advanced Dynamics*, Addison-Wesley, 1957, págs. 113-119.

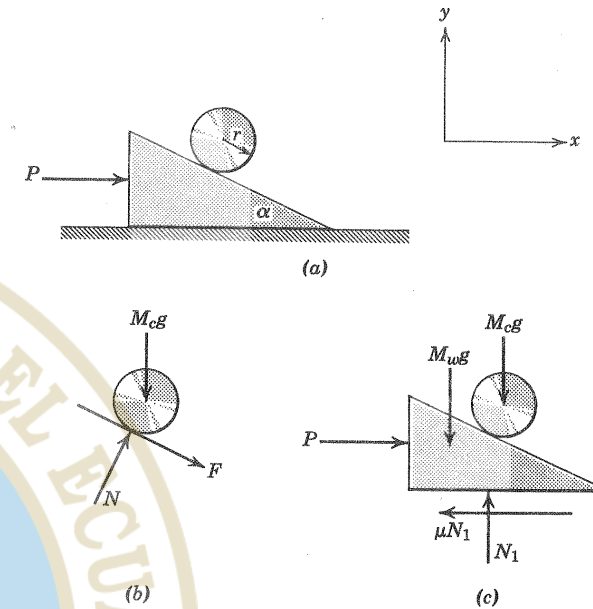


Fig. 5.7

Ejemplo 5.3. Determinar la fuerza P necesaria para mantener el cilindro en una posición fija con relación a la cuña. El coeficiente de rozamiento entre el cilindro y la cuña es f y entre la cuña y el plano horizontal es μ .

Las ecuaciones de movimiento para el cilindro son

$$Fr\bar{k} = 0,$$

$$F = 0,$$

$$N(\sin \alpha \bar{i} + \cos \alpha \bar{j}) - M_c g \bar{j} = M_c \ddot{x} \bar{i}.$$

$$N = \frac{M_c g}{\cos \alpha},$$

$$\ddot{x} = g \tan \alpha.$$

De la figura 5.7c podemos escribir

$$(P - \mu N_1)\bar{i} + (N_1 - M_w g - M_c g)\bar{j} = (M_w + M_c)g \tan \alpha \bar{i},$$

de la cual

$$P = (M_w + M_c)(\mu + \tan \alpha)g.$$

Ejemplo 5.4. El ángulo uniforme de hierro ABC tiene una masa M . Está articulado en D y sostenido por un cable en E . Si el cable tiene una fuerza de

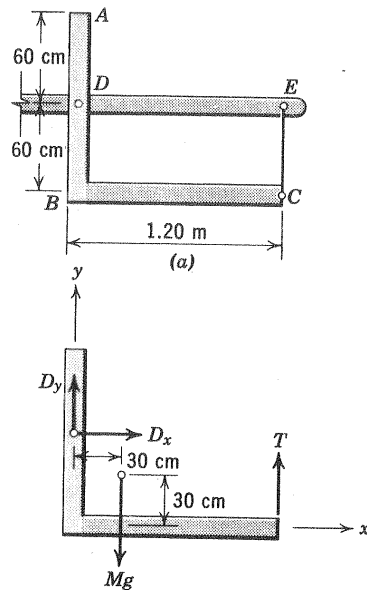


Fig. 5.8

ruptura T , hallar la aceleración mínima $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$ necesaria para romper el cable. Ver la Fig. 5.8.

El centro de masa se localiza con

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_j M_j \bar{R}_j}{\sum_j M_j} = \frac{(M/2)(60\bar{i}) + (M/2)(60\bar{j})}{M} = 30\bar{i} + 30\bar{j} \text{ cm.}$$

Para el movimiento del centro de masa tenemos

$$\bar{F} = M\bar{r}_c$$

$$D_x\bar{i} + (D_y + T - Mg)\bar{j} = M(a_x\bar{i} + a_y\bar{j}),$$

$$D_x = Ma_x,$$

$$D_y + T - Mg = Ma_y.$$

La ecuación angular

$$\bar{M}_c = 0$$

da

$$90T\bar{k} - 30D_x\bar{k} - 30D_y\bar{k} = 0.$$

Sustituyendo las ecuaciones a y b en la ecuación c , obtenemos

$$a_x + a_y = \frac{4T}{M} - g.$$

Ahora no es posible resolver a_x y a_y independientemente. Así que supondremos que $a_x = \lambda a_y$ donde λ es un parámetro escalar. Entonces

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = [1 + \lambda^2] \left[\frac{1}{1 + \lambda} \right]^2 \left[\frac{4T}{M} - g \right]^2.$$

Para hallar el valor de λ que hará que la aceleración sea mínima, calculamos

$$\frac{d}{d\lambda}(a^2) = \left[\frac{4T}{M} - g \right]^2 \{ [1 + \lambda^2] [-2(1 + \lambda)^{-3}] + [1 + \lambda]^{-2} (2\lambda) \} = 0.$$

Resolviendo para λ , se tiene

$$\lambda = 1.$$

Entonces la aceleración mínima es

$$\bar{a} = \left(\frac{2T}{M} - \frac{g}{2} \right) (30\bar{i} + 30\bar{j}).$$

Ejemplo 5.5. Determinar todas las fuerzas desconocidas que actúan sobre la barra lateral de una locomotora. El centro de masa de la barra está situado como se indica y ambos extremos están unidos mediante pasadores lisos. Las ruedas tienen una velocidad angular $-\omega\bar{k}$ rad/seg y una aceleración angular $-\dot{\omega}\bar{k}$ rad/seg/seg y ruedan sin deslizar. Ver figura 5.9.

La barra lateral tiene el movimiento de traslación curvilínea. La aceleración del pasador en A se puede determinar mediante la ecuación de movimiento relativo.

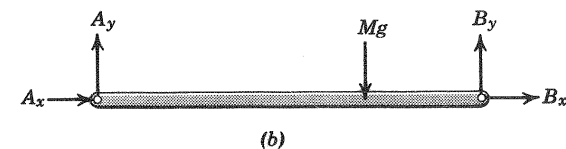
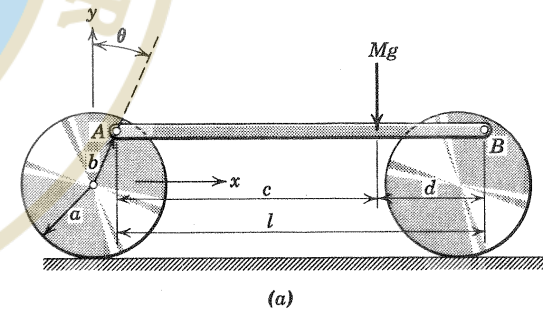


Fig. 5.9

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}),$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = a\ddot{\omega}\bar{i} - \dot{\omega}\bar{k} \times b(\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}) -$$

$$\omega\bar{k} \times [-\omega\bar{k} \times b(\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j})],$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = (a\ddot{\omega} + b\dot{\omega}\cos\theta - b\omega^2\sin\theta)\bar{i} + (-b\dot{\omega}\sin\theta - b\omega^2\cos\theta)\bar{j}.$$

Así que la ecuación lineal para la barra toma la forma

$$(A_x + B_x)\bar{i} + (A_y + B_y - Mg)\bar{j} = M[(a\ddot{\omega} + b\dot{\omega}\cos\theta - b\omega^2\sin\theta)\bar{i} + (-b\dot{\omega}\sin\theta - b\omega^2\cos\theta)\bar{j}].$$

Sustituyendo en la ecuación de momentos (5.20), con respecto al punto A, se tiene

$$c\bar{i} \times M[(a\ddot{\omega} + b\dot{\omega}\cos\theta - b\omega^2\sin\theta)\bar{i} + (-b\dot{\omega}\sin\theta - b\omega^2\cos\theta)\bar{j}]$$

$$= c\bar{i} \times -Mg\bar{j} + \bar{r}_c \times B_y\bar{j}.$$

Esta ecuación da directamente B_y como

$$B_y = \frac{Mc}{l}[g - b(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta)].$$

Ahora se puede resolver la ecuación lineal para A_y .

$$A_y = \frac{Md}{l}[g - b(\dot{\omega}\sin\theta + \omega^2\cos\theta)].$$

Todas las ecuaciones independientes de la dinámica del cuerpo rígido han sido escritas. El problema está indeterminado en las reacciones horizontales A_x y B_x . A falta de otra información adicional sobre este problema podría suponerse que $A_x = B_x$.

Entonces

$$A_x = B_x = \frac{M}{2}[a\ddot{\omega} + b(\dot{\omega}\cos\theta - \omega^2\sin\theta)].$$

5.5 Movimiento plano de un cuerpo rígido. En el movimiento plano de un cuerpo rígido, cada elemento del cuerpo se mueve paralelamente a algún plano de referencia que está fijo en un sistema inercial primario.

Sin embargo, esta restricción sobre el movimiento simplifica considerablemente las ecuaciones generales de movimiento. Consideremos el cuerpo rígido de la figura 5.10 que está restringido de tal manera que todos sus elementos se mueven en un plano paralelo al plano X_0Y_0 .

En un punto arbitrario O' del cuerpo rígido fijamos un sistema móvil de coordenadas xyz de manera que el plano xy sea paralelo al plano X_0Y_0 y el ángulo ϕ define el ángulo entre el eje x y la dirección fija del eje X_0 .

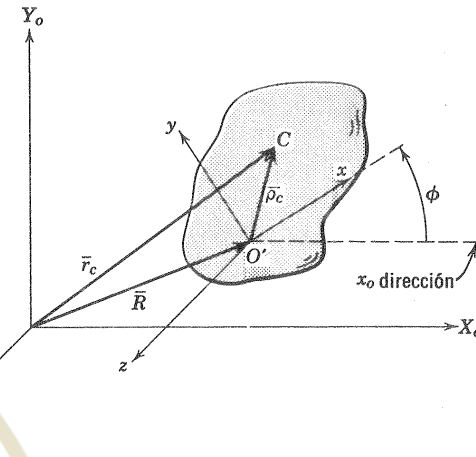


Fig. 5.10

Antes de establecer las ecuaciones de movimiento para este caso especial, a partir de las ecuaciones generales (5.10, 5.11), se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. $\ddot{\mathbf{r}}_c = \ddot{x}_c\bar{i} + \ddot{y}_c\bar{j}$ cuando $\ddot{z}_c$ es cero para el movimiento en un plano paralelo a X_0Y_0 . Obviamente, $\ddot{x}_c$ y $\ddot{y}_c$ son las componentes de la aceleración absoluta del centro de masa. Aquí, se escribió $\ddot{\mathbf{r}}_c$ en términos de los vectores unitarios del sistema móvil de coordenadas por conveniencia.
2. $\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{X}_0\bar{i}_0 + \ddot{Y}_0\bar{j}_0$ cuando $\ddot{Z}_0$ es cero para el movimiento en un plano paralelo a X_0Y_0 .
3. La velocidad angular del cuerpo rígido es $\bar{\omega} = \omega_z\bar{k} = \dot{\phi}\bar{k}$, debido a que la cinemática requiere que el plano xy permanezca paralelo al plano X_0Y_0 y de ahí que el cuerpo solamente tiene una componente de velocidad angular normal al plano xy .

De la ecuación general de movimiento (5.11) las ecuaciones escalares de movimiento para el centro de masa, en este caso especial, son

$$\begin{aligned} F_x &= M\ddot{x}_c, \\ F_y &= M\ddot{y}_c, \\ F_z &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

y las ecuaciones angulares de movimiento (5.10) llegan a ser

$$\begin{aligned} M_x &= -I_{xx}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 = -I_{xx}\ddot{\phi} + I_{yz}\dot{\phi}^2, \\ M_y &= -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xx}\omega_z^2 = -I_{yz}\ddot{\phi} - I_{xx}\dot{\phi}^2, \\ M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z = I_{zz}\ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Es importante recordar que los momentos M_x , M_y y M_z están referidos al sistema móvil de coordenadas xyz . Si los ejes xyz no son ejes principales, es decir, $I_{xz} \neq 0$ e $I_{yz} \neq 0$, entonces los momentos con respecto a los ejes x y y deben existir, así que estaremos en el caso de un movimiento plano.

Si existen restricciones adicionales (por ejemplo, una rueda rodando a lo largo del eje X_0 sin deslizar) las aceleraciones lineal y angular estarán relacionadas. Estas relaciones se obtienen de la ecuación general de la cinemática de un cuerpo rígido

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_c + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{\rho}}_c). \quad (5.23)$$

De manera que, la solución de un problema de movimiento plano se obtiene si se satisfacen simultáneamente las ecuaciones 5.21, 5.22 y 5.23.

Ejemplo 5.6. Un cilindro homogéneo de masa M y radio a rueda sin deslizar hacia abajo de un plano inclinado. Hallar la velocidad angular del cilindro después de haber efectuado dos revoluciones y el mínimo coeficiente de rozamiento μ necesario para evitar el deslizamiento.

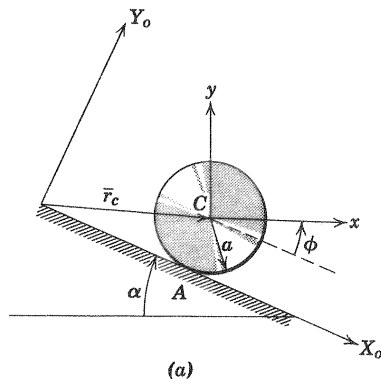
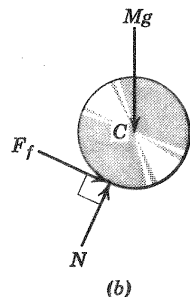


Fig. 5.11



Las ecuaciones lineales aplicadas al diagrama de cuerpo libre de la figura 5.11b, dan

$$F_f + Mg \sin \alpha = M\ddot{x}_c, \quad (a)$$

$$N - Mg \cos \alpha = 0. \quad (b)$$

Debido a que solamente el momento de inercia I_{zz} no vale cero, la única ecuación de momentos que tiene significado es la que se toma respecto al eje z que pasa por C ,

$$aF_f = \frac{1}{2} Ma^2 \ddot{\omega}. \quad (c)$$

En este punto tenemos cuatro incógnitas, F_f , N , $\ddot{x}_c$ y $\ddot{\omega}$, pero solamente tres ecuaciones. Sin embargo, para una rueda que está rodando sin deslizar contamos con la relación cinemática

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_c &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{a}}_0 + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{a}}_0, \\ \ddot{x}_c &= -a\ddot{\omega}. \end{aligned} \quad (d)$$

Resolviendo las ecuaciones a, b, c y d, simultáneamente, tenemos

$$F_f = -\frac{Mg}{3} \sin \alpha,$$

$$N = Mg \cos \alpha,$$

$$\ddot{x}_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha,$$

$$\ddot{\omega} = -\frac{2g}{3a} \sin \alpha.$$

El valor límite de μ es

$$\left| \frac{F_f}{N} \right| = \frac{\tan \alpha}{3}.$$

Para hallar la velocidad angular después de dos revoluciones usamos

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\phi},$$

$$\int_0^\omega \omega d\omega = \int_0^{-4\pi} -\frac{2g}{3a} \sin \alpha d\phi,$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{8\pi g}{3a} \sin \alpha,$$

$$\bar{\omega} = -4 \left[\frac{\pi g}{3a} \sin \alpha \right]^{1/2} \bar{k}_0.$$

En vista de que el punto de contacto A tiene una aceleración dirigida hacia el centro geométrico de la rueda, que en este caso también es el centro de masa, el punto A podría haberse utilizado como O' (condición 3 de la sección 4.6).

Esta ecuación elimina F_f y da directamente $\dot{\omega}$. Por tanto

$$-Mga \sin \alpha = \frac{3}{2} Ma^2 \dot{\omega},$$

$$\dot{\omega} = -\frac{2g}{3a} \sin \alpha.$$

Ejemplo 5.7. El cilindro de masa m rueda sin deslizar sobre un prisma de masa M . El coeficiente de rozamiento sobre el plano horizontal es cero. Hallar la aceleración del prisma y la fuerza normal entre m y M . Ver figura 5.12.

Para el prisma,

$$\bar{\mathbf{F}} = M\ddot{\mathbf{R}},$$

$$-N \sin \alpha - F_f \cos \alpha = M\ddot{X}_M.$$

Para el cilindro,

$$\bar{\mathbf{F}} = m\ddot{\mathbf{r}}_c,$$

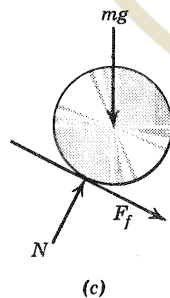
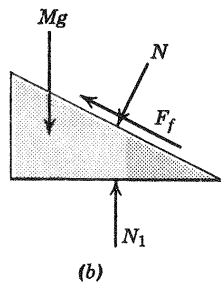
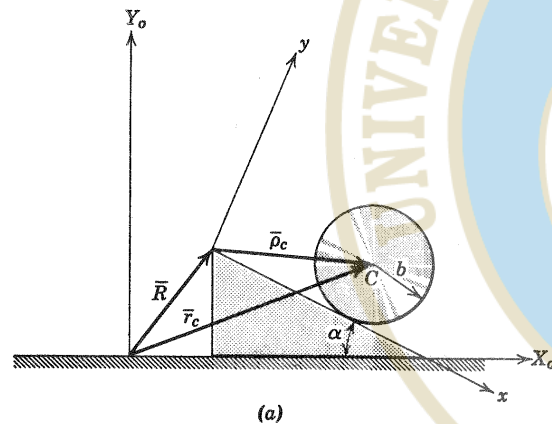


Fig. 5.12

$$F_f \bar{\mathbf{i}} + N \bar{\mathbf{j}} - mg \bar{\mathbf{j}}_0 = m[\ddot{X}_M \bar{\mathbf{i}}_0 + a \bar{\mathbf{i}}] = m[\ddot{X}_M \bar{\mathbf{i}}_0 + \dot{\omega} \bar{\mathbf{k}} \times b \bar{\mathbf{j}}]$$

o sea

$$F_f \bar{\mathbf{i}} + N \bar{\mathbf{j}} - mg(-\sin \alpha \bar{\mathbf{i}} + \cos \alpha \bar{\mathbf{j}}) = m[\ddot{X}_M(\cos \alpha \bar{\mathbf{i}} + \sin \alpha \bar{\mathbf{j}}) - b \dot{\omega} \bar{\mathbf{i}}].$$

La ecuación de cinemática ya ha sido incorporada en la expresión para $\ddot{r}_c$.

También,

$$\bar{\mathbf{M}}_c = \dot{\mathbf{H}}_c,$$

$$-b \bar{\mathbf{j}} \times F_f \bar{\mathbf{i}} = \frac{1}{2} mb^2 \dot{\omega} \bar{\mathbf{k}}.$$

Las cuatro ecuaciones escalares que deben resolverse simultáneamente para las cuatro incógnitas N , $\ddot{X}_M$, F_f y $\dot{\omega}$, son

$$-N \sin \alpha - F_f \cos \alpha = M\ddot{X}_M,$$

$$F_f + mg \sin \alpha = m[\ddot{X}_M \cos \alpha - b \dot{\omega}],$$

$$N - mg \cos \alpha = m\ddot{X}_M \sin \alpha,$$

$$bF_f = \frac{1}{2} mb^2 \dot{\omega}.$$

La solución de estas ecuaciones da

$$\ddot{X}_M = -\frac{mg \sin 2\alpha}{m(1 + 2 \sin^2 \alpha) + 3M}$$

y

$$N = \frac{mg \cos \alpha (m + 3M)}{m(1 + 2 \sin^2 \alpha) + 3M}$$

Nótese que si el numerador y el denominador de la expresión para N se dividen entre M y se hace que M tienda al infinito, N se aproxima a $mg \cos \alpha$, que es la expresión para N en el problema anterior.

Ejemplo 5.8. Un disco de masa despreciable rueda sin deslizar sobre un plano inclinado. Dos partículas, cada una de masa m , como se puede ver están unidas a la periferia del disco. Ambas están situadas a una distancia b del plano del disco, pero una a cada lado. Si el sistema está restringido de tal manera que el disco tiene movimiento plano, determinar los momentos que actúan sobre el disco. Cuando $t = 0$, $\dot{\phi} = \dot{\omega} = 0$.

Con respecto al sistema de coordenadas xyz fijo en el disco, los momentos y productos de inercia son

$$I_{xx} = 2ma^2, \quad I_{xy} = 0;$$

$$I_{yy} = 2mb^2, \quad I_{yz} = 2mab;$$

$$I_{zz} = 2ma^2, \quad I_{zx} = 0.$$

Las ecuaciones de momentos (5.22) llegan a ser

$$M_x = 2mab\omega_z^2, \quad (a)$$

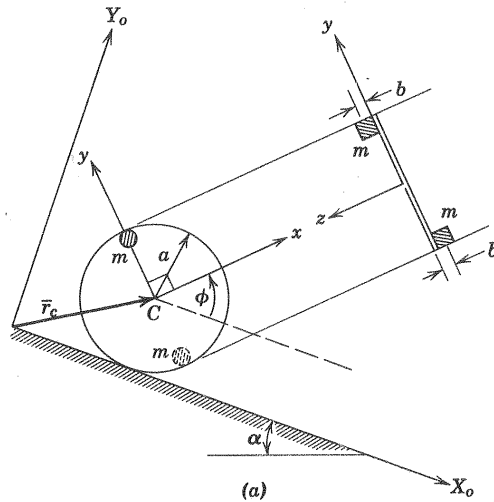


Fig. 5.13

$$M_y = -2mab\dot{\omega}_z,$$

$$aF_f = 2ma^2\dot{\omega}_z.$$

Para la ecuación lineal tenemos

$$F_f + 2mg \sin \alpha = -2ma\dot{\omega}_z.$$

Las ecuaciones c y d dan

$$\dot{\omega}_z = -\frac{g \sin \alpha}{2a}, \quad \omega_z = -\frac{g \sin \alpha}{2a} t, \quad \phi = -\frac{g \sin \alpha}{4a} t^2.$$

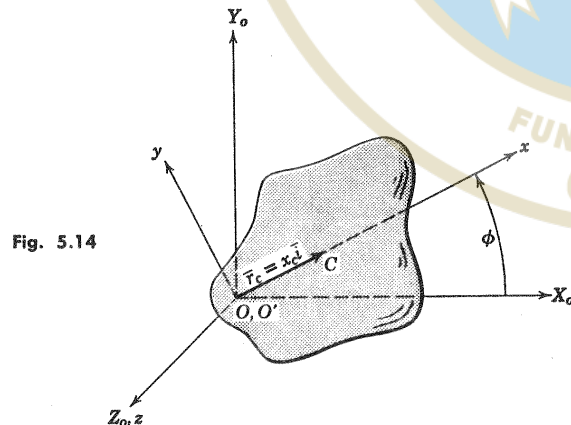


Fig. 5.14

Entonces

$$M_y = mbg \sin \alpha$$

y

$$M_x = \frac{mbg^2 \sin^2 \alpha t^2}{2a} = -2mbg\phi \sin \alpha.$$

Estos momentos están referidos al sistema de coordenadas xyz y por lo tanto gira con el disco. Los momentos de restricción referidos al sistema $X_0Y_0Z_0$ son

$$M_{x_0} = M_x \cos \phi - M_y \sin \phi,$$

$$M_{y_0} = M_x \sin \phi + M_y \cos \phi,$$

donde ϕ está como antes.

Estos son los momentos que deben ser proporcionados por la inclinación (digamos un carril o una guía) para hacer que el disco tenga movimiento plano. Si estos momentos de restricción no se proporcionan el disco se moverá balanceándose quedando fuera del plano X_0Y_0 , esto es, ω_x y ω_y no serán cero y el movimiento llega a ser mucho más complejo.

Eje fijo de rotación. Un caso especial de movimiento plano ocurre cuando un cuerpo rígido está obligado a girar alrededor de un eje de dirección fija. Por conveniencia tomaremos el eje de rotación coincidiendo con el eje z y el eje x orientado de manera que pase por el centro de masa del cuerpo rígido, tal como se muestra en la figura 5.14.

El centro de masa se mueve en una trayectoria circular alrededor del eje z y por lo tanto su aceleración estará dada por

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -x_c\omega_z^2\mathbf{i} + x_c\dot{\omega}_z\mathbf{j}.$$

Las ecuaciones de movimiento para el centro de masa toman la forma

$$F_x = -Mx_c\omega_z^2 = -Mx_c\dot{\phi}^2, \quad (5.24)$$

$$F_y = Mx_c\dot{\omega}_z = Mx_c\ddot{\phi}.$$

Admitiendo que la ecuación de movimiento angular (5.10) previamente deducida, también se cumple para un origen fijo en un sistema inercial primario, las ecuaciones de momentos son

$$\begin{aligned} M_x &= -I_{zx}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 = -I_{zx}\ddot{\phi} + I_{yz}\dot{\phi}^2, \\ M_y &= -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{zx}\omega_z^2 = -I_{yz}\ddot{\phi} - I_{zx}\dot{\phi}^2, \\ M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z = I_{zz}\ddot{\phi}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

en este caso, tanto las fuerzas como los momentos están referidos al sistema móvil de coordenadas.

Ejemplo 5.9. Una barra delgada AB de longitud l y masa M se hace girar alrededor de un eje vertical con una velocidad constante $\omega\mathbf{k}$. Determinar todas las

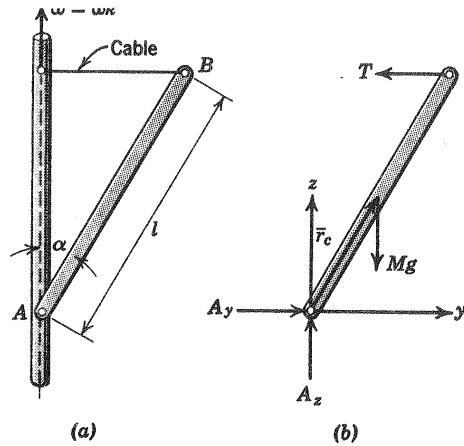


Fig. 5.15

fuerzas que actúan sobre la barra. El apoyo en A es un pasador liso. Ver figura 5.15.

Para el movimiento del centro de masa

$$\vec{F} = M\vec{r}_c$$

$$(A_y - T)\vec{j} + (A_z - Mg)\vec{k} = M \left\{ \omega\vec{k} \times \left[\omega\vec{k} \times \frac{l}{2} (\sin\alpha\vec{j} + \cos\alpha\vec{k}) \right] \right\} \quad (a)$$

El único producto de inercia no nulo es I_{yz} . Entonces las ecuaciones de momentos son

$$M_x = I_{yz}\omega^2,$$

$$M_y = 0,$$

$$M_z = 0.$$

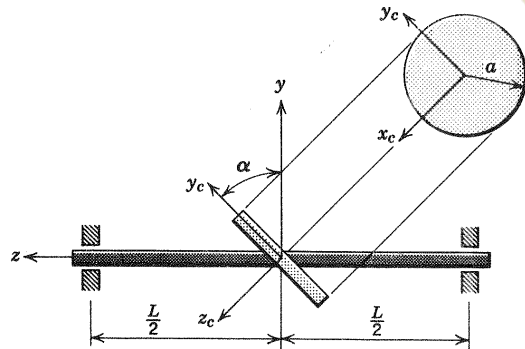


Fig. 5.16

Se puede determinar I_{yz} por integración directa.

$$I_{yz} = \int yz \, dm = \int_0^l (r \sin\alpha) (r \cos\alpha) \frac{M}{l} dr = \frac{Ml^2}{6} \sin 2\alpha.$$

Sustituyendo en la ecuación b, tenemos

$$-\frac{Mgl}{2} \sin\alpha + Tl \cos\alpha = \frac{Ml^2}{6} \sin 2\alpha \omega^2.$$

Esta ecuación da

$$T = \frac{Mg}{2} \tan\alpha + \frac{Ml}{3} \sin\alpha \omega^2.$$

De la ecuación a

$$A_z = Mg$$

y

$$A_y = T - \frac{Ml}{2} \sin\alpha \omega^2 = \frac{Mg}{2} \tan\alpha - \frac{Ml}{6} \sin\alpha \omega^2.$$

Estas fuerzas giran con la barra.

Ejemplo 5.10. Un disco circular delgado de masa M y radio a está fijo en su centro de masa a un eje. Como se muestra, el disco está inclinado respecto al eje un ángulo α . Si el conjunto gira con una velocidad angular constante $\omega\vec{k}$, hallar las reacciones de los rodamientos sobre el eje. Ver figura 5.16.

Ya que $\ddot{\vec{r}}_c = 0$,

$$\vec{F} = 0.$$

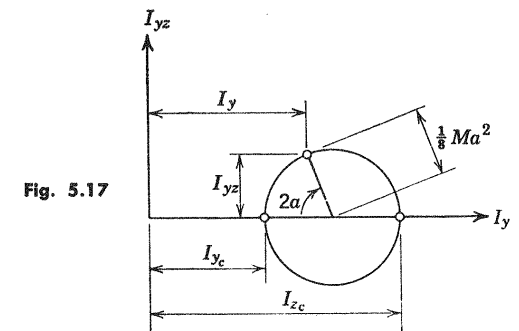
Las ecuaciones de momentos son

$$M_x = I_{yz}\omega^2,$$

$$M_y = 0,$$

$$M_z = 0.$$

El producto de inercia I_{yz} se puede determinar con mayor facilidad mediante el uso del círculo de Mohr. En vista de que el disco es esencialmente una dis-



tribución plana de material, se puede usar el círculo de Mohr para momentos y productos de inercia de áreas.

Para los ejes principales x_c, y_c, z_c , tenemos

$$I_{y_c} = \frac{1}{4} Ma^2,$$

$$I_{x_c} = \frac{1}{2} Ma^2,$$

$$I_{y_c z_c} = 0.$$

Dibujando estos valores se obtiene el círculo de Mohr que se ve en la figura 5.17. Recorriendo el círculo en el sentido de las manecillas del reloj desde el punto I_{y_c} , $I_{y_c z_c}$ un ángulo 2α , llegamos al punto cuya ordenada representa el producto de inercia con respecto al eje y y al eje adelantado 90° . Este es el producto de inercia buscado $I_{yz} = \frac{1}{8} Ma^2 \sin 2\alpha$. Entonces

$$M_x = \frac{1}{8} Ma^2 \sin 2\alpha \omega^2.$$

Este par dinámico lo proporcionan las reacciones de los rodamientos en la dirección y . Estas reacciones son $|R_L| = |R_R| = (Ma^2/8L) \sin 2\alpha \omega^2$ y actúan como se muestra en la figura 5.18.

5.6 Movimiento de un trompo que gira. En esta sección examinaremos algunas de las características del movimiento de un cuerpo rígido simétrico tal como un trompo o un giróscopo que está girando alrededor de un punto fijo en un sistema inercial primario $X_0 Y_0 Z_0$. Ver figura 5.19.

Supondremos que no hay pares debidos al rozamiento en la punta y por lo tanto el único momento que actúa sobre el sistema se debe a la fuerza de gravedad que actúa en el centro de masa del trompo.

Además, nos apartaremos de nuestra práctica anterior de *fijar* el sistema móvil de coordenadas xyz en el trompo y procederemos de la siguiente manera:

1. El eje z coincidirá con el eje longitudinal del trompo.
2. El eje x siempre estará en el plano $X_0 Y_0$.

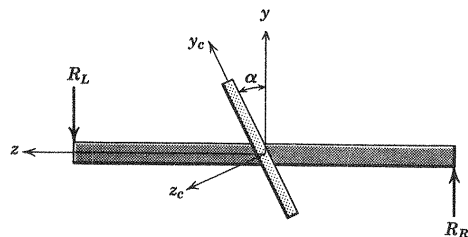


Fig. 5.18

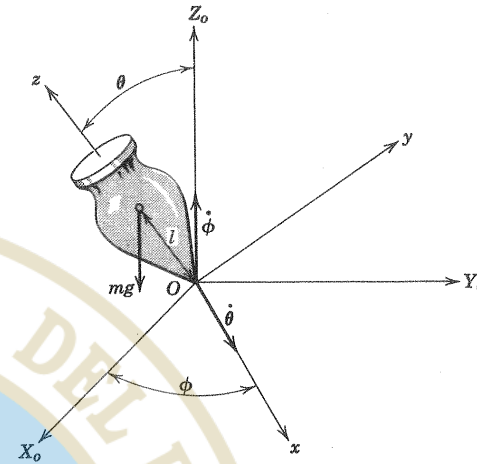


Fig. 5.19

3. El eje y completará la terna xyz .
4. El trompo gira alrededor del eje z con rapidez angular Ω con respecto al sistema xyz .

El ángulo θ define el ángulo con que el eje longitudinal del trompo se desvía de la vertical, mientras que el ángulo ϕ se mide positivo en el sentido contrario a las manecillas del reloj y es el ángulo entre el eje X_0 y el eje x en el plano $X_0 Y_0$.

La velocidad angular de la terna xyz es

$$\bar{\omega}_t = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}.$$

La velocidad angular del cuerpo rígido es

$$\bar{\omega}_b = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + (\omega_z + \Omega) \bar{k}.$$

Tanto $\bar{\omega}_t$ como $\bar{\omega}_b$ se describen en términos del sistema móvil de coordenadas (xyz) . Debido a que los planos coordenados xz y yz son planos de simetría para el trompo, los productos de inercia son nulos y el momento angular para el cuerpo es

$$\bar{H} = I_x \omega_x \bar{i} + I_y \omega_y \bar{j} + I_z (\omega_z + \Omega) \bar{k},$$

donde el único índice de las I se refiere a un momento de inercia.

El origen de nuestro sistema móvil de coordenadas se fija en un sistema inercial primario; de ahí que

$$\dot{\bar{H}} = \bar{M} = mgl \sin \theta \bar{i}, \quad (5.26)$$

donde $\bar{M}$ es el momento de todas las fuerzas externas con respecto al origen O .

Antes de derivar $\bar{H}$ con respecto al tiempo, se pueden hacer las siguientes observaciones:

1. $I_x = I_y$ por la simetría del trompo.

2. I_x e I_y , que son los momentos de inercia respecto a los ejes x y y , no varían con el tiempo aunque el trompo gira en torno al eje z , debido a que el eje z es un eje de revolución.

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{H}} = I_x \dot{\omega}_x \bar{i} + I_y \dot{\omega}_y \bar{j} + I_z (\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}) \bar{k} \\ + I_x \omega_x \frac{d\bar{i}}{dt} + I_y \omega_y \frac{d\bar{j}}{dt} + I_z (\omega_z + \Omega) \frac{d\bar{k}}{dt} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Recordando que

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_t \times \bar{i},$$

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_t \times \bar{j},$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_t \times \bar{k},$$

Entonces

$$H = I_x \dot{\omega}_x \bar{i} + I_y \dot{\omega}_y \bar{j} + I_z (\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}) \bar{k} + \bar{\omega}_t \times \bar{H} = mgl \sin \theta \bar{i}. \quad (5.28)$$

Efectuando las operaciones indicadas y escribiendo las ecuaciones escalares, se obtiene

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x - I_y \omega_y \omega_z + I_z \omega_y (\omega_z + \Omega) &= mgl \sin \theta, \\ I_x \omega_x \omega_z + I_y \dot{\omega}_y - I_z \omega_x (\omega_z + \Omega) &= 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$-I_x \omega_x \omega_y + I_y \omega_x \omega_y + I_z (\dot{\omega}_z + \dot{\Omega}) = 0.$$

Si se hubiera seguido la práctica anterior de fijar completamente el sistema de coordenadas xyz al cuerpo rígido, entonces se hubiera tenido

$$\bar{\omega}_t = \bar{\omega}_b = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}.$$

Las ecuaciones escalares (5.29) serían entonces

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x - I_y \omega_y \omega_z + I_z \omega_y \omega_z &= mgl \sin \theta, \\ I_x \omega_x \omega_z + I_y \dot{\omega}_y - I_z \omega_x \omega_z &= 0, \\ -I_x \omega_x \omega_y + I_y \omega_x \omega_y + I_z \dot{\omega}_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.29a)$$

A las ecuaciones 5.29a con frecuencia se les llama ecuaciones de Euler para el movimiento del trompo. La diferencia básica entre las ecuaciones 5.29 y 5.29a es simplemente que las primeras conservan la identidad de la rapidez de rotación del trompo alrededor del eje z como una cantidad separada.

Para discutir el movimiento del trompo en términos de las coordenadas angulares θ y ϕ se pueden expresar las componentes de $\bar{\omega}_t$ en la siguiente forma:

$$\omega_x = \dot{\theta},$$

$$\omega_y = \dot{\phi} \sin \theta,$$

$$\omega_z = \dot{\phi} \cos \theta.$$

Ahora las ecuaciones escalares (5.29) toman la forma

$$\begin{aligned} I_x \frac{d}{dt} (\dot{\theta}) + I_x \dot{\phi} \sin \theta (\dot{\phi} \cos \theta + \Omega) - I_y \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta &= mgl \sin \theta, \\ I_y \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \sin \theta) + I_x \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta - I_z \dot{\theta} (\dot{\phi} \cos \theta + \Omega) &= 0, \\ I_z \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \cos \theta + \Omega) + I_y \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta - I_x \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Admitiendo que $I_y = I_x = I$, la última de las ecuaciones anteriores llega a ser

$$I_z \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \cos \theta + \Omega) = 0. \quad (5.31)$$

Por lo tanto

$$\dot{\phi} \cos \theta + \Omega = \text{constante} = K \quad (5.32)$$

y la velocidad angular total del trompo en la dirección z permanece constante.

En seguida examinaremos las implicaciones de una condición en que la velocidad de rotación Ω en torno al eje z , y la rapidez de precesión $\dot{\phi}$ sean ambas constantes.

De la ecuación 5.32, si $\dot{\phi}$ y Ω son constantes, entonces

$$\cos \theta = \text{constante} = \cos \theta_0 \quad (5.33)$$

y el trompo tiene una precesión alrededor del eje Z_0 con un ángulo constante de inclinación θ_0 . De la primera de las ecuaciones 5.30 se sigue que para esta condición

$$(I_z - I_y) \cos \theta_0 \dot{\phi}^2 + I_z \dot{\Omega} \dot{\phi} = mgl. \quad (5.34)$$

Resolviendo la ecuación 5.34 para $\dot{\phi}$, obtenemos

$$\dot{\phi} = \frac{-I_z \Omega \pm [I_z^2 \Omega^2 + 4mgl(I_z - I_y) \cos \theta_0]^{1/2}}{2(I_z - I_y) \cos \theta_0}. \quad (5.35)$$

Observamos de la ecuación 5.35 que en general hay dos valores para la rapidez de precesión $\dot{\phi}$. Estas se denominan precesión "rápida" y "lenta".

Para cualquier movimiento real de este tipo $\dot{\phi}$ debe ser un número real. De ahí que la cantidad contenida en el paréntesis rectangular de la ecuación 5.35 debe ser mayor de cero y para un valor dado de θ_0 , la rapidez de rotación debe satisfacer la desigualdad

$$I_z^2 \Omega^2 + 4mgl(I_z - I_y) \cos \theta_0 \geq 0. \quad (5.36)$$

Si hacemos $\theta_0 = \pi/2$ en la ecuación 5.34, entonces

$$I_z \Omega \dot{\phi} = mgl$$

y solamente una rapidez de precesión existe y es

$$\dot{\phi} = \frac{mgl}{I_z \Omega}. \quad (5.37)$$

La ecuación 5.37 también puede obtenerse simplemente examinando la derivada del vector momento angular, que debe ser igual al momento aplicado. En la figura 5.20 se muestra un giróscopo simple que ha sido idealizado como un disco pesado montado en un eje ligero, apoyado en el origen O . Debemos examinar la posibilidad de movimiento bajo las condiciones $\theta = \text{constante} = \pi/2$. Para estas condiciones

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0, \\ \omega_y &= \dot{\phi}, \\ \omega_z &= 0. \end{aligned}$$

La cantidad de movimiento angular llega a ser

$$\bar{H} = I_y \dot{\phi} \bar{j} + I_z \Omega \bar{k}.$$

Estas componentes de la cantidad de movimiento angular se muestran en la figura 5.20. El momento que actúa sobre el giróscopo es $mgl\bar{i}$ que, como se muestra, está a lo largo del eje x . Cuando $\theta = \text{constante} = \pi/2$ la única componente del momento angular que cambia con el tiempo es $I_z \Omega \bar{k}$. Además, la razón de cambio de la componente z del momento angular debe ser igual en magnitud y dirección al momento. De ahí se sigue que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(I_z \Omega)}{\Delta t} = mgl. \quad (5.38)$$

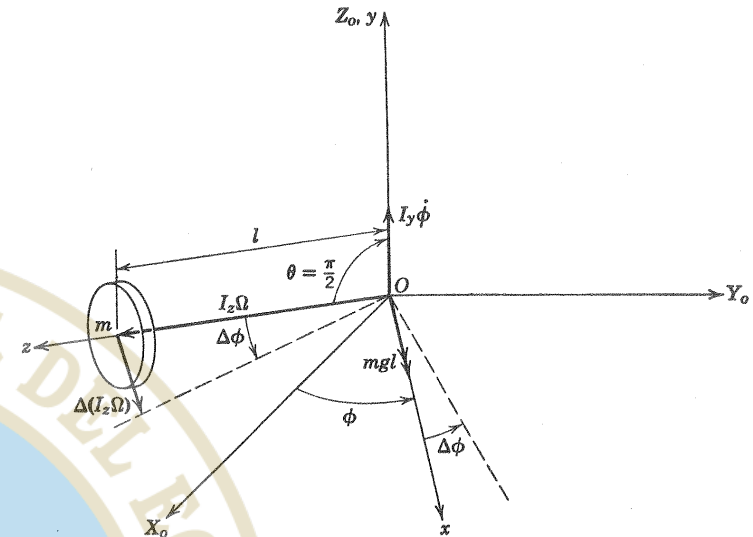


Fig. 5.20

Además, de la figura 5.20,

$$\Delta(I_z \Omega) = I_z \Omega \Delta\phi. \quad (5.39)$$

De la sustitución de $\Delta(I_z \Omega)$ tomada de la 5.39, en la ecuación 5.38, se deduce que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \right) I_z \Omega = mgl$$

o sea

$$\dot{\phi} = \frac{mgl}{I_z \Omega},$$

que es el mismo resultado que se obtuvo anteriormente.

