Amartya K. Sen

Elección colectiva y bienestar social

Alianza Universidad

UNIVERSIDAD ANDINA SIMÓN BOLÍVAR
FUNDADA EN 1830
QUITO

Sistema Integrado de Bibliotecas
Biblioteca digital UCE
Calle Jerónimo Leyton y Gato Sobral – Cdla. Universitaria
+593 2230757 ext: 808 biblioteca.general@uce.edu.ec

BASE LEGAL PARA DIGITALIZACIÓN DE LIBROS CON DERECHOS DE AUTOR

El Sistema Integrado de Bibliotecas de la Universidad Central del Ecuador, digitalizará su acervo bibliográfico siempre y cuando sea para fines educativos y de investigación. No se permite la reproducción y distribución para la comercialización directa e indirecta del mismo.

La digitalización del material bibliográfico se lo realiza de acuerdo al Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación Art. 212 numeral 9, Literal ii "(…) Una biblioteca o archivo podrá, además, realizar los siguientes actos (…) La reproducción electrónica y comunicación pública de obras de su colección para ser consultadas gratuita y simultáneamente hasta por un número razonable de usuarios, sólo en terminales de redes de la respectiva institución o para usuarios de esa institución bajo su control, en condiciones que garanticen que no se puedan hacer copias electrónicas de esas reproducciones" y literal vii "La reproducción, adaptación, traducción, transformación, arreglo, distribución y comunicación de una obra protegida por derechos de autor o una prestación protegida por derechos conexos, en uno o más formatos accesibles para el uso exclusivo de personas con discapacidad".

Este material se considera un producto intelectual a favor de su autor; por tanto, la titularidad de sus derechos se encuentra protegida por el Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación. La violación a dichos derechos constituye un delito que será responsabilidad del usuario.

Este libro está disponible físicamente en:

BIBLIOTECA	Sistema integrado de bibliotecas			**PISO**	
				ESTANTE	
				BANDEJA	
CONVENIO INTERINSTITUCIONAL		**UNIVERSIDAD**			

210

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA OMNIUM
FUNDADA EN 1620
QUITO

ESTE LIBRO ES PROPIEDAD DE LA BIBLIOTECA GENERAL DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL, SU VENTA ES PENADA POR LA LEY.

E06-303

cod= 51959

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM
SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Elección colectiva y bienestar social

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA OMNIUM
8413-D
BIBLIOTECA GENERAL
QUITO-ECUADOR
6778 AÑO 1976
PRECIO $210,- DONACION

Alianza Universidad

3023
S474
Nº Inv.: 4031962
30220707O

Amartya K. Sen

Elección colectiva y bienestar social

Versión española de
Francisco Elías Castillo

Alianza
Editorial

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Título original:

Collective Choice and Social Welfare

© 1970 by Holden-Day, Inc., San Francisco, California
© Ed. cast.: Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1976
Calle Milán, 38; ☎ 200 00 45
ISBN: 84-206-2154-4
Depósito legal: M. 9.368-1976
Impreso en Closas-Orcoyen, S. L. Martínez Paje, 5. Madrid-29
Printed in Spain

INDICE

Prefacio 11

Capítulo 1
Introducción 15

Capítulo 1*
Relaciones de preferencia 22

Capítulo 2
Unanimidad 37

Capítulo 2*
Reglas de elección colectiva y comparaciones de Pareto 44

Capítulo 3
Racionalidad colectiva 51

Capítulo 3*
Funciones de bienestar social 59

Capítulo 4
Elección frente a ordenaciones 65

Capítulo 4*
Funciones de decisión social 71

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1826
QUITO

Capítulo 5
Valores y elección 77

Capítulo 5*
Anonimidad, neutralidad y responsividad 93

Capítulo 6
Conflictos y dilemas 101

Capítulo 6*
La paradoja liberal 111

Capítulo 7
Agregación interpersonal y comparabilidad 115

Capítulo 7*
Cuasi-ordenaciones de agregación 132

Capítulo 8
Cardinalidad con o sin comparabilidad 147

Capítulo 8*
Regateos y funciones de bienestar social 156

Capítulo 9
Equidad y justicia 163

Capítulo 9*
Impersonalidad y cuasi-ordenaciones colectivas 186

Capítulo 10
Elección de mayoría y sistemas afines 197

Capítulo 10*
Preferencias restringidas y elección racional 211

Capítulo 11
Teoría y práctica 227

Bibliografía 243

Indices

Indice de autores 259
Indice de materias 263

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST QUAM INVENIRI SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

A Nabaneeta

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM
SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

PREFACIO

La teoría de la elección colectiva pertenece a varias disciplinas. La economía es una de ellas pero no la única. Aun cuando este libro forma parte de una serie de «textos de economía matemática»*, no se ha pretendido confinar el tratamiento a problemas económicos exclusivamente. Realmente la metodología de este libro está basada en la creencia de que el problema no puede discutirse satisfactoriamente dentro de los confines de la economía. Si bien la elección colectiva es un aspecto crucial de la economía (principalmente de la economía del bienestar, teoría de la planificación y economía general), el tema se relaciona estrechamente con la ciencia política, en particular con la teoría del Estado y la teoría de los procedimientos de decisión, y tiene también importantes aspectos filosóficos relacionados con la ética y especialmente con la teoría de la justicia.

El libro está dividido en capítulos con asterisco, que contienen análisis formales, y otros sin asterisco que son muy simples. Estos capítulos se alternan. El lector no técnico puede hacerse una idea intuitiva de los argumentos principales leyendo los capítulos sin

* La serie «Mathematical Economics Texts», publicada por Holden-Day, Inc. y Oliver & Boyd, Ltd. (N. del T.)

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR BIBLIOTECA

asterisco. Sin embargo, para una exposición exacta de los resultados y demostraciones han de leerse los capítulos con asterisco.

La división del libro en capítulos formalistas y no formalistas es un experimento estilístico. Muchos problemas de elección colectiva requieren un tratamiento riguroso y formal con fines de exactitud, y en este sentido los argumentos no formalistas pueden resultar traidores; pero una vez obtenidos los resultados, su sentido, significación y relevancia pueden ser discutidos de una manera no formal. De hecho, una discusión puramente formal del significado sería innecesariamente limitada. El libro pretende tener en cuenta a dos grupos distintos de lectores: a los que están especialmente interesados en la trascendencia de los resultados y menos en su exposición formal y derivación técnica, y a los que también están interesados en esto último. Así pues, la división del libro en capítulos con y sin asterisco tiene su explicación, aparte de reflejar la incurable esquizofrenia del autor.

Las matemáticas empleadas en el libro implican principalmente la lógica de relaciones. Los resultados principales de lógica matemática utilizados en la demostración de teoremas sobre elección colectiva son expuestos, discutidos y demostrados en el Capítulo 1*. En este sentido el libro es completo.

El campo de la elección colectiva es vasto. No ha sido posible abarcar todas las ramas y menos aún discutir todas ellas con igual profundidad. Aunque creo que el libro cubre adecuadamente las ramas principales de la literatura, debo confesar que el criterio sobre su importancia relativa refleja las propias preferencias del autor.

Por la ayuda en el mecanografiado y duplicación de dos versiones de este manuscrito estoy agradecido a la Delhi School of Economics y al Harvard Institute of Economic Research. La copia a máquina de las dos versiones fue realizada muy eficientemente por Mr. C. G. Devarajan y Mrs. Helen Bigelow, respectivamente.

Debo expresar mi agradecimiento a las personas que han tenido alguna influencia en este libro. Mi interés en el problema surgió a raíz de una serie de estimulantes discusiones con Maurice Dobb, siendo yo estudiante en el Trinity College, Cambridge, hace aproximadamente una década y media, y desde entonces he mantenido contacto con él de una forma intermitente. Mi deuda con Kenneth Arrow es inmensa, no sólo porque su trabajo de pionero ha abierto varios caminos de investigación en el campo de la elección colectiva,

sino en un nivel más personal, porque ha revisado todo el manuscrito y me ha sugerido importantes mejoras. John Rawls leyó la primera versión del manuscrito (que fue preparada durante 1966-67) y me señaló el camino correcto en varias cuestiones, especialmente en lo que hace al aspecto filosófico del problema. Durante 1967-68, Tapas Majumdar, James Mirrlees y Prasanta Pattanaik leyeron el primer borrador del manuscrito y sugirieron numerosas mejoras de fondo y estilo, y la versión final del libro refleja el impacto de sus comentarios. Me he beneficiado también del seminario conjunto sobre este tema que realizamos Arrow, Rawls y yo en la Universidad Harvard durante 1968-69, en particular de la participación de Franklin Fisher, A. Gibbard, Stephen Marglin, Howard Raiffa, Jerome Rothenberg, Ross Starr, David Starret y Richard Zechhauser. He tenido también discusiones útiles o comentarios provechosos de Dipak Banerji, Robert Cassen, Partha Dasgupta, Peter Diamond, Jan Graaf, Frank Hahn, Bengt Hansson, John Harsanyi, Hans Herzberger, Ken-Ichi Inada, Tjalling Koopmans, Abba Lerner, Paul Samuelson, Thomas Schelling y Subramanian Swamy. Pero estoy convencido de que a ninguno de estos caballeros se le puede hacer responsable de los errores y deficiencias de este trabajo.

A. K. S.

Delhi School of Economics
1 de agosto, 1969

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA EQUINOCCIAL
FUNDADA EN 1620
QUITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SCIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo 1
INTRODUCCION

1.1. Observaciones preliminares

Hay algo en común entre entonar canciones románticas sobre un país natal abstracto y realizar ejercicios de optimización para una sociedad con una función objetiva arbitraria. Aunque ambas actividades valen la pena y ciertamente son llevadas a cabo frecuentemente, me temo que este libro no se ocupe de ninguna de ellas. El tema de nuestro estudio es la relación entre los objetivos de la política social y las preferencias y aspiraciones de los miembros de una sociedad.

Es, desde luego, posible adoptar el punto de vista de que una sociedad es una entidad independiente de los individuos que la componen y que la preferencia social no tiene por qué basarse en la preferencia de los miembros de la sociedad. O bien que podría haber una dependencia, pero que uno puede hacer abstracción de ella y «suponer» simplemente que la sociedad tiene una personalidad y preferencia propias.[1] Quien quiera que encuentre satisfacción en este supuesto, bienvenido sea, pero este libro va a aburrirle. El

[1] Aún cuando esta postura es la que adoptan algunos autores socialistas, fue rechazada enérgicamente por Marx: «Lo que debe evitarse ante todo es la reinstauración de la 'Sociedad' como una abstracción *frente* al individuo.» (Marx (1844), p. 104.)

presente estudio se ocupa precisamente de investigar la manera en que los juicios sobre elección social y de política general dependen de las preferencias de los miembros de la sociedad.

Los juicios sobre elección colectiva, aunque están relacionados con las necesidades y deseos de los miembros de la comunidad, pueden, sin embargo, adoptar una forma muy distinta. El economista que, con cabeza serena, afirma que gravar un impuesto a un artículo α no será óptimo, proporciona un juicio sobre elección colectiva de un cierto tipo. Las masas iracundas que el 14 de julio de 1789 respondieron a De Launay, gobernador de la Bastilla, gritando, «¡Abajo el segundo puente levadizo!»[2] estaba implicada en una elección colectiva de un tipo algo distinto. El tema es lo bastante amplio como para abarcar a ambas, pero el enfoque debe ciertamente diferir bastante. Esta diversidad es un aspecto esencial del tema de la elección colectiva, y evidentemente una gran parte de la riqueza del campo está relacionada con esto.

Uno de nuestros principales objetivos es el estudio de las distintas relaciones entre las preferencias individuales y la elección social. Las variaciones son aquí enormes. Por ejemplo, alguien podría adoptar el punto de vista, implícita o explícitamente, de que solamente sus aspiraciones deberían tenerse en cuenta en la elección social. O bien solamente los intereses homogéneos de una clase particular o de un grupo. O también cabría argumentar que la preferencia de cada uno «debería contar por igual», aunque esta aseveración puede interpretarse, como veremos en breve, de formas muy diferentes. En correspondencia con cada interpretación obtenemos un sistema distinto de hacer la elección colectiva. Este libro se ocupa en gran parte de estos sistemas —su naturaleza, sus operaciones y sus implicaciones.

1.2. Ingredientes de la elección colectiva

Afirmar que las elecciones sociales deberían depender de las preferencias individuales deja abierta la cuestión de cuál es la forma en que las preferencias individuales serían relevantes. En su estudio

[2] G. Lefebvre, *The Coming of the French Revolution*, traducido por R. R. Palmer, Vintage Books, Nueva York, 1957, p. 101.

clásico, Arrow (1951) considera las ordenaciones de individuos sobre el conjunto de estados sociales alternativos como la componente básica de la elección colectiva. Su interés se centra en las reglas de elección colectiva que convierten la ordenación de preferencia de la sociedad en una función de las ordenaciones de preferencia individual, de modo que si se especifica este último conjunto, el primero debe quedar completamente determinado.

Una ordenación es una jerarquización de todas las alternativas. Las propiedades formales de una ordenación se discuten en el Capítulo 1*[3], pero podríamos decir aquí brevemente que la relación de orden debe satisfacer tres características para ser considerada como una ordenación. Considérese la relación «al menos tan buena como». Primera, debe ser «transitiva», es decir, si x es al menos tan buena como y e y al menos tan buena como z, entonces x debería ser al menos tan buena como z. Esta condición de racionalidad se analiza con algún detalle en el Capítulo 1*. Segunda, la relación debe ser «reflexiva», es decir, cada alternativa x debe estimarse al menos tan buena como ella misma. Este requisito es tan simple que pienso que es mejor considerarlo como una condición de sentido común y no de racionalidad. Tercera, la relación debe ser «completa»[4], es decir, para cualquier par de alternativas x e y, o x es al menos tan buena como y o y es al menos tan buena como x (o posiblemente ambas). Un individuo con una relación de preferencia que sea completa conoce su decisión a la hora de elegir entre dos alternativas cualesquiera.

Es importante distinguir entre indiferencia y falta de completitud. El lenguaje cotidiano es a menudo lo bastante libre como para no distinguir entre ambas. Si yo «no sé» cuál escoger, esto podría significar posiblemente que soy indiferente, aunque una significación más natural es que no acabo de decidirme. La diferencia lógica entre ambas es bastante sencilla. Consideremos estos dos enunciados:

(1) x es al menos tan buena como y
(2) y es al menos tan buena como x

[3] El lector puede también consultar Tarski (1965); Arrow (1951), Capítulo 2; o Debreu (1959), Capítulo 1.

[4] Los lógicos parecen preferir la expresión «conexa» a «completa», pero entonces hay el peligro de una confusión con la propiedad topológica de «conexión».

En el caso de «indiferencia» se afirman las dos, y en el caso de falta de «completitud», ninguna.

Se presume que cada individuo tiene una ordenación de los estados sociales alternativos, y se supone que la sociedad tiene una ordenación basada en el conjunto de ordenaciones individuales, tal y como plantea Arrow el problema. Nosotros nos desviaremos de este sistema clásico en algunos respectos. Primero, para una elección consistente no se precisa que la sociedad tenga una ordenación. Por ejemplo, si x se prefiere a y, y es preferida a z y z es indiferente a x, entonces hay una alternativa óptima en cada situación de elección, pero queda infringida la transitividad. Si la elección es sobre el par (x, y), puede elegirse x; si es sobre (y, z), y es preferida; si es sobre (z, x) puede elegirse cualquiera; y si se trata de una elección en el conjunto de las tres alternativas (x, y, z), entonces se selecciona x ya que es la única alternativa que es al menos tan buena como las otras dos. ¿Es ésta una base de elección satisfactoria? Es difícil decidir, pues, aunque la base es suficiente, infringe una propiedad de racionalidad. La propiedad específica que infringe (propiedad β) se estudia en el Capítulo 1*. Esta cuestión y sus implicaciones las discutiremos con detalle en el Capítulo 4; por ahora obsérvese simplemente que el problema puede ser considerado sin requerir que la preferencia social sea totalmente transitiva. De hecho abordaremos el problema en esta forma general, introduciendo después la transitividad como una suposición especial, por ejemplo, en el Capítulo 3.

Segundo, para algunos problemas de elección no precisamos siquiera el requisito de completitud. Supóngase que x es preferida a y y también a z, pero que y y z no pueden compararse; la ordenación de preferencia será entonces incompleta, pero no obstante podemos elegir una mejor alternativa, a saber, x, dada la elección entre x, y y z. Sin embargo, si la elección es entre y y z, entramos en apuros. El que podamos prescindir o no de la completitud depende de la naturaleza de la elección. Obviamente la completitud es una característica deseable de la preferencia social, pero no haremos de ella un fetiche. Una relación de preferencia que sea reflexiva y transitiva pero no necesariamente completa se llama cuasi-ordenación, y sus propiedades formales se estudian en el Capítulo 1*. En los Capítulos 2, 8 y 9, así como en los correspondientes capítulos con asterisco, figuran ejercicios con preferencias sociales incompletas.

Tercero, es discutible que la elección social deba depender no

meramente de las ordenaciones individuales, sino de sus intensidades de preferencia. Cabe considerar aquí funciones cardinales de bienestar para los individuos. Como ejemplo puede decirse que si la persona 1 desea muy intensamente que la sociedad escoja x antes que y, mientras que la persona 2 desea muy marginalmente que se elija y y no x, entonces en este mundo bipersonal hay buenas razones para escoger x. Este argumento es algo engañoso, ya que en este ejercicio no estamos simplemente especificando intensidades de preferencia de los individuos, sino que estamos haciendo comparaciones interpersonales entre éstos. Puede que importe y puede que no, pero el hecho es que la naturaleza persuasiva del argumento está basada en el rasgo adicional de comparaciones interpersonales y no en las medidas puramente personales de intensidad de preferencia. El uso de la cardinalidad con comparaciones interpersonales será discutido en el Capítulo 7, y sin ellas en el Capítulo 8, así como en los correspondientes capítulos con asterisco.

Cuarto, la cuestión de las comparaciones interpersonales es interesante por sí misma. Puede incluso usarse sin cardinalidad (Capítulos 7, 7*, 9 y 9*), y puede aplicarse en diversas dosis (Capítulos 7 y 7*). Si la elección colectiva depende no sólo de las ordenaciones individuales sino también de las comparaciones interpersonales de niveles de bienestar o de ganancias y pérdidas marginales de bienestar de los individuos, se abre un nuevo conjunto de posibilidades.

Generalmente se piensa que el uso de comparaciones interpersonales es arbitrario, y muchos consideran estas comparaciones «faltas de sentido» al no estar relacionadas con actos de elección. Una manera de dar sentido a tales comparaciones es considerar elecciones entre ser una persona A en un estado social x o una persona B en un estado social y. Por ejemplo, podríamos preguntar: «¿Preferiría usted ser el señor A, un obrero en paro, en el estado x, o el señor B, un ingeniero bien pagado con empleo en el estado y?». Aunque la respuesta a la pregunta implica comparaciones interpersonales, yo arriesgaría el punto de vista de que no está completamente fuera de nuestra capacidad intelectual el ser capaces de pensar sistemáticamente acerca de esta elección. Es posible introducir preferencias que impliquen tales alternativas en el mecanismo de elección colectiva. Este enfoque se adoptará en los Capítulos 9 y 9*.

Consideremos, por consiguiente, marcos alternativos de elección

colectiva con puntos de vista también alternativos sobre los *ingredientes* necesarios de tal elección, yendo desde ordenaciones puramente individuales, como en el sistema de Arrow, hasta funciones de bienestar individual con o sin cardinalidad y con o sin comparabilidad interpersonal de varios tipos.

1.3. La naturaleza de las preferencias individuales

Cabría argumentar que una teoría de la elección colectiva debería ocuparse meramente de la derivación de la preferencia social partiendo de un conjunto de preferencias individuales, sin necesidad de adentrarse en la formación de las propias preferencias individuales. Este punto de vista tiene alicientes, entre ellos el de limitar el estudio. Sin embargo, es una postura algo restringida, y la génesis de las preferencias individuales puede ciertamente ser relevante para postular reglas de elección colectiva. Encontraremos que la efectividad de las distintas reglas de elección colectiva depende mucho de la configuración precisa de las ordenaciones de preferencia individual, y estas configuraciones reflejarán, en general, las fuerzas que determinan las preferencias individuales en una sociedad. Del mismo modo que la elección social puede basarse en las preferencias individuales, estas últimas a su vez dependerán de la naturaleza de la sociedad. Así pues, la idoneidad de las reglas alternativas de elección colectiva dependerá en parte de la estructura precisa de la sociedad.

El contenido de las preferencias individuales es también un capítulo importante. En algunos estudios de elección social se hace distinción entre las preferencias individuales tal como son realmente y lo que serían si la gente tratase de ponerse en el lugar de otros. La distinción es importante y será examinada con algún detalle (véanse Capítulos 9 y 9*), pero sería un error suponer que las preferencias tal como son realmente no implican ningún interés por los demás. La sociedad en la que vive una persona, la clase a que pertenece y la relación que tiene con la estructura social y económica de la comunidad son relevantes para la elección de una persona no sólo porque afectan a la naturaleza de sus intereses personales, sino también porque influyen sobre su sistema de valores, incluyendo su noción de la «debida» preocupación por otros miembros de la sociedad[5]. El

[5] Este es, desde luego, un aspecto importante para los estudios históricos; véase, por ejemplo, Hobsbawm (1955).

hombre económico aislado que persigue su propio interés con exclusión de todas las demás consideraciones es un supuesto que permea una gran parte de la economía tradicional[6], pero no es un modelo particularmente útil para comprender los problemas de la elección social. En este estudio no se hará ningún intento de eliminar interdependencias interpersonales.

Un ejercicio preliminar provechoso es el estudio de las propiedades lógicas de las relaciones de preferencia, y esto es lo que se expone en el Capítulo 1* con vistas a su uso subsiguiente. Muchos de los resultados son bien conocidos, aunque hay bastantes que no lo son tanto, principalmente porque el desarrollo del estudio de las relaciones de preferencia ha venido promovido en gran parte por la teoría del consumo y el análisis de la demanda, que no siempre son útiles para los problemas de elección colectiva.

UNIVERSIDAD CENTRAL
CONTROL DE BIENES
4031962

[6] Formalmente, esto toma la forma de excluir externalidades. Véase también el contraste de Arrow entre «gustos» y «valores» (Arrow (1951), p. 18).

Capítulo 1*
RELACIONES DE PREFERENCIA

1*1. Relaciones binarias

Supongamos que $x\,R\,y$ representa una relación binaria entre x e y, por ejemplo: «x es al menos tan bueno como y», o «x es mayor que y». Si esta relación no se cumple, por ejemplo, si «x no es al menos tan bueno como y» o si «x no es mayor que y», escribimos $\sim(x\,R\,y)$.

Un procedimiento de expresar tal relación binaria sobre un conjunto S es especificar un subconjunto R del cuadrado de S, designado por $S \times S$, definido como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y), tales que x e y pertenezcan ambos a S. En lugar de decir que se cumple $x\,R\,y$, podemos decir entonces que (x, y) pertenece a R. Por consiguiente, el estudio de las relaciones binarias de S no difiere esencialmente del estudio de los subconjuntos de $S \times S$. Aunque no estudiaremos relaciones de preferencia en esta forma, el lector queda en libertad de hacer la interpretación que le parezca más conveniente.

La notación dada más abajo se usará en lo que sigue. Para una discusión de los conceptos fundamentales el lector es remitido a cualquier introducción clásica a la lógica matemática, por ejemplo,

Carnap (1958), Church (1956), Hilbert y Ackermann (1960), Quine (1951), Suppes (1958) o Tarski (1965).

$\exists$ el cuantificador existencial («para algún»)
$\forall$ el cuantificador universal («para todo»)
$\rightarrow$ condicional («si, entonces»)
$\leftrightarrow$ equivalencia («si y solamente si»)
$\sim$ negación («no»)
v alternación (el «o» inclusivo)
& conjunción («y»)
$=$ identidad («lo mismo que»)
$\in$ elemento de («pertenece a»)
$\subset$ subconjunto de («está contenido en»)
$\cap$ intersección de («elementos pertenecientes a ambos conjuntos»)
$\cup$ unión de («elementos pertenecientes a uno u otro conjunto»)

Son muchas las propiedades que una relación binaria puede o no satisfacer. Las siguientes son importantes en distintos contextos:

(1) *Reflexividad*: $\forall x \in S: x R x$.
(2) *Completitud*: $\forall x, y \in S: (x \neq y) \rightarrow (x R y \vee y R x)$.
(3) *Transitividad*: $\forall x, y, z \in S: (x R y \ \& \ y R z) \rightarrow x R z$.
(4) *Antisimetría*: $\forall x, y \in S: (x R y \ \& \ y R x) \rightarrow x = y$.
(5) *Asimetría*: $\forall x, y \in S: x R y \rightarrow \sim(y R x)$.
(6) *Simetría*: $\forall x, y \in S: x R y \rightarrow y R x$.

Consideremos, como ilustración, la relación «al menos tan alto como» aplicada al conjunto de todos los picos de montaña de altura conocida. La relación es reflexiva, ya que un pico es tan alto como él mismo. Es completa, ya que si el pico *A* no es al menos tan alto como el pico *B*, entonces el pico *B* será al menos tan alto como (de hecho más alto que) el pico *A*. Es transitiva, puesto que el pico *A*, siendo al menos tan alto como el pico *B*, que es al menos tan alto como el pico *C*, tiene que ser al menos tan alto como el pico *C*[1]. No es antisimétrica puesto que los picos *A* y *B* pueden tener la misma altura sin

[1] La relación «ser hermano de», aplicada a los hombres, ha sido considerada a veces como transitiva, pero no lo es. La persona *A* puede ser hermano de *B* y *B* hermano de *A*, y por transitividad *A* sería hermano de sí mismo —un lujo que ¡ay!, debe negársele a *A*.

ser el mismo pico. Tampoco es asimétrica puesto que si A es al menos tan alto como B, no se excluye la posibilidad de que B sea tan alto como A[2]. Tampoco es simétrica, puesto que el ser A al menos tan alto como B no impone en absoluto que B deba ser al menos tan alto como A.

Puede comprobarse fácilmente que la relación «más alto que» satisfaría la transitividad, antisimetría y asimetría pero no la reflexividad, completitud ni simetría.

A las relaciones binarias de ciertos tipos standard (es decir, con propiedades dadas) se les ha asignado nombres específicos por conveniencia. Desgraciadamente la terminología varía según los autores y hay algunas contradicciones importantes que hay que tener en cuenta. Por ejemplo, para Arrow (1951) una «ordenación» es reflexiva, transitiva y completa (con independencia de la antisimetría), mientras que para Debreu (1959) una «ordenación» es reflexiva, transitiva y antisimétrica (con independencia de la completitud).

Más abajo especificamos la terminología usada en este libro y también indicamos algunos otros nombres empleados en la literatura[3].

Propiedades satisfechas	Nombre utilizado en el presente libro	Otros nombres usados en la literatura
1. reflexividad y transitividad	cuasi-ordenación	pre-ordenación
2. reflexividad, transitividad y completitud	ordenación	pre-ordenación completa; cuasi-ordenación completa; ordenación débil
3. reflexividad, transitividad y antisimetría	ordenación parcial	ordenación
4. reflexividad, transitividad, completitud y antisimetría.	cadena	ordenación lineal; ordenación completa; simplemente ordenación
5. transitividad y asimetría	ordenación parcial estricta	
6. transitividad, asimetría y completitud	ordenación fuerte	ordenación; ordenación estricta; ordenación completa estricta

[2] Obsérvese que la asimetría implica antisimetría, pero no viceversa. Si $x\,R\,y \rightarrow \rightarrow \sim(y\,R\,x)$, entonces la antecedencia ($x\,R\,y$ & $y\,R\,x$) es siempre falsa, y de aquí que la implicación sea lógicamente correcta en el caso de antisimetría.