Es interesante e importante hacer notar que el eje del giróscopo se mueve en ángulo recto con la dirección en que intuitivamente se esperaría que se moviera bajo el momento aplicado.

Si, por ejemplo, se tuviera una rueda de bicicleta girando alrededor de un eje vertical como se muestra en la figura 5.21 y se aplicara un momento alrededor del eje X_0 , la rueda empezaría a moverse con una precesión respecto al eje Y_0 .

Para este caso, la cantidad de movimiento angular total es $I_z \Omega$ dirigido como se muestra en la figura 5.21b. El momento del par C que está diri-

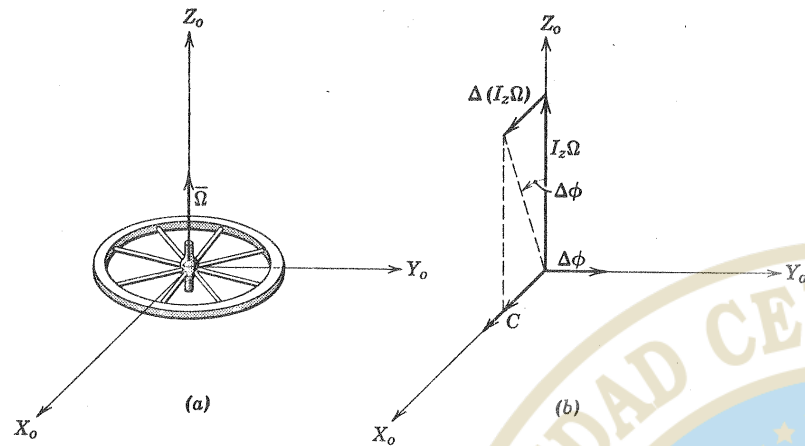


Fig. 5.21

gido a lo largo del eje X_0 exige el cambio del vector momento angular que se muestra, que solamente puede tenerse por una rotación o precesión alrededor del eje Y_0 .

Sustituyendo $mg\bar{l}$ por C en la ecuación 5.37, la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ es

$$\dot{\phi} = \frac{C}{I_z \Omega}$$

Ejemplo 5.11. Un pequeño aeroplano tiene una hélice de peso $W = 6$ kg, radio de giro $k_x = 60$ cm y gira con $N = 2200$ rpm en el sentido de las manecillas del reloj cuando se mira desde la cabina. Si el aeroplano se desplaza con una rapidez $v = 150$ km/h cuando da una vuelta hacia la izquierda, hallar el momento giroscópico ejercido sobre el aeroplano y determinar la dirección en que tiende a moverse la nariz del aeroplano. El radio de la vuelta es $R = 300$ m.

El momento necesario para que un cuerpo que gira tenga movimiento de precesión, está dado por

$$M = I_z \Omega \dot{\phi}$$

En términos de los datos del problema

$$M = \frac{W}{g} k_x^2 \frac{v}{R} \left(\frac{5}{18} \right) \left(\frac{2\pi N}{60} \right),$$

$$M = \frac{6}{9.8} (0.6)^2 \left(\frac{150}{300} \right) \left(\frac{5}{18} \right) \left(\frac{2\pi \times 2200}{60} \right) = 7 \text{ kg-m.}$$

El vector cantidad de movimiento angular apunta hacia adelante y, cuando el aeroplano toma la vuelta, ΔH es hacia la izquierda. Por tanto el vector mo-

mento también está dirigido hacia la izquierda. Este es el momento que ejerce el aeroplano sobre la hélice. La acción de la hélice sobre el aparato es opuesta y en consecuencia éste tiende a levantar la nariz.

Ejemplo 5.12. Sobre una mesa giratoria horizontal, que puede dar vueltas libremente alrededor de un eje vertical, se coloca un motor con dimensiones, peso y posición mostradas en la figura 5.22. La velocidad angular del motor con relación a la mesa giratoria es Ω . Determinar la velocidad angular $\bar{\omega}$ de la mesa giratoria que se necesita para reducir a cero la reacción vertical en el rodamiento del apoyo interior.

Las reacciones estáticas de los rodamientos, como se muestra en la figura 5.22b, es igual a $W/2$ cada una. Para reducir a cero la reacción en el apoyo interior se requiere el par $F_x \bar{l} = (W/2) \bar{l}$. Entonces la rotación de la mesa giratoria debe ser $\bar{\omega} = -\omega \bar{i}$ de manera que $\Delta \bar{H}$ tendrá la misma dirección que el par.

La magnitud de ω se determina de

$$\omega = \dot{\phi} = \frac{M}{I_z \Omega},$$

$$\omega = \frac{(W/2) \bar{l}}{1/2 (W/g) r^2 \Omega} = \frac{gl}{\Omega r^2},$$

$$\bar{\omega} = -\frac{gl}{\Omega r^2} \bar{i}.$$

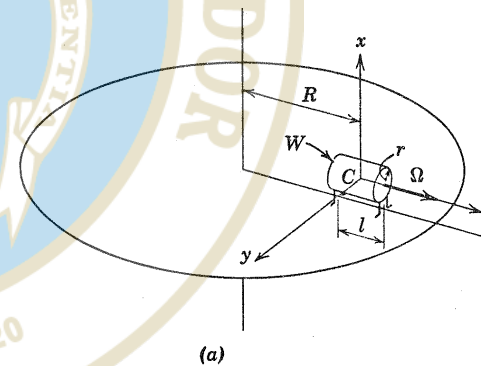


Fig. 5.22

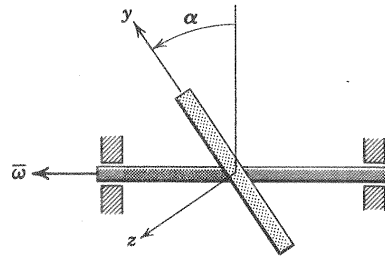


Fig. 5.23

Existirá una fuerza F_z adicional en el rodamiento que es la reacción al empuje. Esta se puede calcular de la ecuación lineal

$$F_z = M\ddot{z}_c,$$

$$F_z = -MR\omega^2 = -\frac{WRgl^2}{\Omega^2 r^4}.$$

Ejemplo 5.13. Resolver el ejemplo 5.10 usando las ecuaciones de Euler. En general estas ecuaciones toman la forma

$$\begin{aligned} M'_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z, \\ M'_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x, \\ M'_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y. \end{aligned} \quad (5.40)$$

En las ecuaciones 5.40 los momentos de inercia son momentos principales de inercia. Las componentes del momento y de la velocidad angular están referidas a los ejes principales xyz fijos en el cuerpo, que en este caso se pueden localizar por observación. Estos se muestran en la figura 5.23.

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{1}{4}Ma^2, & \omega_x &= 0; \\ I_{yy} &= \frac{1}{4}Ma^2, & \omega_y &= \omega \sin \alpha; \\ I_{zz} &= \frac{1}{2}Ma^2, & \omega_z &= \omega \cos \alpha. \end{aligned}$$

La ecuación 5.40 llega a ser

$$M_x = \left(\frac{1}{2}Ma^2 - \frac{1}{4}Ma^2 \right) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{8}Ma^2 \sin^2 \alpha \omega^2,$$

$$M_y = 0,$$

$$M_z = 0.$$

y se comprueba el resultado anterior. Aquí se obtiene una ventaja notable al utilizar las ecuaciones de Euler y los ejes principales.

5.7 Ecuaciones generales de movimiento para un cuerpo rígido.

Como se discutió en la sección 5.1, se requieren seis coordenadas para definir la posición de un cuerpo rígido en el espacio. En principio, se pueden obtener las seis coordenadas resolviendo las seis ecuaciones escalares de movimiento que se establecen de las dos ecuaciones vectoriales fundamentales de movimiento.

$$M\ddot{\mathbf{r}}_c = \bar{\mathbf{F}} \quad (\text{ecuación de movimiento del centro de masa})$$

y

$$\dot{\mathbf{H}}' = \bar{\mathbf{M}}' \quad (\text{ecuación de movimiento de rotación}).$$

Nuevamente debe hacerse hincapié de que en la primera de las ecuaciones anteriores $\ddot{\mathbf{r}}_c$ es la aceleración del centro de masa en un sistema inercial primario, en tanto que en la segunda ecuación el momento angular y los momentos se pueden expresar con relación a un sistema de coordenadas unido al cuerpo rígido, cuyo origen satisface cualquiera de los siguientes requisitos:

1. Está fijo en un sistema inercial primario.
2. Tiene una aceleración que pasa por el centro de masa del cuerpo rígido.
3. Está situado en el centro de masa del cuerpo rígido.

Generalmente es más útil fijar en el cuerpo rígido un sistema móvil de coordenadas que satisfaga el criterio 3 anterior y así se hará para la siguiente discusión.

Para facilidad del lector se reescribirán las seis ecuaciones escalares de movimiento

$$\begin{aligned} F_x &= M\ddot{x}_c, \\ F_y &= M\ddot{y}_c, \\ F_z &= M\ddot{z}_c. \end{aligned} \quad (5.41)$$

y las ecuaciones angulares de movimiento

$$\begin{aligned} M'_x &= (\dot{H}'_x - \omega_z H'_y + \omega_y H'_z), \\ M'_y &= (\dot{H}'_y - \omega_x H'_z + \omega_z H'_x), \\ M'_z &= (\dot{H}'_z - \omega_y H'_x + \omega_x H'_y), \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde

$$\begin{aligned} H'_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z, \\ H'_y &= -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ H'_z &= -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (5.43)$$

y

$$\begin{aligned}\dot{H}'_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - I_{xy}\dot{\omega}_y - I_{xz}\dot{\omega}_z, \\ \dot{H}'_y &= -I_{xy}\dot{\omega}_x + I_{yy}\dot{\omega}_y - I_{yz}\dot{\omega}_z, \\ \dot{H}'_z &= -I_{xz}\dot{\omega}_x - I_{yz}\dot{\omega}_y + I_{zz}\dot{\omega}_z.\end{aligned}\quad (5.44)$$

Si los ejes x, y, z son ejes principales del cuerpo rígido, entonces las ecuaciones 5.42 toman la forma

$$\begin{aligned}M'_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_{zz} - I_{yy}), \\ M'_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_{xx} - I_{zz}), \\ M'_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}).\end{aligned}\quad (5.45)$$

Las ecuaciones 5.45 se conocen como ecuaciones de Euler para el movimiento de un cuerpo rígido.

La solución de las ecuaciones 5.45 darían las velocidades angulares del cuerpo rígido en relación con el sistema móvil de coordenadas, pero no serían de gran utilidad para localizar la posición del cuerpo en el espacio. Por esta razón, de alguna manera se deben relacionar las velocidades angulares con ángulos entre los ejes móviles de coordenadas y algunas direcciones fijas en el sistema inercial primario. Una técnica para

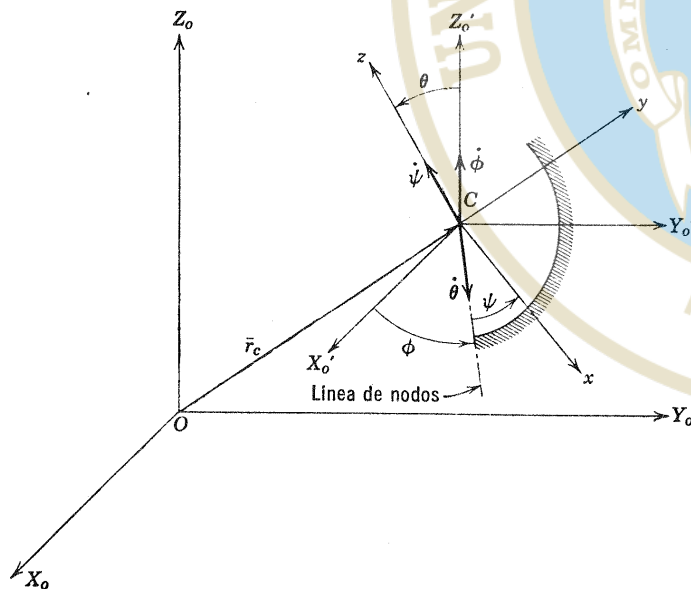


Fig. 5.24

relacionar de esta manera las velocidades angulares, ya se discutió en la sección 5.6 al tratar el movimiento de un trompo o un giróscopo.

Otra técnica más general es mediante el uso de los ángulos de Euler, que ahora serán estudiados.

En la figura 5.24 se muestra un cuerpo rígido en el espacio. El vector $\bar{r}_c$ localiza el centro de masa C del cuerpo rígido en el sistema inercial primario.

Los ejes del sistema de coordenadas $X'_0Y'_0Z'_0$ con su origen en el centro de masa se mueven con el cuerpo rígido, pero permanecen paralelos a los ejes $X_0Y_0Z_0$. Los ejes xyz están fijos en el centro de masa del cuerpo rígido.

Ahora se definirán los tres ángulos de Euler: θ , ϕ y ψ .

1. El ángulo θ es la inclinación del eje z' respecto del eje Z'_0 .
2. El ángulo ϕ es el ángulo entre la dirección fija del eje X'_0 y la intersección del plano xy con el plano $X'_0Y'_0$. Esta recta de intersección se conoce como la línea de nodos.
3. El ángulo ψ es el ángulo entre la línea de nodos y el eje x .

Si se conocen las coordenadas $X_0Y_0Z_0$ del centro de masa del cuerpo rígido y los tres ángulos de Euler, entonces queda definida la posición del cuerpo rígido en el espacio.

En la figura 5.24, se puede ver que las velocidades angulares $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ tienen las siguientes características geométricas:

1. $\dot{\theta}$ está dirigida a lo largo de la línea de nodos.
2. $\dot{\phi}$ está dirigida a lo largo del eje Z_0 .
3. $\dot{\psi}$ está dirigida a lo largo del eje z .

Entonces se deduce que la velocidad angular $\bar{\omega}$ del cuerpo rígido está relacionada con los ángulos de Euler en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi, \\ \omega_y &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta.\end{aligned}\quad (5.46)$$

Siempre es posible orientar los ejes xyz a lo largo de los ejes principales del cuerpo rígido. Esta elección de ejes simplifica considerablemente las ecuaciones diferenciales resultantes; de ahí que, en general, se emplearán las ecuaciones 5.45. Sustituyendo en las ecuaciones 5.45 las relaciones 5.46, las ecuaciones angulares de movimiento para el cuerpo rígido llegan a ser

$$M'_x = I_{xx} \frac{d}{dt} (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) + (I_{zz} - I_{yy}) (-\dot{\theta} \sin \psi$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}), \\
M'_y &= I_{yy} \frac{d}{dt} (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) + (I_{xx} - I_{zz}) (\dot{\theta} \cos \psi \\
& + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}), \\
M'_z &= I_{zz} \frac{d}{dt} (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) + (I_{yy} - I_{xx}) (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \\
& \times (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi).
\end{aligned} \quad (5.47)$$

Ejemplo 5.14. Como se muestra en la figura 5.25, un cilindro circular recto de masa M está sometido a una fuerza definida por el vector $F\mathbf{j}$ aplicada en su borde inferior. Determinar el desplazamiento del centro de gravedad y los ángulos de Euler como una función del tiempo, suponiendo las condiciones iniciales siguientes: Para $t = 0$,

$$\begin{aligned}
X_0 &= Y_0 = Z_0 = \dot{X}_0 = \dot{Y}_0 = \dot{Z}_0 = 0, \\
\phi_0 &= \psi_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = \dot{\psi}_0 = 0, \\
\theta_0 &= \theta_0.
\end{aligned}$$

En la figura 5.25, los ejes xyz son los ejes principales del cuerpo rígido con su origen en el centro de masa.

Las ecuaciones de Euler, para el movimiento angular, son

$$M'_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_{zz} - I_{yy}) = Fl,$$

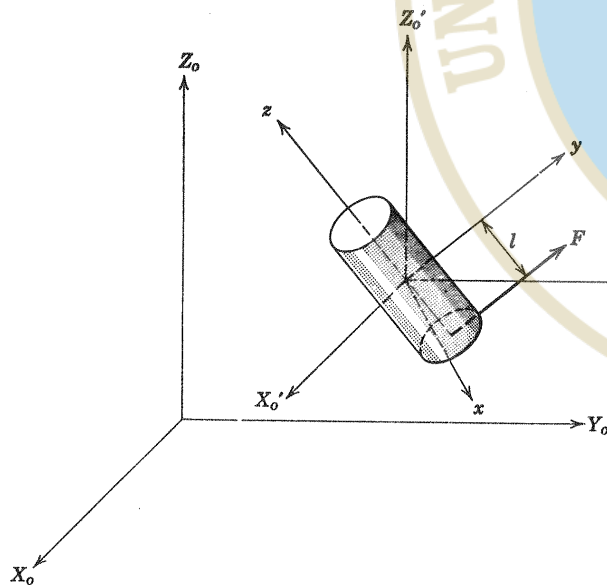


Fig. 5.25

$$\begin{aligned}
M'_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + \omega_x\omega_z(I_{xx} - I_{zz}) = 0, \\
M'_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_{yy} - I_{xx}) = 0.
\end{aligned} \quad (a)$$

De la simetría del cuerpo

$$I_{xx} = I_{yy} = I$$

y la tercera de las ecuaciones a toma la forma

$$I_{zz}\dot{\omega}_z = 0,$$

y por tanto

$$\omega_z = \text{constante}.$$

Admitiendo que

$$I_{zz}\omega_z = \text{momento angular alrededor del eje } z = H'_z$$

observamos que a causa de no producirse momentos alrededor de eje z , la componente H'_z de la cantidad de movimiento angular se conserva.

De las ecuaciones 5.46

$$\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$$

y de las condiciones iniciales

$$\dot{\psi}_0 = \dot{\phi}_0 = 0;$$

por lo tanto se deduce que

$$\omega_z = 0.$$

De la segunda de las ecuaciones a y teniendo en cuenta que $\omega_z = 0$, se sigue que

$$I_{yy}\dot{\omega}_y = 0$$

o sea

$$\omega_y = \text{constante}$$

y la cantidad de movimiento angular alrededor del eje y se conserva.

De las ecuaciones 5.46

$$\omega_y = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi$$

y de las condiciones iniciales en $t = 0$

$$\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0;$$

entonces

$$\omega_y = 0.$$

De la primera de las ecuaciones (a) de la cantidad de movimiento angular, tenemos ahora

$$I_{xx}\dot{\omega}_x = Fl = I\dot{\omega}_x.$$

Por lo tanto

$$\omega_x = \frac{Fl}{I}t + C_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi,$$

donde

$$C_1 = \text{constante de integración}$$

y ω_x ha sido sustituida por su equivalente tomada de la primera de las ecuaciones 5.46

De las condiciones iniciales $\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0$ para $t = 0$ se deduce que $C_1 = 0$ y

$$\omega_x = \frac{Fl}{I} t.$$

Ahora se pueden escribir las velocidades angulares ω_x , ω_y y ω_z en términos de los ángulos de Euler, esto es

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi = \frac{Fl}{I} t, \\ \omega_y &= -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi = 0, \\ \omega_z &= \dot{\theta} \cos \theta + \dot{\psi} = 0.\end{aligned}\quad (b)$$

Resolviendo las ecuaciones b para $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{Fl}{I} t \cos \psi, \\ \dot{\phi} &= \frac{Fl}{I \sin \theta} t \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= -\frac{Fl}{I \tan \theta} t \sin \psi.\end{aligned}\quad (c)$$

Las soluciones de las ecuaciones c para θ , ϕ y ψ son sumamente complejas excepto por una construcción gráfica.

Intuitivamente podríamos esperar que si inicialmente $\theta_0 = \psi_0 = \dot{\phi}_0 = \dot{\psi}_0$ son iguales a cero y si $\ddot{\phi}_0 = \ddot{\psi}_0$ son también inicialmente cero entonces los ángulos ϕ y ψ y las correspondientes velocidades angulares permanecerán nulos.

Calcularemos las aceleraciones angulares en el instante $t = 0$. De la primera de las ecuaciones c

$$\ddot{\theta} = \frac{Fl}{I} (\cos \psi - \dot{\psi} t \sin \psi)$$

y para las condiciones iniciales en $t = 0$

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{Fl}{I}.\quad (d)$$

Derivando la segunda y tercera de las ecuaciones b con respecto al tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_y &= -\ddot{\theta} \sin \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \cos \psi + \ddot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \\ &\quad \dot{\phi} (\dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta) = 0, \\ \ddot{\omega}_z &= \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta + \ddot{\psi} = 0,\end{aligned}\quad (e)$$

y al aplicarse las condiciones iniciales

$$\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = \dot{\psi}_0 = 0$$

hallándose las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi}_0 \sin \theta_0 &= 0, \\ \ddot{\phi}_0 \cos \theta_0 + \ddot{\psi}_0 &= 0.\end{aligned}\quad (f)$$

De la primera de las ecuaciones f

$$\ddot{\phi}_0 = 0$$

y, por lo tanto, de la segunda de las ecuaciones f

$$\ddot{\psi}_0 = 0.$$

Consecuentemente, podríamos esperar que

$$\phi = \phi_0 = \psi = \psi_0 = 0.$$

en todo tiempo. De la primera de las ecuaciones c se deduce que

$$\dot{\theta} = \frac{Fl}{I} t$$

$$\theta = \frac{Fl}{2I} t^2 + \theta_0.$$

Para simplificar aún más nuestro ejemplo haremos $\theta_0 = 0$, entonces

$$\theta = \frac{Fl}{2I} t^2.\quad (g)$$

En seguida, consideremos el movimiento del centro de masa del cuerpo rígido. La ecuación de movimiento es

$$\bar{F} = F \cos \theta \bar{j}_0 + F \sin \theta \bar{k}_0 = M \ddot{\bar{r}}_c.\quad (h)$$

Sustituyendo la ecuación g en la ecuación h y escribiendo las ecuaciones escalares, obtenemos

$$\ddot{Y} = \frac{F}{M} \cos \frac{Fl}{2I} t^2,\quad (i)$$

$$\ddot{Z} = \frac{F}{M} \sin \frac{Fl}{2I} t^2.$$

Ahora, por integración, podemos obtener las velocidades en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \frac{F}{M} \int \cos \frac{Fl}{2I} t^2 dt + C_1, \\ \dot{Z} &= \frac{F}{M} \int \sin \frac{Fl}{2I} t^2 dt + C_2.\end{aligned}\quad (j)$$

Las integrales no pueden efectuarse por métodos elementales; por consiguiente se deben desarrollar $\cos (Fl/2I)t^2$ y $\sin (Fl/2I)t^2$ en serie de Maclaurin e integrar. Es importante recordar que esta solución únicamente será válida para pequeños valores de $(Fl/2I)t^2$.

Entonces, haciendo $a^2 = Fl/2I$,

$$\begin{aligned}\cos \frac{Fl}{2I} t^2 &= 1 - \frac{a^4 t^4}{2!} + \frac{a^8 t^8}{4!} - \frac{a^{12} t^{12}}{6!} + \dots, \\ \sin \frac{Fl}{2I} t^2 &= a^2 t^2 - \frac{a^6 t^6}{3!} + \frac{a^{10} t^{10}}{5!} - \frac{a^{14} t^{14}}{7!} + \dots.\end{aligned}\quad (k)$$

Integrando las series dan

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= \frac{F}{M} \left\{ t - \frac{a^4 t^5}{(5)2!} + \frac{a^8 t^9}{(9)4!} - \frac{a^{12} t^{13}}{(13)6!} + \dots \right\} + C_1, \\ \dot{Z} &= \frac{F}{M} \left\{ \frac{a^2 t^3}{3} - \frac{a^6 t^7}{(7)3!} + \frac{a^{10} t^{11}}{(11)5!} - \frac{a^{14} t^{15}}{(15)7!} + \dots \right\} + C_2.\end{aligned}\quad (l)$$

De las condiciones iniciales, para $t = 0$, $\dot{Y} = \dot{Z}_0 = 0$, se deduce que

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Los desplazamientos Y_0 y Z_0 se pueden obtener integrando las expresiones para $\dot{Y}_0$ y $\dot{Z}_0$, y dan

$$\begin{aligned}Y_0 &= \frac{F}{M} \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{a^4 t^6}{(30)2!} + \frac{a^8 t^{10}}{(90)4!} - \frac{a^{12} t^{14}}{(182)6!} + \dots \right\} + C_3, \\ Z_0 &= \frac{F}{M} \left\{ \frac{a^2 t^4}{4} - \frac{a^6 t^8}{(56)3!} + \frac{a^{10} t^{12}}{(132)5!} - \frac{a^{14} t^{16}}{(240)7!} + \dots \right\} + C_4.\end{aligned}$$

De las condiciones iniciales en $t = 0$, $Y_0 = Z_0 = 0$ resulta que las constantes de integración C_3 y C_4 también son cero. Como se indicó previamente, se debe tener cuidado al utilizar las ecuaciones para Y_0 y Z_0 , ya que están limitadas a valores pequeños de $(Fl/2I)t^2$ o bien deben usarse en el desarrollo un gran número de términos.

5.8 Formulación del trabajo y la energía para sistemas de cuerpos rígidos. Como se vio en el estudio de la dinámica de la partícula, el empleo de la ecuación de energía simplifica el análisis de muchos problemas, y hace posible una solución donde las ecuaciones de movimiento son demasiado complicadas para ser resueltas rápidamente o bien donde se desean las relaciones entre las fuerzas, los desplazamientos y las velocidades. Por esta razón, es importante un análisis de la ecuación de energía aplicada a sistemas de partículas y en especial a los cuerpos rígidos.

Por razones de claridad, principiaremos repitiendo una de las exposiciones anteriores de la sección 3.9.

El trabajo efectuado por las fuerzas que actúan sobre una partícula con masa cuando ésta se mueve en el espacio del punto 1 al punto 2, está dado por

$$\int_{r_1}^{r_2} \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i, \quad (5.48)$$

donde $\bar{F}_i$ es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula y $d\bar{r}_i$ es el vector desplazamiento de la partícula cuando ésta se mueve de un punto P a un punto vecino P_1 en el tiempo dt (ver Fig. 5.26).

Recordamos de la sección 4.1 que en un sistema de partículas, la fuerza resultante sobre la i -ésima partícula generalmente está formada por los siguientes dos tipos:

1. Fuerzas externas, que se designan por $\bar{F}_{ii}$.
2. Fuerzas internas, que se designan por $\bar{F}_{ij}$ ($i \neq j$).

De la segunda ley de Newton escribimos

$$\sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_i \bar{F}_{ii} + \sum_{i,j} \bar{F}_{ij} \quad (i \neq j). \quad (5.49)$$

Si multiplicamos escalarmente por la diferencia del desplazamiento $d\bar{r}_i$ de la partícula i cada uno de los términos incluidos en las sumas, entonces

$$\sum_i m_i \ddot{\bar{r}}_i \cdot d\bar{r}_i = \sum_i \bar{F}_{ii} \cdot d\bar{r}_i + \sum_{i,j} \bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_i \quad (i \neq j). \quad (5.50)$$

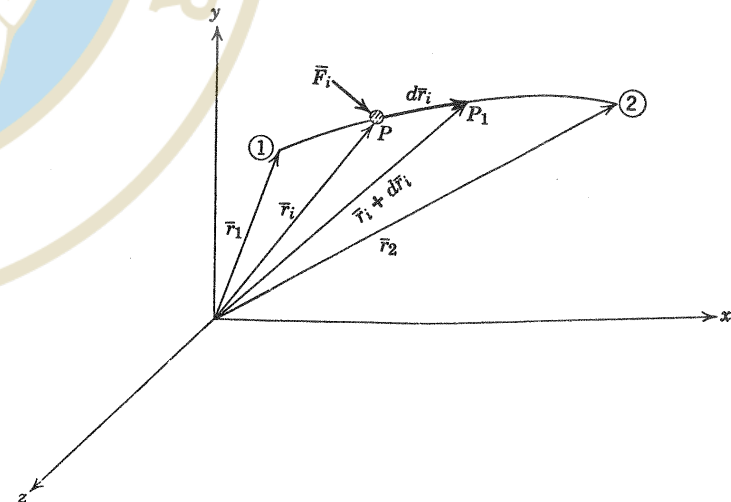


Fig. 5.26

En vista que $d\vec{r}_i = \dot{\vec{r}}_i dt$, el primer miembro de la ecuación 5.50 se puede escribir

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right) dt = dT \quad (5.51)$$

puesto que el término contenido en el paréntesis de la ecuación 5.51 es la energía cinética del sistema de partículas.

El segundo término de la ecuación 5.50 es el incremento del trabajo efectuado por las fuerzas externas y que designaremos por

$$dW_e = \sum_i \vec{F}_{ei} \cdot d\vec{r}_i. \quad (5.52)$$

El tercer término de la ecuación 5.50 es el incremento del trabajo efectuado por las fuerzas internas y que designaremos por

$$dW_i = \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i \quad (i \neq j). \quad (5.53)$$

Por lo tanto, la ecuación 5.50 se puede escribir de nuevo así:

$$dT = dW_e + dW_i. \quad (5.54)$$

Si tanto las fuerzas internas como las externas son conservativas y definimos las energías potenciales externa e interna respectivamente por:

$$\begin{aligned} dW_e &= -dV_e, \\ dW_i &= -dV_i, \end{aligned}$$

entonces la ecuación 5.54 se puede escribir

$$dT + dV_e + dV_i = 0 \quad (5.55)$$

o sea

$$T + V_e + V_i = \text{constante} = E_0. \quad (5.56)$$

La ecuación 5.56 simplemente establece que la suma de las energías cinética y potencial se conserva.

La ecuación 5.53 se puede escribir en forma ligeramente diferente para dar una concepción más clara del trabajo efectuado por las fuerzas internas en un sistema de partículas. Escribiendo algunos términos de esta suma, tenemos

$$\vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{13} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{31} \cdot d\vec{r}_3 + \dots$$

De la tercera ley de Newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$; de ahí que la suma anterior llega a ser

$$\vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) + \vec{F}_{13} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_3) + \dots,$$

que puede escribirse

$$\vec{F}_{12} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \vec{F}_{13} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \dots$$

Observamos que el vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ es un vector que va de la partícula 2 a la partícula 1 y que puede denotarse por $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{21}$. En general, $\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}_{ji}$. Ahora, la ecuación 5.53 se puede escribir

$$\sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ji} \quad (i \neq j). \quad (5.57)$$

El factor $1/2$ es necesario en el segundo miembro de esta ecuación debido a que el equivalente de cada término en la suma expresada por la ecuación 5.53, aparece dos veces en la suma indicada en el segundo miembro de la ecuación 5.57.

En el caso de un cuerpo rígido, $\vec{r}_{ji} \cdot \vec{r}_{ji} = \text{constante}$. Diferenciando este producto $\vec{r}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji} = 0$, lo que demuestra que $d\vec{r}_{ji}$ es perpendicular a $\vec{r}_{ji}$. Ahora, $\vec{r}_{ji}$ es paralelo a $\vec{F}_{ij}$ si otra vez suponemos que las $\vec{F}_{ij}$ son fuerzas centrales. Entonces se deduce que $\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ji} = 0$ y consecuentemente $dW_i = 0$ para un cuerpo rígido. Para el cuerpo rígido, la ecuación 5.54 llega a ser

$$dT = dW_e \quad (5.58)$$

Se puede integrar la ecuación 5.54 entre límites apropiados, como sigue:

$$\int_1^2 dT = \int_1^2 dW_e + \int_1^2 dW_i$$

o sea

$$T_2 - T_1 = (W_{e2} - W_{e1}) + (W_{i2} - W_{i1}), \quad (5.59)$$

donde $T_2 - T_1$ es el cambio en la energía cinética del sistema cuando se mueve de la posición 1 a la posición 2 y $(W_{e2} - W_{e1})$ y $(W_{i2} - W_{i1})$ representan el trabajo efectuado por las fuerzas externas e internas respectivamente, cuando las partículas se mueven de la posición 1 a la posición 2.

Es importante hacer notar que el trabajo efectuado por las fuerzas externas e internas para una partícula específica deben calcularse a lo largo de la trayectoria que sigue la partícula y después se extiende la suma a todas las partículas. En general, las trayectorias seguidas por las partículas individuales pueden ser completamente independientes, esto es, no estar relacionadas entre sí.

En el caso de un cuerpo rígido, ya hemos demostrado que las fuerzas internas no efectúan trabajo debido a que las partículas están fijas unas con respecto a otras. Por la misma razón el cálculo de la energía cinética

y del trabajo realizado por las fuerzas externas se simplifica en el caso de un cuerpo rígido, ya que las velocidades y desplazamientos de cada partícula están ligados por las relaciones de cinemática deducidas anteriormente.

Energía cinética de un sistema de partículas y de un cuerpo rígido.

En esta sección consideraremos la energía cinética de un sistema de partículas en forma más general que la desarrollada en la sección 4.8, después se considerará el caso particular de la energía cinética de un cuerpo rígido.

Sea el sistema de partículas que se muestra en la figura 5.27. Los ejes $X_0Y_0Z_0$ están fijos en un sistema inercial mientras que el sistema xyz está en libertad de moverse.

La velocidad de la i -ésima partícula es

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{\rho}}_i.$$

La energía cinética de la i -ésima partícula es

$$\frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) = \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{\rho}}_i) \cdot (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{\rho}}_i)$$

y, sumando, la energía cinética para un sistema de partículas es

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{\rho}}_i) \cdot (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{\rho}}_i),$$

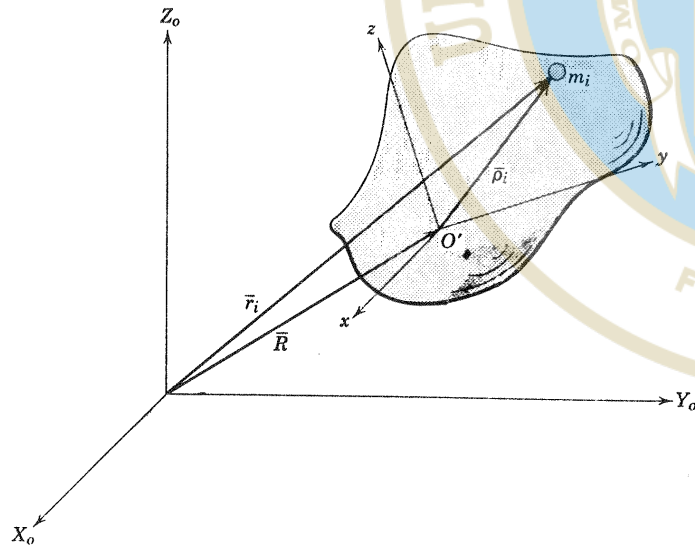


Fig. 5.27

que puede escribirse

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{\rho}}_i \cdot \dot{\mathbf{\rho}}_i) + \sum_i m_i (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{\rho}}_i). \quad (5.60)$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación anterior se puede reescribir

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2} M (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2,$$

donde M es la masa total del sistema. El segundo término de la ecuación 5.60 es la energía cinética del movimiento relativo de las partículas en el sistema móvil de coordenadas. El tercer término $\sum_i m_i (\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{\rho}}_i)$

que se puede escribir $\dot{\mathbf{R}} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \bar{\rho}_i$, vale cero bajo las siguientes dos condiciones:

1. El origen del sistema móvil de coordenadas está situado en el centro de masa. Entonces $\sum_i m_i \bar{\rho}_i = 0$, por la definición de centro de masa.

2. El origen del sistema móvil de coordenadas tiene velocidad cero, es decir, $\dot{\mathbf{R}} = 0$.

Si se satisface la condición 1, se deduce que

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{\rho}}_i \cdot \dot{\mathbf{\rho}}_i), \quad (5.61)$$

y si se satisface la condición 2,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{\rho}}_i \cdot \dot{\mathbf{\rho}}_i). \quad (5.62)$$

En seguida consideremos el caso de un cuerpo rígido donde fijamos el sistema de coordenadas xyz en el centro de masa del cuerpo. Para un cuerpo rígido tenemos

$$\dot{\mathbf{\rho}}_i = \bar{\omega} \times \bar{\rho}_i;$$

por lo tanto, la ecuación 5.61 se transforma en

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_i) \cdot (\dot{\mathbf{\rho}}_i) \quad (5.63)$$

donde v_c es la velocidad del centro de masa.

En el triple producto escalar de la ecuación 5.63 podemos intercambiar el punto y la cruz

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i. \quad (5.64)$$

La cantidad $\sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i$ es el momento de la cantidad de movimiento

del cuerpo rígido con relación al sistema de coordenadas fijo en su centro de masa. De ahí que la ecuación 5.64 llega a ser

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{H}_c. \quad (5.65)$$

Las componentes del momento angular $\bar{H}_c$ (ecuaciones 5.7) se escriben abajo de nuevo para facilidad del lector.

$$\begin{aligned} H'_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{zx}\omega_z \\ H'_y &= -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ H'_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Si los ejes xyz coinciden con los ejes principales del cuerpo rígido las ecuaciones 5.65 toman la forma

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2). \quad (5.67)$$

Para el caso en que $\bar{R} = 0$ (condición 2 anterior), el primer término de la ecuación 5.61 vale cero y se deduce que

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{H}'. \quad (5.68)$$

Tres ejemplos de movimientos de cuerpos rígidos donde se pueden utilizar las ecuaciones 5.68, son los siguientes:

1. El cuerpo rígido gira alrededor de un eje (por ejemplo, un eje fijo de rotación). El origen del sistema de coordenadas puede situarse en cualquier parte del eje de rotación.

2. Un punto del cuerpo rígido está fijo en un sistema inercial primario. Por ejemplo, en un trompo que gira el punto en que se apoya el trompo tiene velocidad cero y consecuentemente el origen del sistema móvil de coordenadas se puede situar en ese punto de apoyo.

3. El centro instantáneo de un cuerpo rígido tiene velocidad cero y por consiguiente se puede usar como origen del sistema móvil de coordenadas. Aquí debe tenerse precaución puesto que en general el centro ins-

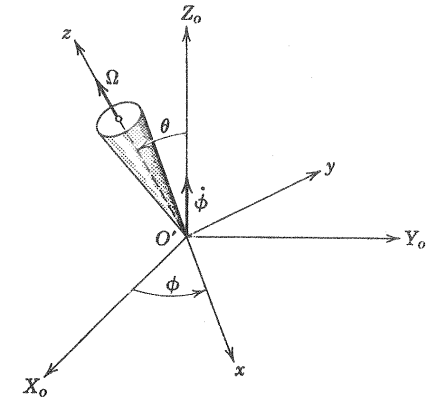


Fig. 5.28

tantáneo no tiene aceleración cero. Por lo tanto, la energía cinética que se calcula por la ecuación 5.68 se cumple solamente en el instante de tiempo en que el origen del sistema móvil de coordenadas tiene velocidad cero. Un instante más tarde se debe determinar la nueva posición del centro instantáneo y las componentes de $\bar{H}'$ se calculan con relación al nuevo origen.

Ejemplo 5.15. Un cono circular recto de masa M , radio R y altura h tiene un movimiento giroscópico constante. Si su velocidad de giro es Ω y su velocidad de precesión ϕ , hallar la energía cinética del cono.

Con el origen O' del sistema móvil de coordenadas situado en un punto fijo, la energía cinética del cuerpo rígido está dada por

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{H}'.$$

Debido a que los ejes xyz son ejes principales, esta expresión toma la forma

$$T = \frac{1}{2} [I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2].$$

Las componentes de la velocidad angular del cono son

$$\omega_x = \dot{\theta} = 0,$$

$$\omega_y = \dot{\phi} \sin \theta,$$

$$\omega_z = \Omega + \dot{\phi} \cos \theta$$

y los momentos de inercia son

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{20} M (R^2 + 4h^2),$$

$$I_{zz} = \frac{3}{10} MR^2.$$

La sustitución da

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{20} M (R^2 + 4h^2) \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{3}{10} MR^2 (\Omega + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right],$$

$$T = \frac{3M}{40} [(R^2 + 4h^2) \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + 2R^2 (\Omega + \dot{\phi} \cos \theta)^2].$$

Ejemplo 5.16. Como se muestra, los extremos de una barra delgada de longitud l y masa M están restringidos a moverse en las guías en un plano vertical. La barra se suelta desde $\theta = 0$ con velocidad angular despreciable. Hallar la velocidad y aceleración angulares para cualquier posición θ . Ver la figura 5.29.

En ausencia de rozamiento, la única fuerza que efectúa trabajo es Mg . Para cualquier ángulo θ la fuerza de gravedad se mueve una distancia vertical $(l/2)(1 - \cos \theta)$. Entonces

$$W_e = \Delta T,$$

$$Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2,$$

donde I_{zz} se calcula con respecto al centro de masa.

Se puede calcular la velocidad del centro de masa utilizando el centro instantáneo de la barra.

$$v_c = \frac{l}{2} \omega_z.$$

Entonces

$$Mg \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} M \frac{l^2}{4} \omega_z^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} \right) M l^2 \omega_z^2 = \frac{1}{6} M l^2 \omega_z^2,$$

$$\omega_z = \left[\frac{3g}{l} (1 - \cos \theta) \right]^{1/2}.$$

Derivando, obtenemos

$$\frac{d}{dt} (\omega_z^2) = 2\omega_z \dot{\omega}_z = \frac{3g}{l} \sin \theta \omega_z,$$

$$\dot{\omega}_z = \frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

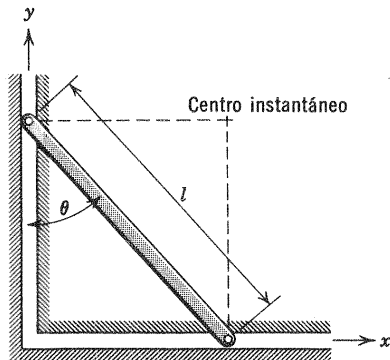


Fig. 5.29

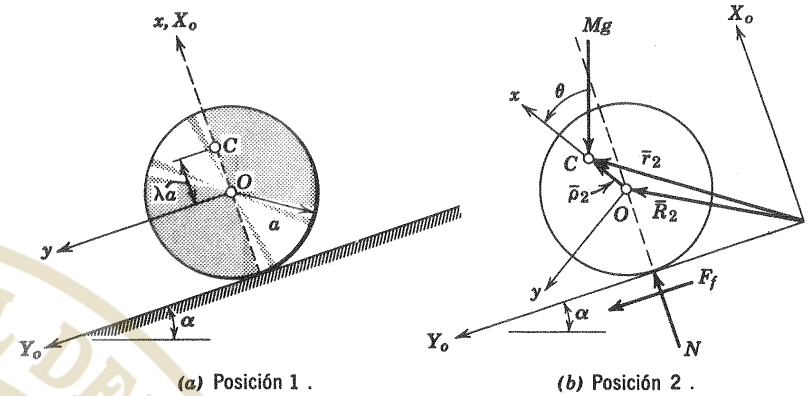


Fig. 5.30

La energía cinética de la barra podría haber sido calculada utilizando el centro instantáneo como origen, ya que este punto está en reposo.

Ejemplo 5.17. Un disco desbalanceado de masa M rueda sin deslizar desde la posición 1, partiendo con velocidad angular cero. El radio de giro, con respecto al centro de masa situado en C , es k_c . Después que el disco ha rodado un ángulo θ (posición 2) hallar la fuerza normal que ejerce el plano inclinado sobre el disco.

Del diagrama de cuerpo libre de la figura 5.30b, la ecuación de movimiento del centro de masa es

$$N \vec{i}_0 + F_f \vec{j}_0 + Mg(-\cos \alpha \vec{i}_0 + \sin \alpha \vec{j}_0) = M[a_0 \vec{j}_0 + \dot{\omega} k_0 \times \lambda a \vec{i} + \omega k_0 \times (\omega k_0 \times \lambda a \vec{i})].$$

La ecuación escalar en la dirección X_0 es

$$N - Mg \cos \alpha = M[-\lambda a \dot{\omega} \sin \theta - \lambda a \omega^2 \cos \theta]$$

o sea

$$N = M[g \cos \alpha - \lambda a (\dot{\omega} \sin \theta + \omega^2 \cos \theta)]. \quad (a)$$

La aplicación de la ecuación angular, tomada con respecto al centro instantáneo, da

$$\dot{\vec{p}}_c \times M \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{H}}' = \vec{M}',$$

$$(a \vec{i}_0 + \lambda a \vec{i}) \times M a \omega^2 \vec{i}_0 + M[k_c^2 + (a \vec{i}_0 + \lambda a \vec{i})^2] \dot{\omega} k_0 = (a \vec{i}_0 + \lambda a \vec{i}) \times Mg(-\cos \alpha \vec{i}_0 + \sin \alpha \vec{j}_0).$$

$$-\lambda a^2 \omega^2 \sin \theta + [k_c^2 + a^2 (1 + \lambda \cos \theta + \lambda^2)] \dot{\omega}$$

$$= g[\lambda a \cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha (a + \lambda a \cos \theta)],$$

y

$$\dot{\omega} = \frac{ga[\lambda \cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha (1 + \lambda \cos \theta)] + \lambda a^2 \omega^2 \sin \theta}{k_c^2 + a^2 (1 + \lambda \cos \theta + \lambda^2)}. \quad (b)$$

Ahora, para determinar ω , debemos usar la relación de trabajo y energía $W_e = \Delta T$. La única fuerza que produce trabajo es la fuerza de gravedad Mg . El desplazamiento vertical de Mg se puede determinar por una ecuación de desplazamiento relativo.

$$\bar{r} = \bar{R} + \bar{\rho};$$

$$\begin{aligned}\Delta \bar{r} &= \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (\bar{R}_2 + \bar{\rho}_2) - (\bar{R}_1 + \bar{\rho}_1) = [a\bar{i}_0 + a\theta\bar{j}_0 \\ &\quad + \lambda a(\cos \theta \bar{i}_0 + \sin \theta \bar{j}_0)] - [a\bar{i}_0 + \lambda a\bar{i}_0], \\ \Delta \bar{r} &= -\lambda a(1 - \cos \theta)\bar{i}_0 + a(\theta + \lambda \sin \theta)\bar{j}_0.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}W_e &= Mg(-\cos \theta \bar{i}_0 + \sin \theta \bar{j}_0) \cdot \Delta \bar{r}, \\ W_e &= Mg[\lambda a \cos \theta (1 - \cos \theta) + a \sin \theta (\theta + \lambda \sin \theta)].\end{aligned}\quad (c)$$

La energía cinética se puede calcular con respecto al centro instantáneo.

$$\Delta T = \frac{1}{2} M[k_c^2 + a^2(1 + \lambda \cos \theta + \lambda^2)]\omega^2.\quad (d)$$

Resolviendo las ecuaciones c y d para ω^2 , tenemos

$$\omega^2 = \frac{2g[\lambda a \cos \theta (1 - \cos \theta) + a \sin \theta (\theta + \lambda \sin \theta)]}{k_c^2 + a^2(1 + \lambda \cos \theta + \lambda^2)}\quad (e)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación e en la ecuación b y después las ecuaciones e y b en la ecuación a , se obtiene el resultado un poco más largo para N .

Para un conjunto dado de parámetros es interesante calcular el ángulo θ en que el disco desbalanceado saltará, esto es, el ángulo θ para el que la fuerza normal N es igual a cero. Esto se puede hacer ensayando algunos valores para la solución de la ecuación a con el primer miembro igual a cero.

5.9 Ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento — Cuerpos rígidos. Cuando se resuelven, en función de coordenadas convenientes, las ecuaciones de movimiento que fueron desarrolladas en la sección 5.2, se obtiene una descripción completa del movimiento de un cuerpo rígido. Sin embargo, con demasiada frecuencia todas las ecuaciones llegan a ser excesivamente complicadas, si no virtualmente imposibles de resolver. También, en muchos casos no se requiere una descripción completa del movimiento. Por estas razones, es ventajoso explorar otras relaciones que existen entre las variables que aparecen en los sistemas dinámicos.

La relación entre la energía cinética de un cuerpo rígido y el trabajo efectuado por las fuerzas aplicadas, que se desarrolló en la sección anterior, es un ejemplo de tal formulación que produce resultados útiles aunque incompletos para la situación más general.

En esta sección, desarrollaremos el concepto de impulso y cantidad de movimiento para un cuerpo rígido para lograr otro conjunto de rela-

ciones que son de utilidad en el análisis del movimiento de un cuerpo rígido.

La ecuación de movimiento del centro de masa de un cuerpo rígido es

$$\bar{F} = M\bar{r}_c = \frac{d}{dt}(M\dot{\bar{r}}_c)$$

o bien

$$\bar{F} dt = d(M\dot{\bar{r}}_c) = d\bar{p}.\quad (5.69)$$

Cuando el centro de masa se mueve de la posición 1 a la posición 2, la ecuación 5.69 se puede integrar entre límites apropiados para dar

$$\int_1^2 \bar{F} dt = \int_1^2 d\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = M(\bar{v}_2 - \bar{v}_1).\quad (5.70)$$

En la ecuación 5.70 se introducen las siguientes definiciones:

1. La integral $\int_1^2 \bar{F} dt = \text{impulso} = \bar{I}$.
2. $\bar{p} =$ cantidad de movimiento lineal del cuerpo rígido.
3. $\bar{v} =$ velocidad del centro de masa.

La ecuación 5.70 es una ecuación vectorial y de ahí que se puede escribir en términos de sus componentes escalares, como sigue:

$$\begin{aligned}\int_1^2 F_x dt &= M(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \int_1^2 F_y dt &= M(\dot{y}_2 - \dot{y}_1), \\ \int_1^2 F_z dt &= M(\dot{z}_2 - \dot{z}_1).\end{aligned}\quad (5.71)$$

En forma similar podemos desarrollar otro conjunto de ecuaciones a partir de la ecuación de movimiento angular (5.9) de la sección 5.2. La ecuación de movimiento angular es

$$\bar{M}' = \frac{d}{dt}(\bar{H}'),\quad (5.72)$$

donde $\bar{H}'$ es la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido calculada con respecto a un sistema móvil de coordenadas unido al cuerpo rígido. El origen del sistema móvil de coordenadas está sujeto a la restricción establecida en la sección 4.6.

De la ecuación 5.72 se deduce que

$$\int_1^2 \bar{M}' dt = \int_1^2 d(\bar{H}') = \bar{H}'_2 - \bar{H}'_1.\quad (5.73)$$

En la ecuación 5.73, la integral $\int_1^2 \bar{M}' dt$ es el momento del impulso mientras que la integral $\int_1^2 d(\bar{H}')$ es el cambio en la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido. Tanto el momento como la cantidad de movimiento angular se toman con respecto al sistema móvil de coordenadas. La ecuación 5.73 es una ecuación vectorial; consecuentemente sus componentes escalares son

$$\begin{aligned}\int_1^2 M'_x dt &= I_{xx}(\omega_x - \omega_{x1}) - I_{xy}(\omega_{y2} - \omega_{y1}) - I_{xz}(\omega_{z2} - \omega_{z1}), \\ \int_1^2 M'_y dt &= -I_{xy}(\omega_{x2} - \omega_{x1}) + I_{yy}(\omega_{y2} - \omega_{y1}) - I_{yz}(\omega_{z2} - \omega_{z1}), \quad (5.74) \\ \int_1^2 M'_z dt &= -I_{xz}(\omega_{x2} - \omega_{x1}) - I_{yz}(\omega_{y2} - \omega_{y1}) + I_{zz}(\omega_{z2} - \omega_{z1}).\end{aligned}$$

Las ecuaciones 5.71 y 5.74 relacionan las fuerzas y el tiempo con los cambios en la velocidad del centro de masa y los cambios en la velocidad angular de un cuerpo rígido.

En ciertos casos es conveniente expresar las velocidades angulares en términos de los ángulos de Euler (ecuaciones 5.46) y de esta manera determinar los cambios en estas componentes de la velocidad angular.

Ejemplo 5.18. Un disco cilíndrico de masa $M = 1$ unidad técnica de masa y de radio $a = 1$ m está sobre un plano horizontal liso. La fuerza P se aplica en un cable que pasa por la periferia del disco y varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación $P = \frac{t}{2} + 3$ kg. Hallar la velocidad de un punto del cable después que P ha actuado durante 4 seg. La velocidad inicial del centro de masa es $2\bar{j}_0$ m/seg y la velocidad angular inicial es cero.

Aplicando las ecuaciones lineal y angular de impulso y cantidad de movimiento, se tiene

$$\int_1^2 F_y dt = M(\dot{Y}_2 - \dot{Y}_1),$$

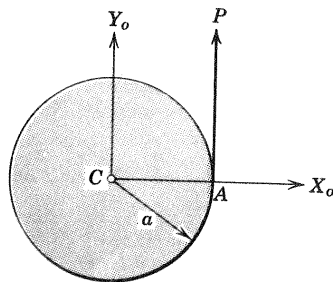


Fig. 5.31

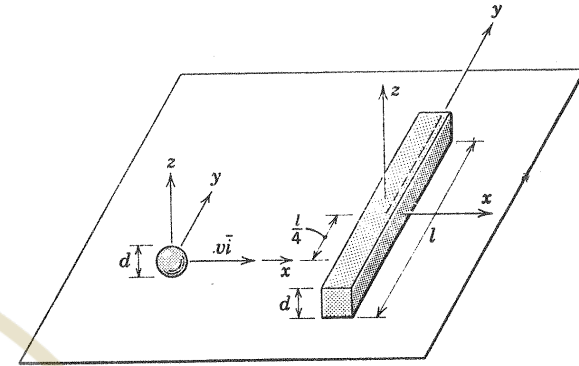


Fig. 5.32

$$\int_0^4 \left(\frac{t}{2} + 3 \right) dt = (1)(\dot{Y}_2 - 5),$$

$$\frac{t^2}{4} + 3t \Big|_0^4 = \dot{Y}_2 - 2,$$

$$\dot{Y}_2 = 18 \text{ m/seg};$$

$$\int_1^2 M'_z dt = I_{zz}(\omega_{z2} - \omega_{z1}),$$

$$\int_0^4 (1) \left(\frac{t}{2} + 3 \right) dt = \frac{1}{2} (1)(1)^2 [\omega_{z2} - 0],$$

$$\omega_{z2} = 32 \text{ rad/seg}.$$

Entonces la velocidad de un punto del cable es

$$\dot{\bar{r}}_A = 18\bar{j}_0 + 32\bar{k}_0 \times \bar{r}_0 = 50\bar{j}_0 \text{ m/seg}.$$

Ejemplo 5.19. Una bola de masa M_b y diámetro d se arroja con una velocidad $v\bar{i}$ contra una barra prismática de masa M , longitud l y altura d . La bola choca contra la barra a una distancia $l/4$ de uno de sus extremos y se supone que el choque es perfectamente plástico. Si el plano horizontal es liso, hallar la velocidad angular de la barra después del choque. Ver figura 5.32.

Para la bola podemos escribir

$$-\int F_x dt = M_b(\dot{x}_{2b} - \dot{x}_{1b}) = M_b(\dot{x}_{2b} - v), \quad (a)$$

$$\begin{aligned}\int \bar{M}_{cb} dt &= I_{xxb}(\omega_{x2b} - \omega_{x1b})\bar{i} + I_{yyb}(\omega_{y2b} - \omega_{y1b})\bar{j} \\ &\quad + I_{zzb}(\omega_{z2b} - \omega_{z1b})\bar{k}. \quad (b)\end{aligned}$$

Ahora, ya que las únicas fuerzas que actúan sobre la bola pasan por el centro de masa,

$$\int \bar{M}_{cb} dt = 0$$

y la cantidad de movimiento angular de la bola se conserva.

Para la barra tenemos

$$\int F_x dt = M_r(\dot{x}_{2r} - \dot{x}_{1r}) = M_r(\dot{x}_{2r} - 0), \quad (c)$$

$$\int \bar{M}_{cr} dt = \int F_x \frac{l}{4} \bar{k} dt = I_{xxr}(\omega_{x2r} - \omega_{x1r})\bar{i} + I_{yyr}(\omega_{y2r} - \omega_{y1r})\bar{j} + I_{zzr}(\omega_{z2r} - \omega_{z1r})\bar{k}. \quad (d)$$

Esta última ecuación supone que ningún desplazamiento ocurre durante el choque de manera que F_x siempre será normal a la barra. Nótese también la conservación del momento angular para los ejes x y y .

La suma de las ecuaciones a y c conduce al principio de la conservación de la cantidad de movimiento lineal para el sistema.

$$0 = M_b(\dot{x}_{2b} - v) + M_r(\dot{x}_{2r} - 0). \quad (e)$$

Es importante tener presente que las componentes de la velocidad desconocida se refieren a las velocidades de los centros de masa.

Combinando las ecuaciones a y d para eliminar $\int F_x dt$ se llega al principio de la conservación del momento angular del sistema.

$$0 = \frac{l}{4} M_b(\dot{x}_{2b} - v) + I_{zzr}(\omega_{z2r} - 0). \quad (f)$$

Hasta aquí, tenemos las ecuaciones e y f para hallar las incógnitas $\dot{x}_{2b}$, $\dot{x}_{2r}$ y ω_{z2r} . No obstante, estas componentes de velocidad están cinemáticamente relacionadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2b}\bar{i} &= \dot{x}_{2r}\bar{i} + \omega_{z2r}\bar{k} \times -\frac{l}{4}\bar{j}, \\ \dot{x}_{2b} &= \dot{x}_{2r} + \frac{l}{4}\omega_{z2r} \end{aligned} \quad (g)$$

Resolviendo las ecuaciones e , f y g simultáneamente, tenemos

$$\dot{x}_{2b} = \frac{7M_b v}{7M_b + 4M_r},$$

$$\dot{x}_{2r} = \frac{4M_b v}{7M_b + 4M_r},$$

$$\omega_{z2r} = \frac{12M_b v}{l(7M_b + 4M_r)}.$$

PROBLEMAS

5.1. Hallar el momento de inercia con respecto al diámetro de un cascarón esférico delgado de masa total M y radio a . Resolver el problema considerando el cambio en el momento de inercia de una esfera sólida debido a un cambio en el radio.

5.2. Hallar I_{xx} para el hemisferio del problema 4.8 si la base del hemisferio está en el plano xy . Utilizar el resultado del problema 5.1.

5.3. Escribir una expresión para el momento de inercia respecto al eje de revolución de un sólido homogéneo que consiste de un cilindro y dos hemisferios. Expresar el resultado en términos de la masa total M . La longitud de la porción cilíndrica es tal que su masa es tres veces la de una esfera del mismo radio.

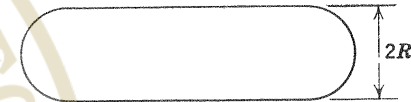


Fig. P-5.3

5.4. Deducir la ecuación 5.15, que es la fórmula de traslación para los productos de inercia.

5.5. Hallar I_{xx} para el sólido limitado por los planos coordenados y $x/a + y/b + z/c = 1$. La densidad del material es ρ .

5.6. Hallar el momento de inercia de un cono circular recto respecto a una recta que pasa por su vértice y es paralela a la base. La masa total es M , la altura h y el radio de la base a . Resolver por integración y comprobar el resultado utilizando las tablas y la fórmula de traslación.

5.7. Hallar I_{xy} para la mitad del cono. La masa total es M .

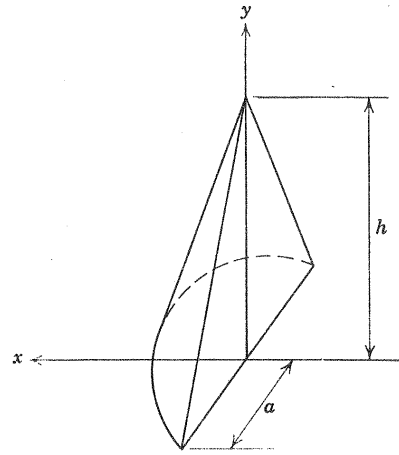


Fig. P-5.7

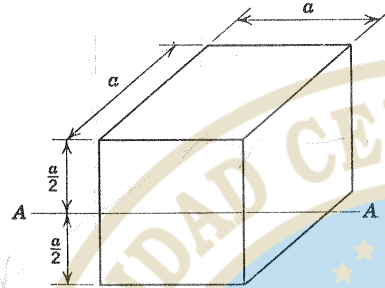


Fig. P-5.8

5.8. Determinar el momento de inercia de un cubo con relación al eje A-A. El cubo tiene una masa M y la longitud de una arista es a . Resolver por integración directa y comprobar el resultado utilizando tablas y la fórmula de traslación.

5.9. Hallar el momento de inercia I_{zz} respecto a un eje z que pasa por el punto A del sistema que consiste del tambor sólido y dos barras. Cada barra pesa 1 kg y se puede considerar como siendo delgada. El tambor es un cilindro que pesa 5 kg.

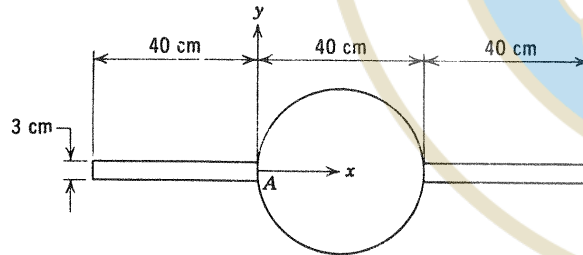


Fig. P-5.9

5.10. Hallar todos los momentos y productos de inercia de la barra delgada doblada en la forma que se muestra. La masa total es M .

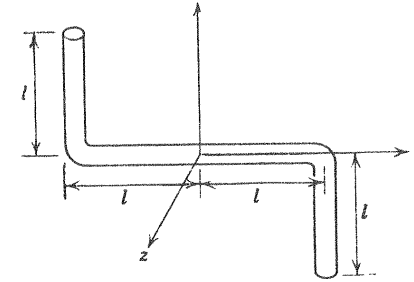


Fig. P-5.10

5.11. a) Determinar todos los momentos y productos de inercia para el cubo de arista l respecto a los ejes centroidales paralelos a las aristas.
b) Repetir los cálculos si se cortan de los vértices que están en los extremos de una diagonal, dos cubos de arista b , ($2b < l$).

5.12. Para el paralelepípedo rectangular que tiene un agujero cilíndrico, hallar:

- $\bar{r}_c$.
- I_{zz} .
- I_{yz} .

El material es homogéneo y tiene una densidad ρ .

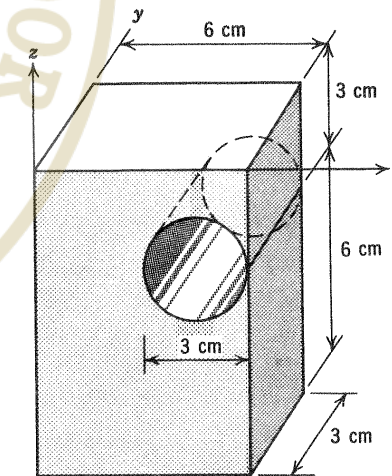


Fig. P-5.12

5.13. Dibujar el círculo de Mohr para cada uno de los siguientes objetos y hallar los momentos de inercia I_x , I_y y el producto de inercia I_{xy} . Se puede con-

siderar que la distribución de masa está en el plano xy , ya que el espesor de cada objeto es pequeño comparado con las otras dimensiones.

- Un aro delgado de masa M y radio a .
- Una varilla delgada de masa M y doblada en la forma que se muestra.
- Una placa rectangular de masa M .

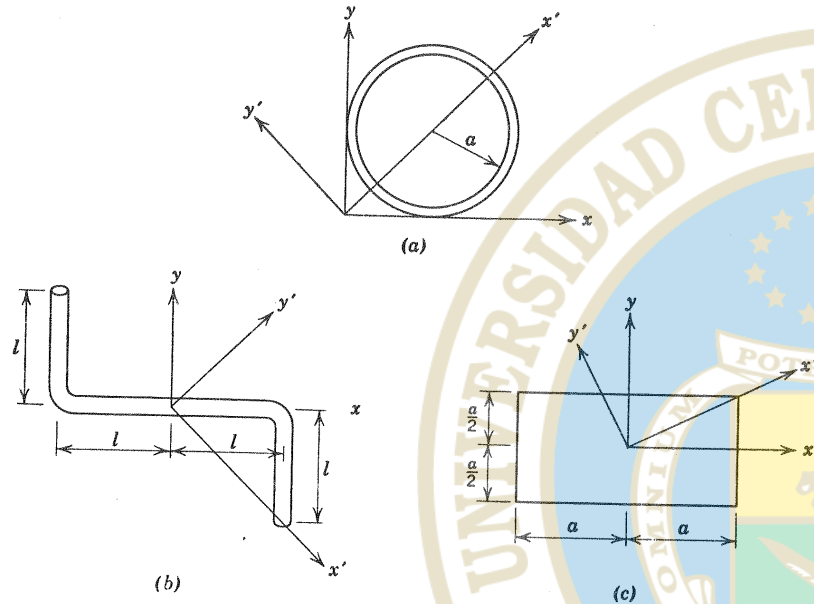


Fig. P-5.13

5.14. El momento de inercia de un cuerpo con relación a la recta l es $\int_A \rho^2 dm$, donde ρ es la distancia perpendicular de dm a la recta. Si la dirección de l está dada por el vector unitario $\bar{e}_l = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$, entonces $I_l = \int_A |\bar{r} \times \bar{e}_l|^2 dm$. Demostrar que

$$I_l = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta.$$

Esto es, si para un cuerpo se conocen los momentos y productos de inercia con respecto a los ejes xyz , el momento de inercia con respecto a cualquier recta que pasa por el origen se puede calcular mediante la fórmula anterior.

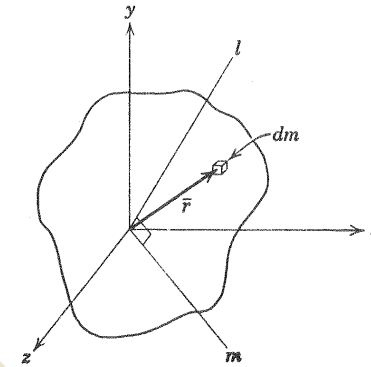


Fig. P-5.14 y P-5.15

5.15. De una manera similar a la del problema anterior 5.14, se puede calcular el producto de inercia con respecto a dos ejes cualesquiera mutuamente perpendiculares que pasan por el origen. Si $\bar{e}_l = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$ y $\bar{e}_m = \cos \alpha' \bar{i} + \cos \beta' \bar{j} + \cos \gamma' \bar{k}$ definen estos ejes, entonces $I_{lm} = \int_A (\bar{r} \cdot \bar{e}_l)(\bar{r} \cdot \bar{e}_m) dm$. Deducir la fórmula.

$$I_{lm} = -\cos \alpha \cos \alpha' I_{xx} - \cos \beta \cos \beta' I_{yy} - \cos \gamma \cos \gamma' I_{zz} + (\cos \beta \cos \gamma' + \cos \gamma \cos \beta') I_{yz} + (\cos \alpha \cos \gamma' + \cos \gamma \cos \alpha') I_{zx} + (\cos \alpha \cos \beta' + \cos \beta \cos \alpha') I_{xy}.$$

5.16. Utilizar los resultados del problema 5.14 para hallar el momento de inercia de un cubo de masa M y lado a , respecto a:

- La diagonal l_1 del cubo.
- La diagonal l_2 de una cara.

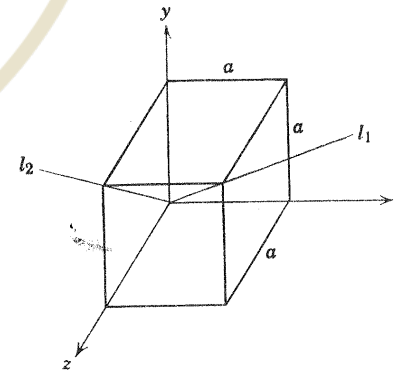


Fig. P-5.16

5.17. Utilizar los resultados del problema 5.15 para hallar el producto de inercia $I_{x'y'}$ para el cilindro del problema 5.100.

5.18. El sistema que se muestra tiene masa M_a y desliza hacia abajo de un plano liso. La barra tiene masa M_b y longitud l y está articulada por un pasador en B y se apoya en el punto A de una superficie lisa. Hallar todas las fuerzas que actúan sobre la barra.

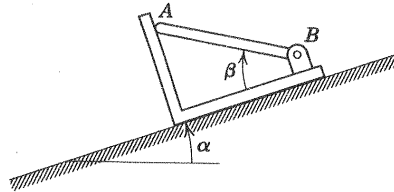


Fig. P-5.18

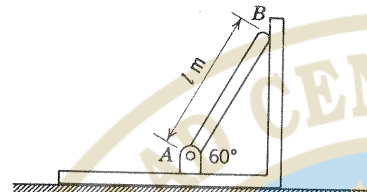


Fig. P-5.19

5.19. Una barra uniforme AB pesa W kg. Está unida al bastidor mediante una articulación de pasador en A . ¿Qué aceleración hacia la derecha debe tener el bastidor para hacer que la reacción sobre la barra en el punto B sea cero? ¿Cuál es la reacción en el pasador cuando la reacción en B es cero?

5.20. Hallar el conjunto de valores de x para los cuales la cuña de peso W tendrá movimiento de traslación. El coeficiente de rozamiento cinético entre la cuña y el plano es μ .

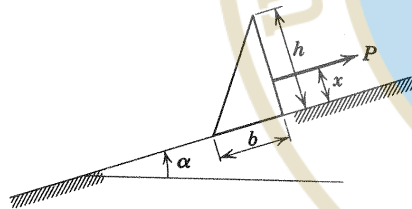


Fig. P-5.20

5.21. Una barra recta uniforme de peso W y longitud l se coloca en una caja (se muestra en sección transversal) en la posición que se muestra. Si se desprecia el rozamiento, ¿qué aceleración debe tener la caja si la barra permanece en equilibrio con relación a la caja? Si la barra pesa 5 kg, la caja pesa 10 kg, μ entre la barra y la caja es 0.2, μ entre la caja y el piso es 0.4 y $\alpha = 30^\circ$, determinar los valores máximo y mínimo de la fuerza horizontal P que permitirán que la barra permanezca en equilibrio respecto a la caja.

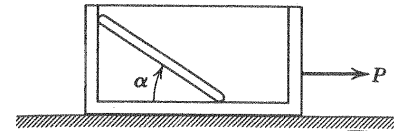


Fig. P-5.21

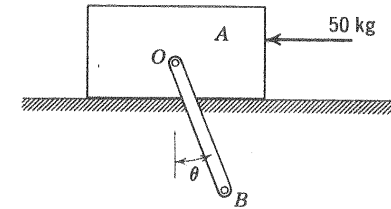


Fig. P-5.22

5.22. Un cuerpo A pesa 19.6 kg y una barra OB pesa 9.8 kg. OB está unida a A mediante un pasador liso. Por el efecto de la fuerza de 50 kg el conjunto se mueve hacia la izquierda. Determinar el ángulo θ si éste permanece constante durante el movimiento. El coeficiente de rozamiento entre A y la superficie horizontal es 0.2.

5.23. Cuando el carrito está en reposo o se mueve con rapidez uniforme la barra AB que pesa 10 kg y tiene una longitud de 2 m pende verticalmente hacia abajo. Cuando al carrito se le da una aceleración $\bar{a} = 16\bar{i}$ m/seg², la barra adquiere una desviación angular de la posición vertical de $\theta = 10^\circ$. Hallar la constante k del resorte. Se supone que el resorte permanece horizontal.

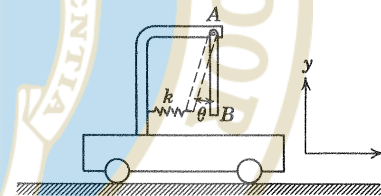


Fig. P-5.23

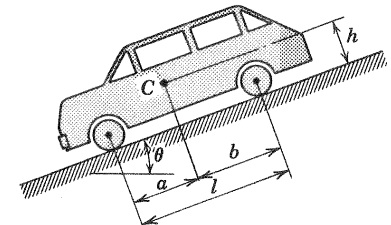


Fig. P-5.24

5.24. El automóvil de peso W baja una pendiente de θ° cuando se aplican los frenos. Si se frenan las cuatro ruedas, hallar la fuerza normal total N_1 bajo el par de ruedas delanteras. El coeficiente de rozamiento cinético para las cuatro ruedas es μ .

5.25. La puerta deslizante tiene un peso de 196 kg. Si P es de 20 kg, hallar la aceleración de la puerta y las reacciones en A y B . Se supone que los rodillos son lisos y de masa despreciable.

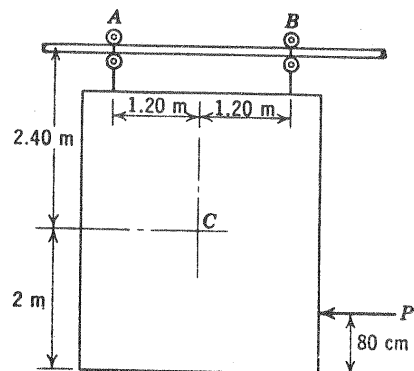


Fig. P-5.25

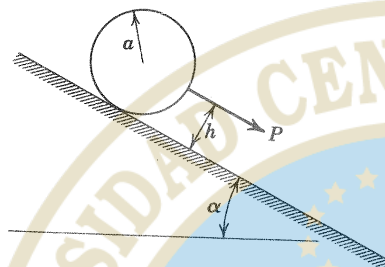


Fig. P-5.26

5.28. Con relación al problema 5.27 y la determinación de las fuerzas P necesarias para hacer que W suba con una aceleración inicial a , si el coeficiente de rozamiento entre las barras y W es μ . ¿Cuál es la restricción sobre α para que esto sea posible?

5.29. Un poste uniforme descansa sobre el borde frontal de un carro que asciende por una pendiente con aceleración uniforme a_0 . ¿A qué ángulo θ debe inclinarse el poste a fin de que pueda mantener su posición con relación al carro?

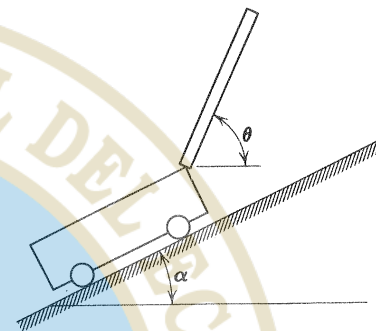


Fig. P-5.29

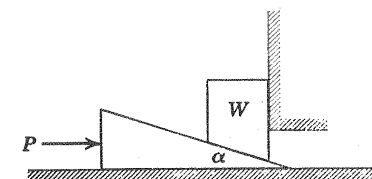


Fig. P-5.30

5.26. Un aro delgado de masa M y radio a es arrastrado a lo largo de un plano inclinado de tal manera que no tiene rotación. Si el coeficiente de rozamiento es μ , determinar la distancia h .

5.27. Un cilindro de peso W y radio r está apoyado simétricamente en un plano vertical por dos barras cuyo peso puede despreciarse. Para la posición que se muestra, hallar las fuerzas P necesarias para:

- Levantar W con una aceleración inicial a .
- Bajar W con una aceleración inicial a .

El rozamiento se desprecia.

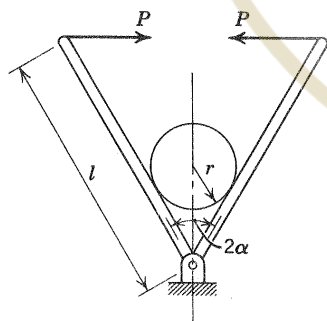


Fig. P-5.27

5.30. Una cuña ideal lisa se utiliza para levantar un peso W . Hallar la fuerza P necesaria para levantar el peso con una aceleración a si el peso de la cuña es Q y se desprecia todo rozamiento.

5.31. Resolver el problema 5.30 si el coeficiente de rozamiento entre W y la pared es μ .

5.32. Una barra que pesa 3 kg/m está doblada en ángulo recto con segmentos de 78 cm y 39 cm de longitud. Adquiere la posición que se muestra cuando el bastidor F al que está articulada en A se acelera horizontalmente. Determinar esta aceleración y las componentes de la reacción en A .

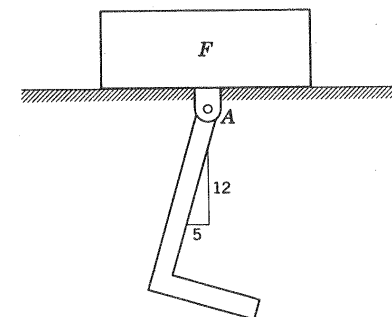


Fig. P-5.32

5.33. Una placa rectangular de masa M y sostenida por dos cables de longitud l se suelta desde el reposo en $\alpha = 30^\circ$. Hallar:

- Las tensiones en los cables inmediatamente después que se suelta.
- Las tensiones de los cables cuando $\alpha = 90^\circ$.

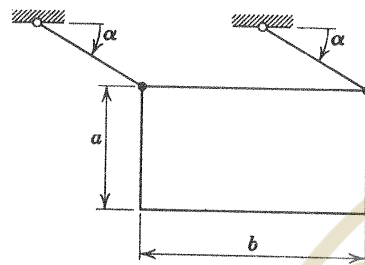


Fig. P-5.33

5.34. Una ventana está sostenida por dos cuerdas que pasan sobre poleas situadas en el marco de la ventana y en cuyo extremo hay contrapesos cada uno iguales a la mitad del peso de la ventana. Si se rompe una de las cuerdas y la ventana cae con una aceleración a , hallar el coeficiente de rozamiento entre la ventana y el marco. Se supone que la ventana está ajustada perfectamente al marco. La altura de la ventana es h y su anchura b .

5.35. Como se muestra, un cilindro de masa M y radio a se apoya contra una pared vertical y un plano inclinado. Una fuerza horizontal P actúa sobre un cable enrollado alrededor del cilindro. Si el coeficiente de rozamiento es μ entre ambas superficies, hallar la fuerza P necesaria para dar al cilindro una aceleración angular $\dot{\omega}$. Se supone que μ es suficientemente pequeño de modo que el cilindro permanece en contacto con las dos superficies.

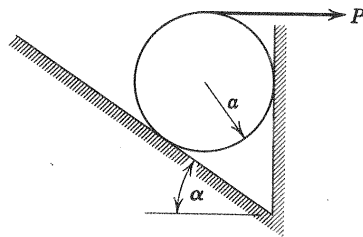


Fig. P-5.35

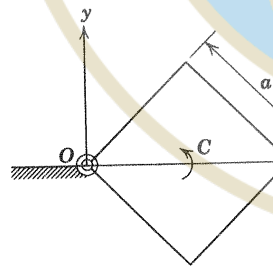


Fig. P-5.36

5.36. La placa cuadrada uniforme pesa 39.2 kg y $a = 3\sqrt{2}$ m. Si la placa gira alrededor de un eje horizontal en O . Hallar las componentes de la reacción en O y el momento del par C cuando $\bar{\omega} = -5\bar{k}$ rad/seg y $\dot{\bar{\omega}} = -10\bar{k}$ rad/seg².

5.37. Un ángulo de hierro pesa 20 kg y gira en un plano vertical alrededor de un eje horizontal que pasa por O . En la posición que se muestra tiene una velocidad angular de 4 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj. Hallar la reacción del rodamiento sobre el ángulo.

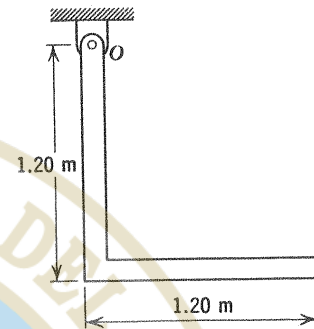


Fig. P-5.37

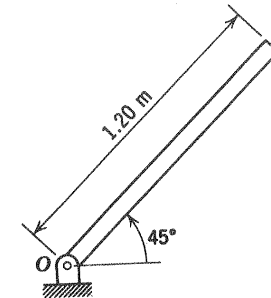


Fig. P-5.38

5.38. Una puerta de trampa pesa 19.6 kg, se suelta desde la posición mostrada y cae hacia abajo. Hallar la reacción inicial en el soporte O si a la puerta se da una velocidad angular inicial de 1 rad/seg.

5.39. Una barra de longitud l y masa M descansa sobre un plano horizontal liso y está obligada a moverse con sus extremos en contacto con un aro liso. El aro está fijo al plano. Como se ve, una fuerza P actúa y siempre permanece normal a la barra. Hallar la velocidad angular de la barra después de haber recorrido completamente el aro partiendo desde el reposo.

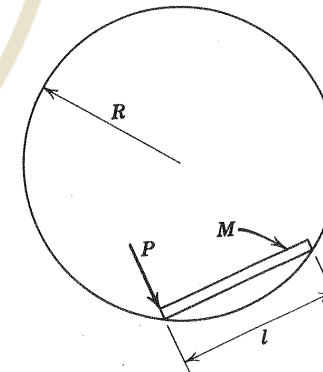


Fig. P-5.39

5.40. Un péndulo físico o compuesto se ve suspendido de O por un pasador liso. El péndulo tiene una masa M y un radio de giro con respecto a O de k_o . Una fuerza horizontal P actúa a través de un punto Q en tal forma que la reacción horizontal en O es igual a cero. Hallar d . El punto Q se llama centro de percusión del cuerpo respecto al punto O . También demostrar que O es el centro de percusión con relación a Q .