[3] Véase, por ejemplo, Birkhoff (1940), Bourbaki (1939), Tarski (1965), y Church (1956), y en la literatura económica Arrow (1951) y Debreu (1959).

1*2. Elementos maximales y conjuntos de elección

En correspondencia con la relación binaria de «preferencia débil» R («al menos tan buena como») podemos definir relaciones de «preferencia estricta» P y de «indiferencia» I.

DEFINICIÓN 1*1. $x P y \leftrightarrow [x R y \ \& \ \sim(y R x)]$

DEFINICIÓN 1*2. $x I y \leftrightarrow [x R y \ \& \ y R x]$

A los elementos de un conjunto que no son dominados por ningún otro del conjunto puede llamárseles elementos maximales del conjunto con respecto a la relación binaria en cuestión.

DEFINICIÓN 1*3. *Un elemento x en S es un elemento maximal de S con respecto a una relación binaria R si y solamente si*

$$\sim[\exists y : (y \in S \ \& \ y P x)]$$

El conjunto de elementos maximales en S se llama su conjunto maximal y se designa $M(S, R)$.

Un elemento x puede llamarse un «mejor» elemento («mayor» en el contexto de relaciones de tamaño) de S si es al menos tan bueno (grande) como cada uno de los demás elementos de S con respecto a la relación de preferencia relevante R.

DEFINICIÓN 1*4. *Un elemento x en S es un mejor elemento de S con respecto a una relación binaria R si y solamente si*

$$\forall y : (y \in S \rightarrow x R y)$$

El conjunto de los mejores elementos en S se denomina su conjunto de elección y se designa $C(S, R)$.

Vale la pena hacer dos comentarios con el fin de aclarar ideas. Primero, un mejor elemento es también un elemento maximal pero no viceversa. Si $x R y$ para todo y en S, entonces evidentemente no hay y en S tal que $y R x$. Por otra parte, si ni $x R y$ ni tampoco $y R x$, entonces x e y son ambos elementos maximales del conjunto (x, y), pero ninguno es un mejor elemento. Así pues, $C(S, R) \subset M(S, R)$.

Segundo, $C(S, R)$ o $M(S, R)$ pueden ser vacíos. Por ejemplo, si $x P y$, $y P z$ y $z P x$, no hay ni un mejor elemento, ni ningún elemento no mejorado por algún otro. Si se cumple la transitividad, $M(S, R)$ podría ser vacío si el conjunto es infinito, por ejemplo, $x_2 P x_1$, $x_3 P x_2$, ..., $x_n P x_{n-1}$, ... Por otra parte, incluso con transitividad y finitud, $C(S, R)$ puede ser vacío, por ejemplo, $\sim(x R y)$ & $\sim(y R x)$, lo que hace a x e y miembros del conjunto maximal de (x, y) pero a ninguno un miembro del conjunto de elección de (x, y).

1*3. Un conjunto de resultados para cuasi-ordenaciones

Ahora derivaremos ciertos resultados elementales para las cuasi-ordenaciones. Estos se aplicarán también, naturalmente, a las ordenaciones, cadenas y ordenaciones parciales, puesto que son casos especiales de cuasi-ordenaciones.

LEMA 1*a. *Si R es una cuasi-ordenación, entonces para todo x, y, $z \in S$*

(1) $x I y$ & $y I z \rightarrow x I z$
(2) $x P y$ & $y I z \rightarrow x P z$
(3) $x I y$ & $y P z \rightarrow x P z$
(4) $x P y$ & $y P z \rightarrow x P z$

Demostración.

(1) $x I y$ & $y I z \rightarrow (x R y$ & $y R z)$ & $(y R x$ & $z R y)$
$\rightarrow x R z$ & $z R x$
$\rightarrow x I z$

(2) $x P y$ & $y I z \rightarrow x R y$ & $y R z$
$\rightarrow x R z$

Así pues, (2) puede ser falsa solamente si $z R x$, es decir, sólo si $x I z$. Supongamos que éste sea el caso; entonces $x I y$, puesto que $x I z$ & $y I z \rightarrow x I y$, por (1). Pero $x I y$ es falsa.

(3) La demostración es exactamente similar a la de (2).

(4) Puede verse que $x P y$ & $y P z \rightarrow x R y$ & $y R z \rightarrow x R z$. Así pues, (4) puede ser falsa solamente si $z R x$, es decir, sólo si $x I z$. Sin embargo, si $x I z$, entonces $z P y$, dada (3) y $x P y$. Pero $z P y$ es falsa.

Nos referiremos a las cuatro propiedades (1)–(4) como *II*, *PI*, *IP* y *PP*, respectivamente.

Los dos resultados siguientes son elementales:

LEMA 1*b. *Cualquier conjunto finito cuasi-ordenado tiene al menos un elemento maximal*[4].

Demostración. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, los elementos. Hagamos $a_1 = x_1$. Ahora seguimos la regla recurrente de que $a_{j+1} = x_{j+1}$ si $x_{j+1} P a_j$, y $a_{j+1} = a_j$, en caso contrario. Por construcción, a_n debe ser maximal.

LEMA 1*c. *Si R es reflexiva, entonces* $x P y \leftrightarrow [x] = C([x, y], R)$[5].

Demostración.

$$x P y \rightarrow x R y \ \& \ \sim(y R x)$$
$$\rightarrow [x] = C([x, y], R)$$

puesto que $x R x$ por reflexividad.

$$[x] = C([x, y], R) \rightarrow x R y \ \& \ \sim(y R x)$$

puesto que $y R y$ por reflexividad,

$$\rightarrow x P y$$

Así pues, x es el único elemento del conjunto de elección de $[x, y]$ si y solamente si x es preferido a y.

La relación entre conjuntos maximales y de elección es importante para algunos estudios. Hemos indicado ya que $C(S, R) \subset M(S, R)$. Podemos además señalar el resultado siguiente:

LEMA 1*d. *Si para una cuasi-ordenación R, C(S, R) es no vacío, entonces* $C(S, R) = M(S, R)$.

Demostración. Supongamos $x \in C(S, R)$. Entonces

$$z \in M(S, R) \rightarrow \sim(x P z)$$
$$\rightarrow x I z$$

[4] Véase el Teorema 1.4 en Birkhoff (1940), p. 8. Birkhoff habla de «sistemas parcialmente ordenados», pero la demostración no emplea la propiedad de antisimetría.

[5] Véase Lema 2 en Arrow (1951), p. 16.

puesto que $x\,R\,z$,

$$\rightarrow \forall y : [y \in S \rightarrow z\,R\,y]$$

por el Lema 1*a y el hecho de que $x \in C(S,\ R)$,

$$\rightarrow z \in C(S,\ R)$$

De aquí que $M(S, R) \subset C(S,\ R)$. Del hecho de que $C(S, R) \subset M(S, R)$ se sigue que $C(S,\ R) = M(S,\ R)$.

El resultado siguiente es también útil:

LEMA 1*e. *Para cualquier cuasi-ordenación R sobre un conjunto finito S,*

$$\forall x,\ y : [x,\ y \in M(S,\ R) \rightarrow x\,I\,y] \leftrightarrow [C(S, R) = M(S,\ R)]$$

Demostración: Supongamos, por el contrario, que $C(S, R) \neq M(S, R)$; pero $\forall x,\ y : [x,\ y \in M(S,\ R) \rightarrow x\,I\,y]$. Entonces por el Lema 1*d, $C(S,\ R)$ es vacío. Sea $x_0 \in M(S,\ R)$. Ahora bien, evidentemente, $\sim[x_0 \in C(S,\ R)] \rightarrow \exists\, x_1 \in S : \sim(x_0\,R\,x_1)$. Puesto que x_1 no puede pertenecer a $M(S,\ R)$, ya que ello hubiese implicado $x_0\,I\,x_1$, claramente x pertenece a su complemento $C_M(S,\ R)$. Pero esto implica que: $\exists\, x_2 \in S : x_2\,P\,x_1$. Sin embargo, x_2 no puede pertenecer a $M(S,\ R)$, puesto que ello supondría $x_0\,I\,x_2$ y entonces $x_0\,P\,x_1$. Así pues, x_2 pertenece a $C_M(S,\ R)$. Por un razonamiento similar, $\exists\, x_3 \in S : [x_3\,P\,x_2\ \ \&\ \ x_3 \in C_M(S,\ R)]$.

Procediendo de esta forma cuando hay n alternativas en $C_M(S, R)$, obtenemos la última alternativa x_n tal que $x_n \in C_M(S,\ R)$ y $x_n\,P\,y$ para todo y en $C_M(S,\ R)$. Además $\sim(x_0\,P\,x_n)$ puesto que $x_0\,P\,x_n$ conduciría, por transitividad de P a $x_0\,P\,x_1$, lo cual es falso. Puesto que todos los elementos de S excepto x_0 pertenecen, por nuestra demostración, a $C_M(S,\ R)$, se sigue ahora que x_n *es* después de todo un elemento maximal. Pero x_n tiene que pertenecer al conjunto complemento $C_M(S,\ R)$. Esta contradicción establece una parte del lema. (Obsérvese que la finitud de S no es necesaria para la demostración, y solamente se emplea la finitud de $C_M(S,\ R)$. El Lema 1*e puede, por tanto, generalizarse.)

Lo inverso es inmediato. Sea $C(S,\ R) = M(S,\ R)$. De aquí que

$x, y \in M(S, R) \rightarrow x, y \in C(S, R)$, de modo que $x R y$ & $y R x$, lo que implica $x I y$.

1*4. Subrelaciones y Compatibilidad

Considérense dos cuasi-ordenaciones Q_1 y Q_2. Introducimos ahora la noción de «subrelación».

DEFINICIÓN 1*5. *Q_1 es una subrelación de Q_2 si y solamente si para todo $x, y \in X$,*

(1) $x Q_1 y \rightarrow x Q_2 y$

(2) $[x Q_1 y \ \& \ \sim(y Q_1 x)] \rightarrow \sim(y Q_2 x)$

Esto es, siempre que x sea «al menos tan bueno como» (o alternativamente «mejor que») y según Q_1, también lo es según Q_2, pero no necesariamente a la inversa.

También es importante observar el concepto de compatibilidad de una cuasi-ordenación con una ordenación.

DEFINICIÓN 1*6. *Si Q, una cuasi-ordenación, es una subrelación de una ordenación R, se dice entonces que R es compatible con Q.*

Seguidamente indicaremos dos resultados sin demostración.

LEMA 1*f. *Para toda cuasi-ordenación Q, hay una ordenación R compatible con Q*[6].

LEMA 1*g. *Si Q es una cuasi-ordenación tal que $\forall x, y \in S \subset X$: $x Q y \leftrightarrow x = y$, siendo T una ordenación de elementos de S, entonces hay una ordenación R de todos los elementos de X tal que R es compatible con Q y T*[7].

De cara a cualquier aplicación particular los dos lemas son triviales, pero no si los tomamos en su completa generalidad. Puede observarse que el Lema 1*g incluye al Lema 1*f, y afirma que cualquier cuasi-ordenación puede ser completada consistentemente con una ordenación de un subconjunto sobre el cual la cuasi-ordenación en cuestión es incompleta para cada par.

[6] Véase Szpilrajn (1930), pp. 386-389. Szpilrajn se ocupa de ordenaciones parciales, pero la demostración para cuasi-ordenaciones es similar.

[7] Arrow (1951), pp. 64-68.

Podemos definir la compatibilidad de dos cuasi-ordenaciones como sigue:

DEFINICIÓN 1*7. *Dos cuasi-ordenaciones Q_1 y Q_2 son compatibles si y sólo si hay una ordenación compatible con cada una.*

Los siguientes resultado son inmediatos:

LEMA 1*h. *Si una cuasi-ordenación Q_1 es una subrelación de una cuasi-ordenación Q_2, entonces Q_1 y Q_2 son compatibles.*

LEMA 1*i. *Si Q es una cuasi-ordenación tal que $\forall x, y \in S \subset X$: $x\,Q\,y \leftrightarrow x = y$, y T es una cuasi-ordenación de elementos de S, entonces hay una ordenación R de todos los elementos de X tal que R es compatible con Q y T.*

El Lema 1*i es una ligera ampliación del 1*g. Por el Lema 1*f, es posible definir una ordenación T^* sobre S tal que T^* sea compatible con T, y por el Lema 1*g hay una ordenación R definida en X tal que R es compatible con Q y T^*. Es trivial probar que si R es compatible con T^* sobre X y T es una subrelación de T^*, entonces R es compatible con T. Sin embargo, lo que significa es que si tomamos dos cuasi-ordenaciones tales que cada una infrinja la completitud para cada par de alternativas para el cual la otra es completa, entonces son compatibles. En la elección social esto puede ser importante porque permite el uso de una serie de principios de preferencia independientes.

1*5. Funciones de elección y cuasi-transitividad

En el Apartado 1*2 hemos definido lo que es un conjunto de elección. Ahora podemos definir el concepto de función de elección.

DEFINICIÓN 1*8. *Una función de elección $C(S, R)$ definida en X es una relación funcional tal que el conjunto de elección $C(S, R)$ es no vacío para todo subconjunto no vacío S de X.*

Decir que existe una función de elección $C(S, R)$ definida en X es por tanto equivalente a decir que hay un mejor elemento en cada subconjunto no vacío de X. La existencia de una función de elección es obviamente importante para la elección racional.

Si una relación de preferencia infringe la completitud, evidentemente no existirá función de elección. Habrá algún par x, y en x,

para el cual ni $x\,R\,y$ ni $y\,R\,x$, de modo que el conjunto de elección de este par (x, y) será vacío. Análogamente una violación de la reflexividad hará imposible la existencia de una función de elección, puesto que entonces habrá alguna alternativa x que no sería considerada tan buena como sí misma.

Si además de la reflexividad y la completitud suponemos que existe también transitividad, obtenemos entonces una ordenación. Antes de considerar la posibilidad de obtener una función de elección a pesar de infringir la transitividad, señalemos un resultado elemental sobre ordenaciones.

LEMA 1*j. *Si R es una ordenación definida sobre un conjunto finito X, queda definida entonces en X una función de elección $C(S, R)$.*

La demostración es similar a la del Lema 1*b y se omite aquí. Cuando el conjunto X no es finito, la existencia de una ordenación en X no garantiza, desde luego, una función de elección; por ejemplo, podríamos tener $x_j\,P\,x_{j-1}$ para $j = 2, 3, ..., \infty$.

Aunque dada la reflexividad y la completitud, la transitividad es una condición suficiente para la existencia de una función de elección en un conjunto finito, no es una condición necesaria. Una condición de suficiencia más débil se indica más abajo.

DEFINICIÓN 1*9. *Si para todo $x, y, z \in X$, $x\,P\,y$ & $y\,P\,z \rightarrow x\,P\,z$, entonces R es cuasi-transitiva.*

A esta condición se hizo referencia antes como PP en el contexto del Lema 1*a.

LEMA 1*k. *Si R es reflexiva, completa y cuasi-transitiva en un conjunto finito X, queda entonces definida una función de elección $C(S, R)$ en X*[8].

Demostración: Supongamos que hay n alternativas en $S \subset X$, digamos $x_1, ..., x_n$. Consideremos primero el par (x_1, x_2). Por reflexividad y completitud de R, hay un mejor elemento en este par. La demostración se completa ahora por inducción mostrando que si $(x_1, ..., x_j)$

[8] Véase Sen (1969), Teorema II; también Pattanaik (1968). Para conjuntos infinitos es necesario que P esté «fundada», es decir, que no estén permitidas las cadenas descendentes infinitamente largas. Este es un aspecto del concepto de buena ordenación de Whitehead y Russell (1913). Para esta y otras cuestiones relativas a las funciones de elección, véase Herzberger (1968).

tiene un mejor elemento, también lo tiene $(x_1, ..., x_j, x_{j+1})$. Sea a_j un mejor elemento del primer conjunto de modo que $a_j R x_k$, para $k = 1, ..., j$. O bien $x_{j+1} P a_j$, o bien $a_j R x_{j+1}$. Si esto último, entonces a_j es también un mejor elemento de $(x_1, ..., x_{j+1})$. Si lo primero, entonces x_{j+1} puede no ser un mejor elemento de $(x_1, ..., x_{j+1})$ solamente si $x_k P x_{j+1}$ para algún $k = 1, ..., j$. Por cuasi-transitividad de R debemos tener entonces $x_k P a_j$, lo que contradice $a_j R x_k$. Esto completa la demostración.

Debe destacarse que aunque la cuasi-transitividad es suficiente, no es necesaria para que exista una función de elección para un conjunto finito. De hecho se demuestra que ninguna condición definida sobre ternas solamente puede ser una condición necesaria para la existencia de funciones de elección. Introduzcamos ahora la propiedad de *aciclicidad*.

DEFINICIÓN 1*10. *R es acíclica en X si y solamente si se cumple lo siguiente:*

$$\forall x_1, ..., x_j \in X : [\{x_1 P x_2 \ \& \ x_2 P x_3 \ \& \ \cdots \ \& \ x_{j-1} P x_j\} \rightarrow x_1 R x_j]$$

LEMA 1*1. *Si R es reflexiva y completa, entonces una condición necesaria y suficiente para que $C(S, R)$ esté definida en un X finito es que R sea acíclica en X.*

Demostración. Primero la prueba de necesidad. Supóngase que R no es acíclica. Entonces hay algún subconjunto de j alternativas en X tales que $x_1 P x_2, ..., x_{j-1} P x_j, x_j P x_1$. Evidentemente no hay un mejor elemento en este subconjunto, de modo que no existe en X una función de elección. La prueba de suficiencia puede empezar observando que si todas las alternativas son indiferentes entre sí, entonces son todas mejores y solo tenemos que ocuparnos de casos en los que haya al menos un par estrictamente ordenado, por ejemplo, $x_2 P x_1$. Ahora bien, x_2 puede no ser el mejor elemento de S solamente si hay algún elemento, digamos x_3, en X tal que $x_3 P x_2$. Si $x_1 P x_3$, entonces por aciclicidad $x_1 R x_2$, lo cual es una contradicción. Así pues, x_3 es un mejor elemento de (x_1, x_2, x_3). Procediendo de esta forma podemos agotar todos los elementos de S sin que el conjunto de elección se haga vacío. Así pues, la aciclicidad es necesaria y suficiente.

Obsérvese que la aciclicidad en ternas solamente, es decir,

$\forall x, y, z \in X : [x P y \ \& \ y P z \rightarrow x R z]$, no es una condición suficiente para la existencia de una función de elección, ya que la aciclicidad en ternas no implica aciclicidad en todo el conjunto. Consideremos, por ejemplo, el conjunto de cuatro alternativas x_1, x_2, x_3, x_4, tales que $x_1 P x_2$, $x_2 P x_3$, $x_3 P x_4$, $x_4 P x_1$, $x_1 I x_3$ y $x_2 I x_4$. Ninguna terna infringe la aciclicidad, pero sí todo el conjunto, y no hay un mejor elemento en todo el conjunto.

Finalmente, del Lema 1*k y 1*1 se sigue que la cuasi-transitividad, que es una condición sobre las ternas, implica aciclicidad, la inversa, sin embargo, no.

1*6. Preferencia y elección racional

La existencia de una función de elección es en ciertos aspectos una condición de elección racional. Una función de elección ha sido definida aquí sobre la base de una relación de preferencia binaria, de modo que la existencia de un conjunto de elección no vacío es equivalente a la existencia de alguna alternativa que se considera al menos tan buena como cualquier otra en el conjunto. Esto es una propiedad de racionalidad, señalada ya en el contexto de la regla de mayoría por Condorcet en 1785.

Sin embargo, podemos también definir ciertas condiciones de racionalidad en términos de las propiedades de la función de elección (véase Arrow (1959)). con este fin tomamos $C(S)$ como una función de elección definida en algún X, no derivada necesariamente con respecto a alguna relación de preferencia binaria. Es, desde luego, fácil considerar funciones de elección que no puedan posiblemente ser derivadas de ninguna relación binaria, por ejemplo, $C([x, y, z]) = [x]$, y $C([x, y]) = [y]$. Para garantizar que no solamente podemos elegir, sino también elegir racionalmente, habrá que especificar ciertas propiedades de la función de elección. Consideremos las siguientes (véase Sen (1969)):

Propiedad α: $x \in S_1 \subset S_2 \rightarrow [x \in C(S_2) \rightarrow x \in C(S_1)]$, para todo x

Propiedad β: $[x, y \in C(S_1) \ \& \ S_1 \subset S_2] \rightarrow [x \in C(S_2) \leftrightarrow y \in C(S_2)]$, para todo x, y

La propiedad α expresa que si algún elemento de subconjunto S_1 de S_2 es mejor en S_2, entonces es mejor en S_1. Este requisito es

básico en la elección racional, y en un contexto diferente se ha denominado la condición de «la independencia de alternativas irrelevantes»[9]. La propiedad β también es atrayente, aunque quizás algo menos intuitiva que la propiedad α. Exige que si x e y son ambas mejores en S_1, un subconjunto de S_2, una de ellas no puede ser mejor en S_2 sin que la otra lo sea también en S_2. Veamos un ejemplo: la propiedad α afirma que si el campeón mundial en cierto juego es pakistaní, debe ser entonces también el campeón de Pakistán, mientras que la propiedad β afirma que si algún pakistaní es un campeón mundial, entonces *todos* los campeones de Pakistán deben ser campeones del mundo.

El resto de este capítulo se basa en Sen (1969).

LEMA 1*m. *Toda función de elección $C(S, R)$ generada por una relación binaria R satisface la propiedad α pero no necesariamente la propiedad β.*

Demostración. Si x pertenece a $C(S, R)$, evidentemente $x\,R\,y$ para todo y en S y por tanto $x\,R\,y$ para todo y en cualquier subconjunto de S. De aquí que se satisfaga la propiedad α.

Considérese ahora una terna x, y, z tal que $x\,I\,y$, $x\,P\,z$ y $z\,P\,y$. Resulta claro que $[x, y] = C([x, y], R)$ y $[x] = C([x, y, z], R)$. Esto infringe la propiedad β.

Parece existir una estrecha relación entre una función de elección que satisface la propiedad β y la relación de preferencia fundamental que satisface la condición *PI*, mencionada en el contexto del Lema 1*a.

DEFINICIÓN 1*11. *La relación R es PI-transitiva en X si y solamente si para todo x, y, z en X, $x\,P\,y$ & $y\,I\,z \rightarrow x\,P\,z$.*

LEMA 1*n. *Una función de elección $C(S, R)$ generada por una relación binaria R satisface la propiedad β si y solamente si R es PI-transitiva*[10].

Demostración: Se ha puesto anteriormente de relieve que una relación binaria debe ser completa y reflexiva para generar una función

[9] Véase Nash (1950), Chernoff (1954), Radner y Marschak (1954), y Luce y Raiffa (1957). Sin embargo, esta condición no debe confundirse con la de Arrow (1951) del mismo nombre, que es una condición sobre la relación funcional entre la preferencia social y las preferencias individuales; véase Capítulo 3*.

[10]. Sen (1969), Teorema III.

de elección. Supongamos ahora que PI es infringida. Entonces hay una terna x, y, z tal que $x\,P\,y$, $y\,I\,z$ y $z\,R\,x$. Obviamente $[y, z] = C([y, z], R)$. Además, $z \in C([x, y, z], R)$, pero $\sim[y \in C([x, y, z], R)$. Así pues, no se satisface la propiedad β.

Inversamente, supongamos que es infringida la propiedad β. Entonces tenemos un par x, y tal que $x, y \in C(S_1, R)$, $x \in C(S_2, R)$, y $\sim[y \in C(S_2, R)]$ cuando $S_1 \subset S_2$. Evidentemente existe algún z en S_2 tal que $z\,P\,y \,\&\, x\,R\,z$. Sabemos que $x\,I\,y$, puesto que $x, y \in (S_1, R)$. Ahora bien, $z\,P\,y \;\&\; y\,I\,x \rightarrow z\,P\,x$, por transitividad PI. Pero sabemos que $x\,R\,z$. De aquí que R no pueda satisfacer PI. Esto completa la demostración del lema.

¿Cuál es la interrelación exacta entre PP (cuasi-transitividad), PI y la transitividad?

LEMA 1*o. (*a*) *En general, PP y PI son completamente independientes entre sí.*

(*b*) *PP y PI juntas implican la transitividad, dada la completitud de R.*

Demostración: La proposición (*a*) se demuestra examinando dos ejemplos. Considérese $x\,P\,y$, $y\,P\,z$ y $z\,P\,x$. Esto infringe PP pero no PI. Considérese después $x\,P\,y$, $y\,I\,z$ y $x\,I\,z$. Esto infringe PI pero no PP.

La proposición (*b*) se demuestra haciendo la suposición contraria de que PI y PP se cumple, pero no la transitividad. Entonces para alguna terna x, y, z debemos tener $x\,R\,y$, $y\,R\,z$ y $\sim(x\,R\,z)$, es decir, $z\,P\,x$ por la completitud de R. Ahora bien, $x\,R\,y$ implica $x\,P\,y \;\vee\; x\,I\,y$. Supongamos $x\,P\,y$. Entonces, de $z\,P\,x$ y en virtud de PP debemos tener $z\,P\,y$. Pero esto es falso. Por consiguiente, $x\,I\,y$. Entonces de $z\,P\,x$ y en virtud de PI debemos tener $z\,P\,y$, que es la misma aseveración falsa. Esta contradicción establece el resultado, lo que completa la prueba del lema.

Sin embargo, si R debe generar una función de elección, existe entonces una relación estrecha entre PI y PP, a saber, PI implica PP (aunque lo inverso no se cumple). Así pues, PI es equivalente a transitividad completa.

LEMA 1*p. *Si una relación binaria R genera una función de elección, entonces la transitividad PI implica que R es una ordenación*[11].

[11] Sen (1969), Teorema IV.

Demostración: La reflexividad y la completitud de R son triviales. Por el Lema 1*o solamente tenemos que mostrar que PI implica PP.

Supongamos que PP no se satisface. Entonces hay una terna x, y, z, tal que $x\,P\,y$, $y\,P\,z$ y $z\,R\,x$. Si $z\,P\,x$, entonces $C([x, y, z], R)$ será vacío. De aquí que se cumpla $z\,I\,x$. Pero $[y\,P\,z\ \&\ z\,I\,x] \rightarrow y\,P\,x$, por PI. Sin embargo, sabemos que $x\,P\,y$. Entonces PI debe ser también infringida. Así pues PI implica PP, de modo que PI implica también que R es una ordenación (teniendo en cuenta el Lema 1*o), lo que completa la demostración.

De los Lemas 1*n y 1*p obtenemos inmediatamente el resultado siguiente como corolario:

LEMA 1*q. *Una función de elección $C(S, R)$ derivada de una relación binaria R satisface la propiedad β si y solamente si R es una ordenación*[12].

Para ampliar el cuadro de los diferentes aspectos de la transitividad, señalamos también algunas relaciones adicionales que se cumplen exista o no una función de elección.

LEMA 1*r. *Si R es completa, entonces* (*a*) $PI \leftrightarrow IP$; (*b*) $PI \rightarrow II$; y (*c*) $PP\ \&\ II \rightarrow PI$.