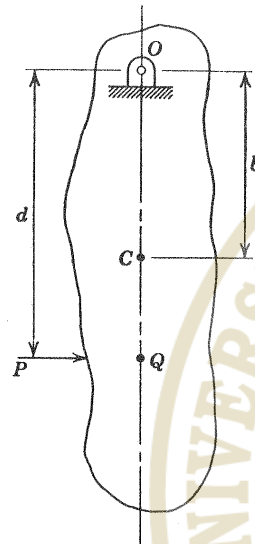


Fig. P-5.40

5.41. Un disco circular delgado de masa M y radio a gira alrededor de su eje de revolución con una velocidad angular ω . Después el disco se lleva a un plano horizontal con su eje de rotación vertical. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el disco es μ . Se supone que el sistema de fuerzas entre el disco y el plano está uniformemente distribuido. Hallar el tiempo necesario para que el disco llegue al reposo.

5.42. Hallar la aceleración angular de la polea y la tensión en cada cuerda. Se considera que la polea doble está formada por un solo cilindro y que se desprecia el rozamiento en el eje.

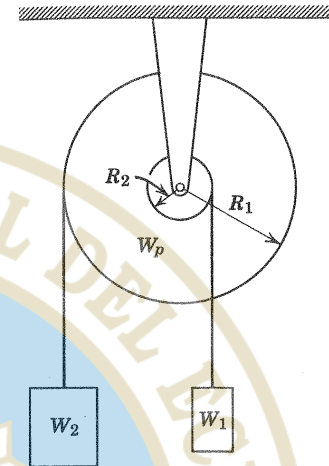


Fig. P-5.42

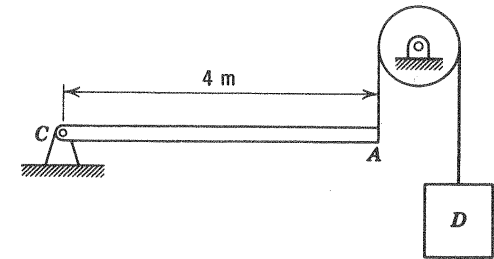


Fig. P-5.43

5.43. El sistema de barra y polea lisas tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 0.5 rad/seg en la posición que se indica. El peso de la barra es de 98 kg y el peso de la polea es despreciable. Hallar la reacción en el pasador C y la aceleración del peso D . D pesa 29.4 kg .

5.44. La viga simplemente apoyada que se muestra pesa $W \text{ kg/unidad de longitud}$. Trátase como una barra larga delgada. La viga está cargada con una fuerza concentrada P y el momento de un par concentrado Pl . Si repentinamente se suprime el apoyo izquierdo, hallar el valor instantáneo de la reacción derecha. ¿Cuál es la razón de la reacción estática en B a la reacción dinámica?

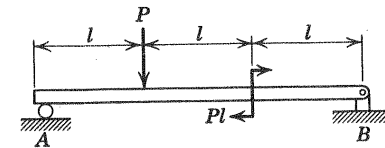


Fig. P-5.44

5.45. Una barra delgada de masa M y longitud l está articulada con un pasador en un extremo. La barra se suelta desde el reposo en una posición horizontal. En el instante en que se suelta hallar la posición y el valor del momento flexionante máximo en la barra.

5.46. Una rueda desbalanceada A pesa 19.6 kg y tiene un radio de giro con relación al eje horizontal de rotación que pasa por O de 12 cm. El bloque B pesa 14.7 kg y está unido a A mediante una cuerda inextensible que pasa en D sobre un tambor liso de masa despreciable y se enrolla alrededor de A . El momento del par M aplicado a A es de 12 kg-m contrario a las manecillas del reloj. Cuando A está en la posición indicada tiene una velocidad angular de 6 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj. Determinar las componentes normal y tangencial de la reacción en O sobre el cuerpo A . Se desprecia el rozamiento en el rodamiento situado en O .

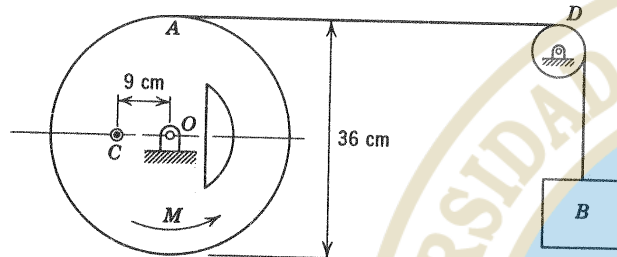


Fig. P-5.46

5.47. Una plataforma horizontal gira alrededor de un eje vertical que pasa por O , parte desde el reposo con una aceleración angular constante $\omega \mathbf{k}$ rad/seg². Una barra delgada AB de peso W y longitud l descansa sobre la plataforma y está fija en A por medio de un pasador vertical. Si el coeficiente de rozamiento entre la plataforma y la barra es μ , hallar el tiempo necesario para que la barra deslice. Se supone que existe un contacto uniforme entre la barra y la plataforma. ¿Para qué aceleración angular inicial mínima la barra deslizará inmediatamente?

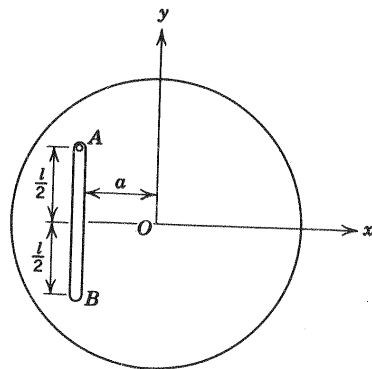


Fig. P-5.47

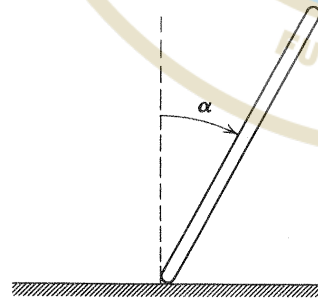


Fig. P-5.48

5.48. Una barra delgada de masa M y longitud l se sostiene verticalmente y después se suelta. Si la barra desliza sobre el plano horizontal cuando forma un ángulo α con la vertical, hallar el coeficiente de rozamiento entre la barra y el plano.

5.49. El ángulo de hierro ABC de masa total M está unido a una mesa giratoria con un pasador liso en C y un rodillo en A que proporciona apoyo en la dirección x . Cuando la mesa gira con una velocidad angular constante $\omega \mathbf{k}$ alrededor de un eje vertical que pasa por O , determinar la fuerza axial, la fuerza de corte y el momento flexionante en la sección $a-a$ sobre la longitud AB debidos al movimiento.

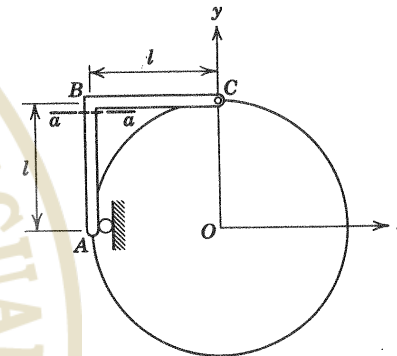


Fig. P-5.49

5.50. Una barra delgada de masa M descansa sobre una mesa cuadrada provista de un borde vertical. Si se hace girar la mesa alrededor de un eje vertical pasando por O con una velocidad angular ω , determinar las reacciones del borde sobre la barra en los tres puntos de contacto. Despréciese el rozamiento.

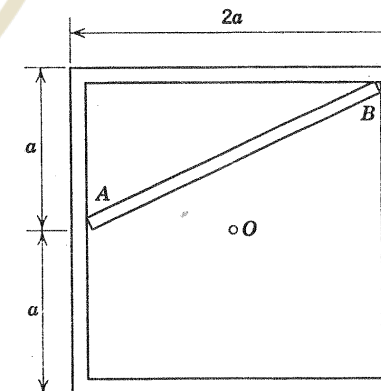


Fig. P-5.50

5.51. Si la mesa del problema 5.50 tiene una aceleración angular $\bar{\omega}$ contraria a las manecillas del reloj y empieza a moverse desde el reposo, determinar las reacciones del borde de la mesa sobre la barra en el instante inicial.

5.52. Una mesa giratoria horizontal se acelera desde el reposo con una aceleración angular constante $\bar{\omega}$ en torno a O . Un palo de masa M está unido a la mesa por un pasador en A y un cable en B . Hallar el tiempo necesario para que el cable se rompa si la resistencia a la ruptura del cable es T_0 . Despréciase todo rozamiento.

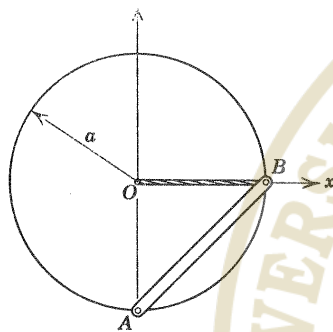


Fig. P-5.52

5.53. Se supone que en el problema 5.27 cada barra tiene un peso Q , hallar las fuerzas P necesarias para para levantar W con una aceleración inicial a .

5.54. Una barra de masa M y longitud l está rígidamente unida a un ángulo α en la flecha AB que gira alrededor de un eje vertical. Si la flecha gira con velocidad angular constante $\bar{\omega}$, determinar:

- La fuerza axial, la fuerza de corte y el momento flexionante sobre la barra en el punto de unión.
- Las reacciones en las chumaceras A y B .

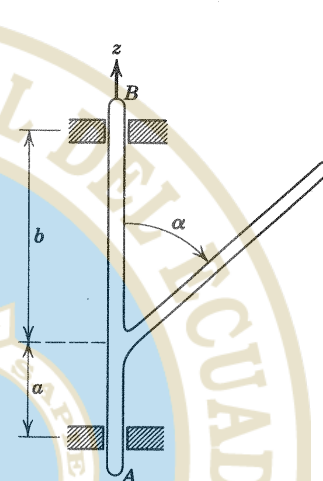


Fig. P-5.54

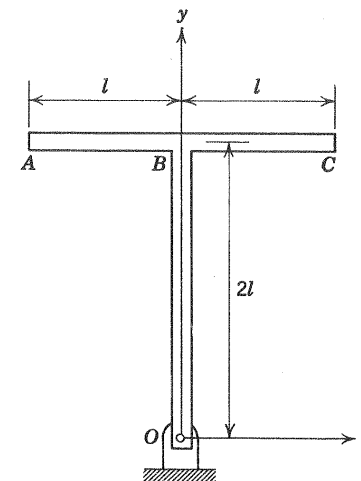


Fig. P-5.55

5.55. La barra en T que se muestra gira alrededor de un eje vertical que pasa por O . Las barras tienen un peso μ kg/unidad de longitud. Dibujar los diagramas de corte y de momento dinámicos para el segmento BC .

- Si las barras giran con una velocidad angular constante $\bar{\omega}$.
- En el instante en que las barras parten del reposo con una aceleración angular $\bar{\omega}$.

5.56. Para la barra en T del problema 5.55 escribir una expresión para la fuerza axial en el segmento OB en función de y , que es la distancia a lo largo de OB medida desde O .

- Si las barras giran con velocidad angular constante $\bar{\omega}$.
- En el instante en que las barras parten del reposo con una aceleración angular $\bar{\omega}$.

5.57. Una esfera de masa M y radio a descansa sobre el borde de un saliente horizontal. Si principia a rodar sobre el borde con una velocidad angular inicial pequeña que puede despreciarse y el rozamiento entre el saliente y la esfera es suficiente para evitar el deslizamiento, determinar el ángulo α en que la esfera abandonará el borde. ¿Cuál es la velocidad angular cuando lo abandona?

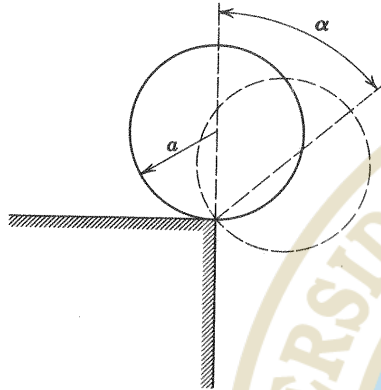


Fig. P-5.57

5.58. Tres pesos concentrados de 9.8 kg están unidos a una flecha de 1.50 m de longitud mediante barras de 30 cm de largo. Las barras son perpendiculares a la flecha. El motor ejerce en la banda, por medio de la polea de 18 cm de radio, las tensiones que se indican. En la posición representada en la figura, hallar las reacciones en los rodamientos A y B . Considérese solamente la masa de los pesos concentrados y despréciase el rozamiento.

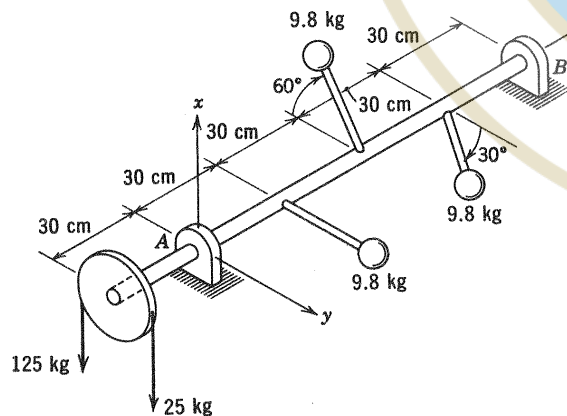


Fig. P-5.58

5.59. Un ángulo uniforme de hierro ABC pesa 75 kg y está apoyado sobre una mesa giratoria que gira alrededor de un eje vertical z con una velocidad angular de $10\hat{k}$ rad/seg. El apoyo en A es un pasador liso y en B un rodillo proporciona una restricción solamente en la dirección vertical. Hallar todas las fuerzas que actúan sobre el ángulo durante el movimiento.

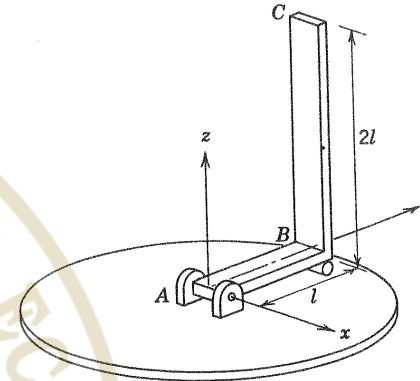


Fig. P-5.59

5.60. Resolver el problema 5.59, hallando todas las fuerzas que actúan sobre el ángulo cuando la mesa giratoria parte del reposo con una aceleración angular de $20\hat{k}$ rad/seg².

5.61. Dos barras delgadas cada una de longitud l y peso W están articuladas como se muestra. Están en libertad de girar en el plano vertical alrededor de un eje en O . Si las dos barras se sueltan simultáneamente desde el reposo en la posición horizontal, hallar la aceleración angular inicial de cada barra y la reacción del rodamiento en O .

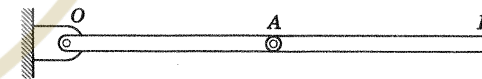


Fig. P-5.61

5.62. Una barra de longitud l y masa M descansa sobre un plano liso horizontal. Se aplica una fuerza P en uno de los extremos y normal a la barra. En este instante hallar:

- La aceleración angular de la barra.
- La aceleración del otro extremo de la barra.

5.63. La esfera sólida homogénea pesa W kg y rueda sin deslizar. Hallar la distancia x para la cual la fuerza de rozamiento será cero para cualquier fuerza horizontal P .

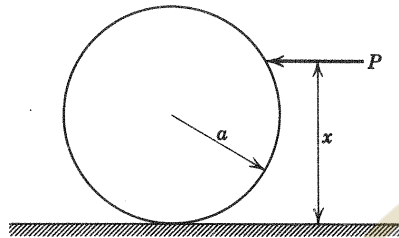


Fig. P-5.63

5.64. Una esfera sólida homogénea rueda sin deslizar en un canal en V bajo la acción de la gravedad. Hallar la aceleración del centro de masa y el coeficiente de rozamiento mínimo necesario para evitar el deslizamiento.

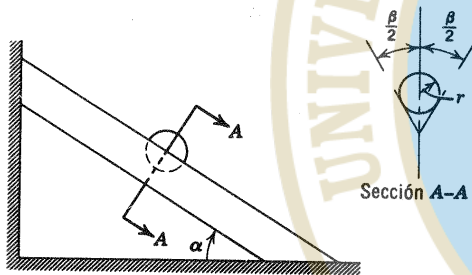


Fig. P-5.64

5.65. Una esfera de peso W y radio r rueda en un plano vertical sin deslizamiento sobre una superficie curva de radio R . Cuando el centro de la esfera tiene una rapidez V , hallar la reacción normal de la superficie sobre la esfera.

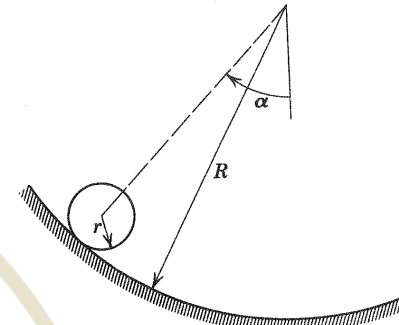


Fig. P-5.65

5.66. Una barra de 10 kg se utiliza para remolcar un rodillo cilíndrico de 125 kg. Hallar la aceleración del centro del rodillo bajo la acción de la fuerza P horizontal y constante. El rozamiento es suficiente para evitar el deslizamiento. ¿Qué ángulo debe formar la barra con la horizontal?

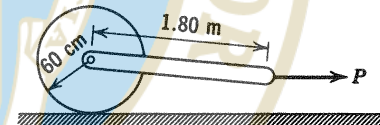


Fig. P-5.66

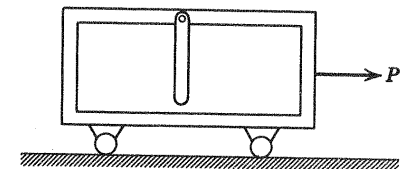


Fig. P-5.67

5.67. Una barra delgada de masa M y longitud l está unida mediante un pasador a un carro de masa $3M$ y cuelga verticalmente como se muestra. Hallar la aceleración del extremo inferior de la barra cuando el sistema parte del reposo bajo la acción de la fuerza P . Despréciese el rozamiento.

5.68. Hallar la aceleración angular de la polea compuesta que tiene un peso W_p y un radio de giro con respecto a O de k_o .

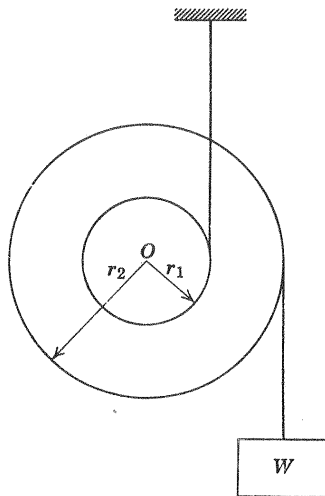


Fig. P-5.68

5.69. Una viga de acero uniforme de longitud $2l$ se levanta con una grúa a una rapidez uniforme v_o en el momento en que el cable en B se rompe. Los cables AD y BD están fijos en el gancho de la grúa D y cada uno tiene longitud a . Hallar la aceleración del extremo A inmediatamente después que el cable se rompe, se supone que D continúa su movimiento vertical uniforme.

5.70. Un semicilindro pesa W kg y se suelta desde el reposo en la posición indicada. Calcular la aceleración inicial del bloque, también de peso W kg, si el rozamiento se desprecia.

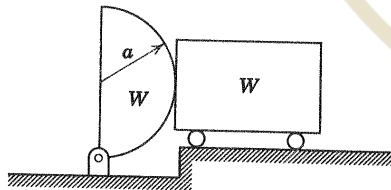


Fig. P-5.70

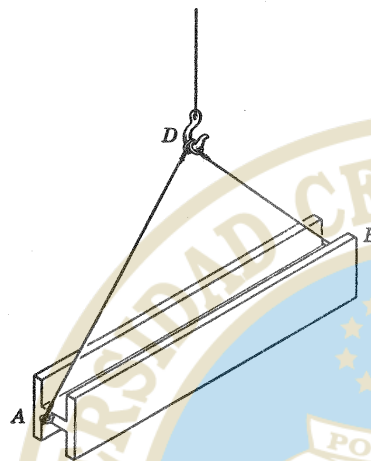


Fig. P-5.69

5.71. Un carro pequeño pesa 20 kg y la barra que está unida a él pesa 10 kg, el conjunto está en reposo sobre un plano liso en la posición que se muestra. Si se permite que la barra caiga al mismo tiempo que se aplica la fuerza $P = 30$ kg, hallar la aceleración angular inicial de la barra y el valor instantáneo de la reacción del pasador en B sobre la barra. ¿Qué valor de P hará que la aceleración angular de la barra sea igual a cero?

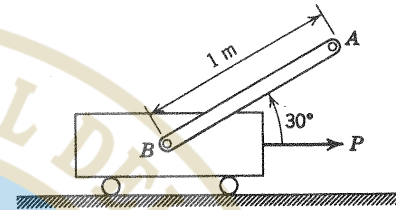


Fig. P-5.71

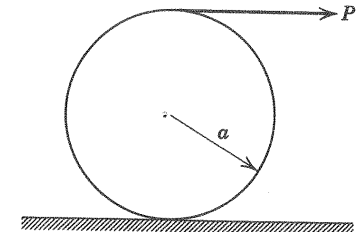


Fig. P-5.72

5.72. Hallar la mínima fuerza P que hará que el cilindro de masa M deslice. El coeficiente de rozamiento es μ .

5.73. La barra AB de 8 kg desliza en un plano vertical a lo largo de guías. Cuando la barra está en la posición horizontal, la velocidad angular es de 5 rad/seg en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Hallar las reacciones en A y B sobre los bloques de masa despreciable.

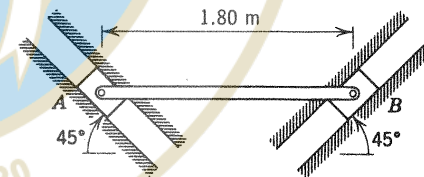


Fig. P-5.73

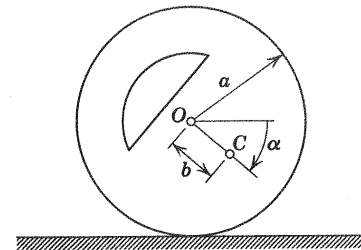


Fig. P-5.74

5.74. Un cilindro desbalanceado con su centro de masa a una distancia b de su centro geométrico rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. El centro del cilindro se mueve con una velocidad constante v hacia la derecha. Si el cilindro tiene una masa M , radio a y radio de giro k_c con respecto a un eje horizontal que pasa por C , hallar la fuerza normal que ejerce el plano sobre el cilindro como una función del ángulo α . ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento necesario para evitar el deslizamiento?

5.75. Hallar el momento del par que se requiere en el problema 5.74 para dar al cilindro desbalanceado el movimiento prescrito.

5.76. El extremo inferior de una escalera se mueve hacia la derecha con una velocidad constante v . La escalera tiene un peso W y una longitud l . Hallar las reacciones en A y B sobre la escalera cuando $\theta = 45^\circ$. El punto B está obligado a permanecer en todo instante en contacto con la pared y el rozamiento se desprecia.

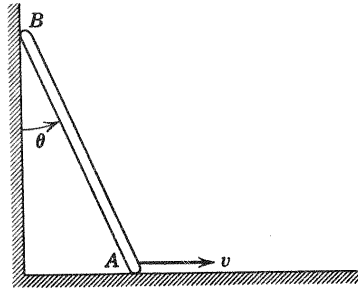


Fig. P-5.76

5.77. Una rueda desbalanceada pesa 196 kg y tiene un radio de giro de 33 cm con respecto a un eje horizontal que pasa por el centro de masa C . La rueda está rodando y deslizando sobre el plano horizontal. Cuando está en la posición que se muestra, la velocidad de O es de 30 cm/seg hacia la derecha y la velocidad angular es de 2 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj. El coeficiente de rozamiento entre la rueda y la superficie horizontal es 0.30. Hallar la aceleración angular de la rueda.

5.78. La barra de masa M desliza desde el reposo en $\theta = 0$. El coeficiente de rozamiento en cada superficie es μ y es lo suficientemente pequeño para permitir el movimiento bajo la acción de la gravedad. Suponiendo que la barra solamente está en contacto en sus extremos con las superficies en que se apoya, hallar la aceleración angular inicial de la barra.

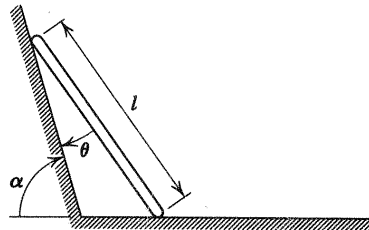


Fig. P-5.78

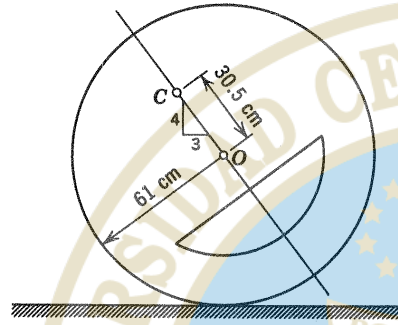


Fig. P-5.77

5.79. Durante un temblor de tierra se imprime una aceleración horizontal a en la base de una chimenea alta de ladrillo. Se supone que la chimenea es una columna larga y delgada de peso W , longitud l y en libertad de girar alrededor de su base. Hallar:

- La fuerza horizontal aplicada en la base.
- La aceleración del centro de masa.
- La aceleración angular de la chimenea.

5.80. Una barra delgada de peso W y longitud l está colocada en una posición inclinada con su extremo superior apoyado en una pared vertical lisa y su extremo inferior sobre una superficie horizontal lisa. La barra forma un ángulo θ con la horizontal. En el instante en que se suelta la barra hallar:

- La aceleración angular de la barra.
- La reacción del piso.
- La reacción de la pared.

5.81. Un hemisferio está colocado en la forma que se muestra y después se suelta. Hallar la aceleración angular inicial y la fuerza normal que ejerce el plano horizontal. El peso del hemisferio es W y su radio es a . Se supone que no hay deslizamiento.

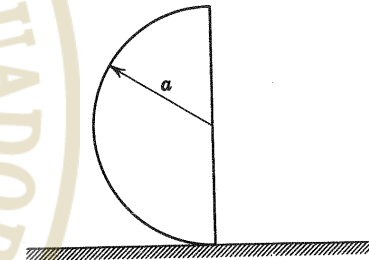


Fig. P-5.81

5.82. Resolver el problema 5.81 si la superficie horizontal es lisa.

5.83. Una barra delgada de peso W y longitud l se apoya sobre un semicilindro fijo. ¿Cuál es la aceleración angular inicial de la barra cuando se suelta desde el reposo en la posición indicada? Se desprecia el rozamiento.

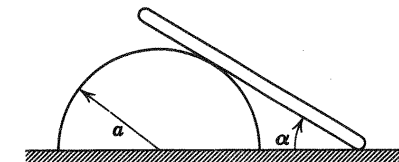


Fig. P-5.83

5.84. Dos barras delgadas cada una de longitud l y peso W están articuladas por uno de sus extremos y colocadas en un plano horizontal liso. Si se permite que caigan desde el reposo en un plano vertical, hallar su aceleración angular inicial.

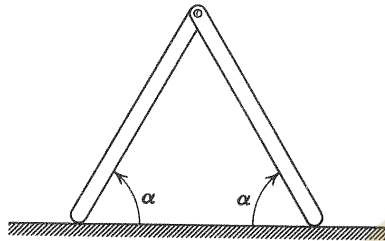


Fig. P-5.84

5.85. Para la chimenea del problema 5.79, hallar la posición y el valor del momento flexionante máximo que se produce en su longitud.

5.86. Dos barras delgadas idénticas están articuladas y suspendidas de un rodillo de masa despreciable, que se halla sobre una superficie horizontal lisa como se muestra. Cada barra tiene una longitud l y una masa M . Si se aplica al rodillo una fuerza horizontal P , hallar la aceleración angular inicial de cada barra.

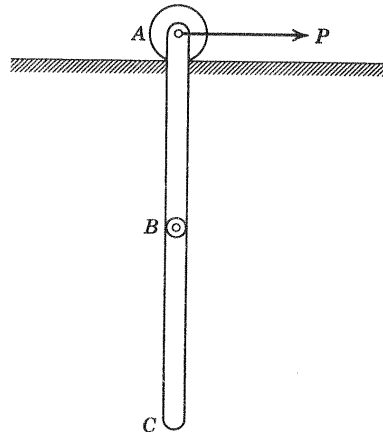


Fig. P-5.86

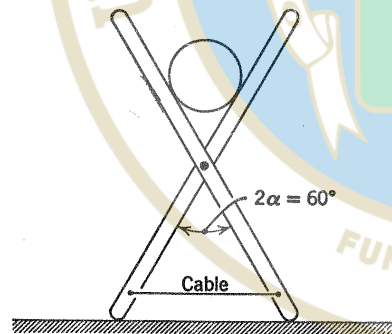


Fig. P-5.87

5.87. Un cilindro que pesa 14.8 kg tiene un radio de 30 cm está apoyado simétricamente en un plano vertical mediante dos barras delgadas cada una de longitud 1.80 m y de peso 7.4 kg. Las barras están articuladas en sus puntos medios. Si el cable, que sostiene al sistema en equilibrio, se rompe, hallar la aceleración inicial del centro del cilindro. Se desprecia todo rozamiento en el sistema.

5.88. Una rueda de bicicleta está montada sobre un eje especial que puede ser sostenido con las manos por medio de dos manubrios que, como se muestra, tienen una separación entre sus centros de 18 cm. Si el peso de la rueda es de 5 kg y su radio de giro es de 30 cm, ¿qué fuerzas iguales y opuestas $\vec{F}$ deben aplicarse con las manos en los centros de los manubrios para crear una rapidez de precesión de $1\hat{k}$ rad/seg cuando la rueda está girando a $-300\hat{i}$ rpm? Indicar los vectores correspondientes.

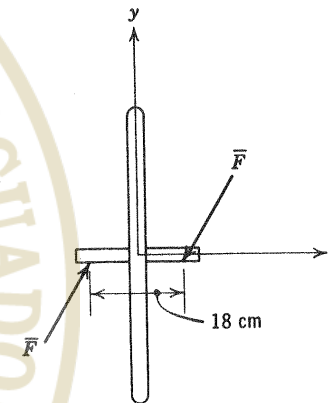


Fig. P-5.88

5.89. El turbocompresor de un avión a chorro gira en tal dirección que su vector momento angular está dirigido hacia la cola del avión. Cuando el aeroplano inicia un picado, el piloto siente una tendencia del aparato (debida al efecto giroscópico) a:

- ¿Desviarse la nariz hacia la izquierda?
- ¿Desviarse la nariz hacia la derecha?
- ¿Desviarse la nariz hacia arriba?
- ¿Desviarse la nariz hacia abajo?
- ¿Girar en sentido contrario a las manecillas del reloj?
- ¿Girar en sentido de las manecillas del reloj?

5.90. Un cono circular recto está apoyado por su vértice en un rodamiento esférico liso. Si $\theta_0 = 30^\circ$ y $\Omega = 1000$ rps, hallar las dos velocidades angulares de precesión posibles ϕ_1 y ϕ_2 . El cono pesa 100 g, su altura es de 18 cm y el radio de la base 3 cm. También hallar el número mínimo Ω de revoluciones por minuto necesarias para el movimiento giroscópico.

5.91. Un giróscopo de juguete se hace girar a una rapidez de 100 vueltas por segundo. Después se coloca (en montaje liso apropiado) de modo que el extremo inferior del eje de giro coincide con el pivote de un mástil especial. El eje de giro inicialmente forma un ángulo de 30° con el eje z y la rotación es en el sentido que se indica. ¿Cuál es la magnitud y dirección instantáneas del vector de precesión? Describir cualitativa y cuantitativamente el movimiento del giróscopo. Los datos de éste son: peso 228 g; radio de giro respecto al eje de rotación 1.25 cm; el centro de masa está sobre el eje de giro a 5 cm del pivote.

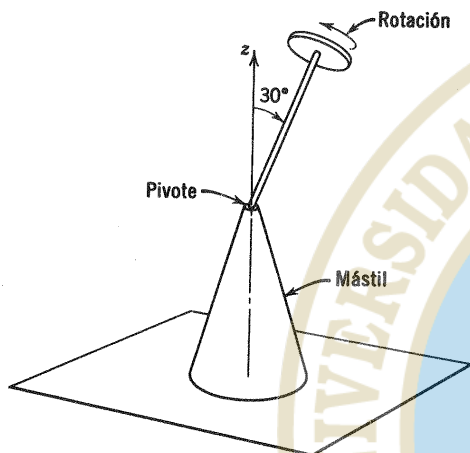


Fig. P-5.91

5.92. El disco A tiene una rapidez de rotación de $1200\hat{k}$ rpm. La rapidez de precesión del disco y del peso B es $1\hat{j}$ rad/seg. A pesa 50 kg y B pesa 100 kg. Hallar la distancia x . La barra que une A y B es de peso despreciable.

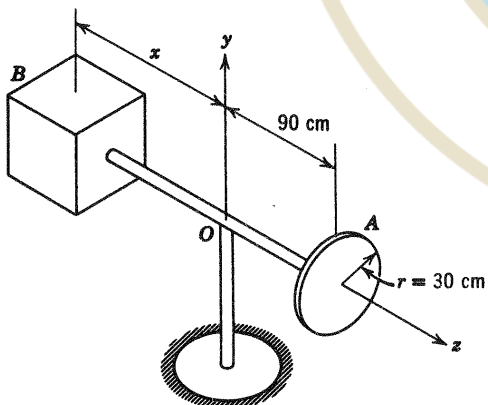


Fig. P-5.92

5.93. Una turbina de vapor de un barco está montada con su eje paralelo a la flecha de la hélice. La turbina pesa 1480 kg, gira a 1800 rpm, y está montada en rodamientos separados 1.22 m. Si tiene un radio de giro, respecto a su eje de rotación, de 91.5 cm, calcular las reacciones de los rodamientos por el efecto giroscópico, cuando el barco da una vuelta de 610 m de radio a 0.52 m/seg.

5.94. A fin de efectuar un trabajo de reparación, un obrero debe mover su máquina portátil de soldadura al arco. En vez de desconectar el arco de la fuente de alimentación, decide mover la unidad de soldar mientras está girando a una rapidez de 2000 rpm en el sentido contrario a las manecillas del reloj cuando se ve desde la parte trasera. Si el obrero puede mover la unidad a razón de 60 cm/seg sobre una curva y hacia la derecha, determinar las reacciones sobre las cuatro ruedas. La máquina de soldar tiene un peso total de 300 kg, la armadura pesa 75 kg y el radio de giro respecto al eje centroidal de rotación de la armadura es de 25 cm. El radio de curvatura de la trayectoria que sigue la soldadora es de 3 m y el cable de conexión permanece horizontal.

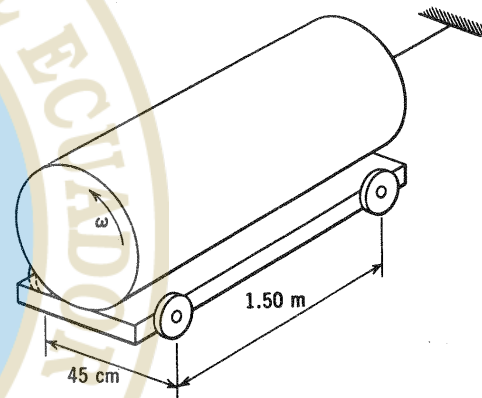


Fig. P-5.94

5.95. La armadura de un motor gira con la velocidad angular que se indica y está montada sobre el lado norte de un tren. Los rodamientos A y B están sobre los lados oeste y este del tren respectivamente. Cuando el tren se mueve con una rapidez constante v , determinar el radio de curvatura de una curva horizontal que reducirá a cero la componente vertical de la reacción del rodamiento en A . La armadura tiene un peso W y un radio de giro k respecto al eje AB . ¿En qué dirección dará vuelta el tren, este u oeste?

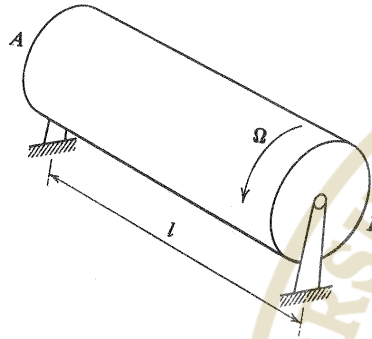


Fig. P-5.95

5.96. Se va a estabilizar un automóvil para contrarrestar la tendencia a la volcadura cuando recorre una curva. Determinar la dirección necesaria de la rotación y la rapidez de giro Ω del efecto giroscópico. El eje del movimiento giroscópico es paralelo a los ejes del carro. Aplicar los siguientes datos:

Peso del automóvil	$= W,$
Altura del centro de masa del automóvil respecto a la carretera	$= h,$
Radio de la curva	$= R,$
Angulo del peralte	$= 0^\circ,$
Rapidez	$= V,$
Masa giroscópica	$= m,$
Momento de inercia giroscópico respecto al eje de rotación	$= I.$

5.97. Un disco de 61 cm de diámetro y que pesa 196 kg rueda sobre un carril circular sin deslizar que tiene un radio de 3.05 m. Una barra paralela al plano xz tiene un extremo unido al centro del disco y el otro extremo se une al eje y por medio de un rodamiento. La barra solamente puede ejercer una fuerza axial sobre el disco. El centro del disco tiene una rapidez de 6.1 m/seg. Hallar todas las fuerzas que actúan sobre el disco.

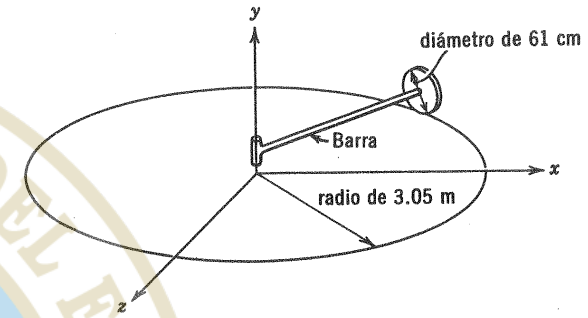


Fig. P-5.97

5.98. Hallar las componentes M_x , M_y , M_z del momento para la barra que se describe en el problema 4.41, tratándola como un cuerpo rígido y utilizando las ecuaciones de Euler.

5.99. Hallar las componentes M_x , M_y , M_z del momento para el aro del problema 4.42. Trátase el aro como un cuerpo rígido y utilícen las ecuaciones de Euler.

5.100. Un cilindro sólido, circular, recto, de peso W , está rígidamente unido a una flecha que gira montada en rodamientos A y B . Calcular las reacciones dinámicas de los rodamientos si $W = 161$ kg, $\theta = 45^\circ$, $L = 30$ cm, $r = 15$ cm y $\omega = \text{rad/seg}$. Utilizar los ejes principales.

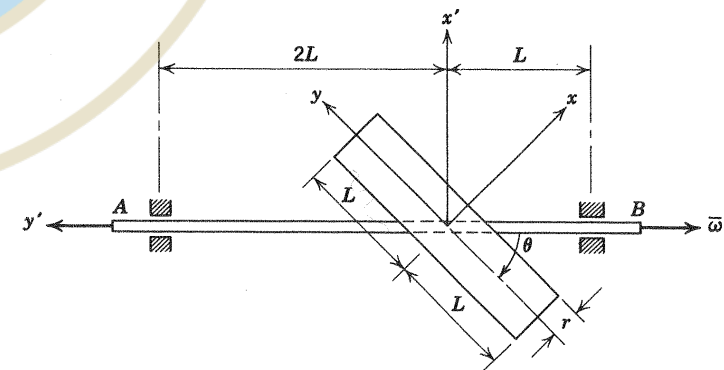


Fig. P-5.100

5.101. Una esfera homogénea de peso W y radio a tiene un cable enrollado en una circunferencia. Un extremo del cable está fijo en A y se deja que la esfera caiga desde el reposo. Hallar la velocidad del centro de masa después de que ha caído una distancia h . ¿Cuál es la tensión en el cable?

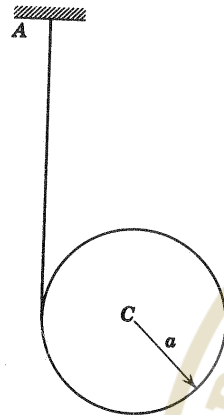


Fig. P-5.101

5.102. Resolver el problema 5.39 por medio de la ecuación de trabajo y energía.

5.103. Calcular la pérdida de energía en el problema del ejemplo 5.19.

5.104. Una barra delgada AB parte desde el reposo y desliza sin rozamiento en un plano vertical sobre una trayectoria circular. Hallar la aceleración de su punto medio en la posición que se muestra y la velocidad y aceleración angulares de la barra cuando llega a la posición horizontal.

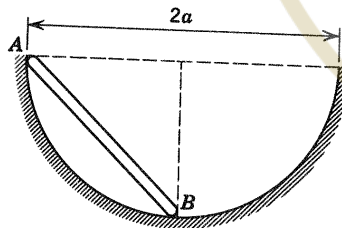


Fig. P-5.104

5.105. El centro de la rueda desbalanceada tiene una velocidad de 1.22 m/seg hacia la izquierda. La rueda pesa 98 kg y tiene un radio de giro con relación a un eje que pasa por C de 30 cm. Si la rueda gira sin deslizar, hallar su velocidad angular después de una rotación de $\pi/2$ rad.