Las demostraciones se omiten aquí; (*a*) puede encontrarse en Sonnenschein (1965) y Lorimer (1967), y (*b*) y (*c*) vienen dadas en Sen (1969). Todas son sencillas.[13]

Finalmente mostramos en forma de diagrama las relaciones principales entre PP, PI, II, IP, y transitividad T de R, la existencia de $C(S, R)$ en un S finito, y el cumplimiento de las condiciones de racionalidad α y β. La dirección de la flecha indica la dirección de la implicación. En el Diagrama 1*2 las implicaciones dentro del recuadro se cumplen si existe la función de elección $C(S, R)$.

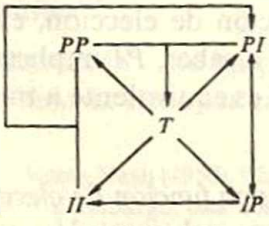
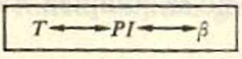


Diagrama 1*1



$\exists C(S, R)$

Diagrama 1*2

[12] Sen (1969). Véase también Arrow (1959).

[13] Algunos resultados importantes sobre preferencia y elección, en los que no entramos aquí, se encontrarán en Herzberger (1968) y Hansson (1969).

Capítulo 2
UNANIMIDAD

2.1. El criterio de Pareto

Un criterio de comparación muy simple para el bienestar social va asociado con el nombre de Pareto (Paretp (1897)). En dicho enfoque se emplean las dos reglas siguientes: (a) si todo el mundo en la sociedad es indiferente frente a dos situaciones sociales alternativas x e y, entonces la sociedad debería ser también indiferente; y (b) si al menos un individuo prefiere estrictamente x a y, y todo individuo considera a x al menos tan buena como y, entonces la sociedad preferiría x a y. Este criterio tiene un atractivo obvio. Cuando se satisface (a), a nadie le importará cuál de las dos alternativas elija la sociedad; de aquí que no haya riesgo alguno en elegir cualquiera de las dos. Cuando se satisface (b) no está en el interés de nadie estar en y mejor que en x, y está en el interés de alguien estar en x mejor que en y; de ahí que parezca razonable decir que la sociedad, como un agregado de los individuos, prefiere x a y.

Para que nuestra terminología no sea ambigua, cuando se cumple (a) diremos que la sociedad es indiferente según Pareto entre x e y, y cuando se cumple (b) que x es mejor que y según Pareto. Consideremos ahora el concepto de *optimalidad de Pareto*. En una situación

de elección dada, considérese el conjunto de alternativas X entre las cuales tiene que hacerse la elección. Una alternativa x perteneciente a ese conjunto será descrita como óptima de Pareto si no hay otra alternativa en el conjunto que sea mejor que x según Pareto. Esto es, x es un óptimo paretiano si no podemos elegir una alternativa que todo el mundo considere al menos tan buena como x y que al menos una persona considere estrictamente mejor que x.

Gran parte de la moderna economía del bienestar se basa en este criterio. La «optimalidad» de un sistema o de un programa político se juzga a menudo por el criterio de si se alcanza o no la optimalidad de Pareto.[1] Pero, ¿qué alcance tiene este criterio? En cuanto haya un individuo que prefiera x a y y otro que prefiera y a x, no podremos compararlos ya socialmente usando la regla de Pareto, independientemente de cómo el resto de los individuos evalúe a x frente a y y de cuántos sean. Es evidente que la relación de preferencia social derivada del criterio de Pareto, aunque reflexiva y transitiva (siempre que cada individuo tenga una cuasi-ordenación), puede no ser completa, aunque todos los individuos que constituyen la sociedad tengan ordenaciones de preferencia completas. El grado de incompletitud del criterio de Pareto dependerá precisamente de la que reine entre los individuos. En un extremo se encuentra el caso en el cual todos tienen la misma ordenación de preferencia,[2] y la ordenación social será de hecho completa para este caso especial. En el otro extremo está el caso en el que dos individuos tienen preferencias estrictamente opuestas,[3] de modo que no es posible comparar ningún par de alternativas empleando la regla de Pareto. Ninguno de los extremos es frecuente, y en algunos casos intermedios podrán hacerse cierto número de comparaciones usando la regla de Pareto, pero no todas. El número de comparaciones que pueden hacerse dependerá de las circunstancias particulares.

En el difícil campo de la economía del bienestar cualquier recurso

[1] Véase la literatura sobre la optimalidad del equilibrio competitivo, por ejemplo, Arrow (1951a), Debreu (1959).

[2] No tiene que ser estrictamente la misma, con tal de que siempre que x sea preferida a y por algún individuo, todos los demás consideren que x es al menos tan buena como y.

[3] Más explícitamente, cada uno de los dos individuos tiene una ordenación fuerte sobre la gama completa de alternativas, y siempre que uno prefiere una alternativa a otra, el otro individuo prefiere la última a la primera.

es bueno, y en este sentido hay mucho que agradecer al criterio de Pareto a pesar de no ser completo. Pero es peligroso centrarse exclusivamente en la optimalidad de Pareto. Una economía puede ser óptima en este sentido aún cuando unos estén nadando en la abundancia y otros bordeen la indigencia, con tal de que no pueda mejorarse a los indigentes sin recortar los placeres de los ricos. Si evitar el incendio de Roma hubiese hecho que Nerón se sintiese peor, entonces dejarle incendiar Roma sería un óptimo de Pareto. En resumen, una sociedad o una economía puede ser óptima según Pareto y ser no obstante perfectamente indignante.

2.2. Reglas de elección «inclusivas de Pareto»

Llamaremos «regla de elección colectiva» (CCR) a cualquier método de pasar de ordenaciones individuales a la preferencia social. Por ejemplo, el «método de decisión de la mayoría» (MMD) es una CCR por la que x se declara socialmente al menos tan buena como y si y solamente si por lo menos tanta gente prefiere x a y como y a x. El MMD produce a menudo preferencia social intransitiva, pero es siempre «decisivo» para cada par, en el sentido de que produce ordenaciones de preferencia completas, es decir, x es socialmente al menos tan buena como y o y es socialmente al menos tan buena como x. El criterio de Pareto genera también una CCR, pero no es decisivo para cada par, debido a la posible falta de completitud de la relación de Pareto. Los elementos óptimos según Pareto no guardan una jerarquía entre ellos.

Una CCR que incluye la relación de Pareto, pero que posiblemente tenga más alcance, se llamará una CCR inclusiva de Pareto. El MMD es una CCR inclusiva de Pareto. Si x es superior, según Pareto, a y, entonces x debe estrictamente ganar a y en una votación por mayoría; pero x e y pueden ser no comparables según Pareto y no obstante ganar una de ellas a la otra (o empatar, indicando indiferencia social) en una votación por mayoría. Si se comprueba que el criterio de Pareto es compulsivo, entonces nuestro interés debería centrarse en las CCR inclusivas de Pareto.

Una manera de obtener una «mejor» alternativa especificada a partir de un conjunto óptimo según Pareto con más de un elemento es ordenar las alternativas óptimas de Pareto. Por ejemplo, podríamos

tener en cuenta consideraciones relativas a la distribución de la renta,[4] ya que el criterio de Pareto está orientado hacia la eficiencia y es neutral entre distribuciones de renta. El método entraña algunas dificultades como veremos más adelante.

Un modo particularmente sencillo de extender la relación de Pareto es declarar indiferentes todos los puntos óptimos de Pareto, lo cual equivale a una exclusión deliberada de consideraciones distributivas. No creo que esto atraiga a mucha gente, pero tampoco dudo de que atrae a algunos, si a la relación de Pareto juzgamos por el interés casi exclusivo que presta la moderna economía del bienestar. Tendremos ocasión de examinarlo más a fondo en los Capítulos 5 y 5*.

También es posible encontrar CCRs que no son «decisivas», pero que generan relaciones de preferencia más amplias que la relación de Pareto y que la incluyan. Ejemplos son ciertos criterios de bienestar agregado (Capítulos 7 y 7*), soluciones de regateo (Capítulos 8 y 8*) y de justicia (Capítulos 9 y 9*). Digamos que la mayoría de las CCR que se consideran usualmente son inclusivas de Pareto, al menos en una forma más débil.

En la forma más débil del principio de Pareto, x puede ser declarada socialmente mejor que y, si *todo el mundo* prefiere estrictamente x a y. Este criterio dice menos que el usual de Pareto puesto que nada se establece acerca de un caso en que alguien prefiera x a y y el resto considere a x al menos tan buena como y.

Si x es superior según Pareto a y en este sentido más exigente, será difícil argumentar que x no sería socialmente preferida a y. Si todos en la sociedad desean a x antes que a y, ¿en qué sentido puede la sociedad preferir y a x, o incluso ser indiferente o estar indecisa?[5] El argumento es de bastante peso, pero dudo que sea totalmente irrecusable. Si la elección entre un par de alternativas debe basarse exclusivamente en las preferencias individuales sobre ese par solamente, entonces el problema parece bastante sencillo. Pero si uno piensa en una CCR en que la elección social entre x e y depende también de las preferencias individuales entre otros pares (por ejemplo, x y z, e y y z), entonces el cuadro no está tan claro. El argumento es demasiado complicado para adentrarse en él sin

[4] Véase Fisher (1956) y Kenen y Fisher (1957).
[5] Cf. Cassen (1967).

un estudio adicional de las reglas de elección colectiva, y posponemos su discusión hasta el Capítulo 6. Por el momento tomaremos el criterio de Pareto como obligatorio, pero sin olvidar que es muy incompleto y que se necesita algo más.

2.3. El consenso como una base de acción colectiva

A pesar de la incompletitud de la cuasi-ordenación de Pareto, en años recientes se han propuesto argumentos en favor de la utilización exclusiva del consenso general o unanimidad como base de la acción social. En particular, Buchanan y Tullock (1962) han expuesto un concienzudo análisis de las consecuencias de tal método, que ellos han contrastado favorablemente con otros. Las desviaciones de la regla de unanimidad sólo se permiten cuando es demasiado costoso alcanzar decisiones unánimemente.

> La teoría individualista de la constitución que hemos logrado desarrollar asigna un papel central a una sola regla de toma de decisión —la del consenso general o unanimidad. Las otras posibles reglas de elección son introducidas como variantes de la regla de unanimidad. Estas variantes se elegirán racionalmente, no porque proporcionen decisiones colectivas 'mejores' (que no lo harán), sino más bien porque, sopesando todo, el peso de los costos necesarios para alcanzar decisiones unánimemente exige apartarse de la regla 'ideal'. (Buchanan y Tullock (1962), p. 96)

Cuando hay unanimidad en los puntos de vista acerca de un tema, existe evidentemente una base muy satisfactoria para la elección. Las dificultades en la elección social surgen precisamente porque no existe unanimidad en muchas cuestiones. ¿Qué hacer entonces? Una respuesta es insistir en la unanimidad acerca de un *cambio*, y si no hay tal unanimidad para ninguno de los cambios propuestos, entonces adherirse al *statu quo*. La regla para la elección social puede entonces resumirse así: Dado que algunos prefieren una alternativa x al *statu quo* y y nadie considera a x peor que y, x es socialmente preferida a y; y cuando esta condición no se satisface, el *statu quo* y es preferido a la otra alternativa x.

Este método es de un conservadurismo supremo. Bastaría una sola persona que se opusiera al cambio para bloquearlo del todo, independientemente de lo que los demás deseen.[6] La oposición

[6] Buchanan y Tullock (1962) mencionan el «resultado paradójico *de que la regla de unanimidad es lo mismo que la regla de minoría de uno*» (p. 259). Pero señalan la

de María Antonieta a la Primera República habría salvado la monarquía en Francia y el mundo habría experimentado un cambio muy pequeño. Evidentemente, hay algo de grotesco en una regla de decisión como ésta.

Buchanan y Tullock piensan que los «teóricos políticos modernos se han apresurado quizá demasiado a desechar el requisito de unanimidad» (Buchanan y Tullock (1962), p. 250) y que «la existencia de conflictos de interés no impide la consecución de unanimidad» (Buchanan y Tullock (1962), p. 255). Cierto es que incluso cuando para empezar no existe unanimidad en los puntos de vista, las discusiones y el regateo pueden llegar a conseguirla. Y también es verdad que este proceso de compromisos y «tratos» entre ellos mismos es esencialmente «equivalente al proceso de cabildeo».[7] Uno puede retirar su débil oposición a la propuesta de otro a cambio de que éste apoye la del primero, defendida por él vehementemente. Es decir, la unanimidad puede surgir allí donde no existía al empezar.

La conclusión es valiosa, y cualquier teoría de la elección colectiva debe tener en cuenta tales compromisos. Sin embargo, vale la pena hacer dos observaciones aclaratorias en este contexto. Primero, una regla de elección colectiva, tal como la hemos definido, está basada en ordenaciones individuales sobre descripciones completas de estados sociales x, y, etc., que representan todas las combinaciones posibles de decisiones sobre cuestiones distintas, y esto incluye compromisos de cabildeo. Lo que señala el argumento de Buchanan-Tullock es que en algunas elecciones que impliquen tales compromisos podría existir unanimidad aunque haya conflictos de intereses en distintas cuestiones. Esto no quiere decir, desde luego, que las

importante distinción lógica entre el poder de «tomar acción» y el de «bloquear la acción», y es para esto último para lo que la unanimidad da tal poder a cada uno. Lo que, sin embargo, es dudoso es la aseveración de Buchanan y Tullock de que esta distinción «representa la diferencia entre el poder de *imponer costes externos a otros* y el poder de *evitar que sean impuestos costes externos*» (p. 259). Depende mucho del tipo de acción implicada. Buchanan y Tullock discuten casos de contribución obligatoria, por ejemplo, para la reparación de carreteras. Sin embargo, si una campaña contra la contaminación se echa a perder por falta de apoyo unánime, un individuo (por ejemplo, el propietario de una fábrica que produzca muchos humos) estará ejercitando poder para imponer un *coste externo* sobre otros.

[7] Buchanan y Tullock (1962), p. 255. Véase Capítulo 10 de su libro para una discusión aclaratoria de este proceso. Véase también Wilson (1968), (1968a), (1968b).

ordenaciones individuales deban ser, en general, unánimes en su mayor parte.[8]

Segundo, es muy importante recordar que los compromisos que la gente está dispuesta a aceptar dependen mucho de su propia valoración del poder de regateo relativo. El hecho de que todos los miembros de una comunidad acepten una cierta situación social no significa necesariamente que sea preferida unánimemente a otras alternativas sociales. Un trabajador en un mercado de trabajo monopsonístico puede aceptar ciertas condiciones pensando que no puede esperar obtener nada mejor, pero esto no significa que ese contrato sea unánimemente preferido a un conjunto alternativo de condiciones. El razonamiento es muy sencillo, pero indica que la aceptación general de una solución de compromiso no debería interpretarse como apoyo universal. En los Capítulos 8 y 8* examinaremos soluciones de regateo a la luz de los requisitos de un modelo ético.

Sin embargo, es interesante indagar en las implicaciones de establecer una ecuación entre indiferencia social e incompletitud de Pareto. Haremos esto en el Capítulo 5, y presentaremos en el Capítulo 5* un conjunto de axiomas que son necesarios y suficientes para esta regla más bien arbitraria.

[8] En el contexto del «teorema de imposibilidad» de Arrow, que se discute en el próximo capítulo, Buchanan y Tullock han aseverado que cuando los «votos son negociados», «es imposible el tipo particular de irracionalidad descrito por Arrow» (Buchanan y Tullock (1962), p. 332; también nota 14, p. 359). Esto parece estar basado en una interpretación errónea de la naturaleza de las alternativas sobre las que están definidas las preferencias individuales. Sobre esta cuestión véase Arrow (1963), p. 109.

Capítulo 2*
REGLAS DE ELECCION COLECTIVA Y COMPARACIONES DE PARETO

2*1. Elección y relación de Pareto

Sea X el conjunto de estados sociales. La relación de preferencia del individuo i-ésimo es R_i, y supongamos que hay n personas, $i = 1, ..., n$. Supongamos que R se refiere a la relación de preferencia social. Partimos de que cada individuo tiene una ordenación, es decir, para cada i, R_i es reflexiva, transitiva y completa. No es fácil hacer tal suposición para la relación de preferencia social R, y realmente forma parte de nuestro estudio ver si R tendrá o no estas características. Por consiguiente no exigimos todavía[1] que R sea una ordenación.

DEFINICIÓN 2*1. *Una regla de elección colectiva es una relación funcional f tal que para cualquier conjunto de n ordenaciones individuales* $R_1, ..., R_n$ *(una ordenación para cada individuo) quede determinada una y solamente una relación de preferencia social* $R = f(R_1, ..., R_n)$.

[1] En el Capítulo 3* examinaremos el caso particular en que se exige que R sea una ordenación, lo que corresponde a la «función de bienestar social» de Arrow.

DEFINICIÓN 2*2. *Una regla de elección colectiva es decisiva si y solamente si su alcance está restringido a relaciones de preferencia completas R.*

Definimos ahora la preferencia de Pareto ($\bar{P}$), indiferencia ($\bar{I}$) y preferencia o indiferencia ($\bar{R}$).

DEFINICIÓN 2*3. *Para todo x, y en X*

(1) $x \bar{R} y \leftrightarrow [\forall i : x R_i y]$
(2) $x \bar{P} y \leftrightarrow [x \bar{R} y \ \& \ \sim(y \bar{R} x)]$
(3) $x \bar{I} y \leftrightarrow [x \bar{R} y \ \& \ y \bar{R} x]$

A partir de la relación de Pareto podemos derivar una regla de elección colectiva exigiendo que $x \bar{R} y \leftrightarrow x R y$. O bien podemos exigir meramente que $x \bar{R} y \rightarrow x R y$, o que $x \bar{P} y \rightarrow x P y$, o que $x \bar{I} y \rightarrow x I y$, sin la implicación inversa. Esto será una *condición* sobre una regla de elección colectiva, no una regla en sí.

Es fácil comprobar que $\bar{R}$ debe ser una cuasi-ordenación.

LEMA 2*a. *La relación $\bar{R}$ es una cuasi-ordenación para toda combinación lógicamente posible de preferencias individuales.*

Demostración: Puesto que $\forall x \in X : x R_i x$, $\bar{R}$ es reflexiva. Además,

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in X : [x \bar{R} y \ \& \ y \bar{R} z] &\rightarrow \forall i : [x R_i y \ \& \ y R_i z] \\ &\rightarrow \forall i : x R_i z \\ &\rightarrow x \bar{R} z \end{aligned}$$

La relación $\bar{R}$ no es necesariamente una ordenación ya que puede infringir la completitud. ¿Cuándo será $\bar{R}$ una ordenación?

LEMA 2*b. *Una condición necesaria y suficiente para que $\bar{R}$ sea una ordenación y para que $R = \bar{R}$ sea una regla de elección colectiva decisiva es que*

$$\forall x, y \in X : [(\exists i : x P_i y) \rightarrow (\forall j : x R_j y)]$$

Demostración: Para cualquier par x, y, si $x I_i y$ para todo i, entonces la condición se cumple obviamente, y también $x \bar{I} y$. Si por otra parte, $\exists i : x P_i y$, entonces $\forall j : x R_j y$, y por tanto $x \bar{R} y$. Por otra parte, si la condición se infringe, entonces $\exists i : x P_i y \ \& \ \exists j : y P_j x$, y

$\sim(x\,\bar{R}\,y)$ & $\sim(y\,\bar{R}\,x)$, y no se cumple la completitud. Así pues, la condición es suficiente y necesaria.

Podemos definir una versión más débil de la relación estricta de Pareto.

DEFINICIÓN 2*4. *Para todo x, y en X*

$$x\,\bar{\bar{P}}\,y \leftrightarrow \forall\, i : x\,P_i\,y$$

Señalamos, sin pruebas, dos resultados. Las demostraciones son obvias.

LEMA 2*c. $\bar{P}$ y $\bar{\bar{P}}$ *son ordenaciones parciales estrictas (transitivas y asimétricas) para toda combinación lógicamente posible de preferencias individuales.*

LEMA 2*d. $\forall\, x,\ y \in X : x\,\bar{\bar{P}}\,y \rightarrow x\,\bar{P}\,y$

Suponer que $x\,P\,y \leftrightarrow x\,\bar{\bar{P}}\,y$ para todo x, y, no define una regla de elección colectiva. Esto es porque $\sim(x\,\bar{\bar{P}}\,y)$ no decide si $y\,R\,x$. Sabemos que $x\,P\,y \rightarrow [x\,R\,y$ & $\sim(y\,R\,x)]$, de modo que $\sim(x\,P\,y)$ puede coexistir con la incompletitud, es decir, $\sim(x\,R\,y)$ & $\sim(y\,R\,x)$, o con la indiferencia, $x\,I\,y$. Podemos suponer que $x\,R\,y \leftrightarrow x\,\bar{\bar{P}}\,y$, o $x\,R\,y \leftrightarrow \sim(y\,\bar{\bar{P}}\,x)$, o algo intermedio. Estas son reglas de elección colectiva, y obsérvese que en el primer caso R puede ser incompleta, mientras que en el segundo caso debe ser completa.

Podemos hacer observaciones similares sobre $\bar{P}$, y considerar análogamente $x\,R\,y \leftrightarrow x\,\bar{P}\,y$ o $x\,R\,y \leftrightarrow \sim(y\,\bar{P}\,x)$, u otras. R, bajo la primera, puede infringir la completitud, pero no bajo la segunda.

La economía del bienestar tradicional ha sido esencialmente «paretiana» en el sentido de tomar $x\,R\,y$ siempre que $x\,\bar{R}\,y$ y $x\,P\,y$ siempre que $x\,\bar{P}\,y$. Podemos llamar a la clase de reglas de elección colectiva que satisfacen estas condiciones reglas de elección inclusivas de Pareto.

DEFINICIÓN 2*5. *Una regla de elección colectiva es inclusiva de Pareto si y solamente si su alcance está restringido a relaciones de preferencia social R tales que las relaciones de Pareto* $\bar{R}$ *sean una subrelación de R, es decir,*

$$\forall\, x,\ y \in X : [(x\,\bar{R}\,y \rightarrow x\,R\,y)\ \&\ (x\,\bar{P}\,y \rightarrow x\,P\,y)]$$

Las situaciones sociales son óptimas de Pareto si no son inferiores según Pareto a ninguna otra alternativa en S.

DEFINICIÓN 2*6. *Para cualquier n-upla de preferencias individuales* $(R_1, ..., R_n)$, *un estado* $x \in S$ *es óptimo de Pareto en* S *si y solamente si* $\sim[\exists\, y \in S : y \bar{P} x]$. *Una situación óptima de Pareto se denomina también económicamente eficiente.*

LEMA 2*e. *Para todo conjunto de preferencias individuales* $(R_1, ..., R_n)$ *sobre cualquier conjunto finito de estados sociales* S, *hay al menos un estado óptimo de Pareto.*

Demostración. Por el Lema 2*a, la relación de preferencia de Pareto $\bar{R}$ es una cuasi-ordenación. Y el subconjunto óptimo de Pareto es meramente el conjunto maximal de S con respecto a $\bar{R}$, es decir, $M(S, \bar{R})$, como se definió en el Capítulo 1*. Por el Lema 1*6 $M(S, R)$ debe ser no vacío cuando S es finito y R una cuasi-ordenación.

2*2. Tests de compensación

Veamos ahora una serie intentos de extender la regla de Pareto en la forma de «tests de compensación». Sean $S(x)$ todos los estados sociales que pueden alcanzarse mediante redistribución partiendo de x. Desde luego, $x \in S(x)$. El test de compensación desarrollado por Kaldor (1939) declara a x superior a y si y solamente si a partir de x podemos alcanzar mediante una redistribución un estado z tal que $z\, P\, y$ según el criterio de Pareto; es decir, si hay un paso de y a x, los ganadores pueden compensar a los perdedores y retener aún alguna ganancia.

DEFINICIÓN 2*7. *Según el test de compensación de Kaldor para cualquier* $x, y \in X$:

$$[x\, P\, y] \leftrightarrow \exists\, z : [z \in S(x)\ \&\ \forall\, i : z\, R_i\, y\ \&\ \exists\, i : z\, P_i\, y]$$

Esto incluye la relación de preferencia estricta generada por el criterio de Pareto en el sentido de que si $x \bar{P} y$, entonces x es mejor que y según el criterio de Kaldor. Esto es obvio puesto que $x \in S(x)$. Señalemos ahora un triste resultado, demostrado por Scitovsky (1941).

LEMA 2*f. *El test de Kaldor es inconsistente con toda posible CCR bajo alguna configuración de preferencias.*

Demostración. Esto se sigue del hecho de que podemos tener $x\,P\,y$ e $y\,P\,x$, según el test de Kaldor. Tomemos $x, y \in X$ tal que $\exists\, z \in S(x)$: $z\,\bar{P}\,y$, según el criterio de Pareto, y $\exists\, w \in S(y)$: $w\,\bar{P}\,x$, según el criterio de Pareto.[2] La falta de consistencia es inmediata.

Esta consistencia queda eliminada por el test de compensación de Scitovsky.

DEFINICIÓN 2*8. *Según el test de compensación de Scitovsky, para cualquier* $x, y \in X$: $x\,P\,y$ *si y solamente si* $x\,P\,y$ & $\sim(y\,P\,x)$, *según el test de compensación de Kaldor.*

Sin embargo, la relación de preferencia generada por el test de compensación de Scitovsky puede no ser transitiva, ni siquiera cuasi-transitiva (véase Gorman (1955)).

LEMA 2*g. *El test de compensación de Scitovsky puede dar una P intransitiva.*

Demostración: Se comprueba fácilmente que no hay contradicción en suponer que para algún $x, y, z \in X$:

(1) $[\exists\, x' \in S(x) : x'\,\bar{P}\,y] \;\&\; \sim[\exists\, y' \in S(y) : y'\,\bar{P}\,x]$
(2) $[\exists\, y' \in S(y) : y'\,\bar{P}\,z] \;\&\; \sim[\exists\, z' \in S(z) : z'\,P\,y]$
(3) $\sim[\exists\, x' \in S(x) : x'\,\bar{P}\,z]$

Evidentemente, $x\,P\,y$, $y\,P\,z$, pero no $x\,P\,z$, según el test de Scitovsky.

Una condición suficiente para la transitividad de P bajo el test de Scitovsky se da más abajo.[3]

LEMA 2*h. *Si para todo* x, y *en* X

$$[\exists\, x' \in S(x) : x'\,\bar{P}\,y] \rightarrow \forall\, y' \in S(y) : [\exists\, x'' \in S(x) : x''\,\bar{R}\,y']$$

[2] Para la plausibilidad factual de esta inconsistencia, véase Scitovsky (1941) y Little (1950).

[3] Cf. Samuelson (1950). Samuelson no se ocupa de la transitividad como tal, pero su condición de un movimiento completo hacia fuera de la «frontera de posibilidades de la utilidad» es, de hecho, suficiente para la transitividad de la preferencia estricta.

entonces P, bajo el test de Scitovsky, es una ordenación parcial estricta.