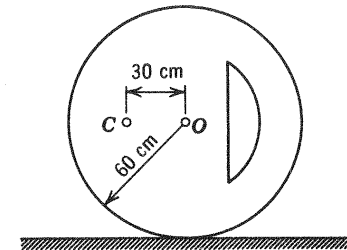


Fig. P-5.105

5.106. Hallar la energía cinética de la barra del problema 4.41 tratándola como cuerpo rígido.

5.107. Hallar la energía cinética del cilindro del problema 5.100.

5.108. Un auto que pesa 483 kg está montado sobre cuatro ruedas que son discos cilíndricos. Cada rueda pesa 80 kg y tienen un diámetro de 1.20 m. Si el carro viaja en un carril horizontal recto con una velocidad de 6 m/seg, ¿qué fuerza constante paralela al carril se requiere en los frenos para detener el auto en una distancia de 30 m? Se supone que no hay deslizamiento.

5.109. La polea y el tambor de peso W_p ruedan sin deslizar sobre un plano horizontal. La polea tiene un radio de giro con respecto a un eje horizontal que pasa por O de k_0 . Después que el peso W ha caído una distancia h a partir del reposo, ¿cuál es la velocidad angular de W_p ?

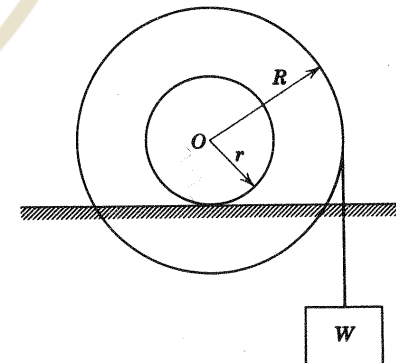


Fig. P-5.109

5.110. Una barra homogénea gira alrededor de O . El otro extremo está unido a un resorte que tiene un módulo de 50 kg/m y una longitud, cuando no está alargado, de 1.50 m . Si la barra está en reposo en la posición vertical, determinar su velocidad cuando alcanza la posición horizontal. La barra pesa 75 kg .

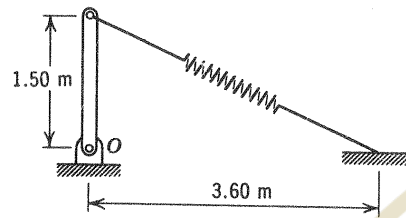


Fig. P-5.110

5.111. Una barra delgada de longitud l y peso W cae desde el reposo en la posición que se muestra. Ambas superficies de contacto son lisas. Hallar la velocidad del centro de masa de la barra justamente antes de chocar con la pared vertical.

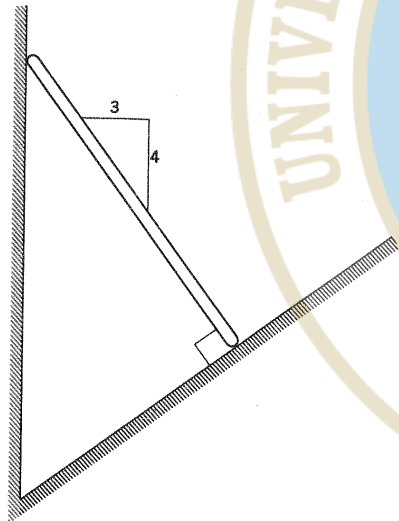


Fig. P-5.111

5.112. Una rueda desbalanceada pesa 200 kg , tiene un radio de giro respecto a un eje horizontal que pasa por C de 45 cm y rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. El resorte tiene una constante de 70 kg/m y puede someterse a tensión o compresión. En la posición que se muestra la velocidad de O es de 3.60 m/seg hacia la izquierda, $\theta = 0$ y el resorte está comprimido 30 cm . El momento del par C está en kg-m cuando θ está en radianes. Hallar la velocidad angular de la rueda después que O se ha desplazado $2\pi \text{ m}$ hacia la izquierda.

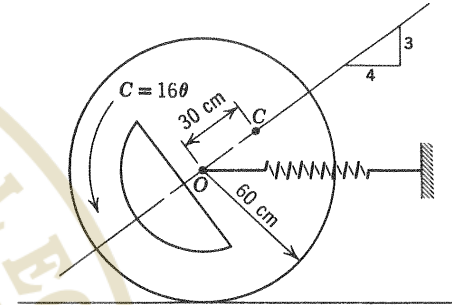


Fig. P-5.112

5.113. La barra de 10 kg OA está articulada en O y al centro de un cilindro de 25 kg . Si la barra tiene una velocidad angular de 2 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj, estando en la posición horizontal, hallar su velocidad angular cuando pasa por la posición vertical. El cilindro rueda sin deslizar.

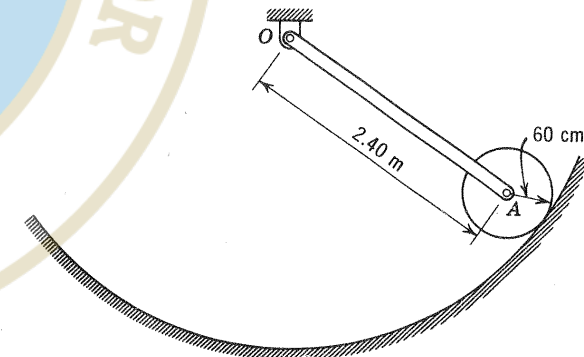


Fig. P-5.113

5.114. Un bote lleno de pintura, de radio r , rueda sin deslizar hacia abajo de un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Trátese el bote como un cascarón cilíndrico de peso W_b más dos discos delgados de peso total W_d . La pintura tiene un peso W_p . Se desprecia el rozamiento que puede existir entre el bote y la pintura. Si el bote se suelta desde el reposo, hallar la velocidad del centro de masa después que ha rodado una distancia s a lo largo del plano.

5.115. Un cuerpo A desciende con una velocidad de 2 m/seg cuando se aplica un momento constante en sentido contrario a las manecillas del reloj de 20 m/kg a la polea cilíndrica sólida que pesa 10 kg y tiene un radio de giro de 40 cm. Hallar la máxima distancia a que caerá A después de hacerse aplicado esa acción de freno. El cuerpo A pesa 30 kg.

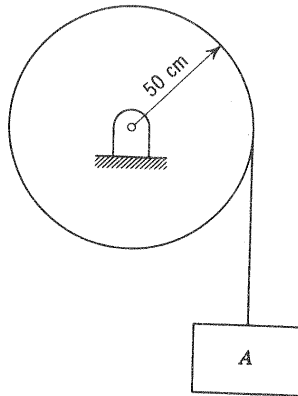


Fig. P-5.115

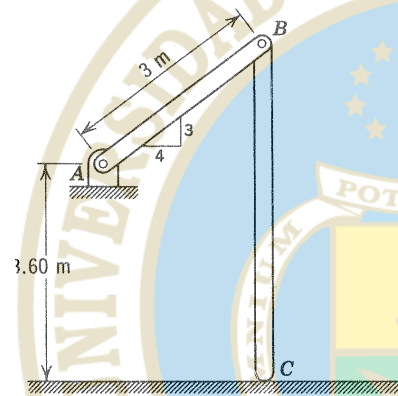


Fig. P-5.116

5.116. Las barras que se muestran pesan 15 kg/m. Si el extremo inferior de la barra vertical se desplaza ligeramente hacia la derecha con velocidad cero, hallar:

- La velocidad angular de AB cuando las dos barras están en línea recta.
- La energía cinética de AB cuando está en la posición vertical.

Despreciar el rozamiento.

5.117. Una esfera de radio a y masa M se mueve sobre una superficie cilíndrica entre A y B . Hallar la velocidad y aceleración de su centro C , cuando está en la posición más baja, si:

- La esfera no desliza.
- El coeficiente de rozamiento entre la esfera y la superficie cilíndrica es cero.

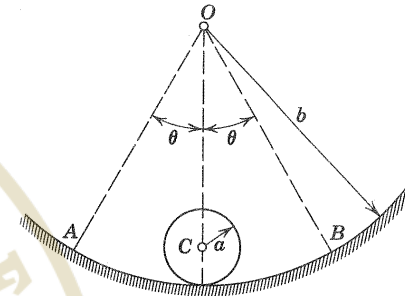


Fig. P-5.117

5.118. Dos barras uniformes AC y BC de igual peso W e igual longitud l están unidas por medio de un pasador en C y apoyadas sobre un plano horizontal liso como se indica. Si las barras caen desde el reposo en su plano vertical, hallar la velocidad v con que chocará el pasador C contra el plano.

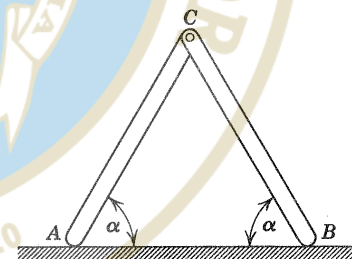


Fig. P-5.118

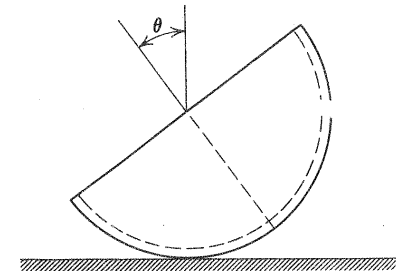


Fig. P-5.119

5.119. Un cascarón hemisférico de masa M y radio r oscila de un lado a otro, sin deslizamiento, sobre una superficie horizontal. ¿Cuál es la máxima velocidad del centro de masa si el cascarón se suelta desde el reposo con $\theta = \theta_0$?

5.120. La rueda desbalanceada A pesa 98 kg y tiene un radio de giro con relación a un eje que pasa por O de $\sqrt{2}$ m. Se desprecia la masa de la barra OB , el peso del bloque es de 98 kg y el coeficiente de rozamiento entre B y el plano es igual a $1/\pi$. Si la rueda tiene una velocidad angular de 8 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj cuando está en la posición que se muestra, determinar la velocidad angular de la rueda A después de haber girado un ángulo de 180° . La rueda gira sin deslizar.

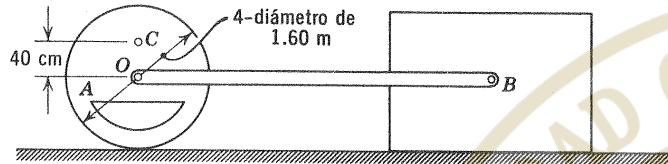


Fig. P-5.120

5.121. Hallar la velocidad del bloque del problema 5.70 después que el semicilindro ha girado un ángulo de $\pi/4$ rad.

5.122. Como se muestra en la figura, un cilindro circular homogéneo está suspendido a manera de yo-yo. ¿Cuál es la velocidad de su centro 2 seg después de haberse soltado? ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

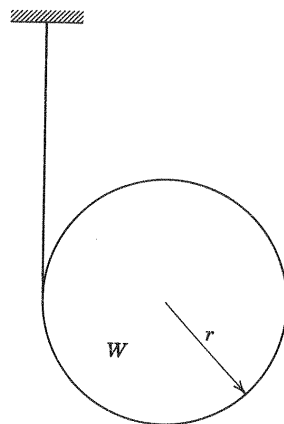


Fig. P-5.122

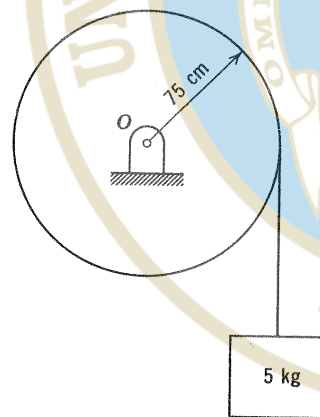


Fig. P-5.123

5.123. Determinar la velocidad v del peso de 5 kg, 4 seg después de haberse soltado desde el reposo. El tambor pesa 20 kg, el radio de giro respecto a O es de 40 cm y el rozamiento en O se desprecia.

5.124. Determinar el trabajo efectuado por la fuerza P y el momento del par C después de haberse aplicado durante T seg. El disco tiene una masa M y un radio r . Parte desde el reposo y rueda sin deslizar.

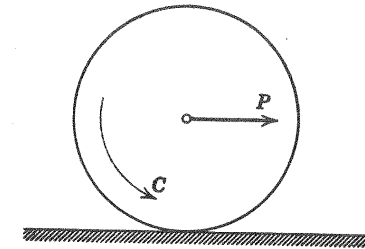


Fig. P-5.124

5.125. Un cilindro sólido homogéneo pesa 300 kg y está girando a 60 rad/seg en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por O . El coeficiente de rozamiento cinético entre los frenos y el cilindro es 0.20. Si la tensión en el resorte es de 150 kg cuando se aplican repentinamente los frenos, hallar el tiempo necesario para detener la rotación del cilindro. Se desprecia el espesor de los miembros verticales.

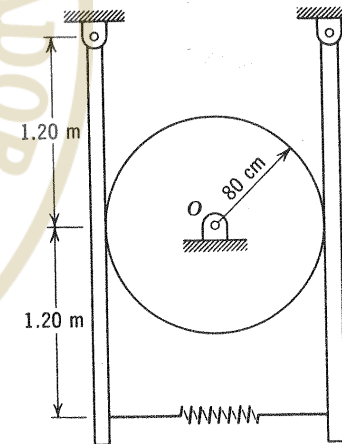


Fig. P-5.125

5.126. El cuerpo que se muestra pesa 108 kg y rueda sin deslizar. El radio de giro con respecto a C es de 75 cm. La fuerza $P = 10t$ se expresa en kg cuando t se da en segundos. Determinar el intervalo de tiempo necesario para que la velocidad del centro de masa cambie de 5 m/seg hacia la derecha en $t = 0$ a 10 m/seg hacia la izquierda.

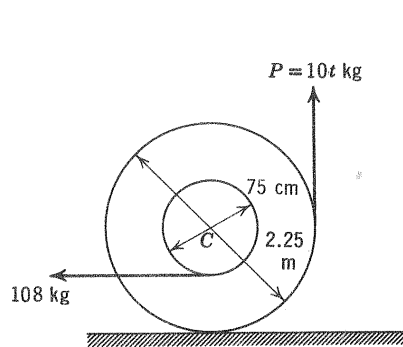


Fig. P-5.126

5.127. La rueda que se muestra en la figura pesa 80 kg y rueda sin deslizar a lo largo del plano horizontal. El radio de giro de la masa de la rueda, con relación a un eje horizontal que pasa por C , es de 24 cm. La fuerza constante de 75 kg se aplica a una cuerda enrollada en el tambor. La velocidad inicial de C es de 1.5 m/seg hacia la derecha. Determinar el desplazamiento de C durante los siguientes 2 seg.

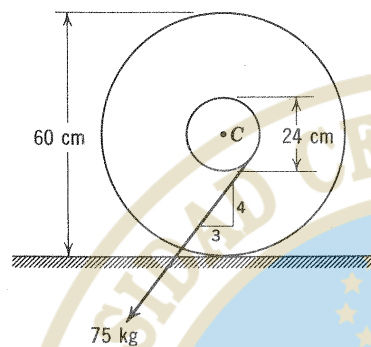


Fig. P-5.127

5.128. La rueda que se muestra está girando con una velocidad angular de 4π rad/seg cuando se aplica el freno A . La fuerza P aumenta de 0 a 10 kg en 5 seg y después disminuye gradualmente hasta cero, tal como se indica en el diagrama fuerza-tiempo. Hallar la velocidad angular de la rueda después de 10 seg. El peso de la rueda es de 160 kg, su radio es de 45 cm y el coeficiente de rozamiento entre la rueda y el freno es 0.4.

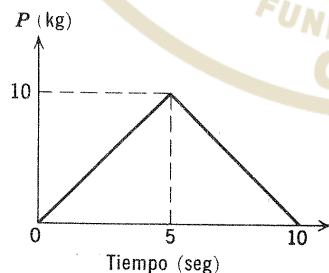
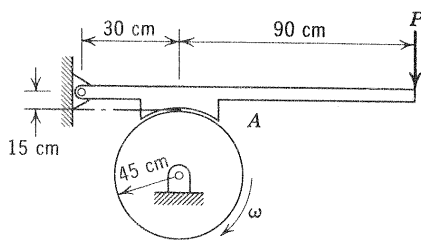


Fig. P-5.128

5.129. Para el sistema descrito en el problema 5.114, hallar el tiempo necesario para que el bote de pintura ruede una distancia s a lo largo del plano, partiendo desde el reposo.

5.130. Una pequeña esfera rígida tiene una masa M y un radio a . Inicialmente la esfera está girando alrededor de un eje que pasa por su centro con una velocidad angular ω . El eje de rotación se inclina un ángulo α de la vertical. Después la esfera se lleva a un plano que tiene un coeficiente de rozamiento μ y se suelta. Para el movimiento que sigue, hallar:

- El tiempo necesario para que la velocidad angular llegue a ser constante.
- El valor de esta velocidad angular constante.
- La distancia recorrida por el centro de la esfera antes que la velocidad angular sea constante.

5.131. Dos poleas idénticas están girando libremente sobre un eje común con velocidades angulares de 30 y 60 rpm y en sentidos opuestos. Repentinamente las poleas se unen por medio de un embrague.

- ¿Cuál será la velocidad angular final del sistema?
- Determinar la pérdida de energía cinética.

5.132. Un disco horizontal está en libertad de girar en torno a un eje vertical que pasa por su centro. Su momento de inercia respecto a este eje de rotación es I_0 . Un hombre de peso W camina en una trayectoria circular de radio r alrededor del centro del disco con una rapidez constante v relativa al disco. Si el disco está inicialmente en reposo, ¿cuál será su velocidad angular después que el hombre empieza a caminar?

5.133. Un hombre está situado sobre una mesa giratoria, que está en libertad de girar alrededor de un eje vertical, y sostiene en sus manos una rueda de bicicleta que está girando. El hombre, la mesa giratoria y la rueda de bicicleta tienen un peso total de 92 kg y un radio de giro respecto al eje vertical de 20.3 cm. La llanta de la rueda de bicicleta pesa 2.3 kg, tiene un radio de 33 cm y puede considerarse como un aro delgado. Inicialmente el hombre no está girando y la rueda tiene una rotación de 200 rpm con su eje en posición vertical. Después el hombre varía el plano de la rueda hasta llevarla a un plano vertical con una rapidez uniforme y en un intervalo de tiempo de 2 seg. Determinar la velocidad angular del hombre al final de dicho intervalo.

5.134. Un bloque de masa M y dimensiones que se indica choca con una velocidad v contra un bloque fijo en forma de V . Después del choque, el bloque gira alrededor de la arista del bloque fijo. Se supone que el peso del bloque es pequeño comparado con las otras fuerzas que actúan durante el choque y puede despreciarse durante este intervalo de tiempo corto. Se desprecia todo rozamiento en el plano horizontal.

- Hallar la velocidad angular del bloque inmediatamente después del choque.
- ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo necesario entre los dos bloques a fin de que el bloque pueda voltearse?
- ¿Para qué valores de la velocidad v el bloque girará en torno a la arista del bloque fijo?

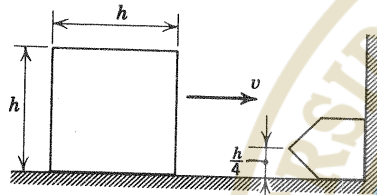


Fig. P-5.134

Dinámica de los sistemas vibratorios

6.1 Introducción. Casi todos los ingenieros se encuentran con el análisis de problemas de vibración. Al ingeniero mecánico le interesan las vibraciones en la maquinaria, al ingeniero civil en las estructuras y al ingeniero en electrónica en los circuitos. Primeramente, se estudiará el tema utilizando como modelo un sistema mecánico, debido a que los aspectos físicos de este tipo de sistema son más conocidos por el estudiante.

A groso modo se puede definir una vibración como el movimiento que se repite periódicamente con el tiempo. Si a un sistema que está en equilibrio estable se le da un pequeño desplazamiento inicial y/o una velocidad, vibrará alrededor de su posición de equilibrio estable. Definimos la posición de equilibrio estable como la posición asociada con una energía potencial mínima.

En general, las vibraciones mecánicas se pueden clasificar en *libres* y *forzadas*.

Se produce una vibración *libre* cuando un sistema elástico se desplaza de su posición de equilibrio. Las fuerzas elásticas en el sistema no son mayores que en el equilibrio estable y se produce un movimiento periódico.

Las vibraciones *forzadas* ocurren cuando un sistema se desplaza de su posición de equilibrio estable por medio de una fuerza que en muchas situaciones reales puede variar periódicamente con el tiempo.

6.2 Vibración libre no amortiguada de un sistema con un solo grado de libertad. Como primer ejemplo de sistema vibratorio consideremos una masa m suspendida verticalmente por un solo resorte, como se ve en la figura 6.1. El movimiento de la masa se restringe a desplazamientos verticales mediante las guías lisas; en este caso se requiere solamente una coordenada x para especificar completamente la posición de la masa en cualquier instante. Se dice que el sistema tiene *un solo grado de libertad*.

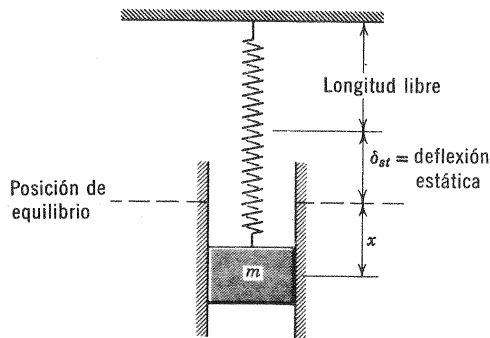


Fig. 6.1

El número de grados de libertad de un sistema es igual al número de coordenadas independientes que se requieren para especificar su configuración en cualquier instante.

El resorte que soporta la masa se considera de masa despreciable y ejerce una fuerza proporcional a su cambio de longitud y que se mide a partir de la longitud libre o sin alargamiento del resorte. Ver la figura 6.2.

Es conveniente medir el desplazamiento de la masa m desde la posición de equilibrio estable, pero esta condición no es necesaria.

Observemos el diagrama de cuerpo libre de la masa que se muestra en la figura 6.3 cuando está en la posición x . Escribiendo la segunda ley de movimiento de Newton como una ecuación escalar en x , obtenemos:

$$m\ddot{x} = -k(\delta_{st} + x) + W \quad (6.1)$$

Nótese que la fuerza del resorte es negativa cuando esta fuerza está dirigida hacia la parte negativa de x y también que

$$k\delta_{st} = W.$$

Por lo tanto, la ecuación 6.1 se puede escribir

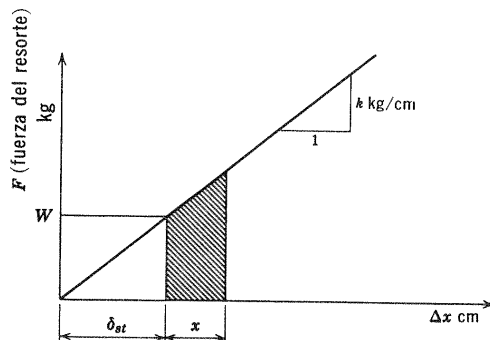


Fig. 6.2

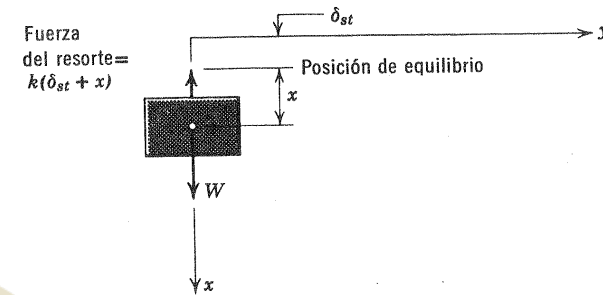


Fig. 6.3

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad (6.2)$$

que es la ecuación diferencial de movimiento.

La solución de esta ecuación es

$$x = A \sin \sqrt{k/m} t + B \cos \sqrt{k/m} t, \quad (6.3)$$

que se puede comprobar al sustituirla en la ecuación 6.2.

La velocidad $\dot{x}$ se obtiene derivando y es

$$\dot{x} = A \sqrt{k/m} \cos \sqrt{k/m} t - B \sqrt{k/m} \sin \sqrt{k/m} t. \quad (6.4)$$

Nótese que la ecuación 6.3 tiene dos constantes arbitrarias de integración, debido a que se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden.

Las constantes A y B se pueden determinar de las condiciones iniciales de movimiento. Especifiquemos el desplazamiento y la velocidad iniciales en $t = 0$.

Cuando $t = 0$,

$$x = x_0,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0.$$

Aplicando la primera de estas condiciones en la ecuación 6.3, hallamos

$$B = x_0.$$

de la segunda condición en la ecuación 6.4

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{k/m}}.$$

Por lo tanto, la solución completa es

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{k/m}} \sin \sqrt{k/m} t + x_0 \cos \sqrt{k/m} t. \quad (6.5)$$

Generalmente, para facilitar la escritura y debido a que $\sqrt{k/m}$ tiene unidades de radianes por segundo, hacemos la sustitución

$$\sqrt{k/m} = \omega_n.$$

Consecuentemente la ecuación 6.5 generalmente se expresa en la forma:

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + x_0 \cos \omega_n t. \quad (6.6)$$

Una gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 6.4. Las curvas seno y coseno se dibujan por separado y después se suman para formar la curva de trazos.

Definimos el desplazamiento máximo de la masa desde su posición de equilibrio como la *amplitud*. Podemos determinar cuando se produce ésta, así como su magnitud, si admitimos que los valores máximo o mínimo de la posición se tienen cuando $\dot{x}$ es cero. De ahí que

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = 0 = \dot{x}_0 \cos \omega_n t - x_0 \omega_n \sin \omega_n t$$

de la cual

$$\tan \omega_n t = \frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_n}$$

y

$$\sin \omega_n t = \frac{\dot{x}_0 / \omega_n}{[(\dot{x}_0^2 / \omega_n^2) + x_0^2]^{1/2}}$$

$$\cos \omega_n t = \frac{x_0}{[(\dot{x}_0^2 / \omega_n^2) + x_0^2]^{1/2}}$$

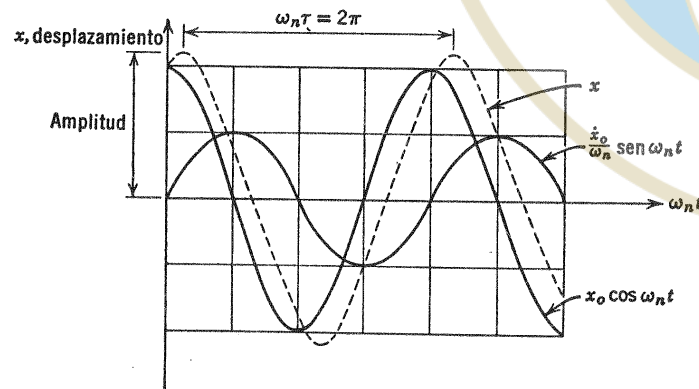
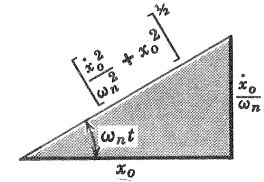


Fig. 6.4

Fig. 6.5



Sustituyendo estos valores para el $\sin \omega_n t$ y el $\cos \omega_n t$ en la ecuación 6.6, obtenemos la amplitud:

$$x_{\text{máx.}} = \text{amplitud} = \left[\frac{\dot{x}_0^2}{\omega_n^2} + x_0^2 \right]^{1/2}. \quad (6.7)$$

Además, observamos que $x_{\text{máx.}}$ ocurre cada vez que $\tan \omega_n t = \dot{x}_0 / x_0 \omega_n$. El intervalo de tiempo entre las posiciones de máxima amplitud se llama el período τ .

Por lo tanto el período es

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}. \quad (6.8)$$

La frecuencia f , normalmente dada en ciclos por segundo, es

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}. \quad (6.9)$$

Nótese que la frecuencia es independiente de las condiciones iniciales y por consiguiente es una característica invariante del sistema. Usualmente se le llama frecuencia natural f_n .

De la ecuación 6.5, es evidente que una vez que se pone a vibrar el sistema, no se detendrá jamás. Esto no es un resultado inesperado puesto que admitimos que la fuerza del resorte es conservativa, consecuentemente la energía total del sistema debe conservarse.

La ecuación 6.3 se puede expresar convenientemente por medio de una pareja de vectores rotatorios perpendiculares, considerando sus proyecciones sobre un solo eje, como se muestra en la figura 6.6. Se ve que la suma de las proyecciones de los vectores sobre el eje x es

$$x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t. \quad (6.3)$$

Además, podemos escribir

$$x = R \sin (\omega_n t + \phi), \quad (6.10)$$

donde

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

y

$$\phi = \arctan \frac{B}{A}.$$

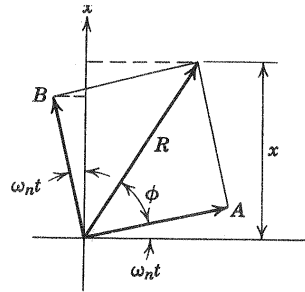


Fig. 6.6

El movimiento que se puede describir por medio de la longitud de la proyección sobre un eje fijo de un vector, que gira con una rapidez angular constante, comúnmente se llama movimiento *armónico simple*.

Ejemplo 6.1. Consideremos el sistema que se ilustra en la figura 6.7. El disco *A* está sostenido por la barra *B* que, como se indica, está fija en un extremo. El par *T* necesario para torcer la barra un ángulo θ se supone que es directamente proporcional al ángulo de torsión o en forma de ecuación

$$T = k\theta, \quad (6.11)$$

donde *k* es el módulo de torsión y θ el ángulo de torsión en radianes.

En la figura 6.7 se supone que el cuerpo rígido *A* está obligado a girar de manera que la única componente de velocidad angular es $\omega_z \bar{k}$. El cuerpo rígido es un disco circular homogéneo; de ahí que $I_{xz} = I_{yz} = 0$.

Aplicando la expresión $\bar{M} = \bar{H}$ al sistema de la figura 6.7, se deduce que

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z. \quad (6.12)$$

El momento del par expresado por la ecuación 6.11 es el momento del par de restitución que ejerce la barra sobre el cuerpo *A*. En vista que el par de resti-

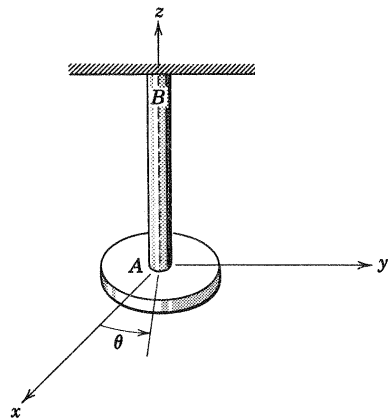


Fig. 6.7

tución tiene sentido opuesto al desplazamiento angular, podemos escribir

$$-k\theta = I_{zz}\dot{\omega}_z. \quad (6.13)$$

Admitiendo que $\dot{\omega}_z = \ddot{\theta}$, esta ecuación se puede escribir en la forma

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{k}{I_{zz}}\right)\theta = 0. \quad (6.14)$$

Es evidente que la ecuación de movimiento es análoga a la del sistema resorte-masa que se ha descrito. Así que

$$\theta = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \theta_0 \cos \omega_n t, \quad (6.15)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{k/I_{zz}}$$

$\dot{\theta}_0$ = velocidad angular inicial en radianes por segundo,

θ_0 = desplazamiento angular inicial en radianes.

6.3 Método de energía aplicado a sistemas vibratorios. Las ecuaciones de movimiento de cualquier sistema dinámico se pueden obtener de la relación de trabajo y energía

$$dT = dW$$

Donde las fuerzas son conservativas, como en el caso del sistema sencillo resorte-masa; recordamos que $dW = -dV$ y de ahí que

$$dT + dV = 0$$

o sea

$$T + V = \text{constante} = E. \quad (6.16)$$

El desarrollo de las ecuaciones de movimiento para cualquier sistema dinámico, a partir de la relación de trabajo y energía, fue originalmente presentado por Lagrange en su *Mécanique Analytique* (1788). El desarrollo formal de las célebres ecuaciones lagrangianas de movimiento queda más allá de la mira de este libro. Para este desarrollo, el lector puede tomar como referencia la nota al pie de esta página.¹

Para un sistema vibratorio con un solo grado de libertad, se puede obtener la ecuación diferencial de movimiento directamente de la ecuación de energía del sistema. Cuando la energía cinética *T* y la energía potencial *V* se expresan en términos de la coordenada de posición y la derivada con respecto al tiempo de esta coordenada, al derivarse la ecuación 6.16

¹ Synge and Griffith, *Principles of Mechanics*, 3ª edición, McGraw-Hill, 1959, pág. 411.

con respecto al tiempo, se obtiene la ecuación de movimiento. En forma de ecuación,

$$\frac{dT}{dt} dt + \frac{dV}{dt} dt = 0. \quad (6.17)$$

Ejemplo 6.2. Para ilustrar el método, examinemos nuevamente el sistema simple que se muestra en la figura 6.1.

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

La energía potencial del resorte es el área sombreada bajo la curva fuerza-desplazamiento (ver la figura 6.2).

$$V_s = \frac{1}{2} k [(x + \delta_{st})^2 - \delta_{st}^2],$$

$$V_s = \frac{1}{2} k x^2 + k x \delta_{st}.$$

La energía potencial del peso (tomando la posición de equilibrio como referencia) es

$$V_w = -Wx = -kx \delta_{st}.$$

Por lo tanto la energía total es

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{constante}.$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo,

$$m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = 0,$$

o bien, puesto que $\dot{x}$ generalmente no es cero,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

que está de acuerdo con la ecuación 6.2.

Ejemplo 6.3. El disco semicircular de radio r y masa m oscila alrededor del pivote liso en O . Escribir la ecuación de movimiento para pequeñas amplitudes de vibración. Ver la figura 6.8.

Las energías son

$$T = \frac{1}{2} I_o \omega^2,$$

$$V = -W r_c \cos \theta,$$

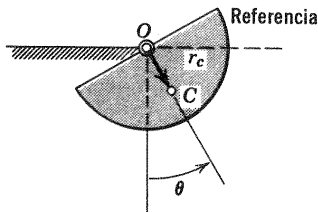


Fig. 6.8

donde

$$I_o = \frac{1}{2} m r^2,$$

$$r_c = \frac{4r}{3\pi}.$$

Para este sistema

$$T + V = \text{constante}.$$

Sustituyendo, obtenemos

$$\frac{m r^2}{4} \omega^2 - m g \frac{4r}{3\pi} \cos \theta = \text{constante}.$$

Para ángulos pequeños $\cos \theta \cong 1 - (\theta^2/2)$.

Por lo tanto,

$$\frac{m r^2}{4} \omega^2 + m g \frac{4r}{3\pi} \frac{\theta^2}{2} - m g \frac{4r}{3\pi} = \text{constante}.$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$\frac{m r^2}{2} \omega \dot{\omega} + m g \frac{4r}{3\pi} \theta \dot{\theta} - 0 = 0.$$

Puesto que, $\omega = \dot{\theta}$ y $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$, podemos escribir de nuevo la ecuación.

Entonces,

$$\ddot{\theta} + \frac{8g}{3\pi r} \theta = 0$$

es la ecuación de movimiento.

6.4 La vibración libre amortiguada de un sistema con un solo grado de libertad. El oscilador mecánico lineal que se discutió en la sección anterior es un sistema conservativo y teóricamente una vez que se pone en movimiento continuará oscilando indefinidamente. Por supuesto, prácticamente esto no ocurre debido a que se encuentran presentes fuerzas no conservativas en todos los sistemas comunes. Estas fuerzas disipan energía del sistema y reducen con el tiempo la amplitud del movimiento. Las fuerzas de esta clase se denominan fuerzas de amortiguamiento.

Tipos de fuerza de amortiguamiento. El amortiguamiento está asociado con la disipación de energía. Hay varios tipos diferentes de fuerzas de amortiguamiento, de los cuales discutiremos aquí cuatro.

Amortiguamiento viscoso. Los cuerpos que se mueven con velocidad moderada a través de un fluido, encuentran amortiguamiento viscoso. Este tipo de amortiguamiento conduce a una fuerza resistiva proporcional a la velocidad:

$$F = -cv, \quad (6.18)$$

donde c es una constante de proporcionalidad y v la velocidad. El amortiguamiento proporcional a la velocidad también se encuentra en el des-

lizamiento sobre superficies lubricadas, amortiguadores hidráulicos y mecánicos, partes móviles de instrumentos sumergidas en aceite y ciertos aparatos eléctricos donde la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la rapidez de corte del campo magnético.

Amortiguamiento turbulento. Si la rapidez con que se mueve un cuerpo en un fluido es alta, entonces la fuerza resistiva es aproximadamente proporcional a la segunda potencia de la velocidad:

$$F = -bv^2, \quad (6.19)$$

donde b es una constante de proporcionalidad y v la velocidad.

Amortiguamiento culombiano. El amortiguamiento culombiano tiene lugar en el deslizamiento de una superficie seca sobre otra. La fuerza de rozamiento de Coulomb es aproximadamente constante y depende de la naturaleza de las superficies deslizantes y la presión normal entre ellas, como lo expresa la ecuación del rozamiento cinético.

$$F = \mu N, \quad (6.20)$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento cinético y N la fuerza normal. Siendo independiente de la velocidad, este tipo de rozamiento generalmente predomina en la vibración libre amortiguada durante las etapas finales del movimiento, cuando otros tipos de amortiguamiento llegan a ser despreciables.

Amortiguamiento sólido. El amortiguamiento sólido, frecuentemente llamado amortiguamiento estructural, se debe al rozamiento interno del mismo material. Los experimentos indican que el amortiguamiento sólido difiere del amortiguamiento viscoso en que es independiente de la frecuencia y proporcional al esfuerzo máximo del ciclo de vibración. Por ejemplo, cuando objetos sólidos son golpeados violentamente se excitan muchas frecuencias, sin embargo el sonido desaparece gradualmente sin un cambio apreciable en el tono, lo que indica que todos los modos se amortiguan igualmente. El esfuerzo y la deformación son proporcionales en el intervalo elástico, puede decirse de otra manera que el amortiguamiento sólido es proporcional a la deflexión.

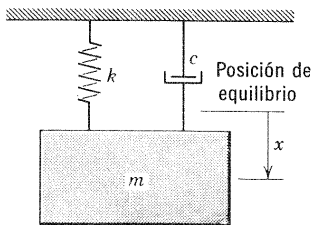


Fig. 6.9

Ahora agregaremos al sistema resorte-masa que se discutió antes un amortiguador viscoso tal como se muestra en la figura 6.9. Un amortiguador viscoso ejerce sobre la masa una fuerza opuesta a la dirección de la velocidad y se puede expresar por la ecuación

$$F_d = -c\dot{x}, \quad (6.21)$$

donde c es el coeficiente de amortiguamiento viscoso y $\dot{x}$ es la velocidad de la masa. Si otra vez x mide el desplazamiento desde la posición de equilibrio, la ecuación de movimiento llega a ser

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad (6.22)$$

Esto se puede reescribir como

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (6.23)$$

Una solución de la forma

$$x = Ae^{st}$$

satisfará la ecuación diferencial, donde s es una constante que debe calcularse. Sustituyendo x y sus derivadas en la ecuación 6.23 y dividiendo entre Ae^{st} , obtenemos la siguiente ecuación en s :

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0. \quad (6.24)$$

Observamos que hay dos valores de s que satisfarán la ecuación. Los dos valores de s son las raíces de la ecuación 6.24. Aplicando la fórmula conocida de las ecuaciones de segundo grado, obtenemos

$$\begin{aligned} s_1 &= -c/2m + \sqrt{(c/2m)^2 - k/m}, \\ s_2 &= -c/2m - \sqrt{(c/2m)^2 - k/m}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

La solución general puede escribirse como

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t},$$

donde s_1 y s_2 están dadas por las ecuaciones 6.25 y A y B son constantes arbitrarias que se determinan de las condiciones iniciales o de frontera de cualquier problema dado.

De las ecuaciones 6.25, se ven tres situaciones posibles que dependen de cómo están relacionadas las magnitudes de las constantes físicas c , k , m . Los tres casos son los siguientes:

Caso I,

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m} \quad (\text{sobreamortiguamiento}),$$

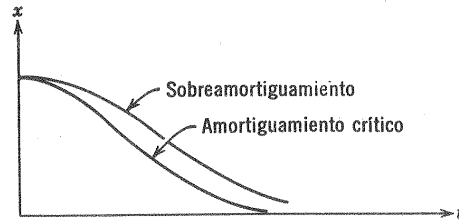


Fig. 6.10

Caso II,

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{amortiguamiento crítico}), \quad (6.26)$$

Caso III,

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m} \quad (\text{amortiguamiento ligero})$$

El caso sobreamortiguado. Si $(c/2m)^2 > k/m$ la raíz cuadrada es un número real. No obstante, debido a que tenemos un número negativo $c/2m$ fuera del radical y el valor de la raíz es menor que $c/2m$ se deduce que s_1 y s_2 serán números negativos.