Demostración. Para cualquier terna $x, y, z \in X$,

$$x P y \;\&\; y P z \rightarrow \exists x' \in S(x) : x' \bar{P} y \;\&\; \exists y' \in S(y) : y' \bar{P} z$$
$$\rightarrow \exists x'' \in S(x) : x'' \bar{R} y' \;\&\; y' \bar{P} z$$

por hipótesis,

$$\rightarrow \exists x'' \in S(x) : x'' P z$$

De aquí $x P z$, a menos que $\exists z' \in S(z) : z' \bar{P} x$. Pero esta hipótesis, si es cierta, implicará que $\exists z'' \in S(z) : z'' \bar{R} x' \;\&\; x' \bar{P} y$. Pero sabemos que $\sim[\exists z'' \in S(z) : z'' \bar{P} y]$, puesto que $y P z$, según el test de Scitovsky. Esta contradicción establece $x P z$, y por tanto, el lema.

De hecho, con la suposición citada, la relación de preferencia de Kaldor y la relación de preferencia de Scitovsky son idénticas, puesto que $x P y \rightarrow \sim(y P x)$ en el test de Kaldor. El test de Kaldor es perfectamente consistente en este caso particular.

Capítulo 3
RACIONALIDAD COLECTIVA

3.1. La función de bienestar de Bergson-Samuelson

Una forma racional y sistemática de pensar sobre el bienestar social es tratar de definir una ordenación para la sociedad en todas las situaciones alternativas posibles. Esta idea fundamental la expuso Bergson (1938) en un artículo seminal, si bien de un modo algo distinto. El bienestar social puede considerarse como una función de bienestar W de valores reales «cuyo valor se entiende que depende de todas las variables que afectan al bienestar» (Bergson (1948), p. 417). Tal función de bienestar social W puede incluir la relación de Pareto si así lo queremos, aunque no hay nada que nos obligue a ello. Puede definirse de muy diversas formas usando distintos criterios. El método es muy general (véase Samuelson (1947), Cap. 8).

Como un ejemplo del empleo de este método, podemos referirnos a la literatura sobre «curvas de indiferencia social». Usando la regla de indiferencia de Pareto, una forma de definir la indiferencia social es que todo el mundo en la sociedad sea indiferente. Scitovsky se ocupó de este problema en un artículo clásico (1942) y exigía que dos grupos de mercancías perteneciesen a la misma curva de indiferencia social si y sólo si todo el mundo era indiferente entre los

dos grupos para alguna distribución de cada uno entre los individuos. Este concepto puede ampliarse usando la función de bienestar social de Bergson. Aunque la persona 1 pueda salir mejor parada en x que en y, y la persona 2 mejor en y que en x, la sociedad podría no obstante, ser indiferente si el criterio social global es que la ganancia de uno compensa exactamente la pérdida de otro. Samuelson (1956), Graaff (1957) y otros han analizado la diferencia entre conservar constante el bienestar social en el sentido de Scitovsky y hacerlo en el sentido de Bergson. Si la función de bienestar social de Bergson es inclusiva de Pareto, como generalmente se supone, entonces la indiferencia social en el sentido de Scitovsky implica eso mismo en el sentido de Bergson, pero no viceversa. Esto corresponde a la aseveración de que la cuasi-ordenación de Pareto está incluida en una ordenación social inclusiva de Pareto (véase Capítulo 2*).

El concepto de función de bienestar de Bergson es sencillo, quizá decepcionantemente sencillo, y quizá no estén de más algunas observaciones aclaratorias. Primera, la *forma* de la función de bienestar no está aún especificada y solamente se ha sugerido una estructura de pensamiento racional. Si lo único que pudiésemos hacer es exponer el concepto de función de bienestar de Bergson, no podríamos ir mucho más lejos.[1] Lo que hay que hacer es introducir sistemáticamente «decisiones específicas sobre fines» (Bergson (1948), p. 417), especificando con ello las características de la relación, y es aquí donde probablemente se presentarán dificultades.[2]

Segunda, absolutamente nada se dice en este análisis acerca de *quién* proporciona los fines representados por la función de bienestar social. Puede representar los puntos de vista de un observador moral, o las decisiones de una mayoría consecuente, o los dictados de una oligarquía, o los caprichos de un dictador, o los valores de una clase, o incluso venir dados simplemente por tradición. Nada se especifica sobre la génesis de la ordenación social.

[1] Véase Samuelson (1947), p. 222.

> La disciplina podría terminar con estas banalidades, si no fuese por el hecho de que muchos individuos encuentran interesante especificar la forma de W, la naturaleza de las variables, z, y la naturaleza de las restricciones.

[2] Véase, por ejemplo, Graaff (1957) sobre la relevancia de la convexidad de «las fronteras de Bergson» en el contexto de la teoría de los números índices.

Finalmente, bajo un punto de vista bastante técnico, el método particular de representación elegido es innecesariamente restrictivo. Para poder elegir entre situaciones sociales alternativas no es en realidad necesario que exista una función W de valores reales. Lo que hace falta es una ordenación social completa R sobre todas las alternativas posibles,[3] lo cual puede existir sin que haya una función de bienestar de valores reales correspondiente a aquélla.[4] Por ejemplo, una «ordenación lexicográfica» completa sobre un espacio real bidimensional no puede ser representada por una función de bienestar real.

Un ejemplo sencillo de una ordenación lexicográfica es el siguiente: Representemos los niveles de bienestar de dos personas por W_1 y W_2 respectivamente, y decidamos que el objetivo social es: (a) maximizar W_1 y (b) dado el mismo valor de W_1, maximizar W_2. Supóngase que W_1 y W_2 pueda cada uno tomar cualquier valor en el intervalo de 0 a 1, y la finalidad es representar el bienestar social W como una función real de W_1 y W_2 que exprese la ordenación lexicográfica especificada. Tal representación no es posible.[5] Hay una ordenación social R perfectamente adecuada, pero en este caso no hay función de bienestar social tal como la define Bergson. Sin embargo, no creo que cometiésemos una injusticia con las ideas de Bergson y Samuelson si tomásemos simplemente R como una función de bienestar social en lugar de tomar su representación W.[6]

3.2. Función de bienestar social arrowiana

El concepto de una función de bienestar W tal como fue propuesto por Bergson (1938) y desarrollado por Samuelson (1947) eliminó varios obstáculos para el pensamiento racional sobre elección

[3] Lo que realmente se precisa para la elección no es ni siquiera una ordenación, sino una relación de preferencia que especifique una «mejor» alternativa en cada situación de elección. Discutimos esto en el Capítulo 1 y profundizaremos más sobre ello en el Capítulo 4.

[4] Si hay riesgo, la ordenación a la que nos referimos debería extenderse a todas las posibles «loterías», y no sólo a las alternativas ciertas.

[5] Véase Debreu (1959). Véase también Little (1949), Chipman (1960), Banerji (1964) y Richter (1966).

[6] En la época en que escribían Bergson y Samuelson era corriente suponer que todas las ordenaciones eran representables por una función de utilidad. Compárese

social. Fue un paso importante en la historia de la economía del bienestar terminando un debate bastante confuso iniciado por el célebre ataque de Robbins (1932) sobre el utilitarismo. Ampliando esta idea, Arrow (1951) hizo la pregunta: ¿Qué debería determinar la función de bienestar social de Bergson a utilizar? En particular, ¿cómo dependería la función W (o con más generalidad la ordenación social R) de las ordenaciones de preferencias individuales? O en otras palabras, ¿cuál debería ser la regla de elección colectiva (como la definimos en el último capítulo)?

Antes de seguir adelante deben hacerse dos advertencias. Primera, Arrow utiliza la expresión 'función de bienestar social' en un sentido distinto que Bergson y Samuelson.[7] Una regla de elección colectiva que especifica *ordenaciones* para la sociedad es para Arrow una función de bienestar social (en lo sucesivo SWF). Cualquier ordenación para la sociedad (o mejor, su representación de valores reales) es una función de bienestar social de Bergson-Samuelson (en lo sucesivo swf). Una SWF de Arrow determina una swf de Bergson (o la ordenación R subyacente) sobre la base de ordenaciones individuales. La relación entre ambas es bastante sencilla, pero no son lo mismo, y la terminología ha sido responsable de cierta confusión. Puesto que nuestro interés se centra en ejercicios del tipo considerado por Arrow, usaremos el término 'función de bienestar social', a secas, en el sentido de Arrow. Es simplemente una cuestión de conveniencia, y resistimos la tentación de entrar en largas discusiones acerca de la adecuación semántica de un uso frente al otro.

Segunda, la SWF de Arrow es un tipo particular de regla de elección colectiva en el que cada preferencia social que esté determinada es una ordenación, es decir, reflexiva, transitiva y completa. Aunque Arrow se ocupa exclusivamente de SWF, algunos de los problemas que ha estudiado se aplican de modo general a todas las CCR. Sin embargo, hay otros (incluyendo el famoso «teorema de imposibilidad»), que son específicos de las SWF.

Aunque desde el punto de vista lógico una SWF o una CCR puede ser definida de cualquier modo consistente que nos plazca, la consistencia no es la sola virtud que un mecanismo de elección colectiva debe satisfacer. Por ejemplo, desde el punto de vista lógico

el interés de Hicks (1939) por la «utilidad ordinal» en lugar de por las ordenaciones. El mismo Samuelson fue uno de los primeros en promover el cambio de enfoque.

[7] A este respecto, véase Arrow (1951), pp. 23-24, y Samuelson (1967).

es perfectamente correcto postular la siguiente SWF: Si la persona *A* («ese conocido borrachín») prefiere *x* a *y*, entonces la sociedad debería preferir *y* a *x*, y si *A* es indiferente, entonces también debería serlo la sociedad. Como definición de una SWF cabría calificarla con un término no técnico, a saber: disparatada, y en discusiones serias puede ser útil restringir la clase de las SWF (y de las CCR, en general) eliminando posibilidades como ésta. Un modo de hacerlo es exigir que las SWF (o CCR) satisfagan ciertas condiciones de «sensatez». Puesto que la sensatez es una cuestión de opinión, es útil imponer solamente condiciones muy suaves, que por otra parte cabría pensar no serían para restringir demasiado la clase de las SWF. Ahora bien, sorprendentemente el problema viene desde el otro extremo. En su «Teorema general de posibilidad» Arrow demostró que un conjunto de condiciones aparentemente muy suaves son en conjunto tan restrictivas que excluyen no alguna sino *toda posible* SWF. Veamos ahora este problema.[8]

3.3. El Teorema General de Posibilidad

En este apartado discutiremos de manera no formal las cuatro condiciones que usa Arrow en su teorema, centrándonos en el nervio del razonamiento, dejando su estudio formal para el Capítulo 3*.

Primero, como método de pasar de preferencias individuales a una preferencia social, la SWF debe tener el suficiente alcance para poder trabajar con cualquier conjunto lógicamente posible de ordenaciones individuales. Considérese, por ejemplo, el principio de Pareto como una regla de elección. Da una ordenación social perfectamente correcta si las preferencias individuales son unánimes en el sentido descrito en el último capítulo, pero no conducirá a una ordenación social en otras situaciones, en las cuales dará relaciones de preferencia incompletas y no satisfará este requisito de Arrow. Análogamente, el método de decisión de mayoría puede dar intransitividades a menos que las ordenaciones de preferencia individual

[8] Seguimos aquí la segunda versión del teorema de Arrow, expuesta primero en Arrow (1952) y después en la segunda edición de su libro, Arrow (1963), Cap. VIII. La versión original presentada en Arrow (1950), (1951), contenía un pequeño error en su formulación, que fue corregido por Blau (1957). Véase también Inada (1955), (1964) y Murakami (1961) para otros teoremas de imposibilidad relacionados con el de Arrow.

satisfagan ciertas normas (discutidas en los Capítulos 10 y 10*) y de aquí que el MMD también falle este test. Este requisito de que la regla debe ser válida para toda configuración lógicamente posible de ordenaciones de preferencia individual lo llamaremos *condición de dominio no restringido*, o abreviadamente condición *U*.

Segundo, la SWF debe satisfacer el principio de Pareto en su forma débil, es decir, si todos prefieren x a y, entonces la sociedad debe también preferir x a y. Hemos discutido ya esta condición en el Capítulo 2. La llamaremos el *principio de Pareto débil* o condición *P*.

Tercero, Arrow exige que la elección social entre un conjunto de alternativas dependa de las ordenaciones de los individuos solamente sobre *esas* alternativas y no de otra cosa, como puede ser una clasificación de alternativas «irrelevantes» que no intervengan en esta elección. Supóngase que la elección está entre x e y y que las clasificaciones individuales de x e y permanecen iguales, pero que cambia la clasificación de x frente a alguna otra alternativa z, o la de z frente a otra alternativa w. Lo que se exige es que la elección social entre x e y permanezca no obstante igual. He aquí una analogía: en una elección en la que intervienen el señor A y el señor B, la elección dependería de las ordenaciones (de los votantes) de A frente a B y no de cómo los votantes cataloguen al señor A frente a Lincoln o a Lincoln frente a Lenin.[9] Este requisito se llama *condición de independencia de alternativas irrelevantes* o condición *I*.

Finalmente, se requiere que la SWF no sea dictatorial. Esto es, no debe haber un individuo tal que siempre que prefiera x a y, la sociedad deba preferir x a y, con independencia de la preferencia de todos los demás. Esta es la denominada *condición de no dictadura* o condición *D*.

El teorema, bastante sorprendente, que demostró Arrow es que no hay ninguna SWF que pueda satisfacer simultáneamente estas cuatro condiciones que aparecen suaves. Una a una parecen bastante inocuas, pero juntas producen un monstruo que engulle todas las pequeñas SWF del mundo.

El teorema se demuestra en el Capítulo 3*. A continuación discutimos el significado de este resultado.

[9] Las opiniones sobre Lincoln o Lenin podrían entrar en escena (y de hecho *deben*) si y solamente si las ordenaciones de los votantes de A frente a B cambiasen como consecuencia de una revisión de la opinión sobre Lenin o Lincoln.

3.4. Un comentario sobre la significación de los resultados de Arrow

Desde hace mucho se sabe que algunos métodos de combinar las preferencias individuales en preferencias sociales conducen a inconstancias. Condorcet (1785) señaló intransitividades en la decisión por mayoría hace casi dos siglos. El análisis de inconsistencias de la regla de la mayoría atrajo a pensadores tan brillantes como C. L. Dogson (1876), mejor recordado como Lewis Carroll. El caso más conocido de tal inconsistencia, la llamada «paradoja de la votación», lo indicó por vez primera Nanson (1882). Este ejemplo proporciona una introducción idónea a la naturaleza del problema. Considérense tres individuos 1, 2 y 3 y tres alternativas x, y, y z. Supóngase que el individuo 1 prefiere x a y e y a z, el individuo 2 y a z y z a x y el individuo 3 z a x y x a y. Se comprueba fácilmente que x puede vencer a y por dos votos a uno, y puede vencer a z por el mismo margen, de modo que la transitividad exigiría que x venciera a z también por un voto. Pero de hecho, z vence a x por dos votos a uno. Así pues, el método de decisiones de mayoría conduce a contradicciones.

El resultado es de suyo muy interesante, porque el método de decisión de la mayoría es una CCR muy atrayente. En particular puede ser comprobado fácilmente que el MMD satisface la condición P, la condición I y la condición D. Pero no satisface la condición U, de modo que el MMD no es una SWF aceptable si se usan estos cuatro test. La importancia del teorema de Arrow radica en el hecho de que muestra que este problema se presenta no solamente para el método de decisión de la mayoría, que es después de todo solamente un método de elección social, sino para todo método conocido o desconocido que pueda concebirse. Simplemente no hay posibilidad de obtener una SWF tal que las cuatro condiciones establecidas puedan cumplirse simultáneamente.

Puede ser útil ilustrar esta imposibilidad con algunos otros métodos bien conocidos de decisión social. Un método antiguo es el de votación preferente: a cada alternativa se le asigna un cierto número de tantos por ser la primera en el orden de preferencia de alguien, un menor número por ser la segunda y así sucesivamente; después se suma el número total de tantos recibidos por cada alternativa y gana la que tenga el tanteo más alto. Por ejemplo, en un caso de tres alternativas, supongamos que se le asigna 3 por ser primera,

2 por ser segunda y 1 por ser tercera. Se ve fácilmente que esta SWF no es dictatorial, de modo que cumple la condición *D*. Cumple la regla de Pareto, de modo que pasa la condición *P*. También da una ordenación social completa partiendo de cualquier conjunto de ordenaciones individuales, satisfaciendo así la condición *U*. Por ejemplo, obsérvese que en el caso de la «paradoja de la votación» de Nanson, *x*, *y* y *z* reciben cada una seis tantos y el resultado no es una inconsistencia, sino un empate.

Sin embargo, no pasa la condición *I*. Considérese el ejemplo siguiente: Supongamos que el individuo 1 prefiere *x* a *y* e *y* a *z*, mientras que los individuos 2 y 3 prefieren *z* a *x* y *x* a *y*. Con el sistema de puntuación indicado, *x* y *z* reciben ambos 7 tantos y el resultado es un empate. Considérese ahora un segundo caso en que la clasificación de *x* frente a *z* permanece igual para los tres individuos, mientras que el individuo 1 cambia de opinión acerca de una alternativa irrelevante *y*, y decide que es peor que *x* y *z*. Este cambio mantiene el tanteo total de *x* inalterable, pero *z* obtiene un tanteo más, alcanzando 8 venciendo así a *x*. Aun cuando la ordenación de *x* y *z* sigue siendo la misma para todo el mundo, no lo es la elección social entre *x* y *z*, y esto desde luego infringe la condición *I*. Así pues, esta SWF tampoco logra pasar el test de las cuatro condiciones.

Consideremos a continuación una CCR algo extraña. Supongamos que la preferencia social viene determinada por un código tradicional enteramente especificado que implica una ordenación dada *R** de los estados sociales. Esto satisface la condición *U* (obviamente, puesto que las preferencias individuales no tienen realmente ningún papel), la condición *I* (también obviamente) y la condición *D* (puesto que ningún individuo es un dictador y solamente dicta un código tradicional). Pero esta curiosa SWF viola el principio de Pareto. Supóngase que el código exige que *x* sea preferida a *y*. Esto será así aun cuando personas de la comunidad prefieran *y* a *x*, lo cual infringe la condición *P*.

Y podríamos seguir multiplicando los ejemplos. La importancia del Teorema General de Posibilidades radica en que siempre podemos predecir el resultado, a saber, que el ejemplo específico considerado no pasará las cuatro condiciones, incluso sin examinarlo. El teorema es completamente general en su nihilismo y evita una larga (y quizá inacabable) búsqueda.

Capítulo 3*
FUNCIONES DE BIENESTAR SOCIAL

3*1. El Teorema de Imposibilidad

Una clase particular de reglas de elección colectiva corresponde a las funciones de bienestar social de Arrow.

DEFINICIÓN 3*1. *Una función de bienestar social (en lo sucesivo SWF) es una regla de elección colectiva f, cuyo recorrido está restringido al conjunto de ordenaciones en X. Esta restricción se denomina condición* 0 *sobre f.*

El teorema general de posibilidades de Arrow consiste en imponer ciertas condiciones sobre la función de bienestar social *f* y mostrar que estas condiciones son mutuamente incompatibles. Exponemos estas condiciones más abajo.[1]

[1] Para estas condiciones hemos usado una nomenclatura distinta de la de Arrow. Utilizamos la versión de Arrow (1963).

Arrow		*Nuestra*	
Condición 1′	sin nombre	condición *U*	dominio no restringido
Condición *P*	principio de Pareto	condición *P*	principio de Pareto
Condición 3	independencia de alternativas irrelevantes	condición *I*	independencia de alternativas irrelevantes
Condición 5	no dictadura	condición *D*	no dictadura

Condición U (*dominio no restringido*): El dominio de la regla f debe incluir todas las combinaciones lógicas posibles de ordenaciones individuales.

Condición P (*principio de Pareto*): Para cualquier par x, y en X, $[\forall i : x P_i y] \rightarrow x P y$.

Condición I (*independencia de alternativas irrelevantes*): Sean R y R' las relaciones binarias sociales determinadas por f correspondientes respectivamente a dos conjuntos de preferencias individuales, $(R_1, ..., R_n)$ y $(R'_1, ..., R'_n)$. Si para todos los pares de alternativas x, y en un subconjunto S de X, $x R_i y \leftrightarrow x R'_i y$, para todo i, entonces $C(S, R)$ y $C(S, R')$ son las mismas.

Condición D (*no dictadura*): No hay un individuo i tal que para cada elemento en el dominio de la regla f, $\forall x, y \in X : x P_i y \rightarrow x P y$.

Obsérvese que hemos definido estas condiciones con generalidad para cualquier regla de elección colectiva (y no necesariamente para una SWF), de modo que podemos usarlas después para estudios sobre reglas distintas de las SWF. Nótese también que con la condición D hemos incluido la limitación «para todo elemento en el dominio de la regla f». En ausencia de tal limitación universal, existe el peligro lógico de considerar a un hombre totalmente indiferente como un dictador, puesto que para él la antecedencia $x P_i y$ es falsa para todo x, y en X. La definición algo tosca de Arrow queda abierta a esta interpretación ambigua, cosa ajena a su intención.

A lo largo del libro supongamos que hay al menos dos personas en la sociedad y al menos tres estados sociales alternativos. En una sociedad de un solo hombre hay pocos problemas de elección colectiva y la transitividad es trivial si hay solamente dos estados sociales alternativos. El «Teorema General de Posibilidad» de Arrow es el siguiente (damos aquí la última versión, que se encuentra en Arrow (1963)).

TEOREMA 3*1. *No hay ninguna SWF que satisfaga las condiciones U, P, I y D.*

Para demostrar este teorema utilizaremos dos definiciones y un lema.[2] El lema es de por sí importante, independientemente de la importancia del Teorema General de Posibilidad.

[2] Nuestra demostración del teorema es lógicamente equivalente a la de Arrow. La prueba de Arrow es algo oscura, sobre todo porque el uso de la condición crucial *I* (es decir, su Condición 3) nunca se aclara; de hecho esta condición no es ni siquiera

DEFINICIÓN 3*2. *Un conjunto de individuos V es casi decisivo para x frente a y si x P y siempre que x P_i y para todo i en V, e y P_i x para todo y no en V.*

DEFINICIÓN 3*3. *Un conjunto de individuos V es decisivo para x frente a y si x P y cuando x P_i y para todo i en V.*

A efectos de notación, separamos un cierto individuo J, y escribimos $D(x, y)$ para indicar que J es casi decisivo para x frente a y, y escribimos $\bar{D}(x, y)$ para indicar que J es decisivo para x frente a y.[3] Obsérvese que $\bar{D}(x, y) \rightarrow D(x, y)$.

LEMA 3*a. *Si hay algún individuo J que sea casi decisivo para cualquier par ordenado de alternativas, entonces una SWF que satisfaga las condiciones U, P e I, implica que J debe ser un dictador.*

Demostración: Supongamos que la persona J sea casi decisiva para alguna x frente a alguna y, es decir, $\exists\, x, y \in X : D(x, y)$. Sea z otra alternativa y supongamos que i se refiere a todos los individuos distintos de J. Supongamos que $x P_J y \;\&\; y P_J z$, y que $y P_i x \;\&\; y J_i z$. Obsérvese que no hemos especificado las preferencias de las personas distintas de J entre x y z.

Ahora bien, $[D(x, y) \;\&\; x P_J y \;\&\; y P_i x] \rightarrow x P y$. Además, $[y P_J z \;\&\; y P_i z] \rightarrow y P z$ por la condición P. Pero $[x P y \;\&\; y P z] \rightarrow$ $\rightarrow x P z$ por la transitividad de la relación P de ordenación social estricta.

Se llega a este resultado, $x P z$, sin ningún supuesto sobre las preferencias de los individuos distintos de J entre x y z. Es, desde luego, cierto que hemos supuesto $y P_i z$ y $y P_i x$. Si estas clasificaciones de x frente a y y de y frente a z tienen algún efecto sobre la elección social entre x y z, infringimos la condición I (independencia de alternativas irrelevantes). De aquí que $x P z$ deba ser independiente

mencionada en la demostración. Lo que hemos hecho es reajustar de una forma algo diferente la demostración de Arrow.

[3] *Grosso modo*, una persona es «casi decisiva» si gana cuando hay oposición, y es «decisiva» en sentido propio si gana, haya o no oposición. Obsérvese que si se supone «asociación positiva entre los valores individuales y sociales» (véase Capítulo 5), entonces las dos definiciones son equivalentes. *Por tanto*, si una persona es decisiva a pesar de la oposición, debe serlo cuando otros no se oponen a ella. Sin embargo, en el Teorema 3*1 no se incluye tal condición. Y en ausencia de ella, el ser decisiva es algo más fuerte que ser casi decisiva, pues lo primero implica lo segundo pero no viceversa.

de estos supuestos particulares. Por tanto debe ser la consecuencia sólo de $x P_J z$, con independencia de las demas ordenaciones. Pero esto significa que J es decisivo para x frente a z.

$$D(x, y) \rightarrow \bar{D}(x, z) \tag{1}$$

Supongamos ahora $z P_J x$ & $x P_J y$, mientras que $z P_i x$ & $y P_i x$. Por la condición P, debemos tener $z P x$. Y puesto que $D(x, y)$ & $x P_J y$ & $y P_i x$, concluimos que $x P y$. Por transitividad, $z P y$. Y esto con sólo $z P_J y$, sin especificar nada sobre las preferencias de los otros individuos entre y y z. De aquí que J sea decisivo para z frente a y. El argumento es exactamente similar al usado en la obtención de (1).

$$D(x, y) \rightarrow \bar{D}(z, y) \tag{2}$$

Intercambiando y y z en (2), podemos mostrar análogamente

$$D(x, z) \rightarrow \bar{D}(y, z) \tag{3}$$

Poniendo x en lugar de z, z en lugar de y e y en lugar de x, obtenemos de (1),

$$D(y, z) \rightarrow \bar{D}(y, x) \tag{4}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} D(x, y) &\rightarrow \bar{D}(x, z), && \text{por (1)} \\ &\rightarrow D(x, z), && \text{por las Definiciones 3*2 y 3*3} \\ &\rightarrow \bar{D}(y, z), && \text{por (3)} \\ &\rightarrow D(y, z), \\ &\rightarrow \bar{D}(y, x), && \text{por (4).} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$D(x, y) \rightarrow \bar{D}(y, x) \tag{5}$$

Intercambiando x e y en (1), (2) y (5), obtenemos,

$$D(y, x) \rightarrow [\bar{D}(y, z) \ \& \ \bar{D}(z, x) \ \& \ \bar{D}(x, y)] \tag{6}$$

Ahora bien,

$$D(x, y) \rightarrow \bar{D}(y, x), \quad \text{por (5)}$$
$$\rightarrow D(y, x)$$

Por (6), tenemos

$$D(x, y) \rightarrow [\bar{D}(y, z) \ \& \ \bar{D}(z, x) \ \& \ \bar{D}(x, y)] \qquad (7)$$

Combinando (1), (2), (5) y (7), se observa que $D(x, y)$ implica que el individuo J es decisivo para cada par ordenado de alternativas (seis en total) del conjunto de tres alternativas (x, y, z) dadas las condiciones U, P e I. Así pues, J es un dictador sobre cualquier conjunto de tres alternativas que contengan x e y.

Consideremos ahora un mayor número de alternativas. Tomemos dos cualesquiera u y v del conjunto total de alternativas. Si u y v son elegidas de tal modo que son las mismas que x e y, entonces se cumple desde luego $\bar{D}(u, v)$, como puede verse tomando una terna consistente en u, v y cualquier otra alternativa z. Si u o v es la misma que x o y (digamos que u y x son la misma pero no v e y) entonces tomamos la terna consistente en x (o u), y y v. Puesto que $D(x, y)$ se cumple, se sigue nuevamente que $\bar{D}(u, v)$, y también $\bar{D}(v, u)$.