Por lo tanto, la solución en x será la suma de dos curvas exponenciales negativas.

$$x = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}, \quad (6.27)$$

donde s_1 y s_2 son números reales negativos dados por las ecuaciones 6.25. Una gráfica de la ecuación 6.27 se muestra en la figura 6.10, donde se observa que el movimiento no es una vibración, sino que x decrece con el tiempo y tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Este tipo de movimiento frecuentemente se le llama movimiento aperiódico y podría burdamente caracterizarse por un amortiguador para el cierre de una puerta.

El caso críticamente amortiguado. Para este caso observamos que cuando $(c/2m)^2 = k/m$ el valor del radical vale cero y $s_1 = s_2 = -c/2m$. En este caso, la solución de la ecuación diferencial es

$$x = e^{-(c/2m)t}(A + Bt). \quad (6.28)$$

Este movimiento también es aperiódico y no se produce ninguna oscilación. El desplazamiento tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Una gráfica representativa del amortiguamiento crítico también se muestra en la figura 6.10 para el mismo desplazamiento inicial.

El caso ligeramente amortiguado. Para el amortiguamiento ligero $(c/2m)^2 < k/m$ y el valor del subradical es negativo y las ecuaciones 6.25

pueden escribirse de nuevo como sigue:

$$s_1 = -c/2m + i\sqrt{k/m - (c/2m)^2}, \quad (6.29)$$

$$s_2 = -c/2m - i\sqrt{k/m - (c/2m)^2},$$

donde

$$i = \sqrt{-1}.$$

Sustituyendo s_1 y s_2 , de las ecuaciones 6.29, en la solución, obtenemos

$$x = Ae^{-(c/2m)t}e^{iqt} + Be^{-(c/2m)t}e^{-iqt}, \quad (6.30)$$

donde se ha hecho la sustitución

$$q = \sqrt{k/m - (c/2m)^2}.$$

La ecuación 6.30 se puede escribir

$$x = e^{-(c/2m)t}(Ae^{iqt} + Be^{-iqt}). \quad (6.31)$$

Si e^{iqt} y e^{-iqt} se desarrollan en serie de Maclaurin y se comparan con un desarrollo en serie de $\sin qt$ y $\cos qt$, se halla

$$e^{iqt} = \cos qt + i \sin qt, \quad (6.32)$$

$$e^{-iqt} = \cos qt - i \sin qt.$$

Haciendo estas sustituciones se obtiene como solución para x la siguiente:

$$x = e^{-(c/2m)t}(A + B) \cos qt + (A - B)i \sin qt, \quad (6.33)$$

e introduciendo nuevas constantes de integración

$$x = e^{-(c/2m)t}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt), \quad (6.34)$$

donde C_1 y C_2 se determinan de las condiciones iniciales de cada problema específico. Nótese que la ecuación 6.34 puede escribirse de nuevo, como se hizo previamente en el caso no amortiguado, en la siguiente forma:

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t} \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(qt + \phi), \quad (6.35)$$

donde ϕ se define por la relación

$$\tan \phi = \frac{C_1}{C_2}. \quad (6.36)$$

La gráfica de la ecuación 6.35 está en la figura 6.11 y se ve que es una función armónica, cuya amplitud está modulada por el término exponencial negativo. El período o tiempo requerido para un ciclo está dado aproximadamente por

$$\tau = \frac{2\pi}{q} \quad (6.37)$$

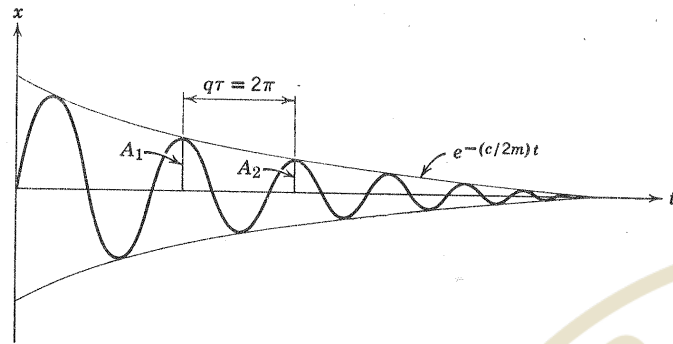


Fig. 6.11

y la frecuencia en ciclos por segundo es

$$f = \frac{q}{2\pi}, \quad (6.38)$$

donde q se definió anteriormente como:

$$q = \sqrt{k/m - (c/2m)^2}.$$

Haremos dos observaciones de interés en la ecuación de la frecuencia:

1. Es independiente de las condiciones iniciales y de ahí que es un invariante para cualquier sistema particular.

2. Es menor que la frecuencia natural para el mismo sistema sin amortiguamiento.

Si comparamos la relación de cualesquiera dos amplitudes sucesivas, podemos escribir

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-(c/2m)t} [\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin(qt + \phi)]}{e^{-(c/2m)(t+2\pi/q)} [\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \sin[q(t + 2\pi/q) + \phi]]}. \quad (6.39)$$

Admitiendo que

$$\sin(qt + \phi) = \sin\left[q\left(t + \frac{2\pi}{q}\right) + \phi\right],$$

se deduce que

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-(c/2m)t}}{e^{-(c/2m)(t+2\pi/q)}} = e^{c\pi/mq}. \quad (6.40)$$

Si se toman logaritmos naturales en cada miembro de la ecuación 6.40, obtenemos

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \frac{c\pi}{mq} = \text{decremento logarítmico}. \quad (6.41)$$

Al logaritmo de la relación de dos amplitudes sucesivas se le da el nombre de decremento logarítmico. Los valores experimentales de c para un sistema dado se pueden determinar a partir de la ecuación 6.41, comparando la relación de dos amplitudes sucesivas.

Pérdida de energía por ciclo. El decremento logarítmico se puede utilizar para estimar la pérdida de energía por ciclo. Cuando la masa está en la amplitud A_1 , la energía cinética es cero y la energía potencial está dada por

$$E_1 = \frac{kA_1^2}{2}.$$

Después de un ciclo, cuando la amplitud es A_2 , entonces la energía está dada por

$$E_2 = \frac{kA_2^2}{2}.$$

El cambio en la energía se expresa como

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{k}{2} (A_2^2 - A_1^2). \quad (6.42)$$

La ecuación 6.42 se puede escribir de nuevo como sigue:

$$\Delta E = -\frac{k}{2} A_2^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right). \quad (6.43)$$

Admitiendo que A_1/A_2 es igual a $e^{c\pi/mq}$, entonces se deduce que

$$\Delta E = -\frac{k}{2} A_2^2 (e^{2c\pi/mq} - 1). \quad (6.44)$$

Desarrollando e^x en serie de Maclaurin, obtenemos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Si c es pequeña, bastarán dos términos de la serie y la ecuación 6.44 llega a ser

$$\Delta E = -\frac{k}{2} A_2^2 \left(\frac{2c\pi}{mq} \right) = -kA_2^2 \left(\frac{c\pi}{mq} \right). \quad (6.45)$$

6.5 Vibración forzada — Sistema con un solo grado de libertad. En nuestras consideraciones sobre las oscilaciones de un sistema con un solo grado de libertad y con amortiguamiento viscoso, encontramos que la energía era disipada por el amortiguador y la amplitud de la vibración disminuía con el tiempo. Sin embargo, si proporcionamos una fuente de energía externa, podemos mantener las oscilaciones con una amplitud constante.

Consideremos el sistema amortiguado simple y una fuerza armónica $F = F_0 \sin \omega t$ actuando sobre la masa.

De la figura 6.12a se puede escribir la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F_0 \sin \omega t. \quad (6.46)$$

Ecuación que se puede escribir en la forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t. \quad (6.47)$$

En vista de que se trata de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, se puede considerar la solución general como la suma de las siguientes dos partes:

1. La solución complementaria o transitoria, que se obtuvo en la sección 6.4 para la oscilación libre de un sistema amortiguado con un solo grado de libertad y que fue $x = Ge^{st} + He^{st}$.

2. La solución particular o estado permanente, que consideraremos en detalle.

La solución particular se puede tomar en la siguiente forma:

$$x_p = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (6.48)$$

donde A y B son coeficientes que van a determinarse. Si se sustituye 6.48 en la ecuación diferencial 6.47, obtenemos

$$m(-A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t) + c(A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t) + k(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = F_0 \sin \omega t. \quad (6.49)$$

Igualando por separado los coeficientes de los términos que contienen el seno y el coseno, se forman las siguientes dos ecuaciones.

$$A(k - m\omega^2) + B(-c\omega) = F_0, \quad (6.50)$$

$$A(c\omega) + B(k - m\omega^2) = 0.$$

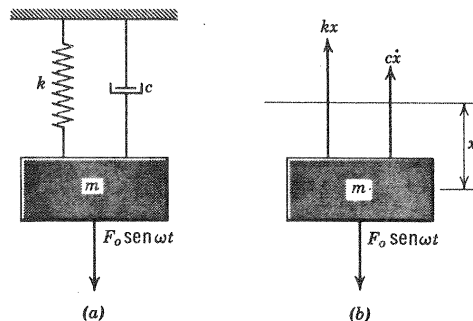


Fig. 6.12

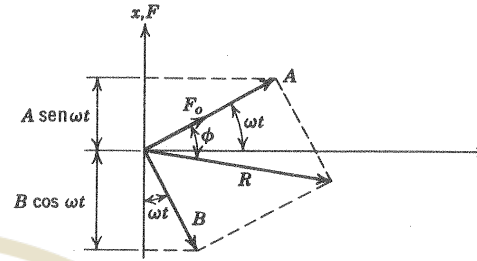


Fig. 6.13

Ahora se pueden determinar A y B resolviendo las ecuaciones simultáneas y se obtiene

$$A = \frac{F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}, \quad (6.51)$$

$$B = \frac{-F_0 c \omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}.$$

Ahora representamos x_p por una pareja de vectores giratorios como se ve en la figura 6.13. Nótese que B es negativa y, consecuentemente, se dibuja atrasada 90° respecto de A . La ecuación para x_p se puede escribir de nuevo como

$$x_p = R \sin(\omega t - \phi), \quad (6.52)$$

donde

$$R = (A^2 + B^2)^{1/2} \quad (6.53)$$

y

$$\tan \phi = -\frac{B}{A}. \quad (6.54)$$

Se ve que la fuerza F también puede mostrarse en la misma gráfica y es la proyección de F_0 sobre el eje vertical. El desplazamiento queda representado por el vector giratorio R que está atrasado respecto de la fuerza un ángulo ϕ .

Si resolvemos para R , que representa la *amplitud* de la oscilación forzada en términos de las constantes del sistema, obtenemos

$$R = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}}. \quad (6.55)$$

Resolviendo para $\tan \phi$, se tiene

$$\tan \phi = -\frac{B}{A} = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}. \quad (6.56)$$

La solución general para x donde el *amortiguamiento es menor que el crítico* está dada por

$$x = \underbrace{e^{-(c/2m)t}(C_1 \sin qt + C_2 \cos qt)}_{\text{transitoria}} + \underbrace{\frac{F_0 \sin(\omega t - \phi)}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}}}_{\text{complementaria}} \quad (6.57)$$

Para propósitos prácticos, la solución transitoria se hace cero en un cierto tiempo finito. Considerando solamente la solución particular dada por la ecuación 6.52, regresaremos a la ecuación diferencial 6.47. La ecuación 6.47 es una ecuación de fuerzas que expresaremos ahora como un conjunto de vectores giratorios. Primero pasaremos todos los términos del primer miembro al segundo:

$$0 = F_0 \sin \omega t - m\ddot{x} - c\dot{x} - kx. \quad (6.58)$$

Derivando la ecuación 6.52, obtenemos

$$\dot{x} = \omega R \cos(\omega t - \phi)$$

y

$$\ddot{x} = -\omega^2 R \sin(\omega t - \phi).$$

Entonces los términos de la ecuación 6.58 se pueden escribir

$$\begin{aligned} -m\ddot{x} &= Rm\omega^2 \sin(\omega t - \phi) && \text{(fuerza de inercia),} \\ -c\dot{x} &= -Rc\omega \cos(\omega t - \phi) && \text{(fuerza de amortiguamiento),} \\ -kx &= -Rk \sin(\omega t - \phi) && \text{(fuerza del resorte).} \end{aligned}$$

Todas las fuerzas que existen en la ecuación 6.58 se representan en la figura 6.14 por un conjunto de vectores de giratorios. Debido a que la ecuación 6.58 debe satisfacerse para todos los valores de ωt , se pueden considerar las fuerzas de la figura 6.14 como un sistema de fuerzas concurrentes en equilibrio girando con velocidad angular constante ω . Enton-

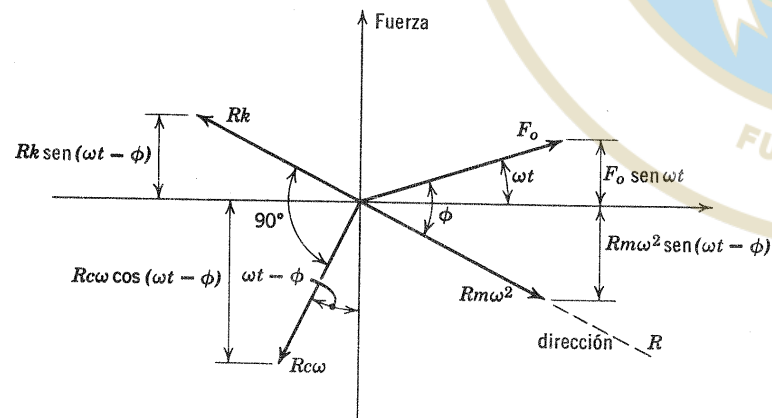


Fig. 6.14

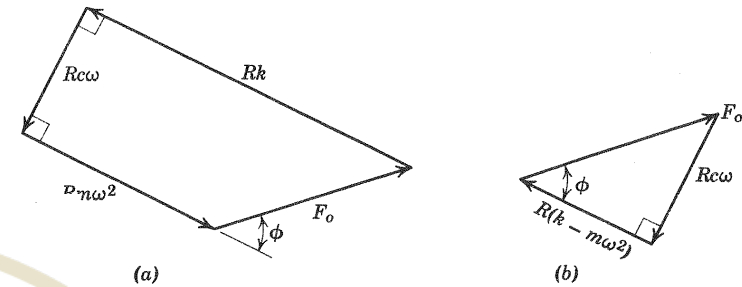


Fig. 6.15

ces se puede dibujar un polígono de fuerzas que debe cerrarse, como se ve en la figura 6.15a.

Si combinamos los términos colineales Rk y $Rm\omega^2$ como se muestra en la figura 6.15b, se ve que

$$R = \frac{F_0}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \quad (6.59)$$

$$\tan \phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}, \quad (6.60)$$

que concuerda con la solución anterior.

De los diagramas vectoriales se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1. El desplazamiento está atrasado de la fuerza un ángulo ϕ (Fig. 6.14).
2. Si el término $Rm\omega^2$ es pequeño comparado con Rk , el ángulo ϕ es pequeño (es decir se aproxima a cero) (Fig. 6.15a).
3. Si el término $Rm\omega^2$ es grande comparado con Rk , el ángulo ϕ es grande (es decir se aproxima a 180°) (Fig. 6.15a).
4. El ángulo ϕ está limitado a los valores comprendidos entre 0° y 180° porque la componente de F_0 normal a la dirección R debe ser igual a $Rc\omega$ (la fuerza de amortiguamiento) pero de sentido opuesto (Fig. 6.14).

Regresando a la ecuación 6.59 y dividiendo el numerador y el denominador entre k obtenemos

$$R = \frac{\frac{F_0}{k}}{\left[\left(\frac{k - m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Definiremos las siguientes cantidades:

$$\delta = \frac{F_0}{k} = \text{alargamiento del resorte bajo una fuerza estática } F_0,$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \text{el cuadrado de la frecuencia natural del sistema no amortiguado y recordando que}$$

$$c_c = \text{constante de amortiguamiento crítico para la oscilación libre} = 2m\omega_n,$$

se deduce que

$$\frac{R}{\delta} = \frac{1}{\{[1 - (\omega^2/\omega_n^2)]^2 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2\}^{1/2}} \quad (6.61)$$

De igual manera, para $\tan \phi$ obtenemos

$$\tan \phi = \frac{2(c/c_c)(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega^2/\omega_n^2)} \quad (6.62)$$

El término R/δ se define como factor de amplificación. Las ecuaciones 6.61 y 6.62 muestran que R/δ y ϕ son funciones de ω/ω_n y la razón de amortiguamiento c/c_c .

Las ecuaciones 6.61 y 6.62 se representan gráficamente en las figuras 6.16 y 6.17.

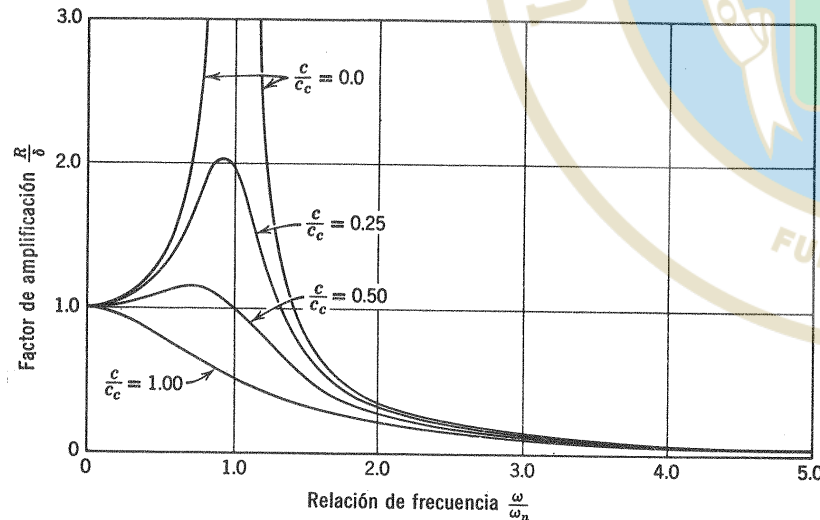


Fig. 6.16

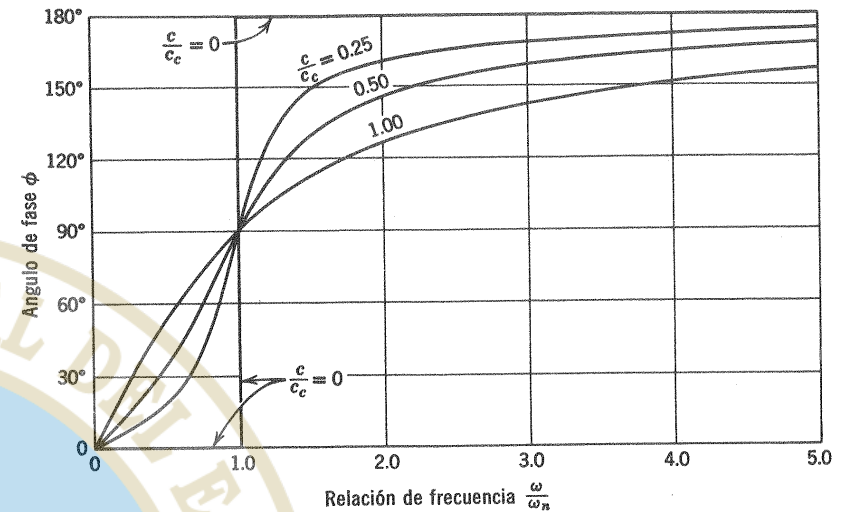


Fig. 6.17

Observamos que para valores pequeños de c/c_c las máximas amplitudes ocurren en valores cercanos a $\omega/\omega_n = 1.0$. Además, el ángulo de fase cambia rápidamente cuando ω/ω_n se aproxima a 1.

Una información adicional se puede obtener examinando el diagrama vectorial de la figura 6.14 para los siguientes casos:

- Caso 1, $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1.0,$
 Caso 2, $\frac{\omega}{\omega_n} = 1.0,$
 Caso 3, $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1.0.$

Para el Caso 1 donde $\omega/\omega_n \ll 1.0$, los términos $Rm\omega^2$ y $c\omega$ son pequeños, como se ve en la figura 6.18. Por lo tanto ϕ es pequeño y la fuerza del resorte y la fuerza perturbadora prácticamente están en oposición. Esta observación se comprueba por medio de la ecuación 6.62.

Para el Caso 2 donde $\omega/\omega_n = 1.0$, tenemos el sistema oscilando en su frecuencia natural.

De la ecuación 6.62, se ve que $\tan \phi = \infty$ o sea $\phi = 90^\circ$. Por lo tanto, como lo muestra la figura 6.19, tenemos la fuerza perturbadora superponiéndose a la fuerza de amortiguamiento cancelando su efecto neto y el sistema oscila con una amplitud $R = F_0/c\omega$, que está dado por la ecuación

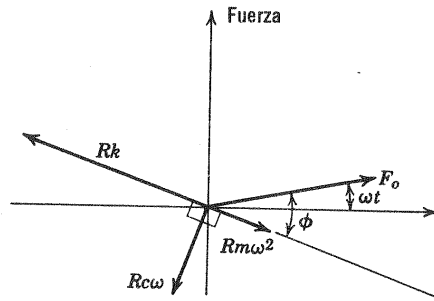


Fig. 6.18

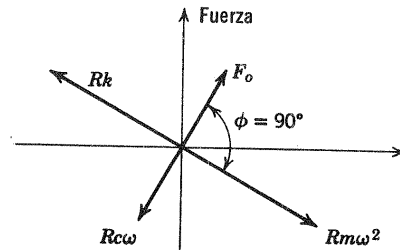


Fig. 6.19

ción 6.59 como si no estuvieran presentes la fuerza de amortiguamiento y la perturbadora.

Para el Caso 3 donde $\omega/\omega_n \gg 1.0$ el término $Rm\omega^2$ llega a ser mucho más grande que Rk . Por lo tanto, a fin de que se satisfaga la ecuación 6.58, F_0 debe tener una componente en la misma dirección que Rk . Consecuentemente, el ángulo de fase es mayor de 90° como se ve en la figura 6.20.

Un caso especial que debe considerarse ocurre cuando no existe amortiguamiento o sea $c/c_c = 0$. La ecuación 6.61 se reduce a

$$\frac{R}{\delta} = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \quad (6.63)$$

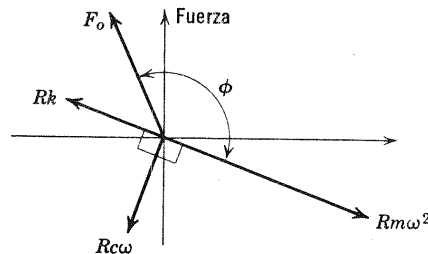


Fig. 6.20

y la ecuación 6.62 se reduce a

$$\tan \phi = 0 \quad \text{y} \quad \phi = 0^\circ, 180^\circ. \quad (6.64)$$

Observamos que cuando $\omega = \omega_n$, $R/\delta = \infty$. Cuando $\omega/\omega_n < 1$, R/δ es positiva, $\phi = 0^\circ$ y el movimiento está en fase con la fuerza. Cuando $\omega/\omega_n > 1$, R/δ es negativa (la curva de R/δ contra ω/ω_n es discontinua en $\omega/\omega_n = 1$), $\phi = 180^\circ$ y el movimiento está atrasado respecto de la fuerza en 180° .

Resonancia. Se define la resonancia como el caso donde $\omega = \omega_n$. Es importante reconocer que esto produce amplitudes infinitas para sistemas sin amortiguamiento. Sin embargo, si existe amortiguamiento, las amplitudes máximas ocurren para valores de $\omega/\omega_n < 1.0$, de modo que solamente en el caso no amortiguado hay resonancia y las amplitudes máximas ocurren para el mismo valor de ω/ω_n . Si se deriva la ecuación 6.61 con respecto a ω/ω_n para determinar en qué valor de ω/ω_n es máxima R/δ , se obtiene

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \left[1 - 2 \left(\frac{c}{c_c} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (6.65)$$

que es el valor de la relación de frecuencia donde ocurren las amplitudes máximas.

6.6 Fuerza transmitida y aislamiento. En ciertos casos prácticos interesa disminuir la fuerza que se transmite al soporte del amortiguador y el resorte cuando la masa m está sujeta a una fuerza perturbadora armónica.

De la figura 6.14, se ve que la máxima fuerza transmitida al soporte es la suma vectorial de la fuerza del resorte Rk y la fuerza amortiguadora $Rc\omega$. Definiendo la amplitud de la fuerza transmitida por F_{tr} , se deduce que

$$F_{tr} = R[k^2 + c^2\omega^2]^{1/2} = F_0 \left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2} \quad (6.66)$$

Si definimos la transmisibilidad T_r como la relación F_{tr}/F_0 , entonces

$$T_r = \left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2} \quad (6.67)$$

Recordando que

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

y

$$c_c = 2m\omega_n,$$

entonces la ecuación 6.67 toma la forma

$$T_r = \left[\frac{1 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_n} \right]^2} \right]^{1/2} \quad (6.68)$$

En la figura 6.21, se encuentra la gráfica de la transmisibilidad contra ω/ω_n . Después de un examen de la figura, se pueden hacer varias observaciones:

1. La razón de amortiguamiento c/c_c muestra que la transmisibilidad $T_r \geq 1.0$ para valores de $\omega/\omega_n \leq \sqrt{2}$.
2. Cuando $\omega/\omega_n = \sqrt{2}$, $T_r = 1.0$ para todos los valores de c/c_c . Esto se puede comprobar sustituyendo directamente en la ecuación 6.68.
3. Para valores de $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$ el aumento de amortiguamiento disminuye la fuerza transmitida, mientras que para valores de $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ el aumento de amortiguamiento aumenta la fuerza transmitida.
4. Independientemente del amortiguamiento existente, $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$, a fin de que la fuerza transmitida sea menor que la fuerza perturbadora. Esto implica que un resorte blando (módulo pequeño) que conduzca a valores bajos de ω_n es necesario para aislar la fuerza perturbadora del soporte.

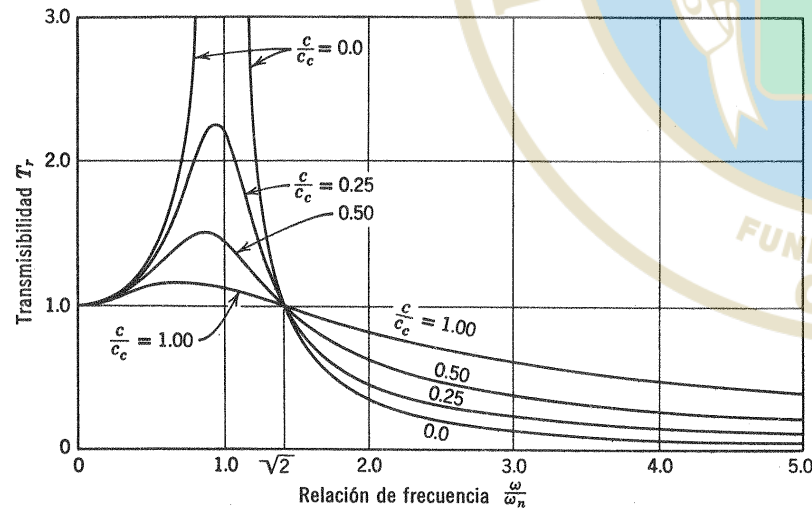


Fig. 6.21

Se tiene un caso especial cuando $c/c_c = 0$. La ecuación 6.68 se transforma en

$$T_r = \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \quad (6.69)$$

Para este caso $T_r \rightarrow \infty$ cuando $\omega/\omega_n \rightarrow 1.0$ ó sea cuando ocurre la resonancia. Además, T_r es positiva cuando $\omega/\omega_n < 1.0$ y negativa cuando $\omega/\omega_n > 1.0$. Esto implica que la fuerza transmitida está en fase con la fuerza del soporte, cuando el sistema opera a frecuencias abajo de la resonancia y a 180° fuera de fase cuando el sistema opera por encima de la resonancia.

Para aplicar el análisis a un sistema más real consideremos una pieza giratoria de un equipo, donde el rotor está desbalanceado de modo que el eje de rotación no coincide con el centro de masa del rotor. Esta situación es común ya que es difícil producir un rotor que esté perfectamente balanceado. Supondremos además que el rotor está colocado en el bastidor de una máquina restringida a un movimiento vertical, como se ve en la figura 6.22. En esta figura se aplica la siguiente notación:

m_1 = masa del bastidor de la máquina

m_2 = masa del rotor,

e = posición del centro de masa del rotor medida desde el eje de rotación,

x_1 = desplazamiento de la masa m_1 de la posición de equilibrio,

k = constante del resorte,

c = constante de amortiguamiento,

x_2 = desplazamiento de la masa m_2 de la posición de equilibrio,

ω = rapidez angular del rotor, que se supone constante.

De la geometría de la figura 6.22

$$x_2 = x_1 + e \sin \omega t$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - e \omega^2 \sin \omega t.$$

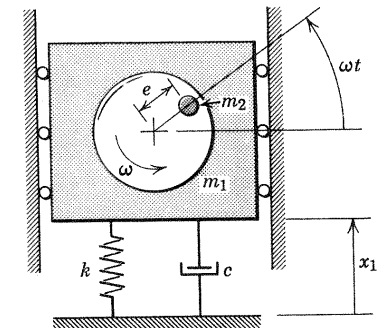


Fig. 6.22

De la segunda ley de Newton, la fuerza F_2 que la masa principal debe ejercer sobre el rotor es

$$F_2 = m_2(\ddot{x}_1 - e\omega^2 \sin \omega t).$$

De la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce el rotor sobre la masa principal es $-F_2$. La ecuación de movimiento para la masa principal, que también debe incluir la fuerza del resorte y la fuerza de amortiguamiento, es

$$m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - c\dot{x}_1 - m_2(\ddot{x}_1 - e\omega^2 \sin \omega t),$$

que puede escribirse como

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = m_2e\omega^2 \sin \omega t. \quad (6.70)$$

Nótese que la ecuación 6.70 es análoga a la ecuación 6.47. De ahí que podemos utilizar los resultados del análisis anterior, sustituyendo directamente $(m_1 + m_2) = m$ y $m_2e\omega^2 = F_o$ en las ecuaciones desarrolladas en la discusión anterior.

6.7 Instrumento de medida de la vibración. En ingeniería frecuentemente interesa determinar la magnitud del desplazamiento y la aceleración de un sistema vibratorio. Desarrollaremos los conceptos básicos del diseño de tales instrumentos sin una discusión detallada de la instrumentación complicada, que frecuentemente se emplea en la realidad para registrar estas mediciones.

Como se muestra en la figura 6.23, una base está vibrando con movimiento armónico simple

$$x_b = A \sin \omega t.$$

Nuestra aparato de medición consiste de un bastidor que contiene un sistema de amortiguador y resorte y algunos medios para registrar el desplazamiento x_i de la masa con relación al bastidor. En su forma más rudimentaria podría utilizar una carátula indicadora donde se observaría la oscilación de la aguja que mediría x_i . El desplazamiento absoluto de la masa m es

$$x_m = x_i + x_b$$

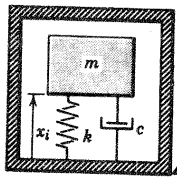


Fig. 6.23

y por consiguiente

$$\ddot{x}_m = \ddot{x}_i + \ddot{x}_b = \ddot{x}_i - A\omega^2 \sin \omega t.$$

La ecuación de movimiento de la masa m es

$$m(\ddot{x}_i - A\omega^2 \sin \omega t) = -kx_i - c\dot{x}_i$$

o bien

$$m\ddot{x}_i + c\dot{x}_i + kx_i = mA\omega^2 \sin \omega t. \quad (6.71)$$

Por analogía con la ecuación 6.47, podemos usar la solución representada por la ecuación 6.57, sustituyendo x por x_i y F_o por $mA\omega^2$. Para todos los propósitos prácticos la parte transitoria de la solución será cero en un cierto tiempo finito, de ahí que podemos escribir

$$x_i = \frac{mA\omega^2 \sin(\omega t - \phi)}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \quad (6.72)$$

Supondremos que nos interesa determinar la amplitud A de la vibración de la base, así como su aceleración máxima $A\omega^2$, registrando la amplitud A_i del movimiento en estado permanente de la masa con relación al bastidor. De la ecuación 6.72 se deduce que

$$A_i = \frac{mA\omega^2}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \quad (6.73)$$

Resolviendo la ecuación 6.73 para la amplitud A de la vibración de la base, hallamos

$$A = A_i \frac{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}}{m\omega^2} \quad (6.74)$$

Con $\omega_n^2 = k/m$ y $c_c = 2m\omega_n$, la ecuación 6.74 se puede escribir

$$A = \frac{A_i \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \frac{c}{c_c} \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{1/2}}{\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}. \quad (6.75)$$

Si ω/ω_n se hace lo suficientemente grande mediante el uso de una combinación apropiada de resorte y masa del instrumento de medición, entonces

$$A \cong A_i$$

y la amplitud relativa A_i llega a ser una buena medida de la amplitud real de la vibración de la base. Tal dispositivo de medida de amplitud se conoce como vibrómetro y debido a que ω_n debe ser pequeña (relativamente hablando) se debe utilizar un resorte blando.

Si ω/ω_n es pequeña en un diseño apropiado, entonces la cantidad

$$[(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2c/c_c \omega/\omega_n)^2]^{1/2} \cong 1.0 \text{ y } A\omega^2 = A_i\omega_n^2.$$

La cantidad $A\omega^2$ es la aceleración máxima de la base; así que, conociendo la frecuencia natural ω_n del instrumento, se puede determinar la aceleración multiplicando la amplitud observada A_i por la constante ω_n^2 . El amortiguamiento en el instrumento es útil y con él se elimina el movimiento transitorio. En el caso del acelerómetro se alcanza una precisión en el instrumento en un rango de frecuencias más amplio, según se muestra en la Tabla 6.1,

$\frac{\omega}{\omega_n}$	$\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 \right]^{1/2}$	$\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(1.4 \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^{1/2}$
0	1.00	1.00
0.25	0.94	1.00
0.50	0.75	1.02
0.75	0.44	1.14
1.00	0	1.40

donde los valores de la cantidad $\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2c/c_c \omega/\omega_n \right)^2 \right]^{1/2}$ sin amortiguamiento se comparan con la relación de amortiguamiento óptimo $c/c_c = 0.70$.

6.8 Sistemas lineales con varios grados de libertad. Los principios generales de las vibraciones libres de un sistema oscilatorio lineal de varios grados de libertad, se demostrarán examinando un sistema específico con 2 grados de libertad. Por ejemplo, consideremos el sistema resorte-masa de la figura 6.24 donde las masas están restringidas al movimiento vertical.

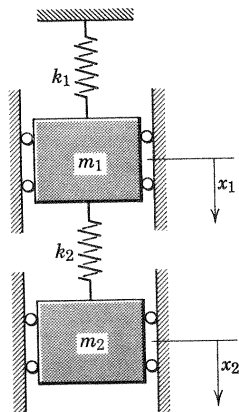


Fig. 6 24

Con x_1 y x_2 como desplazamientos de las masas m_1 y m_2 , medidos desde la posición de equilibrio, respectivamente, las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2 llegan a ser

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= +k_2 (x_1 - x_2), \end{aligned}$$

que pueden escribirse de nuevo como

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Ahora proponemos un sistema de soluciones de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin \omega t, \\ x_2 &= A_2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (6.77)$$

que admitimos como posible solución puesto que solamente aparecen en las ecuaciones diferenciales los desplazamientos y sus segundas derivadas con respecto al tiempo.

Sustituyendo las ecuaciones 6.77 en las ecuaciones 6.76, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} [-m_1 A_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)A_1 - k_2 A_2] \sin \omega t &= 0, \\ [-m_2 A_2 \omega^2 - k_2 A_1 + k_2 A_2] \sin \omega t &= 0. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Dividiendo estas ecuaciones entre $\sin \omega t$ y ordenando los términos, se sigue que

$$\begin{aligned} A_1(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) + A_2(-k_2) &= 0, \\ A_1(-k_2) + A_2(k_2 - m_2 \omega^2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Resolviendo A_1 por determinantes,

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}. \quad (6.80)$$

El determinante D_1 es cero; consecuentemente D debe ser nulo si la amplitud A_1 es diferente de cero para que el movimiento ocurra. Haciendo el determinante D igual a cero, se obtiene la ecuación para la frecuencia

$$(k_2 - m_2 \omega^2)(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) - k_2^2 = 0,$$

que puede escribirse en la forma

$$m_1 m_2 \omega^4 - [m_1 k_2 + m_2(k_1 + k_2)]\omega^2 + k_1 k_2 = 0. \quad (6.81)$$

La ecuación 6.81 es cuadrática en ω^2 ; así que

$$\omega^2 = \frac{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)}{2m_1 m_2} \pm \left\{ \left[\frac{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)}{2m_1 m_2} \right]^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \right\}^{1/2} \quad (6.82)$$

Los dos valores de ω^2 de la ecuación 6.82 se conocen como frecuencias principales, se denotan por ω_1^2 y ω_2^2 y el orden, para los propósitos de la discusión, es tal que $\omega_1^2 \leq \omega_2^2$.

Es evidente que las soluciones de la forma

$$x_{11} = A_{11} \sin \omega_1 t, \quad (6.83)$$

$$x_{21} = A_{21} \sin \omega_1 t,$$

o bien

$$x_{12} = A_{12} \sin \omega_2 t, \quad (6.84)$$

$$x_{22} = A_{22} \sin \omega_2 t,$$

satisfacen las ecuaciones diferenciales 6.76; A_{ij} designa la amplitud de la masa i asociada con la frecuencia j . Además, las soluciones de la forma

$$x_1 = x_{11} + x_{12}, \quad (6.85)$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22},$$

satisfarán la ecuación diferencial.

Si se hubiera investigado una solución de la forma

$$x_1 = B_1 \cos \omega t,$$

$$x_2 = B_2 \cos \omega t$$

se habría obtenido la misma ecuación de frecuencia y el resto de los argumentos anteriores habría sido idéntico. Por lo tanto, la solución completa para el sistema es,

$$x_1 = A_{11} \sin \omega_1 t + A_{12} \sin \omega_2 t + B_{11} \cos \omega_1 t + B_{12} \cos \omega_2 t, \quad (6.86)$$

$$x_2 = A_{21} \sin \omega_1 t + A_{22} \sin \omega_2 t + B_{21} \cos \omega_1 t + B_{22} \cos \omega_2 t.$$

La solución general para los desplazamientos de cualquiera de las masas resultó ser la suma de los movimientos armónicos a las frecuencias principales, pero el desplazamiento resultante no es armónico simple.

Un examen de la ecuación 6.86 muestra que son necesarias ocho constantes de integración, mientras que, en general, solamente se conocen cuatro condiciones iniciales: los desplazamientos y velocidades iniciales para cada una de las masas. Las otras cuatro condiciones sobre las constantes de integración se establecen por cualquiera de las ecuaciones 6.79, que es-

pecífica, para cualquier valor de ω , la correspondiente relación de las amplitudes A_1/A_2 . Por ejemplo, en forma de ecuación, se deduce de la segunda de las ecuaciones 6.79 que

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{B_{11}}{B_{21}} = \frac{k_2 - m_2 \omega_1^2}{k_2} \quad (6.87)$$

y

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \frac{k_2 - m_2 \omega_2^2}{k_2} \quad (6.88)$$

Para el sistema de la figura 6.24, hacemos $k_1 = k_2 = k$ y $m_1 = 2m_2 = m$. Entonces, de la ecuación 6.82

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} (2 - \sqrt{2}),$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{m} (2 + \sqrt{2}).$$

De las ecuaciones 6.87 y 6.88

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{B_{11}}{B_{21}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y

$$\frac{A_{12}}{A_{22}} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si el sistema se pone en movimiento de modo que en $t = 0$

$$x_{10} = 1, \quad \dot{x}_{10} = 0,$$

$$x_{20} = 1, \quad \dot{x}_{20} = 0,$$

entonces

$$A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{22} = 0$$

$$B_{11} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}},$$

$$B_{12} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}},$$

$$B_{21} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1},$$

$$B_{22} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}.$$

Entonces los desplazamientos están dados por

$$x_1 = B_{11} \cos \omega_1 t + B_{12} \cos \omega_2 t,$$

$$x_2 = B_{21} \cos \omega_1 t + B_{22} \cos \omega_2 t.$$

El oscilador general lineal no amortiguado de n grados de libertad.

Por una analogía directa la ecuación para la frecuencia de un sistema de n grados de libertad será de n -ésimo orden en ω^2 , de la cual se pueden determinar n frecuencias principales.

Las ecuaciones de movimiento serán

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{j=1}^n A_{1j} \sin \omega_j t + \sum_{j=1}^n B_{1j} \cos \omega_j t, \\ x_2 &= \sum_{j=1}^n A_{2j} \sin \omega_j t + \sum_{j=1}^n B_{2j} \cos \omega_j t, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= \sum_{j=1}^n A_{nj} \sin \omega_j t + \sum_{j=1}^n B_{nj} \cos \omega_j t. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Las ecuaciones de movimiento contendrán $4n$ constantes de integración, que se determinarán de $2n$ condiciones iniciales y de $2n$ ecuaciones adicionales, que relacionan las amplitudes A_{nj} para cada ω_j y las amplitudes B_{nj} para cada ω_j por el uso de cualquiera de las n ecuaciones semejantes a las ecuaciones 6.79 de esta sección.