Finalmente, sean u y v distintas ambas de x e y. Tomemos primero (x, y, u) y obtenemos $\bar{D}(x, u)$, lo que implica desde luego $D(x, u)$. Tomemos ahora la terna (x, u, v). Puesto que $D(x, u)$, se sigue del razonamiento previo que $\bar{D}(u, v)$, y también $\bar{D}(v, u)$. Entonces $D(x, y)$ para algún x e y implica $\bar{D}(u, v)$ para todos los posibles pares ordenados (u, v). Por tanto, el individuo J es un dictador y queda demostrado el LEMA 3*a.

El Teorema 3*1 se demuestra usando el Lema 3*a.

Demostración. Mostramos que dadas las condiciones U, P e I, debe haber un individuo que sea casi decisivo sobre algún par ordenado de alternativas. Hacemos la suposición contraria y mostramos que conduce a una contradicción.

Para cualquier par de alternativas hay al menos un conjunto decisivo: el conjunto de todos los individuos, gracias a la condición P. Así pues, para cada par de alternativas hay también al menos un con-

junto casi decisivo, puesto que un conjunto decisivo es también casi decisivo. Comparemos todos los conjuntos de individuos que son casi decisivos para alguna elección entre pares (no necesariamente el mismo par), y de ellos elijamos el menor (o uno de los menores). Llamemos V a este conjunto y supongamos que sea casi decisivo para x frente a y.

Si V contiene solamente un individuo, entonces no necesitamos seguir adelante. Si contiene dos o más individuos, dividimos V en dos partes: V_1 conteniendo un solo individuo y V_2 conteniendo el resto de V. Todos los individuos no contenidos en V forman el conjunto V_3.

Debido a la condición U podemos suponer cualquier combinación lógicamente posible de ordenaciones individuales. Tomemos las siguientes:

(1) Para todo i en V_1, $x P_i y \ \& \ y P_i z$.
(2) Para todo j en V_2, $z P_j x \ \& \ x P_j y$.
(3) Para todo k en V_3, $y P_k z \ \& \ z P_k x$.

Puesto que V es casi decisivo para x frente a y, y puesto que cada individuo en V prefiere x a y, y cada individuo no en V prefiere lo opuesto, debemos tener $x P y$. Entre y y z, solamente miembros de V_2 prefieren z a y, y el resto prefiere y a z, de modo que si $z P y$, entonces V_2 debe ser un conjunto casi decisivo. Pero V fue elegido como el menor conjunto casi decisivo y V_2 es menor que aquél (siendo un subconjunto propio de él). De aquí que $\sim(z P y)$. Entonces para que R sea completa como se requiere para la condición U, debe cumplirse $y R z$. Pero $x P y \ \& \ y R z \rightarrow x P z$. Ahora bien, solamente el individuo en V_1 prefiere x a z, el resto prefiere z a x, de modo que un cierto individuo ha resultado ser casi decisivo. De aquí que haya una contradicción en la suposición originaria.

Obsérvese que esta demostración es válida aunque V_3 sea vacío, como ocurrirá si V contiene a todos los individuos —una posibilidad que no se ha descartado.

El teorema se sigue ahora del Lema 3*a, puesto que un individuo casi decisivo sobre algún par debe ser un dictador completo.

Capítulo 4
ELECCION FRENTE A ORDENACIONES

4.1. Transitividad, cuasi-transitividad y aciclicidad

Una SWF es un tipo especial de una regla de elección colectiva; requiere que todas las preferencias sociales sean ordenaciones, es decir, las preferencias sociales deben ser reflexivas, completas y transitivas. Se señaló en el Capítulo 1 que si se requiere que haya una mejor alternativa en cada subconjunto (es decir, que haya una «función de elección»), la reflexividad y la completitud son indispensables, pero la transitividad no es realmente necesaria. Dada la transitividad y completitud de una relación de preferencia, la condición necesaria y suficiente para la existencia de una función de elección es una condición que llamamos «aciclicidad» en el Capítulo 1*. Si x_1 es preferida a x_2, x_2 a x_3 y así sucesivamente hasta x_n, entonces la aciclicidad requiere que x_1 sea considerada al menos tan buena como x_n. Obviamente, esta condición es mucho más débil que la transitividad, que hubiese requerido que x_1 fuese estrictamente preferida a x_n, y además hubiese exigido la transitividad de la indiferencia.[1] La transitividad, dicho sea de paso, es esencialmente una condición sobre «ternas», es decir, sobre conjuntos de tres alternativas. Si se cumple

[1] La aciclicidad es una prima hermana de la «semitransitividad» de Houthakker (1950), definida en el contexto de la teoría de la preferencia revelada: si x_1 se revela preferida a x_2, y así sucesivamente hasta x_n, entonces x_n no debe revelarse preferida

la transitividad para todas las ternas, debe ser entonces válida para todo el conjunto, independientemente de la longitud de la secuencia que tomemos. Esto no es cierto para la aciclicidad. Una relación de preferencia puede ser acíclica sobre todas las ternas y no obstante infringir la aciclicidad para todo el conjunto, como fue demostrado en el penúltimo párrafo del Apartado 1*5 en el Capítulo 1* (p. 22).

El resultado de «imposibilidad» de Arrow se aplica a las SWF. Pero si el objetivo de Arrow es sólo asegurar que «partiendo de un entorno cualquiera habrá una alternativa elegida»,[2] entonces eso puede garantizarse exigiendo meramente aciclicidad de preferencia social sin requerir transitividad. Llamaremos funciones de decisión social (SDF) a las reglas de elección colectiva que generan relaciones de preferencia que son suficientes para la existencia de funciones de elección.

¿Es significativa la distinción entre SWF y SDF, o es quisquillosa? Al parecer, tiene su significado. En primer lugar, el resultado de «imposibilidad» de Arrow es válido para las SWF pero no para las SDF, como se demuestra en Sen (1969). Hay reglas de elección colectiva que son suficientes para la elección social y que satisfacen las cuatro condiciones de Arrow (Teorema 4*1). De hecho, estas condiciones pueden reforzarse sustancialmente (por ejemplo, excluyendo dictadores locales así como dictadores globales, exigiendo el principio fuerte de Pareto y no meramente el principio débil como hace Arrow) sin que surja inconsistencia alguna (Teorema 4*2 y 4*4). El teorema de imposibilidad de Arrow es precisamente un resultado de pedir ordenaciones sociales opuestas a funciones de elección.

a x_1. Dada la completitud, la aciclicidad y la semitransitividad son equivalentes excepto por la diferencia entre ser «preferida» y ser «revelada preferida». La última es, en cierto aspecto, *menos* exigente, puesto que en el contexto de la teoría de la demanda las alternativas se ofrecen en conjuntos específicos («conjuntos de presupuesto»); pero en otro aspecto es *más* exigente, puesto que la indiferencia es eliminada en la mayoría de las presentaciones de la teoría de la preferencia revelada.

[2] Arrow (1963), p. 120. Arrow destaca también la importancia de «la independencia de la elección final respecto del camino que conduce a ella». Cuando el conjunto de elección incluye más de una alternativa, esto no es nunca exactamente cierto, en un sentido estricto, ni siquiera con transitividad total, pues las alternativas que se elijan pueden depender del camino. Sin embargo, dada la transitividad, se garantiza que una de las mejores alternativas será elegida independientemente del camino. Lo mismo se cumple con la aciclicidad, siempre que la indiferencia vaya seguida de un ensayo de ambas alternativas indiferentes frente a las restantes.

Una ilustración servirá de ayuda. Consideremos una CCR que declara a x socialmente mejor que y si es superior según Pareto a y, y declara a x socialmente al menos tan buena como y si y no es superior según Pareto a x. Consideremos ahora el caso de la «paradoja de la votación» discutido antes, en el que la persona 1 prefiere x a y e y a z, la persona 2 prefiere y a z y z a x, y la persona 3 prefiere z a x y x a y. La CCR especificada declarará a x, y y z indiferentes entre sí. En este caso no hay problema y se cumple la aciclicidad y la transitividad. Consideremos ahora solamente a las personas 1 y 2, sin que exista la persona 3. Por nuestra CCR tenemos ahora a y socialmente preferida a z, x e y indiferentes, y x y z también indiferentes. No se cumple la transitividad pero sí la aciclicidad y hay una mejor alternativa en cada subconjunto. Puede mostrarse que esto es cierto para toda configuración de preferencias individuales, de modo que se cumple la condición U. Esta SDF satisface también el principio de Pareto puesto que se basa en él; satisface la independencia de alternativas irrelevantes, puesto que la preferencia social entre cualquier x y cualquier y depende solamente de las preferencias individuales entre x e y; y también satisface la condición de no dictadura, puesto que la CCR no declara que x sea socialmente mejor que y a menos que todo el mundo considere que x es al menos tan buena como y.

Una condición más débil que la transitividad pero más fuerte que la aciclicidad es la «cuasi-transitividad», condición que puede ser totalmente expresada en términos de ternas. Si x es preferida a y e y a z, entonces x debería ser preferida a z. Es algo parecido a la transitividad, pero no exige que la indiferencia sea transitiva. La CCR descrita en el último párrafo conduce a relaciones de preferencia social cuasi-transitivas y es, por tanto, bastante fácil de analizar en términos de ternas solamente. La diferencia entre transitividad y cuasi-transitividad, aunque aparentemente ligera, es de hecho suficiente para sacarnos del resultado de imposibilidad de Arrow relativo a la ordenación social y darnos un resultado de posibilidad directo relativo a la elección social.

4.2. Elección colectiva y condiciones de Arrow

¿Significa esto que el problema de Arrow no es realmente importante para la elección social? Me temo que no. Lo que todo esto en

realidad muestra es lo *económico* del teorema de imposibilidad de Arrow. Relájese cualquiera de sus restricciones y el resultado se desploma; si no, habríamos sido capaces de reforzar inmediatamente el teorema de Arrow. Las condiciones cuya inconsistencia mostró Arrow no son condiciones que él considerase como *suficientes* para un sistema satisfactorio de elección colectiva, sino condiciones *necesarias* y plausibles. Que estas condiciones no puedan probablemente ser consideradas como suficientes resulta claro del ejemplo que utilizamos para mostrar la consistencia de estas condiciones. En él se hacían indiferentes todos los puntos óptimos de Pareto, lo cual es improbable que atraiga a alguien que esté preocupado por consideraciones de distribución. Aunque sólo era un ejemplo, no está claro que otros ejemplos resulten más atrayentes.

De hecho, obsérvese que el Lema 3*a, que dice que cualquier persona que sea decisiva sobre un par debe ser un dictador, sigue en pie, ya que la demostración no emplea más que la cuasi-transitividad. Usando este resultado, puede demostrarse[3] que todas las SDF que satisfagan las condiciones *U*, *I*, *P* y *D* y den preferencia social cuasi-transitiva deben representar una forma «oligárquica» de toma de decisión. Habría un grupo identificable y único de personas en la comunidad tal que si una de ellas prefiere estrictamente cualquier x a cualquier y, la sociedad debe considerar a x al menos tan buena como y; y si todos los miembros del grupo prefieren estrictamente x a y, entonces la sociedad debe también preferir x a y. El ejemplo que pusimos corresponde al caso en que toda la comunidad pertenecía a esa «oligarquía»; los otros casos parecen ser menos atrayentes *prima facie*.

Está claro que ni siquiera la cuasi-transitividad es necesaria para una SDF, puesto que la aciclicidad es suficiente para las funciones de elección. Y es posible considerar ejemplos más complejos pero también más atrayentes con aciclicidad. Pero el hecho es que las condiciones de Arrow deben considerarse, no demasiado exigentes como es usual suponer en el contexto de su resultado de «imposibilidad», sino demasiado débiles. Una SDF puede pasar todos los test de Arrow y parecer no obstante muy poco apetecible. En los próximos capítulos y notas se introducirán y analizarán otras condiciones sobre elección colectiva.

[3] Demostrado por A. Gibbard en 1969 en un artículo no publicado.

4.3. Racionalidad y elección colectiva

Hay también una segunda razón para no alegrarse de la ausencia formal de la imposibilidad de Arrow para una función de elección social. El hecho de que exista una mejor alternativa en cada subconjunto es por sí mismo una base firme para elección racional, pero, ¿es una base completamente satisfactoria? Consideremos el caso en que x sea preferida a y, y a z y que x y z sean indiferentes. Existe una función de elección, y, en particular, para la elección entre las tres alternativas x es la única mejor no siendo peor que cualquiera de las otras dos. Pero considérese la elección entre x y z. Cada una de ellas es «mejor», puesto que es tan buena como la otra. ¿Sería correcto describir un proceso de elección como «racional» si puede elegir x o z en una elección entre las dos, pero en cambio tiene que elegir necesariamente x si la elección es entre x, y, z? Esto infringe la propiedad β (definida en el Capítulo 1*), que exige que si dos alternativas son ambas mejores en un subconjunto, entonces una de ellas no debería ser mejor en todo el conjunto sin que la otra lo sea también en ese conjunto. La otra propiedad de racionalidad, a la que llamamos propiedad α, no parece ocasionar problemas. Requiere que si x es la mejor en un conjunto completo, entonces debe ser también la mejor en todos sus subconjuntos. Esto lo cumplen todas las CCR de las que nos hemos ocupado hasta ahora. ¿Es la propiedad α suficiente o deberíamos también exigir la propiedad β?

De hecho, hay procesos de selección que no satisfacen la propiedad β. Dos australianos pueden empatar en el campeonato de Australia en algún juego, sin ser capaces ninguno de vencer al otro, y no obstante ocurrir que uno de ellos se proclame campeón del mundo por vencer a todos los no australianos, mientras que el otro no. Análogamente, dos poetas o científicos pueden conseguir los mismos honores nacionales y solamente uno recibir algún honor internacional como el Premio Nobel, sin que esto parezca irracional en ningún sentido significativo.

Así pues, la cuestión de si debe exigirse que las funciones de elección social satisfagan la propiedad β sigue siendo problemática. *Ceteris paribus*, parece desde luego mejor satisfacer β que no satisfacerla. Pero el conflicto que entraña el problema es muy general, y además las condiciones no son necesariamente inmutables. Sabemos que una relación que genera una función de elección que satisface

la propiedad β debe ser una ordenación (Lema 1*q). De aquí que una SDF que genere relaciones de preferencia que den funciones de elección que satisfacen β debe ser una SWF. El teorema de imposibilidad de Arrow sobre las SWF se transformará fácilmente en un teorema de imposibilidad sobre las SDF si se impone también la propiedad β como una condición necesaria de elección social (Teorema 4*5). Entonces una al menos de las cuatro condiciones de Arrow debe ser suprimida en aras de la consistencia. La cuestión real es, por tanto, no si la propiedad β es algo bueno, sino si es mejor que cualquiera de las otras cuatro condiciones en el contexto de una SDF. Algo hay que sacrificar, y la propiedad β, atrayente por sí misma, puede considerarse menos indispensable que las otras posibles candidatas para eliminación.

Sin embargo, como se argumentó en el último apartado, el panorama es realmente más complejo que el resultar de atender exclusivamente al «teorema de imposibilidad». Hay otras condiciones que considerar a la hora de elegir un mecanismo satisfactorio de elección colectiva. Este campo abunda en conflictos y dilemas, y puesto que el de Arrow es sólo uno de ellos, no basta con tratar de resolver ese problema particular. En los capítulos que siguen al 4* estudiaremos algunos de estos problemas, que nos ayudarán a tener una visión más clara del problema de la elección colectiva.

FUNDADA EN 1620 QUITO

Capítulo 4*
FUNCIONES DE DECISION SOCIAL

4*1. Teoremas de Posibilidad

Una regla de elección colectiva *f* que invariablemente especifique una *ordenación* social *R* es una SWF. Pero, como señalábamos en el Capítulo 1*, una ordenación no es una condición necesaria ni suficiente para la existencia de una función de elección. Es suficiente para conjuntos finitos, pero ni siquiera entonces es necesaria. Podemos pues, pensar en ampliar los límites de la regla de elección colectiva *f* para incluir aquellas relaciones de preferencia que no son ordenaciones, pero que no obstante generan una función de elección.

DEFINICIÓN 4*1. *Una función de decisión social (en lo sucesivo SDF) es una regla de elección colectiva f, cuyo recorrido está restringido a aquellas relaciones de preferencia R que generan cada una función de elección C(S, R) sobre el conjunto total de alternativas X. Esta restricción se denomina condición* 0* *sobre f.*

Obsérvese que si consideramos conjuntos infinitos *X*, una SWF puede no ser una SDF, pero con conjuntos finitos *X* una SWF es siempre una SDF, aunque no a la inversa.

¿Afecta al resultado de imposibilidad de Arrow esta ampliación

del recorrido de una regla colectiva en el caso de conjuntos finitos? Ciertamente que sí, como fue señalado en el Capítulo 4.[1]

TEOREMA 4*1. *Hay una SDF que satisface las condiciones U, P, I y D para cualquier conjunto finito X.*

Demostración: Un ejemplo será suficiente para la demostración. Definamos

$$x\,R\,y \leftrightarrow \sim[(\forall i : y\,R_i\,x)\ \&\ (\exists i : y\,P_i\,x)]$$

Evidentemente R es reflexiva y completa. Además, la SDF satisface las condiciones P, I y D. Mostramos ahora que R es cuasi-transitiva para cada combinación lógicamente posible de ordenaciones individuales.

$$\begin{aligned}[x\,P\,y\ \&\ y\,P\,z] &\rightarrow [\{\forall i : x\,R_i\,y\ \&\ \exists i : x\,P_i\,y\}\ \&\ \forall i : y\,R_i\,z] \\ &\rightarrow [\forall i : x\,R_i\,z\ \&\ \exists i : x\,P_i\,z] \\ &\rightarrow x\,P\,z\end{aligned}$$

Así pues, R es cuasi-transitiva y por el Lema 1*k no es necesario imponer ninguna restricción al dominio de la SDF definida, es decir, también se satisface la condición U. Esto completa la demostración.

Obsérvese que la relación de preferencia social R generada por la SDF definida más arriba es sólo cuasi-transitiva, no completamente transitiva. Supongamos que hay dos individuos 1 y 2 y tres alternativas x, y y z tales que $x\,P_1\,y$ & $y\,P_1\,z$ y $z\,P_2\,x$ & $x\,P_2\,y$. Tenemos entonces $x\,P\,y$, $y\,I\,z$ y $x\,I\,z$, lo cual es claramente intransitivo.[2] Todo lo que se garantiza es que una «mejor» alternativa estará presente en cada subconjunto, es decir, que existirá una función de elección independientemente de cuáles sean las preferencias individuales.

Podemos reforzar el Teorema 4*1 reforzando la regla de Pareto y la condición de no dictadura. Definimos

[1] Sobre esto, véase Sen (1969).

[2] Así pues, la SDF indicada no es una SWF con dominio no restringido, y esto no es un contraejemplo al Teorema General de Posibilidad de Arrow.

Condición P (regla fuerte de Pareto)*: Para cualquier par x, y en X

$$[\forall i : x R_i y \ \& \ \exists i : x P_i y] \rightarrow x P y$$

y

$$[\forall i : x I_i y] \rightarrow x I y$$

*Condición D**: Para ningún individuo i existe un par x, y en X tal que para todo $(R_1, ..., R_n)$ en el dominio de f se cumpla una de las siguientes condiciones:

(1) $x P_i y \rightarrow x P y$

o

(2) $x R_i y \rightarrow x R y$

La condición P^* se define en correspondencia con P del Capítulo 2*, Definición 2*3, y es obviamente una condición más exigente que la condición P. La condición D^* está reforzada de dos formas. Primera, mientras la condición D excluye un dictador global, D^* excluye incluso a un dictador local. Ningún individuo debe ser decisivo ni siquiera sobre un solo par. Segunda, también excluye dictaduras del tipo en que una preferencia individual débil R_i podría implicar una preferencia social débil sobre cualquier par de alternativas.

Evidentemente, la condición P^* implica la condición P y la condición D^* implica la condición D, pero no viceversa en ninguno de los dos casos. Sin embargo, se cumple el teorema siguiente:

TEOREMA 4*2. *Hay una SDF que satisface las condiciones U, P*, I y D* para cualquier conjunto finito X.*

La demostración viene proporcionada por el mismo ejemplo que en la demostración del Teorema 4*1. Parecería entonces que el resultado de imposibilidad de Arrow no persiste para aquellas reglas de elección colectiva que son suficientes para elegir una mejor alternativa en cada subconjunto, aun cuando pueden no ser suficientes para generar una ordenación.

Esto en cuanto a conjuntos finitos. Para conjuntos infinitos no existe tal SDF y se cumple el resultado siguiente:

TEOREMA 4*3. *Para un conjunto infinito X, no hay ninguna SDF que satisfaga las condiciones U y P.*

Demostración. Supongamos que cada individuo tiene la misma ordenación con antisimetría, es decir, una cadena tal que $x_2 P_i x_1$, $x_3 P_i x_2$, ... Por la condición U, tal conjunto de ordenaciones de preferencia individual debe estar en el dominio de f, y por la condición P allí no puede haber un elemento socialmente mejor en el conjunto X, lo que demuestra el teorema.

Aun cuando superficialmente el Teorema 4*3 parece un teorema perturbador, lo que de hecho indica es que la forma de plantear el problema no tiene mucho sentido cuando el conjunto de alternativas X es infinito. Puesto que las funciones de elección *individuales* podrían no existir aunque existan ordenaciones individuales sobre un conjunto infinito, no tiene objeto esperar invariablemente la existencia de una función de elección *social*. Además, se cumple el teorema siguiente:

TEOREMA 4*4. *Si al menos una ordenación individual R_i para cada elemento en el dominio de f genera una función de elección en el conjunto X, hay entonces una SDF que satisface las condiciones P, I y D* y la condición U sometida a la restricción señalada.*

Demostración. Elíjase la regla de elección colectiva tal que $x R y \leftrightarrow \leftrightarrow \sim[\forall i : y P_i x]$, para todo x e y. Resulta claro que $[x \in C(S, R_i)] \rightarrow \rightarrow [x \in C(S, R)]$, para cualquier x en cualquier S, y cualquier i. Se sigue que puesto que al menos un individuo tiene una función de elección, así debe ser también para la sociedad. Puede mostrarse fácilmente que se cumplen las condiciones P, I y D^*.[3]

En este caso no parecen ser especialmente profundas las complicaciones planteadas por conjuntos infinitos. La dificultad real de buscar una solución al «problema de imposibilidad» en términos de la SDF (como opuesta a la SWF) reside en la relevancia de la propiedad β como una condición de racionalidad en la elección. Se mostró en el Capítulo 1* que mientras una función de elección

[3] Obsérvese que la condición P^* puede ser infringida. No es posible reforzar el Teorema 4*4 sustituyendo la condición P por la P^*, como lo muestra el siguiente contraejemplo. Supongamos que todos los individuos son indiferentes entre todas las alternativas, excepto uno que tiene una cadena sin un elemento que sea el mejor. Por la condición P^*, la sociedad debe tener entonces la misma cadena sin un elemento que sea el mejor.

generada por una relación binaria siempre satisface la propiedad α, satisface la propiedad β si y solamente si R es una ordenación. Si se encuentra que la propiedad β es un aspecto esencial de la elección racional (examinamos esta cuestión en el Capítulo 4), entonces el teorema siguiente puede resultar perturbador:

TEOREMA 4*5. *No hay SDF que satisfaga las condiciones U, P, I y D, tal que cada R del recorrido de la SDF deba generar una función de elección que satisfaga la propiedad* β.

La demostración se sigue directamente del Lema 1*q y Teorema 3*1.

El Teorema 4*5 representa el «problema de imposibilidad» directamente en función de la elección colectiva y de su racionalidad, y aclara uno de los puntos principales. La cuestión parece convertirse en si imponemos o no la condición de racionalidad β.[4]

[4] Véanse también los Capítulos 5, 5*, 6 y 6*.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo 5
VALORES Y ELECCION

5.1. La economía del bienestar y los juicios de valor

La economía del bienestar se ocupa de recomendaciones acerca de medidas de política económica. Explora los caminos de llegar a conclusiones tales como «Dada la elección entre las situaciones sociales x e y, debería elegirse x». Es obvio que la economía del bienestar no puede estar «libre de valores», ya que las recomendaciones a las que aspira llegar son en sí mismas juicios de valor. En vista de esto resulta algo misterioso el que tantos economistas notables se hayan entretenido en debatir las perspectivas de encontrar una economía del bienestar libre de valores.

La llamada «Nueva Economía del Bienestar» (1939-1950) se preocupó mucho por derivar juicios sobre medidas de política económica partiendo de premisas puramente factuales.[1] Nos remitimos a uno de los más destacados autores de este período:

> De hecho, hay un modo fácil de superar este derrotismo, un test perfectamente objetivo que nos permite discriminar entre aquellas reorganizaciones que mejoran

[1] Véanse las controversias en Kaldor (1939), Hicks (1939a), (1941), Scitovsky (1941), Samuelson (1950), y Little (1949a), (1950). Véase también Graaff (1937) y Mishan (1960).

la eficiencia productiva y las que no. Si *A* mejora económicamente en tal grado con el cambio que puede compensar a *B* de su pérdida y todavía tener algún sobrante, entonces la reorganización es una *mejora inequívoca*.[2]

Esto parece oponerse al punto de vista filosófico prevalente que afirma «la imposibilidad de deducir una proposición 'debe' de una serie de proposiciones 'es'».[3] Recientemente han surgido algunas dudas acerca de la validez de esta «ley»[4] y su compatibilidad lógica con algunas otras proposiciones en ética.[5] Pero sería un error pensar que esa búsqueda de una economía del bienestar libre de valores que caracterizaba a la llamada Nueva Economía del Bienestar tiene alguna relación con estas dudas. Por razones que resultan algo oscuras, el ser «libre de valores» o «libre de ética» se ha identificado frecuentemente con el estar libre de conflicto interpersonal. La suposición implícita parece ser que si todos están de acuerdo sobre un juicio de valor, entonces no es un juicio de valor en absoluto, sino algo perfectamente «objetivo».

Por esta razón, el principio de Pareto ha sido tomado a menudo como libre de juicios de valor. En el lado negativo, el célebre ataque de Robbins sobre el uso de juicios de valor en economía se concentró exclusivamente en las dificultades de las comparaciones interpersonales (Robbins (1932)). El comentario hicksiano sobre la «objetividad» del test de compensación citado más arriba está también basado en la idea de que si se pagan compensaciones, todo el mundo sale ganando y no hay conflicto interpersonal.[6] Es destacable que incluso Samuelson concluyese su artículo sobre la Nueva Economía del Bienestar afirmando que la «única definición consistente y *libre de ética* de un aumento en la renta potencial de un grupo es la que se basa en un desplazamiento uniforme de la función de posibilidades de la utilidad para el grupo».[7] Aquí nos hemos limitado a los incondicionales; otros

[2] Hicks (1941), p. 108; las cursivas son mías.

[3] Hare (1961), p. 29. Esto se conoce a veces por el nombre de «Ley de Hume», por una aseveración hecha por él en *Treatise*, III.I,i.

[4] Véase, por ejemplo, Black (1946) y Searle (1964), (1969).

[5] Véase, por ejemplo, Sen (1966a).

[6] Hicks (1941), p. 109. Sin embargo, argumentar que es una «mejora inequívoca» cuando «podrían» pagarse compensaciones, sean o no realmente pagadas, reintroduce el conflicto interpersonal.

[7] Samuelson (1950), pp. 19-20; las cursivas son mías. Si las comparaciones de renta real son juicios de valor, entonces esto no es una definición «libre de ética».

ejemplos de la misma factura son fáciles de encontrar en la literatura sobre economía del bienestar.

Aunque el punto de vista que estamos discutiendo es analíticamente objetable, su base intuitiva es muy clara. Si todo el mundo está de acuerdo acerca de un cierto juicio de valor, el hecho de que no pueda ser comprobado no producirá gran conmoción. Hay una clara diferencia entre los juicios de valor que todos aceptan y aquellos que unos aceptan y otros no. Sin embargo, lo que es extraño en todo esto es el hecho de que la gente intente buscar criterios de bienestar «libres de valores» o «libres de ética».[8] Los juicios de valor unánimes pueden proporcionar la base para una economía del bienestar muy satisfactoria, pero no porque no sean juicios de valor, sino porque son aceptables para todos. Esta trivialidad no sería digna de mención si no se hubiese afirmado o implicado lo contrario en gran parte de la literatura.

5.2. Contenido de la economía del bienestar: un dilema

La economía del bienestar se ocupa de recomendaciones acerca de medidas de política económica. Una recomendación de este tipo puede derivarse empleando (a) algunas premisas factuales, (b) algunos juicios de valor, y (c) cierta lógica necesaria para la derivación. De lo primero se ocupa la economía «positiva» y no la economía del bienestar. Lo segundo, se alega, no puede ser objeto de discusión científica, ya que uno no puede argumentar sobre juicios de valor (como dijo Robbins, «es un caso de tu sangre o la mía»[9]). Lo tercero, la lógica, es una disciplina totalmente diferente. ¿Cuál puede ser entonces la materia de la economía del bienestar? ¿Existe realmente?

Aunque él no lo plantea de una forma tan escueta, la proscripción magistral que hace Graaff (1957) de la economía del bienestar está en esta misma línea. De hecho, el nihilismo ha sido la nota do-

Si, por el contrario, tales comparaciones no son juicios de valor entonces esta no es la *única* definición consistente «libre de ética». Sin embargo, véase Samuelson (1947), Capítulo 8.

[8] Para una crítica de cómo utilizan los economistas el significado y la relevancia de los juicios de valor, véase Little (1957). Véase también Streeten (1950) y Dobb (1969).

[9] Robbins (1932), p. 132.

minante en un cierto número de estudios sobre la economía del bienestar, que tiene, como señala Baumol, «una semejanza mal disimulada con las notas necrológicas».[10] Si la materia de la economía del bienestar está vacía, como podría pensarse por el razonamiento descrito en el último párrafo, no es de extrañar ese poder de atracción del nihilismo. Pero el problema de ese razonamiento es que es muy engañoso por estar basado en definiciones muy arbitrarias.

En primer lugar, los estudios lógicos implicados en la derivación de recomendaciones relativas a medidas de política económica no pueden ser excluidos del cuerpo de la economía del bienestar. En cualquier disciplina en la que intervenga el razonamiento analítico está involucrada la lógica, ya sea como argumentación no formal, como lógica formal o como operaciones matemáticas. El que estos estudios sean clasificados como ramas de la lógica o, por el contrario, de la disciplina en cuestión, es en gran parte un problema de *conveniencia*. Ahora bien, parece más propio permitir a los economistas hacer los estudios lógicos necesarios para derivar recomendaciones sobre medidas de política económica, que no dejarlo en manos de los lógicos o matemáticos, lo cual es una razón de bastante peso para considerarlas como una parte de la disciplina de la economía del bienestar. De hecho, muchos de los estudios considerados como parte de la economía tradicional, por ejemplo, aquellos que se ocupan de la existencia, eficiencia y estabilidad del equilibrio general competitivo, son casi exclusivamente estudios lógicos.

En segundo lugar, los juicios de valor no siempre se suponen «dados» en los ejercicios de recomendaciones de política económica. De hecho, el problema de la existencia de la función de bienestar social (SWF) en el sentido de Arrow se ocupa de la cuestión de obtener un conjunto de juicios de valor para la sociedad como un todo (reflejado por la ordenación social) basados en las ordenaciones de los individuos. También aquí los estudios son, en su mayor parte, ejercicios de lógica, pero los perfiles del problema están definidos por la cuestión de pasar de las preferencias de los individuos a los valores sociales, sobre cuya base han de hacerse las elecciones públicas. Gran parte de la reciente discusión sobre el bienestar económico se ha ocupado, como es natural, de estos problemas.

[10] Baumol (1966), p. 2.

Finalmente, parece muy dudosa esa dicotomía entre hechos y valores que va implícita en el argumento nihilista. Se basa en una lectura muy estrecha de la naturaleza de los juicios de valor. De hecho puede argumentarse que las controversias en la economía del bienestar han sido muchas veces estériles debido a un reconocimiento inadecuado de la naturaleza de los juicios de valor.[11] Volveremos sobre esta cuestión en el apartado siguiente.

5.3. Juicios básicos y no básicos

La división de los juicios de valores en dos clases puede ser útil para nuestro propósito.[12] Un juicio de valor puede llamarse «básico» para una persona si se supone que el juicio se aplica bajo todas las circunstancias concebibles y «no básico» en caso contrario.[13] Por ejemplo, una persona puede expresar el juicio: «Un aumento en la renta nacional medido en los precios de referencia y al final del año indica una mejor situación económica». Podemos preguntarle si se adherirá a este juicio bajo todas las circunstancias posibles y seguir preguntando: «¿Diría usted lo mismo si las circunstancias fuesen tales y tales (por ejemplo, si los pobres fuesen mucho más pobres)?».[14] Si resulta que revisa el juicio bajo ciertas circunstancias, entonces puede decirse que el juicio es no básico en su sistema de valores. Si, por otra parte, no hay situación en que cierta persona, considere justificable matar a un ser humano, entonces «No debo matar a un ser humano» es un juicio de valor básico en su sistema.

La distinción es sencilla y en ella se basa la relevancia de las consideraciones factuales en los debates éticos. *Grosso modo* puede argumentarse que mientras un cierto juicio de valor sea básico para su autor, uno no puede realmente discutirlo en la misma forma que

[11] Para un estudio excelente de las teorías de los juicios de valor, véase Nowell-Smith (1954). Un enfoque particularmente interesante puede encontrarse en Hare (1960), (1963).

[12] Este y otros métodos de particionar juicios de valor se exponen en Sen (1967).

[13] No se afirma aquí que ambas categorías *deban* ser no vacías.

[14] Una línea alternativa es preguntarle lo que haría si el criterio condujese a intransitividad de preferencia, como es ciertamente posible en algunas circunstancias (véase Gorman (1955), y también el Capítulo 2* anterior).

uno discute una aseveración factual o analítica, pero si es no básico, la discusión puede tomar una forma factual o analítica.

Merece la pena hacer algunas advertencias a fin de evitar posibles malentendidos en la naturaleza de la distinción. Primera, las circunstancias factuales que son admisibles no son necesariamente probables. Obsérvese el siguiente intercambio:

A: Debería permitirse a los hombres y mujeres vestirse como quisieran.

B: ¿Incluso si resulta que las minifaldas producen cáncer en los ojos del mirón?

A: En ese caso desde luego que no. Pero no creo que esa situación sea muy probable.

Sin embargo, el juicio es no básico y la discusión puede tomar una forma factual, aunque dudo que fuese muy fructífera.

Segunda, un juicio de valor puede hacerse condicional bajo ciertas circunstancias. Para mostrar que un juicio es no básico, no habrá que considerar casos que infringen esas condiciones, sino todo lo contrario. Supongamos que expreso el juicio, «En días lluviosos debería llevar un paraguas». El carácter no básico de este juicio no se demuestra señalando que yo recomiendo un curso de acción diferente en un día soleado, sino mostrando que yo puedo recomendar otra cosa incluso para un día lluvioso (si un paraguas cuesta la mitad de los ingresos anuales, por ejemplo).

Tercera, un conjunto de juicios que un individuo sostiene puede resultar *lógicamente* inconsistente, y si es así, todos ellos no pueden ser básicos. Un hombre que juzga que «el consumo hoy debería ser maximizado», y «el consumo a un año vista debería también ser maximizado» no está implicado en tal conflicto lógico, puesto que los dos juicios están en conflicto solamente bajo circunstancias factuales específicas (aunque plausibles). Al menos uno de los dos juicios debe ser no básico, pero no por razones analíticas. Por el contrario, el hombre bondadoso que desea para todos una renta más elevada que el promedio nacional parece tener un problema analítico de cierta magnitud.

5.4. Hechos y valores

Si una persona propone un juicio de valor y otra lo niega, podríamos preguntar, ¿pueden discutir sobre ello? Difieren en lo que debería

elegirse ante una elección entre varias alternativas. Suponiendo que las personas entienden el significado del juicio de valor en el mismo sentido, ¿qué queda por discutir? Pueden, desde luego, discutir las «razones» para sostener o no el juicio de valor. Pero podría preguntarse, ¿qué entendemos por «razones»? ¿Cómo puede haber una «razón» para aceptar o negar un juicio de valor, en contraposición a una proposición factual o lógica?

La respuesta parece bastante clara. Si el juicio es no básico, una «razón» para discutirlo puede ser una duda acerca las suposiciones factuales o analíticas subyacentes. Incluso aceptando la célebre ley de Hume de que las conclusiones prescriptivas no pueden derivarse exclusivamente de premisas factuales, no hay duda de que aquéllas pueden extraerse de premisas factuales *entre otras*. Por consiguiente, una persona que quiera rebatir un juicio de valor propuesto por otra puede sostener una discusión científica sobre la validez del juicio de valor examinando la verdad de la premisa factual subyacente o de la derivación lógica. Así pues, las «razones» para recomendar la exclusión de un juicio de valor pueden ser puramente científicas.

Ahora bien, si el juicio expresado resulta ser un juicio «básico» en el sistema de valor de la persona que lo expresa, entonces y solamente entonces puede afirmarse que no puede haber método factual o analítico de discutir el juicio. Parece bastante fácil demostrar que muchos de los juicios de valor que expresamos habitualmente son no básicos.

De un juicio no básico dependiente de un supuesto factual particular es desde luego posible pasar a otro juicio independiente de ese supuesto factual. Considérese, por ejemplo, el juicio de valor «El gobierno no debería incrementar la oferta monetaria más que en proporción a la producción nacional real», basado, supongamos, en una teoría factual que relacione la oferta monetaria y la producción total con la inflación. Si se rebate esta teoría de la inflación, lo cual sería una razón legítima contra el juicio de valor en cuestión, la persona puede pasar a un juicio de valor más fundamental: «El gobierno no debería hacer nada que conduzca a la inflación». Si este juicio se basa también en alguna suposición factual, siendo por tanto no básico, puede repetirse el proceso. Del juicio J_0 basado en suposiciones factuales F_1 se pasa a un juicio (o a un conjunto de juicios) J_1 independiente de F_1; si J_1 depende de suposiciones factuales F_2, se pasa a los juicios J_2 independientes de F_1 y F_2. De esta forma

uno podría esperar alcanzar, en última instancia, en el sistema de valor de esta persona, algún juicio de valor básico J_n, aunque no hay garantía para ello.

Algunas generalizaciones sobre la inutilidad de argumentar sobre los juicios de valor se basan en considerar la naturaleza de los juicios de valor *básicos*, llamados a veces vagamente «fines». En efecto, esta concentración implícita en los juicios de valor básicos ha tenido un efecto pronunciado y fundamental en el desarrollo de la economía. Los economistas, con pocas excepciones, han solido rehuir cualquier discusión sobre los juicios de valor como tales; la situación era la que expuso Robbins en su famoso tratado sobre la naturaleza y significación de la economía, «... no parece lógicamente posible asociar los dos estudios [ética y economía] en otra forma que la de mera yuxtaposición. La economía se ocupa de hechos determinables; la ética, de la valoración y obligaciones».[15] Este contraste sería válido si la ética se ocupase solamente de juicios básicos. Robbins explica su postura de la manera siguiente:

> Si no estamos de acuerdo sobre los fines, es un caso de tu sangre o la mía, o vive o deja vivir, según la importancia de la diferencia o la fuerza relativa de nuestros oponentes. Pero si discrepamos acerca de los medios, entonces el análisis científico puede ayudarnos a menudo a resolver nuestras diferencias. Si no estamos de acuerdo sobre la moralidad de la toma de interés (y entendemos de qué estamos hablando), entonces no hay lugar para discutir.[16]

La dificultad crucial de este enfoque es que no es fácil determinar si un cierto fin, o el correspondiente juicio de valor que expresa ese fin, es básico o no. Tomando el propio ejemplo de Robbins, ¿por qué deben ser necesariamente básicos los juicios de ambas partes sobre la moralidad del interés?

Desde luego, podemos no adoptar una visión tan simple y suplementar el argumento de Robbins con algún otro test de basicidad. Cabría *preguntar* a la persona interesada si tal o cual juicio es básico en su sistema de valores. Pero como nadie habría tenido ocasión de considerar todas las circunstancias factuales concebibles y decidir si en alguno de los casos cambiaría o no el criterio, su respuesta a la pregunta quizá no fuese concluyente. Otro método es pedir a la persona interesada que piense en una serie de revisiones adecuadas de suposi-

[15] Robbins (1932), p. 132.
[16] Robbins (1932), p. 134.

ciones factuales y preguntarle si en cualquiera de los casos considerados cambiaría el juicio. Este proceso nunca establece la basicidad, aunque puede establecer que el juicio no es no básico en cualquier forma obviamente relevante.

Es interesante observar que algunos juicios de valor son demostrablemente no básicos, mientras que ningún juicio de valor es demostrablemente básico. Desde luego, puede ser útil *suponer* que de los juicios de valor que no se ha demostrado que son obviamente no básicos algunos *son* básicos, mientras no se descubra un caso que demuestre que la suposición es equivocada. A este respecto hay una analogía obvia con la práctica, seguida en epistemología, de aceptar en principio una hipótesis factual como cierta, hasta que una nueva observación la refute.

Obsérvese de paso que un juicio de valor básico no tiene que ser necesariamente un principio «último» tal como el J_n definido más arriba. Una restricción adecuada podría convertir un juicio de valor no básico en un juicio básico. Una ilustración puede aclarar este punto. «Una elevación de la renta nacional en cada conjunto de precios positivos implica una mejor situación económica» puede ser no básico, porque la persona que lo expresa puede no sostenerlo si encuentra un «empeoramiento» en la distribución de la renta.[17] En la obtención de un juicio básico podemos movernos a partir de aquí en dos direcciones. O bien podemos preguntar si hay un juicio de valor más *fundamental* (por ejemplo, maximización de utilidad agregada) al cual corresponde un incremento en la renta nacional, no empeorando la distribución de la renta. O bien podemos preguntar si la persona interesada aceptará siempre el juicio de que «un incremento de la renta nacional indica una mejor situación económica *si* la distribución de la renta (medida, digamos, por el coeficiente de Gini) no cambia». Si no fuese así, podemos restringir aún más el juicio. Así pues, aunque no existan juicios de valor «últimos» que puedan encontrarse por el primer método, puede haber juicios básicos que pueden obtenerse con restricciones adecuadas.

Sin embargo, la dificultad de verificar la basicidad persiste también en el segundo método, e incluso si supiésemos que existen algunos

[17] Los problemas de distinguir entre el volumen de la renta nacional y su distribución son desde luego bien conocidos. Véase especialmente Samuelson (1950), Little (1957) y Graaff (1957).

juicios de valor básicos podríamos no ser capaces de decidir si un juicio determinado era uno de ellos. La dificultad fundamental que entraña la tesis «emotivista» de la imposibilidad de hacer argumentos racionales sobre los juicios de valor más allá de un punto, es esta dificultad de decidibilidad. Puede ser que «al final tiene que llegar un momento en el que no se obtienen respuestas nuevas, sino sólo una repetición del precepto: valora esto porque es valioso»,[18] pero no hay ninguna prueba infalible que nos diga si se ha llegado o no a ese punto. Lo cual, desgraciadamente, no proporciona una regla para decidir cuándo la controversia racional es potencialmente fructífera y cuándo no lo es. La no basicidad de un juicio en el sistema de valores de alguien puede a veces establecerse concluyentemente, pero no en el caso opuesto, y tomar un juicio de valor como básico es concederle, en el mejor de los casos, el beneficio de la duda. Parece imposible eliminar la posibilidad de una discusión científica fructífera sobre los juicios de valor.

5.5. Ordenaciones individuales y reglas de elección

Considérese el problema siguiente: Un individuo A prefiere firmemente el estado social x al estado y. Pero sabe que todo el mundo en la comunidad prefiere y a x, y además el individuo A es fuertemente antidictatorial en su concepción de la elección colectiva. ¿Qué debería hacer? Si recomienda y irá en contra de su propia preferencia. Si recomienda x, infringirá sus valoraciones antidictatoriales. El conflicto es claro.

En los modelos de elección colectiva este conflicto es ineludible. Los valores individuales son relevantes para el estudio en dos formas: (a) afectan a las preferencias individuales R_i, y (b) su objetivo es la elección de reglas de elección colectiva CCR. Los valores reflejados en (a) y (b) pueden fácilmente ser conflictivos y ambos conjuntos de juicios no pueden ser «básicos».

Un modo de resolver el problema es asignar a los juicios que subyacen a las CCR un cierto carácter de básicos que las ordenaciones individuales R_i no posean. El modelo puede ser tal, que los individuos expresen sus preferencias y la CCR trate de dar representación

[18] Ayer (1959), p. 244. Véase también Stevenson (1944), (1963).

apropiada de ellas; pero una vez que la CCR elige una ordenación social, los individuos deben sentirse obligados a aceptarla como correcta, independientemente de la ordenación individual que expresaran antes. Un ejemplo de tal modelo puede encontrarse en el proceso de selección del profesorado de algunas universidades donde hay dos turnos de votación. En el primero se vota a los candidatos, y una vez que se alcanza una decisión, todos votan formalmente por el hombre elegido, haciendo así «unánime» la selección.

Sin embargo, este no es el único modelo posible. El extremo opuesto será un caso en el que los individuos están realmente comprometidos de un modo completo con lo que consideran es la preferencia correcta R_i y rechazarían una CCR que no seleccione esa R_i para una línea de conducta pública. Las actitudes individuales hacia la mayoría de los mecanismos reales de elección colectiva suelen caer en un lugar intermedio entre ambos extremos. Uno no va a promover una revolución cada vez que sus preferencias no obtienen una representación completa en la elección colectiva, pero hay casos en que la intención es precisamente esa, y entonces trata de cambiar el mecanismo de elección colectiva. Las demandas de libertad, igualdad y fraternidad en la Revolución Francesa eran básicamente expresiones de disconformidad extrema con el mecanismo colectivo de elección del sistema existente. La existencia de una CCR como un rasgo institucional en una sociedad no es una garantía de su aceptación universal o mayoritaria, pues los mecanismos de elección prevalentes reflejan en realidad un equilibrio de las fuerzas políticas y económicas de la sociedad y no están necesariamente basados en una aprobación unánime o siquiera amplia.

El conflicto real surge cuando una persona aprueba realmente una CCR y quiere también que se elija su propia ordenación de estados sociales en las medidas políticas. Ambas cosas no pueden ser, excepto en el caso especial de que la CCR que aprueba elija la ordenación social que él recomienda. En general, uno u otro de los conjuntos de juicios debe ser no básico y posiblemente ambos.

Harsanyi (1955) distingue entre las «preferencias subjetivas» de un individuo y sus «preferencias éticas» y ha dado una interpretación específica a la distinción. Harsanyi toma las preferencias reales de una persona R_i como sus preferencias subjetivas, y define las preferencias éticas como aquellas que tendría si pensase que tenía una «probabilidad igual» de estar en la situación de cualquier

otro.[19] Harsanyi toma un conjunto de axiomas que aseguran que cada persona maximizará la utilidad esperada. El modelo es bastante específico, y aunque es atrayente, no deja de estar abierto a algunas objeciones (véase Capítulo 9).

La anterior distinción puede adquirir un significado más amplio en el contexto de una CCR. A una persona puede pedírsele que elija entre posibles CCR en términos de sus valores morales. La CCR así elegida puede denominarse su CCR ética. Una relación de preferencia social proporcionada por la CCR ética de tal persona, dado un conjunto real de preferencias individuales, cabe considerarla como las preferencias éticas de esa persona. La definición de Harsanyi corresponde a un procedimiento particular de agregación y representa un caso especial importante de este método más general.[20]

No deseo entrar en la idoneidad del término «ético» en este contexto. Presumiblemente los valores éticos implicados aquí son los que se relacionan con preferencias combinadas y uno podría haber introducido otros valores éticos. No obstante, es importante distinguir entre las preferencias de una persona tal como son realmente y lo que piensa que aceptaría como base para las medidas políticas dadas las preferencias de otros y dadas sus propias valoraciones sobre los procedimientos de elección colectiva. Con esta interpretación, no hay conflicto entre los dos conjuntos de preferencias que puede mantener, puesto que se refieren a dos tipos diferentes de problemas. Uno quizá desee que los demás tuviesen la misma ordenación R_i que él mismo (de ahí la elección de la R_i), pero a la vista de las preferencias de los demás uno podría aceptar la preferencia social que se deriva de una CCR particular (de ahí el compromiso con esa CCR). Esta distinción resultará útil al discutir problemas específicos de elección colectiva.

[19] Ponerse uno mismo en el lugar de otro, tal como lo define Harsanyi, supone adoptar los rasgos subjetivos de esa persona (incluyendo sus preferencias), y no meramente sus circunstancias objetivas. Contrástese con Samuelson (1964), que extiende un modelo de Lerner (1944) sobre «igual ignorancia». Véase Pattanaik (1968a) sobre Harsanyi. Véase también Leibenstein (1965).

[20] Esto no es estrictamente correcto, porque el procedimiento de Harsanyi no se basa en ordenaciones individuales sino en funciones de utilidad individual. El ejemplo de Harsanyi es realmente un caso especial de un «funcional de bienestar social» ético, que definiremos en el Capítulo 8.

5.6. Condiciones sobre las reglas de elección

También podría haber conflictos entre valores que a uno le gustaría ver reflejados en la CCR. Uno de tales ejemplos lo suministra el teorema de imposibilidad de Arrow. Las condiciones *U*, *J*, *I* y *D*, cuando son impuestas a una CCR sujeta a la condición *O* (por ejemplo, a una SWF), entran en conflicto. Evidentemente no todos estos valores podrían ser básicos.

De estas condiciones, la *U*, que exige un «dominio no restringido» pertenece a un nivel lógico algo distinto del resto. Las otras condiciones especifican o califican lo que debería hacerse dadas ciertas configuraciones de preferencias individuales. La condición *U*, afirma en cambio, que la CCR debe ser válida para todas las configuraciones posibles de preferencias individuales. Cabe, desde luego, replicar que ciertas configuraciones de preferencias individuales nunca ocurrirán.[21] Si una persona cree que en la práctica se pueden eliminar ciertas configuraciones quizá no haya razón para exigir la condición *U* a la CCR o la SWF.

El conflicto sería más útil si una persona creyese que una CCR es buena para la mayoría de las circunstancias plausibles, pero objetable para ciertas configuraciones de preferencia que podrían no ser muy plausibles. La bondad de una CCR no es independiente de las configuraciones de preferencia reales, y al pedir que funcione bien en *todas* las circunstancias uno podría eliminar reglas buenas que hubiesen servido bien en la mayoría de los casos, pero no en todos. Entraremos en esta cuestión más adelante al discutir reglas específicas, por ejemplo, el método de decisión de mayoría (Capítulos 10 y 10*). Al exigir la condición *U* además de otras tales como las condiciones *O*, *P* o *I*, uno está pidiendo que la transitividad de la preferencia social, o el principio de Pareto, o la independencia de alternativas irrelevantes, no sea infringida por la CCR ni siquiera para una sola configuración de preferencias individuales, sea o no plausible. Esto es lo que precipita el resultado de imposibilidad de Arrow.

Consideremos algunas otras condiciones generales sobre las CCR.

[21] La posición marxista de que las preferencias de la gente dependen de sus intereses de clase eliminaría inmediatamente ciertas configuraciones lógicamente posibles. De hecho, cualquier teoría determinista de preferencias individuales tendería a restringir algo el patrón de las preferencias individuales, atenuando con ello la necesidad de la condición de dominio no restringido.

Para las CCR que satisfacen la independencia de alternativas irrelevantes, May (1952) ha propuesto un conjunto de condiciones. La condición de *Anonimidad* requiere que si usted tuviese mis preferencias y yo las suyas y así sucesivamente, es decir, si permutamos un conjunto dado de preferencias entre los individuos, la preferencia social debe permanecer invariante. La *neutralidad* exige que la regla de elección no discrimine entre alternativas, y cualquier criterio que nos permita decir que x es socialmente tan buena como y debería ser también suficiente para declarar a w tan buena como z, después de sustituir en el criterio x e y por w y z, respectivamente.[22] La *responsividad positiva* requiere que la relación entre las preferencias individual y social deba ser positiva, es decir, si a x se la considera socialmente tan buena como y en algunas situaciones y x sube en la preferencia de alguien frente a y y no cae en la preferencia de nadie, entonces x debe ser ahora considerada estrictamente mejor que y.

Estas condiciones parecen atrayentes, y May ha demostrado que la única CCR decisiva con un dominio no restringido, que sea independiente de alternativas irrelevantes, anónima, neutral y positivamente responsiva, es el método de decisión de mayoría (véase Teorema 5*1). Una persona que apruebe todas estas condiciones pero que sea reacia a aceptar la regla de decisión de mayoría está en un atolladero, ya que al menos debe rechazar uno de esos juicios.

Además, para algunas configuraciones de preferencias individuales la decisión de mayoría da preferencias sociales que son intransitivas y que de hecho incluso infringen la aciclicidad (por ejemplo, en el caso de «la paradoja de la votación»). De aquí que si exigimos las condiciones señaladas en el último párrafo, debemos rechazar entonces no solo la transitividad de la preferencia social, sino también la aciclicidad (Teorema 5*2). Si deseamos la aciclicidad debemos rechazar al menos una de las otras condiciones. Es un resultado de imposibilidad similar al de Arrow y plantea otro problema de difícil elección.[23]

[22] En la exposición formal de esta condición en el Capítulo 5*, la «neutralidad» se define para incorporar la «independencia de alternativas irrelevantes». Esto es también cierto en la formulación de May.

[23] Otro resultado interesante debido a Hansson (1969) muestra que la independencia de alternativas irrelevantes, la neutralidad y la anonimidad, cuando se imponen a una SWF, hacen a todas las alternativas socialmente indiferentes. Sin embargo, el resultado no se cumple para las SDF, como se pondrá de manifiesto en el Capítulo 5*.

Si en lugar de exigir responsividad positiva exigimos responsividad *no negativa* (es decir, si x no cae frente a y en la ordenación de nadie, entonces no debe caer en la ordenación social frente a y), el panorama cambia un tanto. Disponemos entonces de cierta libertad y podemos satisfacer la aciclicidad e incluso la cuasi-transitividad. Supongamos además que reforzamos el principio de Pareto pidiendo que x sea socialmente mejor que y si alguien (no necesariamente todos) prefiere x a y, y todos consideran a x al menos tan buena como y. Puede mostrarse entonces que la CCR debe ser la regla de extensión de Pareto, que sigue la regla de Pareto y que la completa arbitrariamente declarando socialmente indiferentes todos los pares que sean no comparables según Pareto (Teorema 5*3). Utilizamos ya esta CCR para demostrar el Teorema 4*1, y antes discutimos su relevancia para las teorías de elección colectiva de Buchanan y Tullock (1962) y otros (Capítulo 2). Según esta regla, si y no es superior según Pareto a x, entonces x es socialmente tan buena como y.