6.9 Sistema forzado con dos grados de libertad. Agregaremos ahora una fuerza armónica a la masa m_1 del sistema anterior, como se puede ver en la figura 6.25. Ahora las ecuaciones de movimiento son

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_o \sin \omega t, \quad (6.90)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0.$$

Solamente nos interesará la solución particular, la cual supondremos que es

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad (6.91)$$

$$x_2 = A_2 \sin \omega t.$$

Sustituyendo las ecuaciones 6.91 en las ecuaciones 6.90, dividiendo entre $\sin \omega t$ y ordenando términos, tenemos

$$A_1(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) + A_2(-k_2) = F_o, \quad (6.92)$$

$$A_1(-k_2) + A_2(k_2 - m_2 \omega^2) = 0.$$

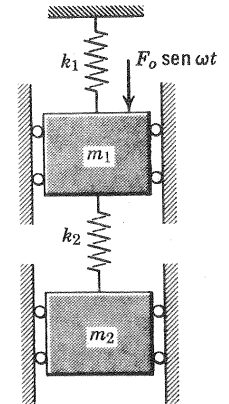


Fig. 6.25

Resolviendo estas ecuaciones para A_1 y A_2 , que son las amplitudes para el estado permanente, por medio de determinantes, obtenemos

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_o & -k_2 \\ 0 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D} \quad (6.93)$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \omega^2 & F_o \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{D_2}{D}.$$

En los pasos que condujeron a la ecuación 6.82 vimos que $D = 0$ cuando ω es igual a una de las frecuencias principales. Así que, puesto que ni D_1 ni D_2 son iguales a cero para un valor finito de F_o , es evidente que resultarán amplitudes infinitas para las masas m_1 y m_2 cuando la frecuencia de la fuerza impulsora coincida con una de las frecuencias principales del sistema. Esta afirmación es generalmente cierta para un sistema similar con n grados de libertad.

Un examen más cuidadoso de la primera de las ecuaciones 6.93 indicará que $A_1 = 0$ cuando $D_1 = 0$. El requisito de que $D_1 = 0$ se encuentra cuando

$$F_o(k_2 - m_2 \omega^2) = 0 \quad (6.94)$$

o sea

$$\frac{k_2}{m_2} = \omega^2.$$

Por lo tanto, es posible introducir m_2 y k_2 de modo que m_1 continuará estando en reposo bajo la influencia de la fuerza perturbadora.

Para este caso, de la segunda de las ecuaciones 6.93,

$$A_2 = -\frac{F_0}{k_2} \quad \text{ó} \quad A_2 k_2 = -F_0. \quad (6.95)$$

Ahora, la cantidad $A_2 k_2$ es la fuerza que ejerce el resorte k_2 sobre la masa m_1 y se ve que exactamente neutraliza el efecto de F_0 que se requiere para que A_1 sea cero. Tal elección de masa m_2 y resorte k_2 se conoce como amortiguador de vibraciones y es un medio de eliminar las vibraciones en muchas aplicaciones prácticas.

PROBLEMAS

6.1. Un instrumento que pesa 2 kg está sostenido por cuatro apoyos de hule cada uno de los cuales sufre una deformación de 0.5 cm por kilogramo de carga. ¿Cuál será la frecuencia natural del instrumento?

6.2. Hallar la constante k de un resorte sencillo que tenga las mismas características que:

- Dos resortes en serie.
- Dos resortes en paralelo.

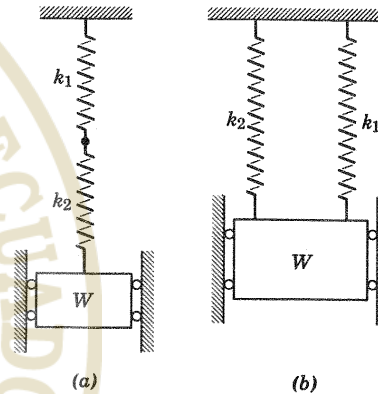


Fig. P-6.2

6.3. Un motor de peso desconocido descansa sobre una plataforma acojinada de constante de resorte desconocida. ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema si el motor comprime la plataforma 0.5 cm?

6.4. Un sistema simple no amortiguado de masa y resorte tiene una constante $k = \pi/2$ kg/cm, una masa $m = 1/2\pi$ kg-seg²/cm y se observa que tiene un desplazamiento de 5 cm de la posición de equilibrio cuando $t = 1$ seg y una velocidad de 6.28 cm/seg en $t = 2$ seg. Hallar el desplazamiento como una función del tiempo.

6.5. Escribir la ecuación de movimiento angular para un péndulo simple y hallar el período para las oscilaciones pequeñas. ¿Cuál sería la longitud l para un período de 1 seg?

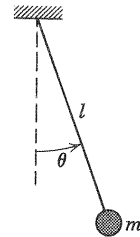


Fig. P-6.5

6.6. ¿Cuál de los sistemas que se muestran tiene el período más largo si $k_1 = 5 \text{ kg/cm}$, $k_2 = 8 \text{ kg/cm}$ y $k_3 = 10 \text{ kg/cm}$?

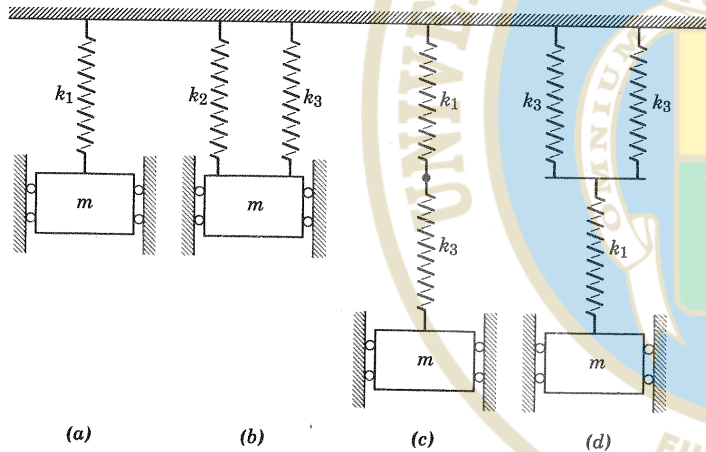


Fig. P-6.6

6.7. Hallar el período de las oscilaciones pequeñas para el sistema de péndulo que se muestra.

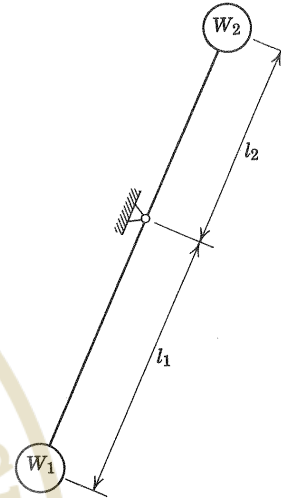


Fig. P-6.7

6.8. Determinar la fuerza en cada resorte debida a la fuerza F y la constante de resorte equivalente para cada sistema.

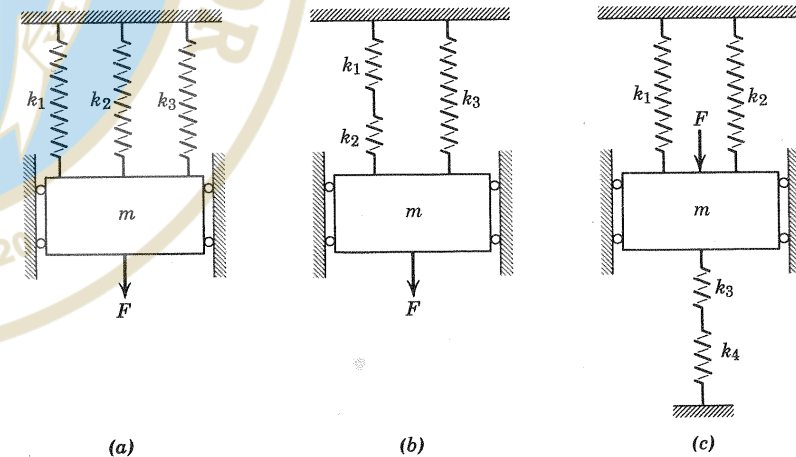


Fig. P-6.8

6.9. ¿Cuál es la frecuencia natural del sistema que se muestra? La articulación en O es lisa y puede despreciarse la masa de la barra.

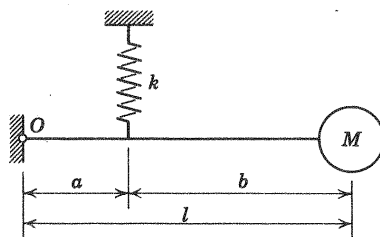


Fig. P-6.9

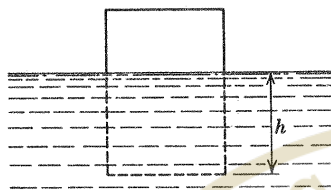


Fig. P-6.10

6.10. Un corcho flota con una altura de inmersión media igual a h y la área de la sección transversal del corcho en la superficie del agua es constante e igual a A . El corcho se desplaza ligeramente hacia abajo de su posición de flotamiento y después se suelta. Se desprecia el rozamiento y la inercia del agua que pueda ponerse en movimiento. El agua tiene un peso específico γ . Determinar el período de la oscilación.

6.11. Una cuerda elástica ligera se alarga 2 cm por cada kilogramo de tensión. El extremo superior está fijo y en el extremo inferior se coloca un peso de 2 kg el cual se deja caer desde el reposo cuando la cuerda está vertical y recta pero no estirada. ¿Cuál es el desplazamiento máximo del peso y su período de oscilación?

6.12. Una bala que tiene una masa m y una velocidad v penetra en un bloque de masa M que está inicialmente en reposo. Suponiendo que M no se mueve hasta después del impacto y que la superficie horizontal es lisa, hallar el movimiento subsecuente de M ; esto es, hallar x como una función del tiempo.

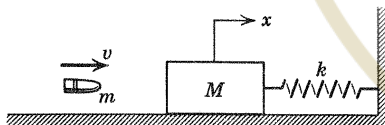


Fig. P-6.12

6.13. Hallar el período de la vibración para pequeñas amplitudes del desplazamiento en el sistema de péndulo simple que se muestra.

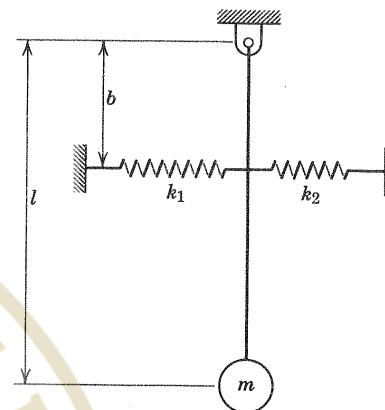


Fig. P-6.13

6.14. Al extremo superior de un péndulo simple de longitud l y masa m se da una aceleración vertical uniforme a . ¿Cuál es el período del péndulo para pequeñas oscilaciones?

6.15. Dos resortes idénticos tienen constantes de 0.04 kg/cm. Si se colocan en sus extremos inferiores pesos de 2.45 kg y 9.8 kg y se dejan caer simultáneamente desde la posición en que los resortes no están alargados, hallar el tiempo que transcurrirá antes de que ambos pesos estén otra vez en sus posiciones iniciales en el mismo instante.

6.16. Una barra uniforme de longitud l y peso W descansa sobre dos rodillos horizontales que giran en sentido opuesto con rapidez angular constante ω . El coeficiente de rozamiento cinético entre la barra y los rodillos es μ . Si la barra se desplaza ligeramente de la posición central y después se suelta, hallar el período del movimiento resultante.

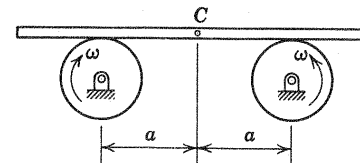


Fig. P-6.16

6.17. Una bola esférica de 61 cm de radio flota en el agua con la mitad sumergida. Si se baja la bola ligeramente y después se suelta, hallar el período de oscilación.

6.18. Un tubo de vidrio sostenido en un plano vertical se llena parcialmente con un fluido de peso específico γ . En uno de los lados del tubo el fluido se hace bajar una distancia x y después se suelta. ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación resultante del fluido? El área de la sección transversal del tubo es A y la longitud de la columna de fluido es l .

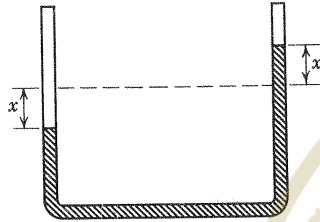


Fig. P-6.18

6.19. Un bloque de masa m desliza sin rozamiento sobre una varilla que está colocada en una mesa giratoria horizontal. El bloque está sostenido por dos resortes, cada uno de constante k . Si la mesa gira alrededor de un eje vertical que pasa por O con una velocidad angular constante ω , hallar la frecuencia natural de m con relación a la mesa.

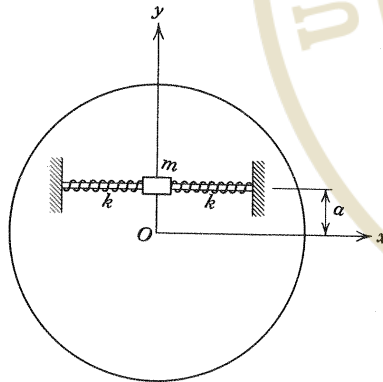


Fig. P-6.19

6.20. Una cuerda elástica está estirada y tensa entre dos soportes y tiene en su punto medio una masa M colocada sobre un plano liso horizontal. Si se da a la cuerda un desplazamiento normal y después se suelta, hallar la ecuación exacta del movimiento de M . Si el desplazamiento es pequeño, simplificar la ecuación de movimiento y determinar su período. El cable tiene una tensión inicial T y una constante k para la longitud l .

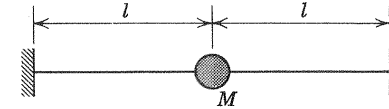


Fig. P-6.20

6.21. Una pieza de cierta máquina pesa W kg y su centro de masa se localiza por medio del vector de posición $\bar{p}_c$ m desde el punto O . Cuando la pieza se suspende desde el punto O y se le permite oscilar ángulos pequeños el período que se observa es τ seg. Hallar el radio de giro centroidal k_c .

6.22. Un bloque sólido homogéneo pesa W kg y el área de su sección transversal es A m², está suspendido de un resorte de constante k kg/m. El bloque está sumergido en un líquido con una densidad de ρ kg/m³. Determinar la frecuencia natural y el período del movimiento que resultaría si el bloque se desplazara ligeramente de su posición de equilibrio. Despréciese todo rozamiento.

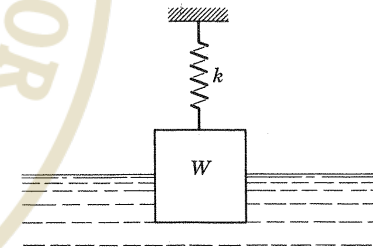


Fig. P-6.22

6.23. Determinar, para oscilaciones pequeñas, la frecuencia natural del sistema. Se desprecia la masa de la barra rígida que puede girar libremente alrededor de O .

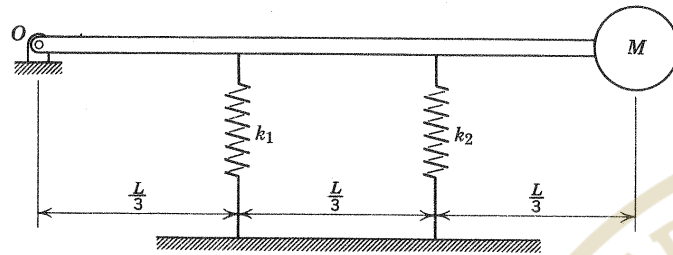


Fig. P-6.23

6.24. La esfera sólida homogénea de 25 kg está soldada, en la forma que se indica, a una varilla circular sólida. Un momento de 30 cm·kg hace que la varilla se tuerza 1° . Determinar la frecuencia de las vibraciones torsionales de la esfera, la inercia de la varilla se desprecia.

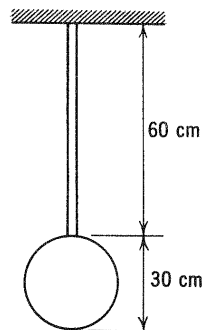


Fig. P-6.24

6.25. La masa que se muestra está restringida a moverse en una guía vertical. Hallar la frecuencia natural para pequeños desplazamientos x desde la posición de equilibrio.

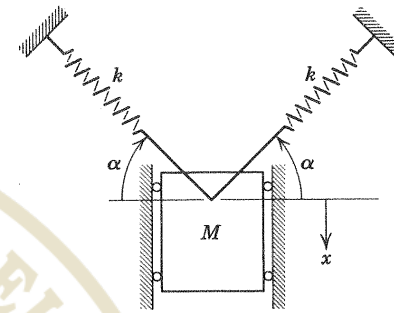


Fig. P-6.25

6.26. La masa $m = 0.1$ unidades técnicas de masa se suelta desde la posición que está a 9 cm abajo de su posición de equilibrio con velocidad cero. Si la polea es de masa despreciable y la constante del resorte $k = 2$ kg/cm, hallar la velocidad de m después de 0.1 seg de haberse soltado.

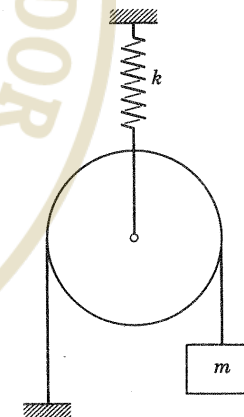


Fig. P-6.26

6.27. Un péndulo consiste de dos masas m_1 y m_2 colocadas en los extremos de una varilla de peso despreciable y de longitud l . ¿A qué distancia de la masa más pequeña (m_2) debe situarse el punto de suspensión a fin de obtener la máxima frecuencia de oscilación?

6.28. Una partícula de masa m se mueve sin rozamiento en el plano vertical xy sobre la curva $y = ax^2$. Hallar la ecuación de movimiento de m primeramente escribiendo la ecuación de la conservación de la energía. Simplificar la ecuación de movimiento y hallar la frecuencia natural para desplazamientos pequeños de la posición de equilibrio.

6.29. Para desplazamientos pequeños de la posición de equilibrio, escribir la ecuación diferencial de movimiento para el tablón homogéneo de peso W . ¿Cuál es el período de vibración?

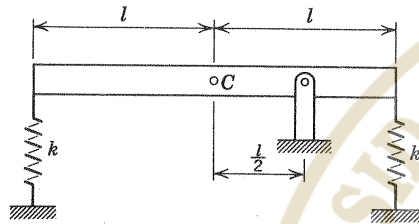


Fig. P-6.29

6.30. El anillo de radio r y espesor despreciable oscila con una pequeña amplitud alrededor del pivote O . Determinar el período del movimiento.

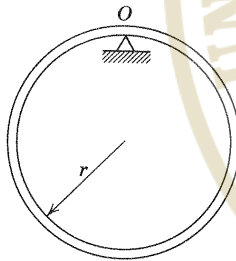


Fig. P-6.30

6.31. El péndulo de una máquina de Charpy se utiliza para determinar la resistencia al choque de los materiales. Pesa 25 kg y la distancia del eje de rotación en O a su centro de gravedad, es de 1 m. Cuando se permite que oscile alrededor de su eje de rotación se observa que el péndulo efectúa 30 oscilaciones completas en 60 seg. Hallar el momento de inercia I_0 del péndulo.

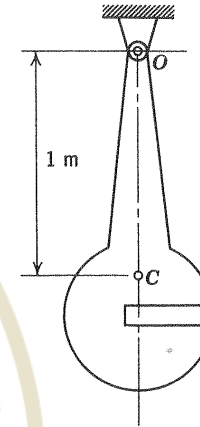


Fig. P-6.31

6.32. Determinar el período del sistema para oscilaciones pequeñas. El radio de giro del disco con respecto al pasador en O es de 18 cm.

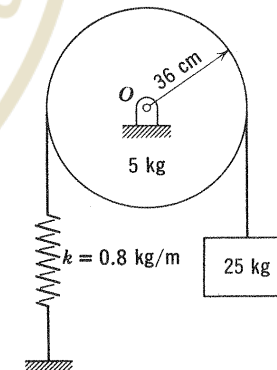


Fig. P-6.32

6.33. Una barra de longitud l y peso W desliza sin rozamiento en un plano vertical sobre la superficie cilíndrica que se muestra. Si la barra se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, hallar el período de las oscilaciones resultantes.

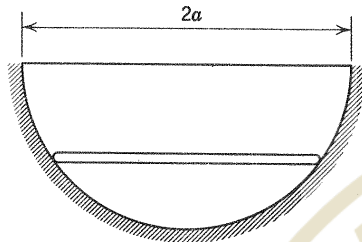


Fig. P-6.33

6.34. El cilindro B tiene una sección transversal con área de 900 cm^2 y pesa 50 kg . El bloque A pesa 5 kg . La polea C tiene un momento de inercia respecto a O de $2 \text{ kg}\cdot\text{seg}^2\cdot\text{m}$. Para pequeñas amplitudes de vibración, hallar el período de la vibración libre.

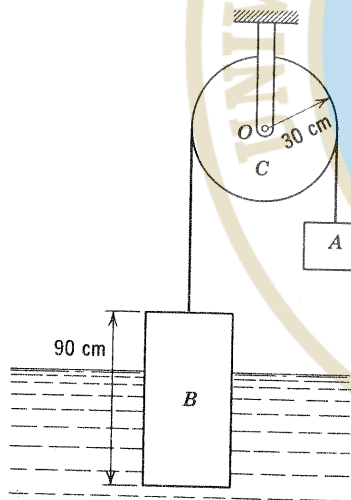


Fig. P-6.34

6.35. Un cascarón hemisférico de peso W y radio r oscila sin deslizamiento sobre un plano horizontal. ¿Cuál es el período de oscilación para pequeños desplazamientos de la posición de equilibrio?

6.36. Un disco de peso W y radio de giro k_0 respecto a un eje horizontal que pasa por su centro rueda sin deslizar sobre el plano horizontal. Si el disco se desplaza de su posición de equilibrio, hallar la frecuencia natural de la vibración.

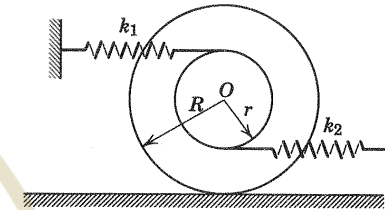


Fig. P-6.36

6.37. La polea doble tiene un momento de inercia I_0 respecto a su eje de rotación que pasa por O . Escribir la ecuación diferencial de movimiento para el sistema y determinar el período de la vibración.

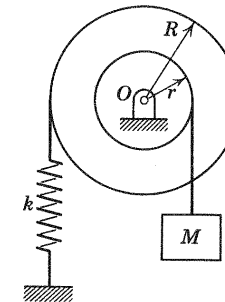


Fig. P-6.37

6.38. Un cilindro de peso W y radio a rueda sin deslizar sobre una superficie cilíndrica de radio R . Determinar la frecuencia natural para desplazamientos pequeños θ de la posición de equilibrio. Nótese que $\dot{\theta}$ no es la velocidad angular del cilindro.

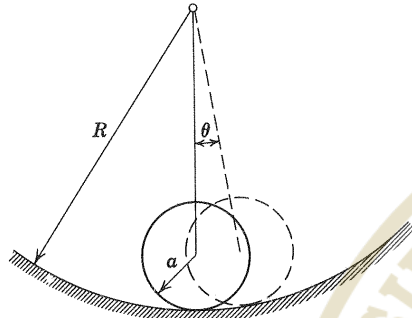


Fig. P-6.38

6.39. Una barra delgada de peso W y longitud l está sostenida simétricamente mediante dos cuerdas de longitud h y separadas una distancia $2a$. Si la barra se hace girar un ángulo pequeño alrededor de un eje centroidal vertical y después se suelta, hallar el período del movimiento.

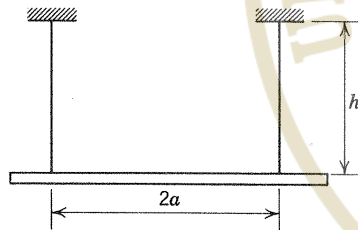


Fig. P-6.39

6.40. Un cilindro de peso W rueda sin deslizar sobre un prisma también de peso W . Despreciando el rozamiento de la superficie horizontal, hallar la frecuencia natural del movimiento oscilatorio.

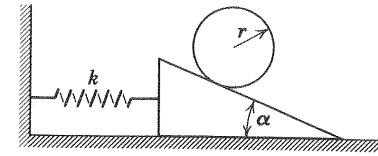


Fig. P-6.40

6.41. Escribir la ecuación de movimiento para pequeños desplazamientos del sistema que se muestra. La barra tiene una masa M . ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?

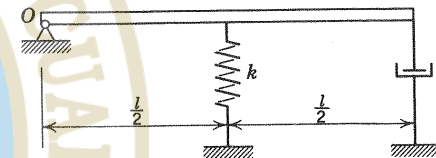


Fig. P-6.41

6.42. Un bloque pequeño de peso W descansa sobre un plano rugoso con un coeficiente de rozamiento μ . Cuando $x = 0$ tanto la fuerza del resorte como la fuerza de rozamiento son cero. El bloque se desplaza hacia la derecha de $x = 0$ una distancia x_0 y se suelta del reposo. Suponiendo que la fuerza del resorte es suficientemente grande para vencer a la fuerza de rozamiento, hallar para el movimiento subsecuente:

- La posición de W como una función del tiempo durante el intervalo en que se está moviendo hacia la izquierda.
- La posición límite de W a la izquierda.
- El tiempo en que se verifica el primer medio ciclo del movimiento.

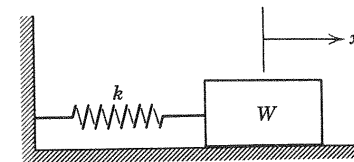


Fig. P-6.42

6.43. ¿Cuál es la relación del período de un sistema resorte-masa sin amortiguamiento a un sistema de constante amortiguamiento $c = \frac{1}{2} c_c$?

6.44. Escribir la ecuación diferencial de movimiento para el sistema que se muestra. Determinar la frecuencia natural de las oscilaciones amortiguadas. ¿Cuál es el coeficiente de amortiguamiento para el amortiguamiento crítico?

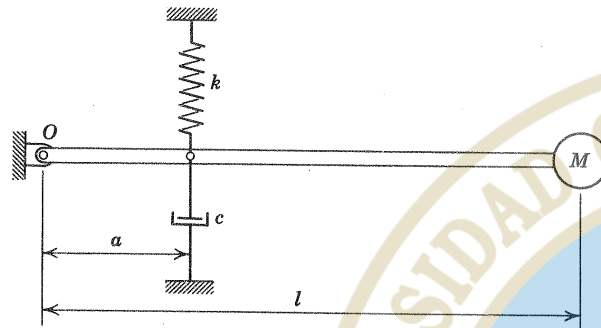


Fig. P-6.44

6.45. Demostrar que el decremento logarítmico se puede escribir $\ln(A_1/A_2) = (2\pi c/c_c)/[1 - (c/c_c)^2]^{1/2}$, donde c_c es el valor de c para el amortiguamiento crítico.

6.46. Un sistema resorte-masa de masa m y constante k con amortiguamiento viscoso tiene una amplitud inicial A_0 y una amplitud A_n después de n ciclos. Hallar una expresión aproximada para el coeficiente de amortiguamiento.

6.47. Determinar la relación de amplitudes sucesivas separadas un período. El plano horizontal está cubierto con una película de aceite que tiene un coeficiente de amortiguamiento viscoso $c = 0.4 \text{ kg-seg/m}$.

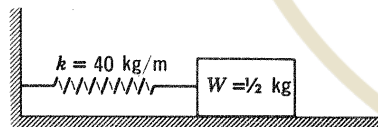


Fig. P-6.47

6.48. Demostrar que el decremento logarítmico se puede escribir $(1/n) \ln(A_0/A_n) = c\pi/mq$. A_0 es la amplitud inicial y A_n es la amplitud después de n ciclos. Si se observa que un peso de 2 kg suspendido de un resorte tiene un período de $\frac{3}{4}$ seg y el amortiguamiento reduce la amplitud a la mitad en 10 ciclos, ¿cuál es el coeficiente de amortiguamiento?

6.49. Un sistema resorte-masa con amortiguamiento crítico viscoso tiene las condiciones iniciales $x = x_0$ y $\dot{x} = \dot{x}_0$. Hallar el desplazamiento de m como una función del tiempo. ¿Es posible que x cambie de signo? Si $x_0 = 0$, ¿cuál es el máximo desplazamiento alcanzado por m ?

6.50. Un disco delgado de radio R se utiliza en oscilaciones torsionales para determinar la viscosidad de los líquidos. El período de oscilación medido en el aire es τ_1 y en el líquido τ_2 . El momento de inercia respecto al eje de la varilla que lo soporta es I . La fuerza de rozamiento del líquido que actúa sobre un elemento de la superficie del disco es el producto del coeficiente de viscosidad μ , el área del elemento y la velocidad del elemento. Despreciar cualesquiera fuerzas de rozamiento en el aire y deducir una expresión para el coeficiente de la viscosidad.

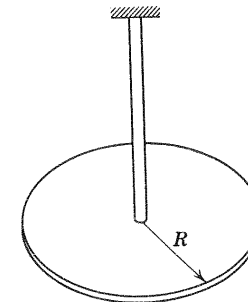


Fig. P-6.50

6.51. Un sistema resorte-masa tiene aplicada una fuerza $F_0 \sin \omega t$ y existe un coeficiente de amortiguamiento igual a $\frac{1}{2} c_c$. ¿Cuál será la frecuencia aplicada a la que ocurrirá la amplitud máxima? ¿Cuál es la amplitud máxima?

6.52. El piso de un edificio vibra con una amplitud de 0.015 cm y con una frecuencia de 10 rad/seg. Se desea aislar un instrumento sensible por medio de cuatro resortes iguales. La máxima amplitud de vibración permisible para el instrumento es 0.0003 cm. Hallar la constante necesaria para cada resorte. El instrumento pesa 196 kg.

6.53. El sistema resorte-masa que se muestra está en reposo en su posición de equilibrio cuando $t = 0$. En este instante se aplica a la masa una fuerza F de magnitud constante. Hallar el desplazamiento x como una función del tiempo.

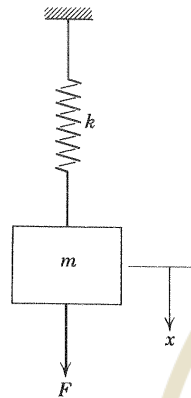


Fig. P-6.53

6.54. Un sistema resorte-masa con amortiguamiento igual a $\frac{1}{4} c_c$ se somete a la acción de una fuerza periódica $F_0 \sin \omega t$. Determinar:

- El intervalo de los cocientes de frecuencias, para el que el factor de amplificación es menor de 1.0.
- El intervalo de los cocientes de frecuencias, para el que el factor de amplificación excede de 1.5.

6.55. Un sistema resorte-masa no amortiguado está sometido a la fuerza $F = ct$ kg. Resolver la ecuación diferencial de movimiento para x como una función del tiempo. Para las condiciones iniciales tomar $x_0 = \dot{x}_0 = 0$.

6.56. Una masa m está montada sobre la base A por medio de una varilla elástica. Manteniendo A fija, con una fuerza F se desplaza horizontalmente la masa una distancia δ . Si A tiene el movimiento $x_1 = A \sin \omega t$, hallar la amplitud x de la vibración de la masa.

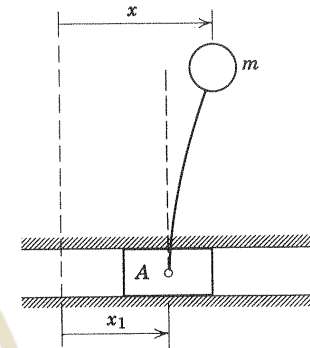


Fig. P-6.56

6.57. Un remolque de una sola rueda viaja sobre un camino desigual cuyo perfil se representa en la figura. La superficie del camino se puede considerar aproximada a una curva cosenoidal de amplitud δ y longitud de onda l . El remolque tiene una rapidez horizontal constante v . Hallar la amplitud de la vibración forzada. ¿A qué rapidez ocurrirá la resonancia si $c = 0$? Nótese que la fuerza del resorte y la fuerza de amortiguamiento dependen de la coordenada relativa $(z - y)$.

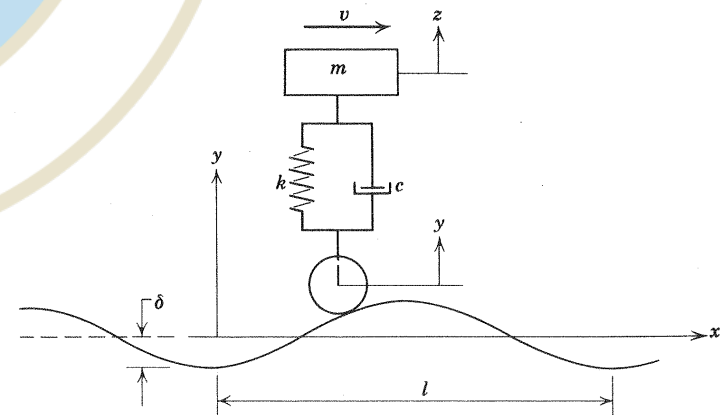


Fig. P-6.57

6.58. El remolque del problema 6.57 pesa 350 kg y viaja a una rapidez de 20 km/h. La curva cosenoidal tiene una longitud de onda de 90 cm y una amplitud de 3.75 cm. Una carga de 100 kg hará que el remolque se asiente 0.6 cm. Si no se proporciona amortiguamiento, ¿cuál será la amplitud de la vibración del remolque?

6.59. Un bloque deslizante que sostiene un péndulo simple tiene un movimiento $x_1 = A \sin \omega t$. Hallar la amplitud del movimiento absoluto de m para pequeños desplazamientos.

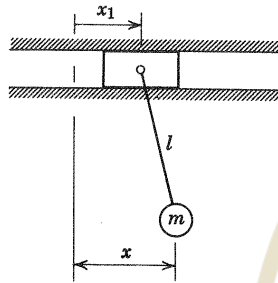


Fig. P-6.59

6.60. Un motor que pesa 320 kg y está diseñado para operar a 1760 rpm ha llegado a desbalancearse. Se estima que el desbalanceo del motor es equivalente a un peso de 0.85 kg situado a 2.5 cm del eje de rotación a la velocidad normal de operación. El motor está montado sobre un dispositivo elástico que tiene una constante de resorte equivalente de 12 ton/cm. Despreciando el amortiguamiento, ¿cuál será la amplitud de las vibraciones forzadas? Si el amortiguamiento que se proporciona es igual a $c_c/3$, ¿cuál es la amplitud de las vibraciones forzadas?

6.61. Un soporte para instrumentos de un aeroplano tiene una frecuencia natural en el sentido vertical de 5 ciclos por segundo. El aeroplano vibra verticalmente con una frecuencia de 10 ciclos/seg y una amplitud de 0.05 cm. Hallar la amplitud de la vibración absoluta del soporte y la amplitud con respecto al aeroplano. ¿Cuál es la aceleración máxima del soporte?

6.62. Una máquina que pesa 500 kg tiene un rotor girando a 7200 rpm con un desbalanceo de 45 g-cm. La máquina descansa sobre resortes que se comprimen $1/4$ cm bajo su peso. Los resortes tienen un amortiguamiento igual a 10 por ciento del crítico. Hallar la fuerza que se transmite a la cimentación a la rapidez de resonancia y a la rapidez de rotación.

6.63. El sistema que se muestra está restringido a pequeños desplazamientos verticales y angulares. Utilizando las coordenadas x y θ que se muestran, escribir las ecuaciones de movimiento. El cuerpo tiene una masa M y un momento de inercia I_c respecto a un eje que pasa por el centro de masa. ¿Cuál es la relación paramétrica para la que las ecuaciones en x y θ son independientes entre sí?

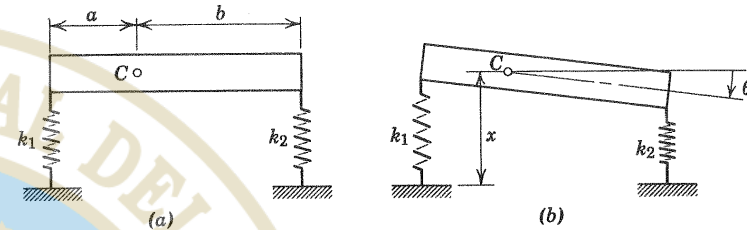


Fig. P-6.63

6.64. Hallar las frecuencias principales para el sistema que se muestra. La superficie horizontal es lisa.

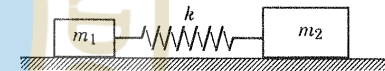


Fig. P-6.64

6.65. Para las dos masas que están montadas sobre una cuerda tensa, escribir las ecuaciones diferenciales para el movimiento lateral y determinar las frecuencias principales. Considerar que los desplazamientos x_1 y x_2 son pequeños y la tensión T en la cuerda es constante.

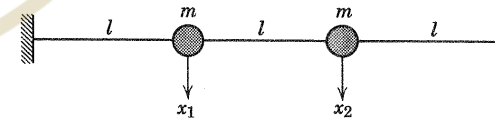


Fig. P-6.65

6.66. Determinar la energía de entrada por ciclo de la fuerza $F_0 \sin \omega t$ cuando $\omega = \sqrt{k/m}$.

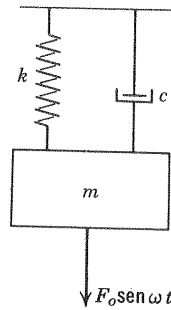


Fig. P-6.66

6.67. En el sistema que se muestra, hallar el valor de la frecuencia impulsora ω que hará que x_1 ó x_2 lleguen a ser infinitos.

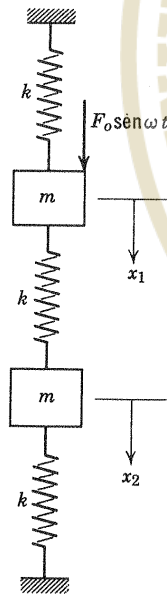


Fig. P-6.67

apéndice A

Propiedades de los cuerpos sólidos homogéneos

Se utiliza la siguiente nomenclatura:

ρ = Masa por unidad de longitud o masa por unidad de volumen.

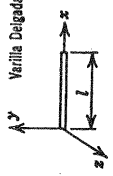
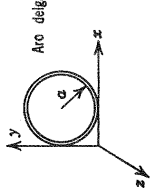
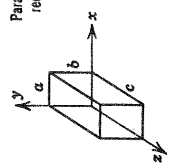
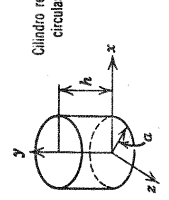
M = Masa del sólido que se muestra.

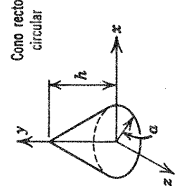
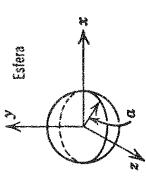
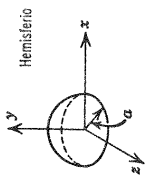
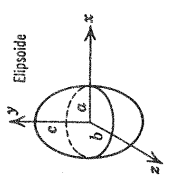
x_c, y_c, z_c = Coordenadas centroidales del cuerpo con respecto a x, y, z .

$I_{x_c}, I_{y_c}, I_{z_c}$ = Momento de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x_c, y_c, z_c , ejes que pasan por el centroide y son paralelos a x, y, z .

I_x, I_y, I_z = Momento de inercia del cuerpo con respecto a x, y, z .
 $I_{x_c y_c}, I_{y_c z_c}, I_{z_c x_c}$ = Producto de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x_c, y_c, z_c , ejes que pasan por el centroide y son paralelos a x, y, z .

I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} = Producto de inercia del cuerpo con respecto a x, y, z .

Cuerpo	Masa y centroide	Momento de inercia	Producto de inercia
 Varilla delgada	$M = \rho l$ $x_c = \frac{l}{2}$ $y_c = z_c = 0$	$I_{x_c} = 0$ $I_{y_c} = I_{z_c} = \frac{M}{12} l^2$ $I_x = 0$ $I_y = I_z = \frac{M}{3} l^2$	$I_{x_c y_c} = I_{y_c z_c} = I_{z_c x_c} = 0$ $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$
 Aro delgado	$M = 2\pi\rho a$ $x_c = y_c = a$ $z_c = 0$	$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{M}{2} a^2$ $I_{z_c} = Ma^2$ $I_x = I_y = \frac{3M}{2} a^2$ $I_z = 3Ma^2$	$I_{x_c y_c} = I_{y_c z_c} = I_{z_c x_c} = 0$ $I_{xy} = Ma^2$ $I_{yz} = I_{zx} = 0$
 Paralelepípedo rectangular	$M = \rho abc$ $x_c = \frac{a}{2}$ $y_c = \frac{b}{2}$ $z_c = \frac{c}{2}$	$I_{x_c} = \frac{M}{12} (b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{M}{3} (b^2 + c^2)$	$I_{x_c y_c} = I_{y_c z_c} = I_{z_c x_c} = 0$ $I_{xy} = \frac{M}{4} ab$ $I_{yz} = \frac{M}{4} bc$ $I_{zx} = \frac{M}{4} ac$
 Cilindro recto circular	$M = \pi\rho a^2 h$ $x_c = 0$ $y_c = \frac{h}{2}$ $z_c = 0$	$I_{x_c} = I_{z_c} = \frac{M}{12} (3a^2 + h^2)$ $I_{y_c} = \frac{1}{2} Ma^2$ $I_x = I_z = \frac{M}{12} (3a^2 + 4h^2)$ $I_y = \frac{1}{2} Ma^2$	$I_{x_c y_c} = I_{y_c z_c} = I_{z_c x_c} = 0$ $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$

Cuerpo	Masa y centroide	Momento de inercia	Producto de inercia
 Cono recto circular	$M = \frac{\pi}{3} \rho a^2 h$ $x_c = 0$ $y_c = \frac{h}{4}$ $z_c = 0$	$I_{x_c} = I_{z_c} = \frac{3M}{80} (4a^2 + h^2)$ $I_{y_c} = \frac{3M}{10} a^2$ $I_x = I_z = \frac{M}{20} (3a^2 + 2h^2)$ $I_y = \frac{3M}{10} a^2$	$I_{x_c y_c} = I_{y_c z_c} = I_{z_c x_c} = 0$ $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$
 Esfera	$M = \frac{4}{3} \pi \rho a^3$ $x_c = y_c = z_c = 0$	$I_{x_c} = I_{y_c} = I_{z_c} = \frac{2}{5} Ma^2$ $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} Ma^2$	$I_{x_c y_c} = I_{y_c z_c} = I_{z_c x_c} = 0$ $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$
 Hemisferio	$M = \frac{2}{3} \pi \rho a^3$ $x_c = 0$ $y_c = \frac{3a}{8}$ $z_c = 0$	$I_{x_c} = I_{y_c} = I_{z_c} = \frac{2}{5} Ma^2$ $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} Ma^2$	$I_{x_c y_c} = I_{y_c z_c} = I_{z_c x_c} = 0$ $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$
 Elipsoide	$M = \frac{4}{3} \pi \rho abc$ $x_c = y_c = z_c = 0$	$I_{x_c} = \frac{M}{5} (b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{M}{5} (a^2 + c^2)$ $I_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2)$	$I_{x_c y_c} = I_{y_c z_c} = I_{z_c x_c} = 0$ $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$

RESPUESTA A LOS PROBLEMAS

Las respuestas dadas en notación vectorial, cuando en el problema no se indican ejes de coordenadas, están referidas a un sistema de ejes en que x es positiva hacia la derecha, y es positiva hacia arriba y z es positiva hacia afuera de la página.

Capítulo 2

$$2.1. \quad \ddot{r} = -\frac{2\dot{y}_o^2}{h^2 k} (\cos^3 kx) \sin kx \hat{i}$$

$$2.3. \quad a) \quad y = x \tan \alpha - x^2 \frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} = ax + bx^2$$

$$b) \quad x = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad y = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$c) \quad \dot{x} = v_o \cos \alpha, \quad \dot{y} = -v_o \sin \alpha$$

$$2.5. \quad \ddot{r}_B = -2.412\hat{i} - 0.608\hat{j} \text{ m/seg}$$

$$2.7. \quad a = 38 \text{ cm/seg}^2, \quad s = 16 \text{ cm}$$

$$2.9. \quad \bar{s} = -52.5\hat{i} \text{ m}, \quad d = 72.5 \text{ m}, \quad \bar{a} = -5\hat{i} \text{ m/seg}^2$$

$$2.11. \quad \ddot{r}_B = -\frac{4v_o^2 l}{r^2} \left[2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos \theta \right] \hat{i} + \frac{4v_o^2 l}{r^2} \times \left[\sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta - 2 \sin^5 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right] \hat{j}$$

$$2.13. \quad \dot{\theta} = -\frac{v}{h} \sin^2 \theta, \quad \ddot{\theta} = \frac{2v^2}{h^2} \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$2.15. \quad \ddot{r} = -250\pi^2 \hat{i} \text{ cm/seg}^2$$

$$2.17. \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}, \quad s_{\text{máx.}} = -s_o \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad a_{n(\text{máx.})} = \frac{s_o^2 g}{l^3}$$

- 2.19. $a_t = -\frac{g\left(b - \frac{gx}{a}\right)}{\left[a^2 + \left(b - \frac{gx}{a}\right)^2\right]^{3/2}}, a_n = \frac{ga}{\left[a^2 + \left(b - \frac{gx}{a}\right)^2\right]^{3/2}}$
- 2.21. $a_n = \frac{4(ct)^2}{r}, a_t = 2c$
- 2.23. $a = -r\dot{\theta}^2$
- 2.25. a) $\dot{r} = 2r\omega[-\sin\theta \bar{e}_r + \cos\theta \bar{e}_\theta], \ddot{r} = -4r\omega^2[\cos\theta \bar{e}_r + \sin\theta \bar{e}_\theta]$
b) $\dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{2r}, \ddot{\theta} = 0$
- 2.27. $\dot{r} = \dot{\theta}b(2\cos 2\theta \bar{e}_r + \sin 2\theta \bar{e}_\theta), \ddot{r} = b(2\ddot{\theta}\cos 2\theta - 5\dot{\theta}^2\sin 2\theta)\bar{e}_r + b(\ddot{\theta}\sin 2\theta + 4\dot{\theta}^2\cos 2\theta)\bar{e}_\theta$
- 2.29. $|\ddot{r}| = \frac{k}{r^3}(a^2 + 1)$
- 2.31. $\ddot{r} = -4a \csc^5 \theta \bar{e}_\theta$
- 2.33. $\bar{\theta} = -205^\circ \bar{k}$
- 2.35. $\rho = 12 \text{ m}$
- 2.39. a) $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{4\pi N}\right), b) \omega = (4\pi NQ)^{1/2}$
- 2.41. $\bar{a} = 52\bar{e}_r + 200\bar{e}_\theta \text{ m/seg}^2$
- 2.43. $\bar{v} = -0.64\bar{i} \text{ m/seg}$
- 2.45. $\dot{r} = 270\bar{i} + 187.5\bar{j} \text{ m/seg}$
- 2.47. $\bar{v}_B = \omega r(-4\sin 2\omega t - \sin \omega t)\bar{i}_0 + \omega r(4\cos 2\omega t - \cos \omega t)\bar{j}_0, \bar{a}_B = \omega^2 r(-8\cos 2\omega t - \cos \omega t)\bar{i}_0 + \omega^2 r(-8\sin 2\omega t + \sin \omega t)\bar{j}_0$
- 2.49. $\ddot{r}_A = -1.88\bar{i} \text{ m/seg}^2$
- 2.51. $\ddot{r} = -[\omega_1^2 d + (\omega_2 - \omega_1)^2 b]\bar{j}$
- 2.53. $|\dot{r}| = |nrt - u|, |\ddot{r}| = \left[\left(2nut - n^2t^2r - \frac{u^2}{r}\right)^2 + n^2r^2\right]^{1/2}$
- 2.57. $\ddot{r} = -132\bar{i} + 75\bar{j} + 100\bar{k} \text{ cm/seg}^2$
- 2.59. a) $\ddot{r}_p = -9.5\bar{i}_0 - 5.5\bar{j}_0 \text{ m/seg}^2$
b) $\ddot{r}_p = -7.25\bar{i}_0 - 4.75\bar{j}_0 + 1.25\sqrt{3}\bar{k}_0 \text{ m/seg}^2$
- 2.61. $\ddot{r}_B = -15.6(\bar{i}_0 + \bar{j}_0) \text{ m/seg}, \ddot{r}_B = -606(\bar{i}_0 + \bar{j}_0) \text{ m/seg}^2$
- 2.63. $\bar{a}_c = 0.074\bar{i}_0 \text{ m/seg}^2$
- 2.65. $\ddot{r}_A = 8\bar{i}_0 \text{ m/seg}, \ddot{r}_C = 8\sqrt{3}\bar{j}_0 \text{ m/seg}, \dot{\omega}_{AO} = 0, \ddot{r}_A = 32\sqrt{3}\bar{i}_0 \text{ m/seg}^2$
- 2.67. $\omega_{AB} = -1\bar{k}_0 \text{ rad/seg}, \ddot{r}_B = -0.18\bar{i}_0 - 0.585\bar{j}_0 \text{ m/seg}^2$
- 2.69. $\ddot{r}_D = 3.6\bar{i}_0 + 10.8\bar{j}_0 \text{ m/seg}^2$
- 2.71. $\ddot{r}_C = 4.32\bar{j}_0 \text{ m/seg}^2$
- 2.73. $\omega_{CD} = \frac{n\omega\sqrt{2}}{l}\bar{k}_0$
- 2.75. $\omega_{BC} = 70\bar{k}_0 \text{ rad/seg}$

- 2.77. $\bar{v}_D = \bar{v}_B = 2.82\bar{i}_0 \text{ m/seg}, \bar{v}_F = -2.82\bar{j}_0 \text{ m/seg}$
- 2.79. $\bar{v}_A = \frac{r_2}{r_2 - r_1}\bar{i} \text{ m/seg}, \bar{a}_A = -\frac{0.25r_2}{(r_2 - r_1)^2}\bar{j} \text{ m/seg}^2$
- 2.81. $\bar{l} = 4r\bar{j}$
- 2.83. $\bar{v}_0 = \frac{v}{4}\bar{j}$
- 2.85. $\omega_{CD} = 2\bar{k} \text{ rad/seg}, \dot{\omega}_{BO} = 1.875\bar{k} \text{ rad/seg}^2$
- 2.87. $v = 6.4 \text{ m/seg}$
- 2.89. $\omega_{BO} = \omega_{CD} = 5.65\bar{k} \text{ rad/seg}$
- 2.91. $\dot{\omega} = 2.5\bar{k} \text{ rad/seg}^2$
- 2.93. $\bar{a}_O = -37.5\bar{j}_0 \text{ m/seg}^2$
- 2.95. $\ddot{r}_D = 18\bar{i}_0 \text{ m/seg}, \ddot{r}_D = -36\bar{i}_0 \text{ m/seg}^2$
- 2.97. $\omega_{AB} = 3\bar{k}_0 \text{ rad/seg}, \ddot{r}_O = -17.4\bar{i}_0 - 43.2\bar{j}_0 \text{ m/seg}^2$

Capítulo 3

- 3.1. $\bar{a} = 4.95\bar{j} \text{ m/seg}^2$
- 3.3. $\theta = \arctan \frac{a}{g}$
- 3.5. $\bar{T} = 8.12\bar{j} \text{ kg}$
- 3.7. $\ddot{r} = 3.26\bar{i} \text{ m/seg}^2$
- 3.9. $\theta = 53.1^\circ, T = 3.75 \text{ kg}$
- 3.11. $T = \frac{Wv^2}{2gl} + \left[\left(\frac{Wv^2}{2gl}\right)^2 + W^2\right]^{1/2}$
- 3.13. $T = \frac{\mu r^2 \omega^2}{g}$
- 3.15. $\bar{a}_m = \frac{g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} [M \cos \alpha \bar{i}_0 - (M + m) \sin \alpha \bar{j}_0]$
- 3.17. $\theta = 50.4^\circ$
- 3.19. $\bar{v} = c \sin\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)\bar{i}, \bar{r} = \frac{m_0c^2}{F} \left[1 - \cos\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)\right]\bar{i}$
- 3.21. $R = 114 \text{ m}$
- 3.23. $\omega = \left[\frac{Mg}{m(L-b)}\right]^{1/2}$
- 3.25. $\omega = 4.72 \text{ rad/seg}$
- 3.27. $\omega = 1.45\bar{j} \text{ rad/seg}$
- 3.29. $\bar{a} = -\frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} g\bar{i}$
- 3.31. $\ddot{r}_A = \frac{g}{5}\bar{j}, \ddot{r}_B = -\frac{2}{5}g\bar{j}$
- 3.33. $\ddot{r}_W = \frac{4(n-4)}{n+16} g\bar{j}$

- 3.35. $\bar{P} = 1830\bar{i}$ kg
- 3.37. $v = \left[\frac{2gRh}{h+R} \right]^{1/2}$, $T = \frac{1}{R} \left[\frac{h+R}{2g} \right]^{1/2} \left[(hR)^{1/2} + (h+R) \arctan \sqrt{\frac{h}{R}} \right]$
- 3.39. $T = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{Q}{f}} \left[\arctan \left(\frac{v_0}{\sqrt{\frac{Q}{f}}} \right) \right]$,
 $H = \frac{Q}{2fg} \ln \left[1 + \frac{fv_0^2}{Q} \right]$
- 3.41. $Q = m[-2a\omega \tan \theta - 4a\omega^2]$, $P = 2ma\omega \sec \theta$
 (fuerza de OB sobre el pasador)
- 3.43. $F_r = -m \frac{a^2}{r^3}$, $r = \sqrt{2} \exp \left[\frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{h} (\theta - \theta_0) \right]$
- 3.45. $x^2 + \left(y - \frac{mc}{eH} v_0 \right)^2 = \left(\frac{mc}{eH} v_0 \right)^2$
- 3.47. $\bar{r} = a \cosh (\omega t \sin \alpha) + \frac{g}{\omega^2} \cot \alpha \operatorname{cosec} \alpha [1 - \cosh (\omega t \sin \alpha)]$
- 3.49. $\bar{z} = -64.5\bar{k}$ m
- 3.51. $v = 34.6$ m/seg
- 3.53. $v = 6.28$ m/seg
- 3.55. $\mu = 0.11$
- 3.57. $v = 33.4$ m/seg
- 3.59. a) $s = 14.3$ m; b) $\mu = 0.75$, $v = 13.3$ m/seg
- 3.61. $h = 1.22$ m, $\bar{v} = -2.24\bar{j}$ m/seg, $h_{\max} = 4.05$ m
- 3.63. $N = \frac{W}{[1 + 4x^2]^{3/2}}$, $v_0 = \left[\frac{g}{2} \right]^{1/2}$
- 3.65. $h = 24$ cm
- 3.67. a) $F_s = 10$ kg, b) $F_s = 24$ kg
- 3.69. $\bar{v} = 9.9\bar{i}$ m/seg, $P = 0$
- 3.71. $x = 36$ cm
- 3.73. $h = 8.57$ m
- 3.75. $\theta = 22.85^\circ$
- 3.77. $k = 2000$ kg/m
- 3.79. $t = 0.308$ m
- 3.81. $\bar{v} = -0.348\bar{i}$ m/seg
- 3.83. $\bar{v} = 2.65\bar{i}$ m/seg
- 3.85. $\bar{v} = 300\bar{i}$ m/seg
- 3.87. $\bar{v} = 13\bar{i}$ m/seg
- 3.89. $\bar{\rho} = 6.22\bar{i}$ m
- 3.91. $\bar{a} = -1.96\bar{i}$ m/seg², $\bar{r}_{\max} = 6.08\bar{i}$ m
- 3.93. $d = 12.6$ m
- 3.95. $e = 0.333$

- 3.97. $\Delta t = 64$ kg-m
- 3.99. a) $\bar{v} = \frac{m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2}{m_1 + m_2}$, b) $\bar{v} = \frac{m_1 \bar{v}_1' + m_2 \bar{v}_2'}{m_1 + m_2}$
- 3.101. $\bar{v}_1' = -9\bar{i} + 10\bar{j}$ m/seg, $\bar{v}_2' = 9\bar{i}$ m/seg
- 3.103. $\Delta T = 108$ 200 kg-m
- 3.105. $\bar{u}' = \frac{u \cos \alpha \left(\frac{m}{M} - e \right)}{1 + \frac{m}{M}} \bar{i} + u \sin \alpha \bar{j}$,
 $\beta = \arctan \left[\tan \alpha \left(\frac{1 + \frac{m}{M}}{\frac{m}{M} - e} \right) \right]$
- 3.107. $\bar{v} = 5.2\bar{i} + 1.25\bar{j}$ m/seg, $\Delta T = 12$ kg-m
- 3.109. $\Delta t = 0.81$ seg
- 3.111. $k = 117$ kg/m
- 3.113. $\bar{v}'_A = 2.68\bar{i}$ m/seg, $\bar{v}'_B = 5\bar{i}$ m/seg
- 3.115. $d = 18$ m

Capítulo 4

- 4.1. $s = \frac{1}{2} g t^2 (\sin \beta - \mu \cos \beta)$
- 4.3. $\bar{r}_c = - \left[\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right]^2 g \bar{j}$
- 4.5. $\bar{r}_c = \frac{3}{4} a (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$
- 4.9. a) $\bar{r}_c = l(0.7\bar{i} + 0.5\bar{j} + 0.9\bar{k})$
 b) $\bar{r}_c = 0$
 c) $\bar{r}_c = r(0.711\bar{i} + 0.711\bar{j} + 0.625\bar{k})$
- 4.11. a) $\bar{r}_c = 1.5\bar{j}$ m
 b) $\dot{\bar{r}}_c = \frac{1}{8} v \bar{i}$
 c) $T = 23.5 m v^2$
 d) $p = m v \bar{i}$
- 4.13. a) $\dot{\bar{r}}_c = 4.83\bar{i} - 0.50\bar{j}$ m/seg
 b) $y = -\frac{3}{29} X - \frac{1}{6}$
 c) $T = 83$ m
 d) $\bar{p} = m(29\bar{i} - 3\bar{j})$
- 4.15. $\bar{F} = 373\bar{i}$ kg
- 4.17. $u = 61$ m/seg, $P = 3000$ HP
- 4.19. a) $F_s = \rho A (v - u)^2 (1 - \cos \alpha)$,

$$F_y = -\rho A (v - u)^2 \sin \alpha$$

$$b) u = \frac{v}{1 + \frac{M}{\rho A v (1 - \cos \alpha) t}}$$

$$4.21. v = \frac{g^2 m_s}{k} \sin \alpha - v_r \ln \left[1 + \frac{m_s}{m_b} \right]$$

$$4.25. v = \sqrt{\frac{2}{3} g x}, \Delta E = -\frac{1}{6} \mu l^2, t = \sqrt{\frac{6l}{g}}$$

$$4.27. a) (1) \bar{p} = 0$$

$$(2) \bar{H}_0 = r m v \bar{k}$$

$$(3) \bar{H}_0 = r m v \bar{k}$$

$$(4) T = m v^2$$

$$c) (1) \bar{p} = 0$$

$$(2) \bar{H}_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} r m v \bar{k}$$

$$(3) \bar{H}_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} r m v \bar{k}$$

$$(4) T = \frac{3}{2} m v^2$$

$$4.29. a) \bar{p} = m \sqrt{gl} \bar{i}$$

$$b) \bar{H}_0 = m l \sqrt{gl} \bar{k}$$

$$c) T = \frac{1}{4} m g l$$

$$d) \bar{T} = \frac{5}{4} m g \bar{j}, h = \frac{1}{8} l, \bar{T}' = \frac{7}{8} m g \left(-\frac{7}{8} \bar{i} + \frac{\sqrt{15}}{8} \bar{j} \right)$$

$$4.31. \bar{M} = \frac{4 m \omega R^2 v^2 t}{R^2 + h^2} \bar{k}$$

$$4.33. v = \frac{r_0}{r} v_0, \frac{m v_0^2}{2} \left[\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right]$$

$$4.35. a) \Delta \bar{H}_0 = 0$$

$$b) \Delta T = -\frac{2}{3} m r^2 \omega^2$$

$$c) \Delta \bar{p} = -\frac{4}{3} m r \omega \bar{j}$$

$$4.37. \bar{\omega} = -\frac{v \cos \alpha}{R} \bar{k}$$

$$4.39. a) \dot{r}_c = \frac{2}{3} v_0 \bar{i} + \frac{1}{3} v_0 \cot \theta \bar{j}$$

$$b) T = m v_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cot^2 \theta \right)$$

$$c) \bar{p} = m v_0 (2 \bar{i} + \cot \theta \bar{j})$$

$$d) \bar{H}_c = -\frac{m v_0 l}{3 \sin \theta} [2 + \cos \theta] \bar{k}$$

$$4.41. \bar{H}_0 = \frac{1}{3} m \omega l^2 \bar{k}, T = \frac{1}{6} m \omega^2 l^2$$

$$4.43. M_y = \frac{1}{6} M l^2 \dot{\phi} \theta \cos \theta$$

$$4.45. \dot{r}_c = -(1 - \sin \alpha) \frac{g}{4} \left[\left(\frac{1 - \sin \alpha}{2 + \cos \alpha} \right) \bar{i} + \bar{j} \right],$$

$$\mu = \frac{(1 - \sin \alpha)^2}{(2 + \cos \alpha)(7 + \sin \alpha)}$$

Capítulo 5

$$5.1. I = \frac{2}{3} M a^2$$

$$5.3. I = \frac{19}{40} M R^2$$

$$5.5. I_{xx} = \frac{M}{20} a c$$

$$5.7. I_{xy} = 2 M \frac{a h}{\pi}$$

$$5.9. I_{xx} = 0.074 \text{ kg-m-seg}^2$$

$$5.13. a) I_x = \frac{1}{2} M a^2, I_y = \frac{5}{2} M a^2, I_{xy} = 0$$

$$b) I_x = \frac{1}{6} M l^2, I_y = \frac{2}{3} M l^2, I_{xy} = -\frac{1}{4} M l^2$$

$$c) I_x = 0.1327 M a^2, I_y = 0.2833 M a^2, I_{xy} = 0.10 M a^2$$

$$5.17. I_{xy} = 0.206 \text{ kg-m-seg}^2$$

$$5.19. \bar{x} = (g/\sqrt{3}) \bar{i} \text{ m/seg}^2, \bar{R}_a = W \left(\frac{\bar{i}}{\sqrt{3}} + \bar{j} \right) \text{ kg}$$

$$5.21. \bar{x} = g \cot \alpha \bar{i}, P_{\max} = 120 \text{ kg}, P_{\min} = 45 \text{ kg}$$

$$5.23. k = 2 \text{ kg/m}$$

$$5.25. \bar{x}_c = -1 \bar{i} \text{ m/seg}^2, \bar{A} = 88 \bar{j} \text{ kg}, \bar{B} = 108 \bar{j} \text{ kg}$$

$$5.27. a) P = \frac{r W \left(1 + \frac{a}{g} \right)}{2l} \csc^2 \alpha \quad b) P = \frac{r W \left(1 - \frac{a}{g} \right)}{2l} \csc^2 \alpha$$

$$5.29. \theta = \arctan \left[\frac{g}{a_0} \sec \alpha + \tan \alpha \right]$$

$$5.31. P = \frac{Q a}{g} \cot \alpha + \frac{W \left(1 + \frac{a}{g} \right) \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

$$5.33. \quad a) T_1 = Mg \left[\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{a}{2b} \cos \alpha \right], T_2 = Mg \left[\frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{a}{2b} \cos \alpha \right]$$

$$b) T_1 = T_2 = Mg$$

$$5.35. \quad P = \frac{\mu Mg(1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha) + \frac{1}{2} Ma \omega \cos \alpha (1 + \mu^2)}{\mu^2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha) + (1 + \mu^2) \cos \alpha}$$

$$5.37. \quad \vec{O} = -14.5\vec{i} + 49.5\vec{j} \text{ kg}$$

$$5.39. \quad \vec{\omega} = \left[\frac{4\pi Pl}{2M(R^2 - \frac{1}{6}l^2)} \right]^{1/2} \vec{k}$$

$$5.41. \quad t = \frac{3a\omega}{4\mu g}$$

$$5.43. \quad \vec{C} = -5\vec{i} + 43.8\vec{j} \text{ kg}, a_D = 3.1\vec{j} \text{ m/seg}^2$$

$$5.45. \quad |M_{\text{máx.}}| = Mgl$$

$$5.47. \quad t = \frac{1}{\omega} \left[\frac{6\mu g - l\omega}{6a} \right]^{1/2}, \dot{\omega} = \frac{6\mu g}{l}$$

$$5.49. \quad |A| = \frac{Ml\omega^2}{4}, |V| = \frac{Ml\omega^2}{4}, |M_b| = \frac{Ml^2\omega^2}{4}$$

$$5.51. \quad \vec{A} = \frac{1}{6} Ma\dot{\omega}\vec{i}, \vec{B} = -\frac{2}{3} Ma\dot{\omega}\vec{i}$$

$$5.53. \quad P = \frac{Wr \csc^2 \alpha}{2l} \left[1 + \frac{a}{g} \right] + \frac{Q \tan \alpha}{2} \left[1 + \frac{2al}{3gr} \tan \alpha \right]$$

$$5.57. \quad \alpha = \arccos \frac{10}{17}, \omega = \left[\frac{10g}{17a} \right]^{1/2}$$

$$5.59. \quad \vec{A} = 194\vec{j} + (12.5 - 155.2l)\vec{k} \text{ kg}$$

$$5.61. \quad \vec{B} = (155.2l + 62.5)\vec{k} \text{ kg}$$

$$5.63. \quad x = \frac{7}{5}a$$

$$5.65. \quad F = W \left[\frac{V^2}{g(R-r)} + \cos \alpha \right]$$

$$5.67. \quad \vec{a} = -\frac{2P}{13M} \vec{i}$$

$$5.69. \quad \vec{a}_A = \frac{gl}{13a^2 - 12l^2} [\sqrt{a^2 - l^2} \vec{i} - l\vec{j}]$$

$$5.71. \quad \dot{\omega} = -5.45\vec{k} \text{ rad/seg}^2, \vec{B} = 10\vec{i} + 8.06\vec{j} \text{ kg}, P = 30\sqrt{3} \text{ kg}$$

$$5.73. \quad |A| = |B| = 7.50 \text{ Kg}$$

$$5.75. \quad \vec{c} = Mb \cos \alpha \left(g + \frac{V^2}{a} \right) \vec{k}$$

$$5.77. \quad \dot{\omega} = 20\vec{k} \text{ rad/seg}^2$$

$$5.79. \quad a) \vec{F} = \frac{Wa}{4g} \vec{i}, b) \ddot{r}_c = \frac{a}{4} \vec{i}, c) \dot{\omega} = \frac{3a}{2l} \vec{k}$$

$$5.81. \quad \dot{\omega} = \frac{15g}{56a} \vec{k} \text{ rad/seg}^2, \vec{N} = \frac{403}{448} W\vec{j}$$

$$5.83. \quad \dot{\omega} = \frac{-3gl \sin \alpha}{6la - 2l^2 \tan \alpha - 6a^2 \csc^2 \alpha \cot \alpha} \vec{k}$$

$$5.85. \quad M_{\text{máx.}} \text{ a } \frac{l}{3} \text{ del extremo inferior de la chimenea, } M_{\text{máx.}} = \frac{Wal}{27g}$$

$$5.87. \quad \ddot{r} = -3.14\vec{j} \text{ m/seg}^2$$

$$5.89. \quad \text{nariz hacia la derecha}$$

$$5.91. \quad \dot{\phi} = -0.4\vec{k} \text{ rad/seg}$$

$$5.93. \quad 330 \text{ kg}$$

$$5.95. \quad R = \frac{2k^2\Omega v}{gl}. \text{ El tren dará vuelta al este.}$$

$$5.97. \quad \text{Tensión en la barra} = 550 \text{ Kg}$$

$$5.99. \quad M_x = \frac{1}{2} Ma^2 \omega_y \omega_z, M_y = M_z = 0$$

$$5.101. \quad \vec{v} = -\left[\frac{10}{7} gh \right]^{1/2} \vec{j}, \vec{T} = \frac{2}{7} W\vec{j}$$

$$5.103. \quad \Delta E = \frac{M_b^2 M_r V^2}{2} \left[\frac{(28 - 12) \frac{d^2}{l^2}}{(7M_b + 4M_r)^2} \right]$$

$$5.105. \quad \dot{\omega} = 6.65\vec{k} \text{ rad/seg}$$

$$5.107. \quad T = 18.2 \text{ kg-m}$$

$$5.109. \quad \dot{\omega} = -\left[\frac{2Wgh}{W_p(r^2 + k_o^2) + W(R^2 + r^2)} \right]^{1/2} \vec{k}$$

$$5.111. \quad v = 0.795\sqrt{gl}$$

$$5.113. \quad \omega_B = -3.37\vec{k} \text{ rad/seg}$$

$$5.115. \quad 0.131 \text{ m}$$

$$5.117. \quad a) v = \left[\frac{10g}{7} (b-a)(1 - \cos \theta) \right]^{1/2}, \vec{a} = \frac{10}{7} g(1 - \cos \theta) \vec{j}$$

$$b) v = [2g(b-a)(1 - \cos \theta)]^{1/2}, \vec{a} = 2g(1 - \cos \theta) \vec{j}$$

$$5.119. \quad v = \left[\frac{12}{17} gr(1 - \cos \theta_0) \right]^{1/2}$$

$$5.121. \quad \vec{v} = 0.544\sqrt{ga} \vec{i}$$

$$5.123. \quad \vec{v} = -34.5\vec{j} \text{ m/seg}$$

$$5.125. \quad t = 6.1 \text{ seg}$$

$$5.127. \quad \vec{s} = 0$$

$$5.129. \quad t = \left[\frac{(4W_s + 3W_a + 2W_p)s}{(W_s + W_a + W_p)g \sin \alpha} \right]^{1/2}$$

$$5.131. \quad a) 15\vec{k} \text{ r.p.m.}; b) 90\%$$

$$5.133. \quad \omega = 2.76\vec{k} \text{ rad/seg}$$

$$5.134. \quad a) \omega = -\frac{12v}{23h} \vec{k}, b) \mu = \frac{253gh - 36v^2}{138gh - 72v^2}, c) v < \left[\frac{23gh}{12} \right]^{1/2}$$

Capítulo 6

6.1. $f = 5 \text{ cps}$

6.3. $f = 7.1 \text{ cps}$

6.5. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, l = 0.247 \text{ m}$

6.7. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{W_1 l_1^2 + W_2 l_2^2}{g(W_1 l_1 + W_2 l_2)}}^{1/2}$

6.9. $f = \frac{a}{2\pi l} \sqrt{\frac{k}{M}}$

6.11. Desp. máx. = 8 cm; $\tau = 0.4 \text{ seg}$

6.13. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{b^2(k_1 + k_2) + mgl}}^{1/2}$

6.15. $t = \pi \text{ seg}$

6.17. $\tau = 1.278 \text{ seg}$

6.19. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k - m\omega^2}}$

6.21. $k_c = \left[\frac{3\rho_c \tau^2}{4\pi^2} - \rho_c^2 \right]^{1/2}$

6.23. $f = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{k_1 + 4k_2}{9M} \right]^{1/2}$

6.25. $f = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2k \sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha \cot \alpha} \right]^{1/2}$

6.27. $x = l\sqrt{m_1} \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2}$

6.29. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{7W}{30kg}}$

6.31. $I_0 = 2.54 \text{ kg-m-seg}^2$

6.33. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 - 1/6 l^2}{g\sqrt{a^2 - l^2/4}}}^{1/2}$

6.35. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{4r}{3g}}$

6.37. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + Mr^2}{kR^2}}^{1/2}$

6.39. $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{hl^2}{12ga^2}}$

6.41. $q = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{3k}{4M} - \left(\frac{3c}{2M} \right)^2 \right]^{1/2}$

6.43. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6.47. $\frac{A_1}{A_2} = 2.44$

6.49. $x = e^{-\frac{c}{2m}t} \left[x_0 + \left(\dot{x} + \frac{c}{2m}x_0 \right)t \right], x_{\text{máx.}} = \frac{\dot{x}_0}{e} \sqrt{\frac{m}{k}}$

6.51. $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}, R = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{F_0}{k}$

6.53. $x = \frac{F}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$

6.55. $x = \frac{c}{k\omega_n} [\omega_n t - \sin \omega_n t]$

6.57. $R = \frac{\delta \left[\left(\frac{2\pi c}{l} \right)^2 + k^2 \right]^{1/2}}{\left[\left(k - m \frac{4\pi^2 v^2}{l^2} \right)^2 + \left(\frac{2\pi cv}{l} \right)^2 \right]^{1/2}}, v = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

6.59. $R = \frac{A}{1 - \frac{\omega^2 l}{g}}$

6.61. 0.117 cm, 0.067 cm, 2.65 m/seg²

6.63. $ak_1 = bk_2$

6.65. $\omega_1 = \sqrt{\frac{T}{ml}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3T}{ml}}$

6.67. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$



INDICE



INDICE

Aceleración: de Coriolis, 72
componentes normales y tangenciales, 60, 63
definición, 35
de la gravedad, 141
de un centro instantáneo, 102, 103
en coordenadas cilíndricas, 53
normal, 72
relativa, 71-72, 91, 92
tangencial, 72
Amortiguamiento: Coulomb, 386
crítico, 387, 388, 395
sólido, 386
turbulento, 386
viscoso, 385
coeficiente, 152, 387
Amplitud de vibración, 380
de oscilaciones forzadas, 393
de vibraciones libres no amortiguadas, 381
Arquímedes, 15
Bernoulli, Daniel, 16
Bernoulli, James, 14, 15
Bernoulli, John, 14, 15
axioma de, 14
Brahe, Tycho, 13
Campo Magnético, fuerza, 155
Cantidad de Movimiento lineal, 140, 185, 242, 243
conservación, 143, 189, 190, 243
definición, 140, 185

Cantidad de Movimiento angular, 250
conservación, 144, 189, 191
Centroide, definición, 433
Centro de masa: definición, 242
movimiento, 241
Centro de percusión, 346
Centro instantáneo de rotación, 93, 94
Cinemática, 30
de un cuerpo rígido, 45, 46
Cinética, 139
Clairaut, 17
Coeficiente: de restitución, 197
de amortiguamiento viscoso, 152, 386, 387
Conservación de la energía, 179, 322
del momento lineal, 144, 189, 190, 191
del momento de la cantidad de movimiento, 252
pérdida durante el choque, 198
Coordenadas: absolutas, 31
cartesianas, 31
cilíndricas, 31
esféricas, 31
normales y tangenciales, 60
Copérnico, 11
Coriolis, 18
Cuerpo rígido, dinámica de, 238, 279
conservación de energía, 322
ecuaciones de Euler, para, 314
ecuaciones de movimiento, 283, 313
eje fijo de rotación, 301
energía cinética, 327

grados de libertad, 279
 impulso y cantidad de movimiento, 280
 momento de la cantidad de movimiento, 280
 movimiento plano, 294
 trabajo y energía, 320, 321
 traslación, 290
 Curva catenaria, 23
 Curva de torsión, 66
 momento de inercia, 286
 productos de inercia, 286
 Choque: directo, 196
 oblicuo, 199
 pérdida de energía, 198
 plástico, 198
 D'Alembert, 14, 17
 principio de, 22
 Da Vinci, Leonardo, 15
 Descartes, 15
 Desplazamiento Angular, 47, 250
 adición, 47
 definición, 33, 34
 virtual, 14
 Einstein, 15, 19
 Eje: de rotación, 45, 46
 fijo de rotación de un cuerpo rígido, 301
 instantáneo de rotación, 92, 93
 Ejes principales, teorema de, 288, 290
 Energía cinética, 169
 de un cuerpo rígido, 324, 325
 de un sistema de partículas, 258, 324
 Energía potencial, 178
 Escalares, 36
 Espacio fase, 27
 Euler, 17
 ángulos de, 315
 ecuaciones para el movimiento del cuerpo rígido, 314
 ecuaciones para el movimiento del giróscopo, 307
 Fluxiones, 14
 Fuerzas: sistema conservativo de, 176
 de inercia, 22
 de los campos eléctrico y magnético, 155
 dependientes de la velocidad, 152
 efectivas, 21, 22
 impresas, 21, 22
 pérdidas, 21, 22

Galileo, 11, 15, 139
 Gauss, 18
 Giróscopo, ecuaciones de movimiento, 305, 306
 momento de la cantidad de movimiento, 305
 Gravedad, ley universal, 13
 Halley, Edmund, 15
 Hamilton, 14, 18, 27
 principio de, 24
 Herz, 19
 Huyghens, 15
 Impulso y cantidad de movimiento: de una partícula, 184
 de un cuerpo rígido, 330
 de un sistema de partículas, 242, 243
 Impulso, definición, 184
 Inercia, 140
 ley de, 139
 Jacobi, 14, 18
 Jerk. definición, 36, 37
 Kepler, 12, 15
 leyes de, 13
 Kilogramo internacional, 141
 Lagrange, 14, 17
 ecuaciones del movimiento de, 25
 formulación de, 23
 función de, 24, 25
 Laplace, 17
 Mach, 19
 Masa, definición, 140, 141
 patrón de, 141
 unidades de, 141
 Maupertius, 16
 Mécanique analytique, 23
 Mohr, círculo de, 303, 304
 Momento angular, 250
 conservación de, 251
 lineal, 140, 185
 estático, 188
 Momentos de inercia, 282
 con respecto a cualquier recta, 338
 cálculo de, 283, 284
 principales, 288
 traslado de ejes, 286
 Momento de la cantidad de movimiento, 250
 conservación de, 251

de un cuerpo rígido, 280, 281
 razón de variación de, 251
 tensor de, 282
 Movimiento: absoluto, 31, 32
 aperiódico, 388
 armónico simple, 382
 curvilíneo, 46
 de un cuerpo rígido, 283, 313
 de un sistema de masa variable, 246
 del giróscopo, 304
 leyes de, 13, 140
 plano, 94
 de un cuerpo rígido, 294
 rectilíneo, 46
 relativo, 69, 71, 91
 Movimiento relativo: aceleración, 71, 72, 91
 cinemática de, 71
 velocidad, 71, 92
 Movimiento, ecuación de, 165
 Newton, 11, 12, 16, 139
 leyes del movimiento, 16, 140
 segunda ley, 140, 141, 142
 sistema de referencia, 140
 Nodos, línea de, 315
 Pascal, 15
 Péndulo doble, 23, 26
 Plano oscilador, 61
 Picard, 12
 Poincaré, 19
 Poisson, 18
 Potencia, 170
 Principia, 13, 14
 Productos de inercia, 282
 con respecto a dos ejes cualesquiera mutuamente perpendiculares, 339
 cálculo, 283, 284
 traslaciones entre ejes, 286
 Pulso, 36, 37
 Radio: de curvatura, 63, 64, 65
 de giro, 284
 Rapidez: definición, 35, 36
 Restitución, coeficiente de, 197
 Segunda aceleración, 36, 37
 Sistema de partículas, 237, 238
 conservación de la cantidad de movimiento lineal, 243
 impulso y cantidad de movimiento lineal, 243

Sistema de partículas: energía cinética, 258, 324, 325
 cantidad de movimiento lineal de un, 242, 243
 centro de masa de un, 241, 242
 momento de la cantidad de movimiento de un, 256, 257
 movimiento del centro de masa de un, 241, 242
 Trabajo: definición, 169
 función de, 176
 virtual, 14
 Trabajo y energía: ecuación del, 169
 para sistemas vibratorios, 383
 para un cuerpo rígido, 320
 Traslación: definición, 46
 rectilínea y curvilínea, 46
 Variaciones, cálculo de, 23, 24
 Vector unitario, 32, 33
 derivada respecto al tiempo del, 50
 Vector unitario binormal, 62
 componentes del, 32
 magnitud del, 34, 35
 normal principal, 62
 factor medio, 281
 de posición, 33
 representación del, 32
 Velocidad: angular, 49, 50
 definición, 34
 en coordenadas cilíndricas, 53
 en coordenadas esféricas, 53, 55
 límite, 153, 154
 relativa, 72, 91, 92
 Vibración, 377
 aislamiento de, 399
 amortiguada, 372
 amortiguador de, 410
 amplitud de, 380, 381
 frecuencia natural de, 381
 instrumento de medida de, 402
 libre, 377
 período de, 381
 solución de trabajo y energía de, 383
 transmisibilidad de, 399, 400
 Vibraciones: forzadas, 377, 391
 amplitud de, 393
 ángulo de fase de, 393, 395, 397
 de dos grados de libertad, 408
 ecuación de movimiento de, 392
 factor de amplificación de, 396
 no amortiguadas, 388
 resonancia de, 399
 solución general de, 392

- solución particular de, 392
 solución transitoria de, 392
 Vibración: libre amortiguada, solución completa, 387
 amortiguamiento crítico de la, 388
 amortiguamiento ligero de, 388
 decremento logarítmico de la, 390, 391
 ecuación diferencial de la, 386, 387
 frecuencia de, 390
 pérdida de energía por ciclo de, 391, 392
 período de, 390
 sistema con un solo grado de libertad de, 385
 sobre amortiguada, 388
 Vibración libre, no amortiguada, amplitud de, 381
 de torsión, 382
 ecuación diferencial de, 379
 frecuencia de, 381
 período de, 381
 sistema con un solo grado de libertad de, 408
 solución completa de, 379, 380
 Vibración no amortiguada: de n grados de libertad, 408
 frecuencias principales de, 406
 sistema de dos grados de libertad de, 404
 Viscosidad, definición, 154
 Yugo escocés, 43

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DIA 30
 DE ABRIL DE 1971, EN LOS TALLERES DE OFFSET
 REBOSAN, S. A. GABRIEL MANCERA 261, MEXICO
 12, D. F.

LA EDICION CONSTA DE 2,000 EJEMPLARES MAS
 SOBRANTES PARA REPOSICION.

KE. 85