Habrá muchos que rechacen inmediatamente la regla de extensión de Pareto por su completo olvido de los juicios distributivos. Pero quizá no se decidan tampoco a rechazar ninguna de las condiciones —tales como cuasi-transitividad, anonimidad, independencia de alternativas irrelevantes, dominio no restringido o principio de Pareto— que, juntas, implican que la CCR elegida debe ser la regla de extensión de Pareto. Este dilema pertenece también a una clase muy amplia, de la que el resultado de imposibilidad de Arrow es otro ejemplo.

Obsérvese también que la diferencia entre la regla de mayoría y la regla de extensión de Pareto, que son reglas de dos tradiciones muy distintas, parece bastante pequeña en función de las condiciones subyacentes. El método de decisión de mayoría, como la regla de extensión de Pareto, satisface las condiciones de independencia, anonimidad, neutralidad, responsividad no negativa, el principio estricto de Pareto y dominio no restringido. La diferencia entre ambas es que el MMD satisface la responsividad positiva (y no sólo la responsividad no negativa), mientras que la regla de extensión de Pareto no; y la regla de extensión de Pareto satisface la cuasi-transitividad de la preferencia social, la cual no satisface el MMD. Mirando simplemente estas condiciones, sin conocer los teoremas relevantes, es fácil pasar por alto la importancia de estas pequeñas variaciones en las condiciones. Arrow utiliza una condición que

él llama «asociación positiva» y que es incluso más débil que nuestra condición de «responsividad no negativa»,[24] pero el paso de la «responsividad positiva» de May a la «asociación positiva» de Arrow nos lleva casi desde el caso de la regla de mayoría al caso muy diferente de la regla de extensión de Pareto.

La moraleja principal es que estas condiciones son difíciles de juzgar aisladamente y deben contemplarse con la mirada puesta en las otras condiciones con las que pueden combinarse. Los juicios de esta especie sobre la naturaleza de las CCR suelen ser no básicos, y es importante averiguar en qué circunstancias pueden utilizarse estas condiciones antes de firmar sobre la línea de puntos. Algunas condiciones y conflictos adicionales se discutirán en los Capítulos 6 y 6* a fin de proseguir esta línea de razonamiento.

[24] La «asociación positiva» de Arrow requiere que si x no cae frente a y en el juicio de nadie y x era previamente preferida a y, entonces debe seguir siendo preferida. No dice nada sobre el caso en que x era previamente indiferente a y. La responsividad no negativa habría requerido también en este caso que x no cayese frente a y, es decir, x debe permanecer al menos tan buena como y.

Capítulo 5*
ANONIMIDAD, NEUTRALIDAD Y RESPONSIVIDAD

5*1. Condiciones para la regla de mayoría

Un conjunto de condiciones sobre las reglas de elección colectiva pueden ser satisfechas por ninguna regla (como las cuatro condiciones de Arrow para todas las reglas que satisfacen la condición *O*), o por muchas reglas (como la imposición del principio de Pareto y la no dictadura solamente). Entre ambos extremos estará el caso en el que las condiciones sólo pueden ser satisfechas por una única regla. Ilustraremos esto con un conjunto de condiciones que son necesarias y suficientes para el método de decisiones de mayoría (véase May (1952)), método que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 5*1. *El método de decisión de mayoría es válido si y solamente si*

$$\forall x,\ y \in X : x\,R\,y \leftrightarrow [N(x\,P\,y) \geqq N(y\,P\,x)]$$

donde para todo a, b en X, N(a P b) es el número de individuos para los que $a\,P_i\,b$.

Obsérvese que puesto que la indiferencia afectará a ambos miembros, lo anterior equivale a definir $x\,R\,y \leftrightarrow [N(x\,R\,y) \geqq$

$\geqq N(y\,R\,x)]$, donde N es el número de individuos i tal que $x\,R_i\,y$ (véase Arrow (1951)).

El método de decisión de mayoría (MMD) pertenece a una clase de reglas de elección colectiva tal que las preferencias sociales entre x e y dependen solamente de las preferencias individuales entre x e y. Esto está implícito en la condición *I*.

LEMA 5*a. *Para cualquier regla de elección colectiva decisiva que satisfaga la condición I, la relación R de preferencia social sobre cada par x, y en X debe ser una función de las preferencias individuales R_i entre x, y solamente.*

La demostración es inmediata.

Definiremos ahora tres condiciones para las reglas de elección colectiva que satisfacen la condición *I*.

DEFINICIÓN 5*2. *Para todos los pares $(R_1, ..., R_n)$ y $(R'_1, ..., R'_n)$ de n-uplas de ordenaciones individuales en el dominio de una función f de elección colectiva, que los proyecta respectivamente en R y R',*

(1) *Si siendo $(R_1, ..., R_n)$ una reordenación de los componentes de $(R'_1, ..., R'_n)$ implica que $\forall\, x,\ y \in X : x\,R\,y \leftrightarrow x\,R'\,y$, entonces y sólo entonces se cumple la anonimidad (condición A).*

(2) *Si $\forall\, x, y, z, w \in X : [(\forall\, i : x\,R_i\,y \leftrightarrow z\,R'_i\,w)\ \&\ (\forall\, i : y\,R_i\,x \leftrightarrow w\,R'_i\,z)] \rightarrow [(x\,R\,y \leftrightarrow z\,R'\,w)\ \&\ (y\,R\,x \leftrightarrow w\,R'\,z)]$, entonces y sólo entonces se cumple la neutralidad (condición N).*

(3) *Si $\forall\, x, y \in X : [\forall\, i : \{(x\,P_i\,y \rightarrow x\,P'_i\,y)\ \&\ (x\,I_i\,y \rightarrow x\,R'_i\,y)\}\ \&\ \&\ \exists\, k : \{(x\,I_k\,y\ \ \&\ \ x\,P'_k\,y) \vee (y\,P_k\,x\ \ \&\ \ x\,R'_k\,y)\}] \rightarrow (x\,R\,y \rightarrow x\,P'\,y)$, entonces y sólo entonces se cumple la responsividad positiva (condición S).*

La anonimidad requiere que las preferencias sociales sean invariantes con respecto a permutaciones de preferencias individuales. La neutralidad exige que si dos alternativas x e y, respectivamente, tienen exactamente la misma relación entre sí en la preferencia de cada individuo en el caso 1 como z y w en el caso 2, entonces la preferencia *social* entre x e y en el caso 1 debe ser exactamente la misma que la preferencia social entre z y w en el caso 2. La responsividad positiva requiere que si alguna preferencia individual se inclina relativamente en favor de x frente a y permaneciendo igual la preferencia de todos los demás entre x e y, entonces la preferencia social

se desplazaría positivamente en la dirección de x, y si la sociedad era antes indiferente, debe ahora preferir estrictamente x.

LEMA 5*b. *Para cualquier regla de elección colectiva la neutralidad* (N) *implica independencia de alternativas irrelevantes* (I).

La demostración se sigue directamente de la Definición 5*2 (2) si hacemos $x = z$ e $y = w$.

TEOREMA 5*1. *Las condiciones U, A, N y S juntas son necesarias y suficientes para que una regla de elección colectiva sea el método de decisión de mayoría.*[1]

Demostración. De la propia definición del MMD resulta claro que satisface las cuatro condiciones mencionadas, por lo que solamente debemos ocuparnos del aspecto de suficiencia de la demostración. Por el Lema 5*b se satisface la Condición I, y por tanto basta considerar a R_i *sólo entre* x e y para la preferencia social entre x e y. Por anonimidad (A), la preferencia social debe depender solamente del número de individuos que prefieren x a y, y a x y que sean indiferentes, respectivamente. Por neutralidad (N), si $N(x\,P\,y) = N(y\,P\,x)$, entonces $x\,I\,y$, como puede comprobarse suponiendo lo contrario y permutando entonces x e y en cada ordenación de preferencia individual. Dado esto para x e y en X, $[N(x\,P\,y) = N(y\,P\,x)] \rightarrow x\,I\,y$, y por responsividad positiva, $[N(x\,P\,y) > N(y\,P\,x)] \rightarrow x\,P\,y$. Pero ésto es de hecho el método de decisión de mayoría.

El siguiente corolario del Teorema 5*1 plantea un pequeño problema para la elección colectiva:

COROLARIO 5*1.1. *Ninguna SWF puede satisfacer las condiciones U, A, N y S.*

La demostración se sigue directamente del Teorema 5*1 observando que alguna configuración de preferencias individuales da una relación de preferencia de mayoría intransitiva, de modo que esta regla de elección no será una SWF.

El Corolario 5*1.1. es, sin embargo, más débil que el Teorema 3*1 demostrado antes (el Teorema General de Posibilidad) y está implícito en él. Esto se demuestra prontamente con la ayuda de los dos lemas siguientes:

[1] Esto es una versión académica del teorema de May (1952).

LEMA 5*c. *Una regla de elección colectiva que sea anónima debe ser no dictatorial.*

LEMA 5*d. *Una regla de elección colectiva decisiva que sea neutral y positivamente responsiva satisface el principio estricto de Pareto.*

La demostración del Lema 5*c se sigue inmediatamente de las definiciones. Para probar el Lema 5*d, observamos que por neutralidad, $[\forall i: x I_i y] \rightarrow x I y$. De aquí que, por responsividad positiva, si $\exists i: x P_i y \ \& \ \forall i: x R_i y$, entonces $x P y$.

El principio estricto de Pareto (P^*) implica el principio débil de Pareto (P), de modo que el Corolario 5*1.1 se sigue directamente del Teorema 3*1 y Lemas 5*c y 5*d. Sin embargo, el resultado siguiente es más fuerte. La imposibilidad persiste aunque impongamos las condiciones, no a una SWF, sino a una SDF.

TEOREMA 5*2. *No hay ninguna SDF que satisfaga las condiciones U, A, N y S.*

La demostración, teniendo en cuenta el Teorema 5*1 y el Lema 1*1, consiste en mostrar que para alguna configuración de preferencias individuales, el método de decisión de mayoría infringe la aciclicidad, por ejemplo, con tres individuos 1, 2 y 3 y tres alternativas x, y, z, supongamos $x P_1 y P_1 z$, $y P_2 z P_2 x$, y $z P_3 x P_3 y$, de modo que $x P y$, $y P z$, $z P x$, por el MMD.

La condición de Arrow de «asociación positiva entre preferencias individuales y sociales» está más o menos dentro de la misma línea (aunque es más débil) que la condición S (responsividad positiva). Podemos reforzar la condición de Arrow, aunque manteniéndola más débil que la condición S, y observar las consecuencias de reemplazar la condición S por esta condición.[2]

Condición R (*responsividad no negativa*): Para todos los pares $(R_1, ..., R_n)$ y $(R'_1, ..., R'_n)$ de n-uplas de ordenaciones individuales en el dominio de una función de elección colectiva f, que los proyecta respectivamente en R y R', se cumple la responsividad no negativa si y solamente si

$$\forall x, y \in X: [\forall i: (x P_i y \rightarrow x P'_i y) \ \& \ (x I_i y \rightarrow x R'_i y)] \rightarrow [(x P y \rightarrow x P' y) \ \& \ (x I y \rightarrow x R' y)]$$

[2] Cf. la «monotonía» de Murakami (1968).

Mientras x no baje en la ordenación de preferencias de alguien, no debe hacerlo en la ordenación social. ¿Daría lugar a una diferencia significativa el rebajar la condición S a la condición R, más débil? Ciertamente que sí, como mostramos en el apartado siguiente.

5*2. Reglas de extensión de Pareto

Definamos un par de reglas de elección colectiva obtenidas de convertir la incompletitud de Pareto en indiferencia de Pareto, como se utilizó en las demostraciones de los Teoremas 4*1 y 4*4, respectivamente.

DEFINICIÓN 5*3. (1) *La regla de extensión débil de Pareto (en lo sucesivo, WPE) es una regla de elección colectiva tal que*

$$\forall x, y \in X : x R y \leftrightarrow \sim(y \overline{\overline{P}} x)$$

(2) *La regla de extensión de Pareto (en lo sucesivo, PE) es una regla de elección colectiva tal que*

$$\forall x, y \in X : x R y \leftrightarrow \sim(y \overline{P} x)$$

Antes de demostrar un teorema sobre las condiciones necesarias y suficientes para que una regla de elección colectiva sea la regla de extensión de Pareto, se indican dos lemas.

LEMA 5*e. *Si hay algún individuo J que sea casi decisivo para cualquier par ordenado de alternativas, entonces una regla de elección colectiva que satisfaga las condiciones U, P e I, y que dé siempre una relación de preferencia social cuasi-transitiva y completa, implica que J debe ser un dictador.*

Aunque esto es una generalización del Lema 3*a, la demostración de este lema tal como se da es suficiente para probar el Lema 5*e, puesto que solamente se utilizó la cuasi-transitividad de R en la demostración, sin requerir la transitividad completa (véanse pp. 61-4).

Si $x P_i y$ para algún i implica $x R y$ y no necesariamente $x P y$, entonces el individuo i es decisivo en un sentido más débil.

DEFINICIÓN 5*4. *Una persona J es semidecisiva para x frente a y si $x R y$ siempre que $x P_J y$. Es casi semidecisiva para x frente a y si $x R y$ siempre que $x P_J y$, e $y P_i x$ para todo $i \neq J$.*

Las notaciones $\overline{S}(x, y)$ y $S(x, y)$ indicarán, respectivamente, una persona J que sea semidecisiva y casi semidecisiva.

LEMA 5*f. *Si hay algún individuo J que sea casi semidecisivo para cualquier par ordenado de alternativas, entonces una regla de elección colectiva que satisfaga las condiciones U, P e I, y que dé siempre una relación de preferencia social cuasi-transitiva y completa, implica que J es semidecisivo sobre todo par ordenado de alternativas.*

Demostración: Es muy similar a la del Lema 3*a. Sea una persona J casi semidecisiva en alguna x frente a alguna y, es decir, $S(x, y)$. En la terna (x, y, z), supongamos que la persona J tiene la preferencia $x P_J y$ & $y P_J z$, y que todos los otros individuos $i (\neq J)$ mantienen: $y P_i z$ & $y P_i x$. Por la condición P, $y P z$. Puesto que $S(x, y)$, evidentemente $x R y$. Si $z P x$, entonces $y P x$ (por cuasi-transitividad) lo cual es imposible. De aquí que por la completitud de R, $x R z$. Pero las preferencias de todo $i \neq J$ no están especificadas entre x y z, y solamente J prefiere definitivamente x a z. De aquí que J sea semidecisivo para x frente a z. Por tanto $S(x, y) \rightarrow \overline{S}(x, z)$.

Tomando $z P_J x$ & $x P_J y$, y para todo $i \neq J$, $z P_i x$ & $y P_i x$, podemos mostrar análogamente que $S(x, y) \rightarrow \overline{S}(z, y)$. Intercambiando y y z obtenemos $S(x, z) \rightarrow \overline{S}(y, z)$. Y considerando un caso en que en la demostración de $S(x, y) \rightarrow \overline{S}(x, z)$, x es reemplazada por y, y por z y z por x, obtenemos $S(y, z) \rightarrow \overline{S}(y, x)$. De aquí que $S(x, y) \rightarrow \overline{S}(x, z) \rightarrow \overline{S}(y, z) \rightarrow \overline{S}(y, x)$. Por tanto, $S(x, y)$ implica por sí solo los tres siguientes resultados: $\overline{S}(x, z)$, $\overline{S}(z, y)$ y $\overline{S}(y, x)$.

Intercambiando ahora x e y, encontraríamos que $S(y, x)$ implica $\overline{S}(y, z)$, $\overline{S}(z, x)$ y $\overline{S}(x, y)$. Pero $S(x, y) \rightarrow \overline{S}(y, x)$. De aquí que $S(x, y)$ implique $\overline{S}(x, y)$, $\overline{S}(y, x)$, $\overline{S}(y, z)$, $\overline{S}(z, y)$, $\overline{S}(x, z)$, $\overline{S}(z, x)$ y J es semidecisivo para cada par en la terna (x, y, z).

La ampliación a cualquier número de alternativas es exactamente como en el Lema 3*a, y esto, desarrollado, completa la demostración del Lema 5*f.

Finalmente damos la determinación de la regla de extensión de Pareto en función de condiciones sobre una CCR.

TEOREMA 5*3. *Para una CCR que siempre da una relación de preferencia social cuasi-transitiva y completa, las condiciones U, I, P* y A juntas son necesarias y suficientes para que la CCR sea la regla de extensión de Pareto.*

Demostración: Como en la prueba del Teorema 3*1, compárense todos los conjuntos de individuos que son casi decisivos para alguna elección entre pares (no necesariamente el mismo par), y de estos elíjase el menor (o cualquiera de los menores, si hay más de un conjunto menor). Sea V este conjunto y supongamos que sea casi decisivo para x frente a y si V contiene solamente un individuo, entonces por anonimidad cada individuo debe ser casi decisivo para x frente a y, y por el Lema 5*e todo individuo debe ser un dictador, lo cual es imposible. De aquí que V deba tener más de un individuo.

Dividamos todos los individuos en V en dos grupos: V_1 se compone de cualquier individuo particular (digamos J) y V_2 de todos los individuos que no están en V_1 pero que están en V; V_3 se compone de todos los demás. Considérese ahora la configuración siguiente de preferencias individuales, exactamente como en la demostración del Teorema 3*1, sobre x, y y algún z.

(1) Para todo i en V_1, $x P_i y$ & $y P_i z$.
(2) Para todo j en V_2, $z P_j x$ & $x P_j y$.
(3) Para todo k en V_3, $y P_k z$ & $z P_k x$.

Puesto que V es casi decisivo para x frente a y, y todos en V prefieren x a y, y todos no en V prefieren y a x, tenemos $x P y$. Puesto que sólo los de V_2 prefieren z a y y todos los demás prefieren y a z, si tomamos $z P y$, entonces V_2 resultará ser un conjunto casi decisivo, pero esto es imposible puesto que V, del que V_2 es un subconjunto propio, es el menor conjunto casi decisivo. De aquí que $y R z$. Si tomamos ahora $z P x$, entonces por cuasi-transitividad y por $x P y$, debemos tener $z P y$. Pero de hecho $y R z$, de modo que debemos concluir que $x R z$, por la completitud de R. Pero el individuo de V_1 es el único que prefiere x a z y todos los otros prefieren z a x. De aquí que J sea casi semidecisivo para x frente a z. Por tanto, por el Lema 5*f, J es semidecisivo para todo par ordenado de alternativas.

Por anonimidad, todo individuo debe ser semidecisivo para cada par ordenado de alternativas. De aquí que:

$$\forall i : [\forall x,\ y : (x P_i y \rightarrow x R y)]$$

Esto significa que $\forall x,\ y : x P y \rightarrow \forall i : x R_i y$. Pero por el principio de Pareto P^*, sabemos que

$$\forall x,\ y : [(\forall i : x R_i y\ \&\ \exists i : x P_i y) \rightarrow x P y]$$

y

$$\forall x,\ y : [\forall i : x I_i y \rightarrow x I y]$$

De aquí que, $\forall x,\ y : [(\forall i : x R_i y \,\&\, \exists i : x P_i y) \leftrightarrow x P y]$. Además por la completitud de R,

$$\forall x,\ y : [x R y \leftrightarrow \sim(\forall i : y R_i x\ \&\ \exists i : y P_i x)]$$

Pero esto *es* la regla de extensión de Pareto y queda completada la demostración del Teorema 5*3.

Es fácil comprobar que la regla de extensión de Pareto satisface también la neutralidad (condición N) y la responsividad no negativa (condición R). Mientras el MMD satisface las condiciones U, I, A, N, P^* y S, la regla de extensión de Pareto satisface las condiciones U, I, A, N, P^* y R, y la cuasi-transitividad de preferencia social (véanse Teoremas 5*1 y 5*3 y el Lema 5*d). Una relajación de la responsividad (de S a R) y un fortalecimiento de las propiedades de preferencia social (imponiendo la cuasi-transitividad) parecen transformar la regla de mayoría en la regla de extensión de Pareto.

Capítulo 6
CONFLICTOS Y DILEMAS

6.1. Crítica de la anonimidad y la neutralidad

Los supuestos de anonimidad y neutralidad son condiciones muy poderosas cuando se imponen a una función de decisión social, como vimos en el Capítulo 5*. ¿Hasta qué punto son atrayentes estas condiciones? Cabe destacar en primer lugar que muchos procedimientos reales de elección colectiva infringen estas condiciones. En la Asamblea General de las Naciones Unidas, las cuestiones de procedimiento pueden ser decididas por un simple voto de mayoría, mientras que las cuestiones de fondo requieren una mayoría de dos tercios. De aquí que en este caso la elección colectiva no sea neutral, aunque sí anónima; pero las cosas cambian si pasamos de la Asamblea General al Consejo de Seguridad, ya que solamente cinco países tienen derecho al veto.

Los procedimientos de asignación del mercado libre, ya sea en el capitalismo o bajo un socialismo de mercado (por ejemplo, el sistema Lange-Lerner) son definitivamente no neutrales y no anónimos. Yo elijo mi cesta de la compra y usted elije la suya, y una permutación de nuestras preferencias puede traducirse en un resultado social diferente incluso si las alternativas sociales disponibles permanecen

iguales. Esto infringe la anonimidad. La neutralidad tampoco se cumple. Supóngase que en un caso prefiero tener mis paredes azules mejor que blancas, siendo Ω el resto del estado social, mientras que usted tiene la preferencia opuesta. El mecanismo de mercado puede garantizar que mis paredes sean azules. En otro caso yo podría preferir que sus paredes fuesen azules mejor que blancas (siendo Ω el resto del estado social), mientras que usted tiene la preferencia opuesta. Se trata simplemente de una sustitución de alternativas, aunque el mecanismo de mercado hará que sus paredes sean blancas y no azules. Esto infringe la neutralidad.

Que el mecanismo de mercado viole la anonimidad y la neutralidad no es un argumento de fuerza contra estos principios. Uno podría adherirse a ellos y argumentar: «tanto peor para el mecanismo de mercado». De hecho, la incapacidad del mecanismo de mercado de tomar nota de «externalidades» es una de las deficiencias bien conocidas del sistema de mercado. Sin embargo, los valores de la libertad individual de elección son mucho más profundos que la expresión que encuentran en el mecanismo de mercado y requieren un examen más profundo.

6.2. Valores liberales y un resultado de imposibilidad

Puede argumentarse que ciertas elecciones sociales son puramente personales, por ejemplo, siendo Ω todo lo demás en la sociedad, el señor A duerme boca arriba (x), y siendo Ω todo lo demás, el señor A duerme boca abajo (y). Supóngase que el señor A prefiere y a x, mientras que otros muchos prefieren lo opuesto. Es posible argumentar que la elección social entre x e y es un asunto puramente personal puesto que el señor A es el único «realmente» implicado, mientras que el resto son sólo «curiosos». También es posible elegir una CCR tal que en esta elección puramente «personal» la preferencia del señor A quedará exactamente reflejada en la preferencia social.

Una forma muy débil de aseverar esta condición de liberalismo (condición L) es que cada individuo sea totalmente decisivo en la elección social entre al menos un par de alternativas, por ejemplo, que el señor A sea decisivo entre x e y. En general podría haber más de uno de tales pares, en parte porque (a) hay otros ejemplos

de tales elecciones personales, por ejemplo, que el señor *A* haga un ejercicio de yoga antes de irse a descansar (por chocante que otros pudieran encontrar la idea), y (b) incluso en el caso «boca arriba o boca abajo» habría más de uno de tales pares, puesto que Ω podría ser diferente; por ejemplo, si el señor *A* no tiene inconveniente en dormir boca abajo mejor que boca arriba cuando las paredes de la cocina del señor *B* son rosas, sería correcto hacer lo mismo cuando las paredes de la cocina del señor *B* fuesen carmesí. Así pues, la condición *L* es realmente bastante débil; un liberal debe aceptar la condición *L*, pero debe exigir algo más.

Un requisito aún más débil que la condición *L* viene dado por la condición *L**, que exige que al menos *dos* individuos tengan sus preferencias personales reflejadas en la preferencia social sobre un par de alternativas cada uno. Esta condición es extremadamente suave y puede llamarse la condición de «liberalismo mínimo», puesto que reduciendo más el número de individuos con tal libertad (es decir, reduciéndolo a un individuo) permitiría incluso una dictadura completa, lo cual no es muy liberal.

Ahora bien, el hecho desafortunado es que esta suavísima condición, *L**, es incompatible con las condiciones *U* (dominio no restringido) y *P* (principio de Pareto débil) cuando se impone a una SDF, como muestra Sen (1970), y es reproducido más abajo en el Teorema 6*1. Este resultado de imposibilidad puede contrastar con el teorema de imposibilidad de Arrow.

La condición *L** (liberalismo mínimo) es algo más fuerte que la condición *D* de Arrow (no dictadura), aun cuando parece ser mucho más débil que lo que requiere el «liberalismo». Las condiciones *U* y *P* son compartidas por el teorema de Arrow y el Teorema 6*1. La condición *I* (independencia de alternativas irrelevantes) es requerida en el Teorema de Arrow pero no en el Teorema 6*1. Además, las condiciones de Arrow se aplican a las SWF (es decir, se exige la condición *O*), mientras que en este otro teorema sólo se requiere una SDF (es decir, condición *O**), lo que no precisa transitividad sino solamente aciclicidad de preferencia social. La aciclicidad es, desde luego, estrictamente más débil que la transitividad. La imposibilidad se mantiene, resultando bastante perturbador.

Un ejemplo quizá aclare la naturaleza del problema. Supongamos que la elección social sea entre tres alternativas: que el señor *A* lea un ejemplar de *Lady Chatterly's Lover* (El amante de Lady Chatterly),

que el señor *B* lo lea, o que ninguno de ellos lo lea. Llamemos a estas alternativas *a*, *b* y *c*, respectivamente. El señor *A*, el mojigato, prefiere que nadie lo lea, después que lo lea él y por último que el «impresionable» señor *B* esté expuesto a ello, es decir, prefiere *c* a *a* y *a* a *b*. El señor *B*, el lúbrico, prefiere que cualquiera de ellos lo lea a que ninguno de ellos lo haga, pero además prefiere que lo lea el señor *A* mejor que él, pues quiere que *A* conozca la prosa de Lawrence. De aquí que prefiera *a* a *b* y *b* a *c*. El argumento liberal sería: dada la elección entre que el señor *A* lo lea o que no lo lea nadie, su propia preferencia debería reflejarse en la preferencia social. Así pues, la sociedad preferiría que nadie lo lea, mejor que el señor *A* lea un libro que considera francamente espantoso. De aquí que *c* sea socialmente preferida a *a*. Análogamente existe un argumento liberal en favor de reflejar la preferencia del señor *B* en la elección social entre que el señor *B* lo lea y que nadie lo haga. Por tanto *b* es preferida a *c*. De aquí que la sociedad debería preferir que el señor *B* lo leyese a que nadie lo hiciera y esto último a que el señor *A* lo leyese. Sin embargo, que el señor *B* lo lea es peor según Pareto que lo lea el señor *A*, incluso en términos del criterio débil de Pareto, y si la preferencia social respeta esa gradación, entonces *a* es preferida a *b*. De aquí que cada alternativa pueda considerarse peor que alguna otra. Así pues, no hay mejor alternativa en este conjunto, ni tampoco elección óptima.

6.3. Crítica de la aciclicidad

Obsérvese que no hay conflicto alguno entre el principio de Pareto y la condición de liberalismo mínimo sobre cualquier par particular de alternativas, incluso con dominio no restringido. El conflicto surge cuando juntamos más de un par. Una salida puede ser rechazar la elección por parejas y no generar una función de elección a partir de una relación de preferencia social. Ciertamente es posible argumentar que *a* sea elegida en la elección entre *a*, *b*, *b* entre *b* y *c*, *c* entre *c* y *a* y *a*, por ejemplo, sea elegida en la elección entre *a*, *b* y *c*. Esto no será una regla de elección colectiva tal como la hemos definido, puesto que ninguna relación de preferencia social puede representarlo. En particular infringirá la propiedad α, puesto que *a* es la mejor en (*a*, *b*, *c*) pero no en (*a*, *c*).

Resulta difícil construir un argumento para abandonar la aciclicidad, pero una línea posible es precisamente referirse al Teorema 6*1 y resultados similares. Si ni la condición P ni la condición L^* pueden ser relajadas, y si el mecanismo de elección debe funcionar para configuraciones de ordenaciones de preferencia individual señaladas en el Teorema 6*1 (o en el Apartado 6.2 anterior), entonces la aciclicidad tiene que desaparecer. Si P y L^* son fuerzas «irresistibles», entonces la aciclicidad debe ser un objeto movible.

Pero la salida no es realmente atrayente. Primero, la exclusión de la aciclicidad significa en este caso que la función de elección no estará basada en una relación de preferencia por pares y además será infringida incluso la propiedad de racionalidad α. ¿Por qué seleccionar a en una elección entre a, b y c y rechazarla en una elección entre a y c? La propiedad α es una condición de lo más atrayente.

Segundo, evitar la paradoja rechazando la aciclicidad es hacer trampas; funciona solamente porque las condiciones P y L^* imponen aquí como condiciones sobre la elección por pares, mientras que la aciclicidad hace a la elección social esencialmente «no por pares». Dada la aciclicidad de la preferencia social, sería necesario definir de nuevo las condiciones P y L^*. Podríamos requerir (condición $\hat{P}$) que x no estuviese en el conjunto de elección $C(S)$ de la sociedad si el conjunto S contiene alguna alternativa y que sea preferida por todos a x. También exigimos (condición $\hat{L}^*$) que haya dos pares de alternativas (x e y, y z y w) y dos individuos 1 y 2 tales que si el individuo 1 (2 respectivamente) prefiere x a y (z a w respectivamente), entonces y (w respectivamente) no debería estar en el conjunto de elección social $C(S)$ si x (z respectivamente) está en el conjunto S, y si el individuo 1 (2 respectivamente) prefiere y a x (w a z respectivamente), entonces x (z respectivamente) no estaría en el conjunto de elección $C(S)$ si y (w respectivamente) está en el conjunto S. Las condiciones $\hat{P}$ y $\hat{L}^*$ se limitan a reformular el principio de Pareto y el principio del liberalismo mínimo para una función de elección que no está generada necesariamente por una relación de preferencia. Es fácil mostrar que las condiciones $\hat{P}$, $\hat{L}^*$ y U no son consistentes cuando se imponen a un mecanismo de elección colectivo (estrictamente no una CCR) que especifica una función de elección social, dado el conjunto de ordenaciones de preferencia individual. De hecho basta el ejemplo anterior con a, b y c, y puede mostrarse que por la condición $\hat{P}$, el conjunto de elección para (a, b, c) no debe incluir

a *b*, y por la condición $\hat{L}^*$ ese conjunto de elección no debe incluir a *a* o *c*. De aquí que el conjunto de elección deba ser vacío. Si relajamos la aciclicidad, entonces la motivación de las condiciones requiere una reformación de éstas, lo cual vuelve a traer la imposibilidad. El relajar la aciclicidad no es, pues, una salida muy prometedora.

6.4. Crítica de los valores liberales

Naturalmente, es posible argumentar en favor de la exclusión de la condición L^*. Un argumento puede ser el siguiente: La idea de que ciertas cosas son asunto «personal» de cada cual no es sostenible. Si el color de las paredes del señor *A* molesta al señor *B*, entonces es también asunto del señor *B*. Si al señor *A* no le hace feliz que el señor *B* se tumbe boca abajo mientras duerme, o que lea *Lady Chatterly's Lover* cuando está despierto, entonces el señor *A es* una parte relevante en la elección.

Esto es, indudablemente, un posible punto de vista, y la popularidad de las normas como la proscripción de fumar marihuana, o la supresión de las prácticas homosexuales o de la pornografía reflejan, al menos parcialmente, dicho enfoque. Las medidas políticas están a menudo encaminadas a imponer a los individuos la voluntad de otros incluso en cuestiones que pueden afectar directamente sólo a los primeros. Sin embargo, la condición L^* es en realidad extremadamente débil y su exclusión supone negar tales consideraciones liberales *totalmente*. La condición L^* implica sólo un par de alternativas por persona, y eso para solamente dos personas. Sospecho que la condición L^*, en esa forma tan débil, e incluso la condición *L*, que es algo más fuerte, encontrarán muchos defensores.[1] Negar la condición L^* no es sólo violar todo liberalismo, como se entiende generalmente, sino negar incluso las expresiones más limitadas de la libertad individual. Y negar también la intimidad, puesto que la

[1] El atractivo de *L* o L^* dependería de la naturaleza de las alternativas que se ofrecen para la elección. Si las elecciones son todas no personales —por ejemplo, declarar o no fuera de la ley la intocabilidad, declarar o no la guerra a otro país— las condiciones *L* o L^* no tendrían mucho atractivo. Sin embargo, en las elecciones que implican variaciones personales *L* o L^* sí serían atrayentes. No decimos que el conflicto en cuestión será perturbador en toda situación de elección colectiva, sino que hay muchas elecciones reales en las que este conflicto puede dar lugar a serias dificultades.

elección entre x e y puede ser la de verse forzado a confesar los asuntos personales de uno (x) o no verse forzado a ello (y). Así pues, el apoyo de L o L^* puede venir incluso de gente que no son «liberales» en el sentido usual de la palabra.

6.5. Crítica del Principio de Pareto

Una alternativa es rechazar el principio de Pareto. Se indicó en el Capítulo 2 que este principio, particularmente en su forma «débil», es algo así como una vaca sagrada en la literatura del bienestar social. Pero cabría construir un argumento contrario basado en los ejemplos del tipo considerado en el Apartado 6.2 y Teorema 6*1. Puede argumentarse que lo importante no es sólo saber quién prefiere qué, sino también *por qué* lo prefiere. El señor A no desea leer el libro si la elección está entre que él lo lea o que nadie lo lea, pero desea negar al señor B la ventaja de leerlo (una ventaja que B valora frente a no leerlo). Esta naturaleza particular de la ordenación de preferencias de A, podría argumentarse, perturba el valor de la preferencia de A por leer el libro frente a que sea B quien lo lea. Cabría decir entonces que hay que ignorar las preferencias basadas en una excesiva curiosidad por lo que es bueno para otros.

Esta línea de razonamiento, atrayente o no, plantea también dudas ajenas al principio de Pareto. Primero, si la elección social dependiese no sólo de las preferencias individuales sino también de otras cosas, por ejemplo, del origen de esas preferencias, entonces el concepto mismo de regla de elección colectiva (y por tanto también de una SWF o una SDF) es dudoso. La preferencia social dejaría de ser entonces función exclusiva de las preferencias individuales.

En segundo lugar, puede, sin embargo, argumentarse que el mecanismo de elección colectiva no puede realmente funcionar con información de naturaleza tan complicada como las causas de una ordenación individual, y la única forma en que puede tomar en cuenta esta consideración es utilizando preferencias entre otros pares de alternativas, como en el caso señalado arriba. El que el señor A prefiera leer él el libro a que lo lea el señor B podría pensarse que pierde toda importancia en el momento en que se señala que dada la elección el señor A preferiría no leerlo en absoluto. Si se acepta este enfoque, estamos confinados entonces a una CCR (y posiblemente

a una SWF o a una SDF), pero se infringe la condición *I* (independencia de alternativas irrelevantes).

En los Teoremas 6*1 y 6*3, la condición *I* no se emplea como tal, pero las decisiones sociales generadas por el principio de Pareto satisfacen la condición *I* e incluso puede ser motivo de objeción este uso implícito de la condición.[2] Si la preferencia social entre *x* e *y* tiene que depender solamente de las preferencias individuales entre *x* e *y*, entonces parece que el principio débil de Pareto es obligatorio. Sin embargo, si no se supone tal independencia, puede argumentarse que el conjunto de preferencias individuales entre *x* e *y* es una información inadecuada para una elección social entre *x* e *y*. A este respecto parece ligeramente confundente llamar a la cuasi-ordenación de Pareto «la cuasi-ordenación de unanimidad»,[3] puesto que la unanimidad en cuestión es solamente sobre ese par particular.

Si se rechaza el principio de Pareto, las consecuencias para la elección colectiva en general y para la economía del bienestar en particular deben ser inmensas. La mayoría de los mecanismos usuales de elección política son inclusivos de Pareto. Mientras que la asignación en un mercado libre no alcanza necesariamente la optimalidad de Pareto cuando hay externalidades, la optimalidad de Pareto se considera como una meta lamentablemente fallida. Lo que parece deducirse del problema que estamos estudiando es que la optimalidad de Pareto puede no ser ni siquiera un objetivo deseable en presencia de externalidades en la forma de «curiosidad».[4] Las consecuencias de todo esto son de un gran alcance.

Vemos de nuevo que rechazar el principio de Pareto no puede ser una fuente de alegría. Es un criterio muy atrayente y muchos dudarían dejarlo escapar. El introducir alternativas «irrelevantes», como se hizo en el razonamiento, es algo molesto, sobre todo porque la evidencia de «curiosidades» que pueden o no ser consideradas como deplorables es sólo indirecta. La razón del señor *A* para preferir leer él mismo el libro, mejor que dárselo al señor *B*, puede estar

[2] El uso de la condición *I* en la demostración del Teorema General de Posibilidad de Arrow (Teorema 3*1) es, desde luego, mucho más directo y penetrante (véase la demostración del Lema 3*a).

[3] Arrow (1951), p. 36.

[4] Inicialmente, en el ejemplo, la solución «liberal», a saber, *b* en (*a*, *b*, *c*), no sólo no es óptima de Pareto, sino que es un punto de desequilibrio. Así pues, tampoco el mercado alcanzará la solución «liberal» no óptima de Pareto.

basada en la expectación de *A* del comportamiento social de *B* después de leer ese libro «peligroso». Contemplando meramente la ordenación de preferencia de *A* no pueden encontrarse pruebas concluyentes de una curiosidad *genuina*. Aunque el principio de Pareto parece abierto a la duda, su negación requiere cierta cautela.

6.6. Crítica del dominio no restringido

El uso de la condición *U* en prácticamente todos los teoremas de imposibilidad en la elección colectiva es importante. Para muchas configuraciones de preferencias individuales no surgirá conflicto alguno entre las condiciones *P* y *L** (o *L*). Si todas las preferencias efectivas fuesen en la realidad de un tipo tan benigno, entonces el problema en discusión podía ser eliminado. Sin embargo, encontramos ejemplos que parecían plausibles y que conducían a un conflicto.

El problema no puede eliminarse de este modo, pero cabe ciertamente argumentar que la eventual garantía de la libertad individual no puede hallarse en mecanismos de elección colectiva, sino desarrollando valores y preferencias que respeten la intimidad mutua y las elecciones personales.

De los dilemas y conflictos discutidos en este capítulo parecen derivarse algunas conclusiones. El principio de Pareto está desde luego en conflicto con el liberalismo mínimo a menos que las preferencias individuales caigan dentro de ciertos patrones específicos. Esta elección quizá no produzca gran confusión a un liberal determinado.[5] El tipo de razonamiento que justifica *L** parece denunciar la adhesión total al principio de Pareto *P*. Ni siquiera es una gran tragedia para el hombre sensato que niega la noción de «curiosidad» y que toma el interés de *A* por los asuntos «personales» de *B* como justificación para considerarlo también un asunto de *A*. Es muy probable que aceptase la condición *P* y rechazase *L**.

El dilema real se plantea solamente para un observador intermedio que encuentra significativo y relevante el concepto de curiosidad, pero que no desea rechazar el principio de Pareto, ni siquiera

[5] El término liberal se emplea en muchos sentidos, de los cuales no todos son consistentes. Aquí se usa para referirse a una persona que está profundamente interesada en proteger la libertad individual de la injerencia de otros.

cuando las preferencias individuales sean «curiosas». Esta postura es ligeramente esquizofrénica, pero tampoco sirve de consuelo, pues muchísima gente es esquizofrénica en este sentido.

También es posible argumentar que el que una cierta condición sobre una CCR —tal como el principio de Pareto o el liberalismo mínimo sea o no una buena condición podría depender mucho de qué tipo de preferencias individuales existen realmente y no de qué tipos son lógicamente concebibles. Una condición puede ser buena para una CCR con un cierto dominio restringido y otra en cambio para una CCR con un dominio restringido distinto, y dado un posible conflicto entre ambas podríamos hacer la elección con un ojo puesto en los conjuntos probables de preferencias individuales. No es imposible defender una CCR que satisfaga la condición P en un dominio Δ^1 y la condición L^* en un dominio Δ^2, teniendo Δ^1 y Δ^2 algún elemento común, pero no todos. Esta perspectiva acaso no electrice el aire con expectativas, pero formalmente es una posible salida de este dilema perturbador.

Capítulo 6*
LA PARADOJA LIBERAL

6*1. El liberalismo frente al principio de Pareto

Los valores liberales parecen requerir que haya elecciones puramente personales y que la persona en cuestión sea libre de hacer lo que guste. En estos casos, la alternativa socialmente mejor sería permitirle hacer lo que quiera, quedando igual todo lo demás. Definimos la condición de liberalismo en una forma muy débil.

Condición L (*liberalismo*): Para cada persona i hay al menos un par de alternativas distintas (x, y) tal que es decisiva en la elección social entre ellas en cualquier orden, es decir, $x\ P_i\ y \rightarrow x\ P\ y$ y $y\ P_i\ x \rightarrow y\ P\ x$.

Esta condición puede ser debilitada exigiéndola no para todas las personas, sino al menos para algunas. Si lo pedimos para una solamente, entonces no es un caso de liberalismo, puesto que será compatible con la dictadura. Así pues, la debemos exigir al menos para dos individuos.

*Condición L** (*liberalismo mínimo*): Hay al menos dos personas k y j y dos pares distintos de alternativas (x, y) y (z, w) tales que k y j son decisivas sobre (x, y) y (z, w), respectivamente tomando cada par en cualquier orden.

Obviamente, $L \rightarrow L^*$, pero no viceversa.

TEOREMA 6*1. *No hay ninguna SDF que satisfaga las condiciones U, P y L*.*

Demostración: Si (x, y) y (z, w) son el mismo par, entonces obviamente la condición L^* no puede cumplirse. Si los pares tienen uno de los elementos en común, digamos $x = z$, entonces sea $x P_k y$, $w P_j x$, y $\forall i : y P_i w$. Por la condición L^*, $x P y$ y $w P x$, y, por la condición P, $y P w$. Esto infringe la aciclicidad y no hay mejor alternativa.

Seguidamente supongamos que sean distintas las cuatro alternativas y que ahora $x P_k y$, $z P_j w$ y $\forall i : (w P_i x \,\&\, y P_i z)$.[1] Por la condición L^*, $x P y \,\&\, z P w$. Por la condición P, $w P x \,\&\, y P z$. Pero esto también infringe la aciclicidad. De aquí que no haya SDF que satisfaga las condiciones L^* y P, dada la condición U, lo que completa la demostración.

Obsérvese que no se impone la condición de independencia de alternativas irrelevantes. Ni exigimos que la preferencia social sea transitiva, o cuasi-transitiva siquiera; lo único que no se admite es aciclicidad. El teorema es perturbador, e incluso lo es el corolario siguiente, que es mucho más débil.

COROLARIO 6*1.1. *No hay SDF que satisfaga las condiciones U, P y L.*

6*2. Extensiones

Un dilema próximo al del Teorema 6*1 puede plantearse relajando las condiciones de que las dos personas sean decisivas en cualquier orden y exigiendo en lugar de ello que sean decisivas sobre dos pares *ordenados* que sean distintos en cada elemento.

*Condición L***: Hay al menos dos personas k y j y dos pares ordenados de alternativas (x, y) y (z, w), tales que $x P_k y \rightarrow x P y$, y $z P_j w \rightarrow z P w$, siendo x, y, z y w distintas todas ellas.

TEOREMA 6*2. *No hay ninguna SDF que satisfaga las condiciones U, P y L**.*

[1] Obsérvese que hay ordenaciones *compatibles* con cada una de las relaciones de preferencia individual especificadas.

La demostración es la misma que en el segundo párrafo de la demostración del Teorema 6*1. Sin embargo, obsérvese que ni L^* implica L^{**}, ni L^{**} implica L^*, de modo que los dos teoremas son independientes.

Finalmente, proponemos otra condición L^{***}.

Condición L^{***}: Hay al menos dos personas k y j y dos pares ordenados de alternativas (x, y) y (z, w), con $x \neq z$ e $y \neq w$, tales que $x P_k y \rightarrow x P y$, y $z P_j w \rightarrow z P w$.

TEOREMA 6*3. *No hay ninguna SDF que satisfaga las condiciones* U, P *y* L^{***}.

La demostración, que se omite aquí, está en la misma línea que la del Teorema 6*1. Obsérvese que $L^{**} \rightarrow L^{***}$, y $L \rightarrow L^* \rightarrow L^{***}$, de modo que el Teorema 6*3 incluye los Teoremas 6*1 y 6*2. Sin embargo, la ganancia lógica no va acompañada de una ganancia significativa en la relevancia, de modo que para discutir el dilema liberal podríamos muy bien concentrarnos en el Teorema 6*1, que es lo que hicimos en el Capítulo 6.

Capítulo 7
AGREGACION INTERPERSONAL Y COMPARABILIDAD

7.1. Independencia de alternativas irrelevantes

En el Capítulo 3 señalamos que el método de votación preferente es una SWF que satisface las condiciones *U*, *P* y *D* pero no la condición *I*. En el Capítulo 6 expusimos algunos argumentos contra la imposición de la condición *I* en el contexto específico de la paradoja liberal. Otras razones se han apuntado también en la literatura (véase Rothenberg (1961); también Wilson (1968)). Sin embargo, debe observarse que relajar la condición *I* abre un cierto número de posibilidades, de las cuales el método preferente es solamente una. De hecho, el enfoque clásico del utilitarismo queda eliminado por la condición *I*, y si se relaja la condición de la independencia de alternativas irrelevantes, cabe explorar también esa vía. Sin embargo, no es sólo la condición *I* la que excluye la agregación de utilidades individuales. La propia definición de una regla de elección colectiva la proscribe, puesto que una CCR hace de la ordenación social una función del conjunto de ordenaciones individuales. Cualquier cambio en las medidas de utilidad sin un cambio de las ordenaciones individuales R_i debe dejar completamente inalterada la ordenación social *R* generada por una CCR. Esto se aplica también, naturalmente, a los casos especiales

de una CCR, como es la SWF y la SDF. Pero incluso redifiniendo una CCR de modo que las medidas de utilidad sean admitidas como argumentos, podría persistir el problema de la condición *I*.

Quizá no es obvio cómo la condición *I* impide el uso del utilitarismo. El nombre «independencia de alternativas irrelevantes» es algo equívoco. Deben distinguirse dos aspectos. Primero, la condición *I* es infringida cuando, en la elección social entre *x* e *y*, las clasificaciones individuales de una tercera alternativa (digamos *z*) frente a *x* o *y* o cualquier otra alternativa, se convierten en un factor relevante. A esto podemos llamarlo el aspecto de «irrelevancia» de la condición. Segundo, la condición, tal como se ha expuesto, es infringida si en la elección social entre *x* e *y* influye algo que no sean las *ordenaciones* individuales sobre *x* e *y*, por ejemplo, intensidades de preferencia. Esto puede o no incluir la colocación de alternativas irrelevantes en ordenaciones individuales. Llamemos a ésto el aspecto de «ordenación», aunque el nombre de la condición parece comentarse solamente en el aspecto de la «irrelevancia» (véase Rothenberg (1961) y Sen (1966)).

Un ejemplo quizás aclare la diferencia lógica. Supóngase que cada individuo tuviese una única escala cardinal de utilidad y que todas ellas estuviesen recogidas en un libro gigantesco, publicado en el cielo. Supongamos que quisiéramos utilizar estos indicadores de utilidad cardinal en una elección social que implique dos estados sociales alternativos *x* e *y*. No tendríamos que consultar ninguna alternativa irrelevante con el propósito de construir una escala, puesto que la escala de utilidad de cada individuo podría examinarse cualquier día laboral en cualquier biblioteca pública que tuviera este precioso libro. Imaginemos que después de sumar las diferencias de las utilidades entre *x* e *y* para todos los individuos, la suma resulta positiva y que, reuniendo el utilitarismo, declaramos a *x* socialmente preferido a *y*. Entre tanto la gente empieza a sentir un cambio en sus escalas de utilidad. Poco después —sigamos imaginando— se anuncia en el cielo que las escalas de utilidad de la gente han cambiado y que se dispone ya de una nueva edición del libro. Inspeccionado el caso, resulta que las ordenaciones de todo el mundo referentes a *x* e *y*, y ciertamente a todas las demás alternativas, han permanecido iguales, pero que han cambiado los intervalos cardinales entre ellas. Después de sumar las diferencias en las utilidades entre *x* e *y* para todos los individuos, resulta esta vez que la suma es negativa

y se declara entonces a *y* socialmente preferible a *x*. Esto implicaría una violación de la condición arrowiana de independencia de alternativas irrelevantes. Pero el caso es que en ningún momento ha intervenido ninguna alternativa irrelevante. Este es un caso de violación del aspecto de «ordenación» de la condición, sin implicar el aspecto de «irrelevancia».

Sin embargo, en la práctica esto no puede entrañar una importancia grande, a pesar de las diferencias analíticas implicadas. Las utilidades individuales no se hallan expresadas en unidades cardinales naturales; la cardinalización es posterior a las observaciones experimentales, dando un conjunto de números que son únicos *salvo* una transformación lineal creciente. Puesto que la escala de utilidad debe fijarse especificando el valor de dos puntos sobre ella, las otras alternativas entran, implícita o explícitamente, en esta evaluación.[1] Al tratar de conseguir una correspondencia interpersonal, con vistas a una agregación social, hay que hacerlo, y entonces cualquier uso de la intensidad de preferencia infringe no solamente el aspecto de «ordenación» de la condición, sino también el de «irrelevancia».

Un ejemplo podría ayudar a aclarar la cuestión. Imaginemos que sólo hay tres alternativas relevantes para nuestra consideración, a saber *x*, *y* y *z*. Supongamos que el individuo 1 las ordena en ese orden. Un experimento revela por otro lado los siguientes números de utilidad para las tres: 200, 110 y 100, respectivamente; pero los números son únicos *salvo* una transformación lineal. No hay, pues, correspondencia natural entre los números de utilidad de los distintos individuos. Un convenio usual es asignar el valor 0 a la alternativa peor y el 1 a la mejor. Por consiguiente, una transformación lineal del conjunto primitivo de números da 1 para *x*, 0,1 para *y* y 0 para *z*. Por un método similar de normalización supongamos que los números de utilidad de otros dos individuos resultan ser los mismos, en particular 1 para *y*, 0,6 para *x* y 0 para *z*. Si la comunidad se compone de estos tres, *x* gana a *y* porque la utilidad agregada para *x* es 2,2 y para *y* 2,1. Imaginemos ahora que los individuos 2 y 3 revisan su opinión de *z*, alternativa irrelevante en la elección entre *x* e *y*. Ambos consideran ahora que *z* es igual de buena que *x*. Mientras que la

[1] Esto será así incluso si los números de utilidad fuesen únicos salvo una transformación proporcional, ya que las «unidades» seguirían siendo arbitrarias.

actitud de todos hacia x e y ha permanecido igual, no obstante los números de utilidad de x e y cambiarán para las personas 2 y 3. Para ellos, x tendrá ahora el valor 0, mientras que y continuará obteniendo 1. Ahora bien, y ganará a x, teniendo y una utilidad agregada de 2,1 frente a 1 de x. La ordenación social entre x e y queda invertida por un cambio en la posición de una alternativa irrelevante z.[2]

Obsérvese que el resultado no es debido al método particular de normalización empleado. Por ejemplo, si seguimos la regla de tomar las peores alternativas como 0 y el agregado de utilidades de todos los estados sociales[3] como 1, puede presentarse el mismo problema. Sucede, sin ir más lejos, en el ejemplo numérico discutido arriba. En la situación inicial con este método de numerar, el individuo 1 obtiene (10/11) unidades de utilidad de x, (1/11) de y, y 0 de z, mientras los individuos 2 y 3 obtienen (5/8) de y (3/8) de x y 0 de z. Aquí x da más utilidad agregada que y. Ahora bien, si z sube de cotización y resulta indiferente a x para los individuos 2 y 3, los números se convierten en (0, 1, 0) para (x, y, z) respectivamente, para los individuos 2 y 3. En este caso y da más utilidad agregada que x, invirtiendo la elección social entre x e y, como consecuencia de un cambio que implica una alternativa irrelevante. El problema es sin duda perfectamente general y surge porque las escalas de utilidad tienen «unidades» arbitrarias.[4]

7.2. Comparabilidad, cardinalidad y discriminación

La cuestión de la arbitrariedad de las unidades de utilidad es en gran medida un reflejo del problema de la comparabilidad interpersonal. Si se calculan por separado las escalas de utilidad de diferentes personas, como en los métodos experimentales que implican, digamos, el enfoque de von Neumann-Morgenstern, entonces las correspondencias interpersonales quedan completamente indefini-

[2] El ejemplo particular discutido aquí es una ligera variación del discutido por Arrow (1963), p. 32.

[3] El número de estados sociales considerados debe ser el mismo para todos los individuos.

[4] Siendo sólo únicas salvo una transformación lineal, también tienen «orígenes» arbitrarios; pero eso no es crucial para el utilitarismo, puesto que solamente hace uso de diferencias de utilidad entre x e y.

das. Es posible, pongamos por caso, doblar las unidades de un individuo dejándolas iguales para otros, y esto alterará inmediatamente las correspondencias interpersonales.

En el ejemplo imaginario del último apartado en el que aparecía el gran libro, no surgía este problema porque las medidas de utilidad venían para todos en una correspondencia «uno a uno». Las medidas behavioristas de utilidad en función de las expresiones de la gente incluyen un elemento interpersonalmente comparable. Puede ser posible decir que la persona *A* es más feliz que la persona *B* mirando el semblante radiante del primero y la cara de malhumor del segundo. También es posible hacer comparaciones marginales. Este enfoque de la comparabilidad interpersonal objetiva lo ha expuesto muy elegantemente Little (1850).[5]

En el Capítulo 7* se desarrollará un método que permite la variabilidad interpersonal de cualquier grado, desde la variabilidad infinita a la nula. Sin embargo, entre tanto, debemos tener las ideas muy claras acerca de la distinción entre (a) obtener una medida cardinal de bienestar individual y (b) obtener ciertas reglas para comparaciones interpersonales, y debemos revisar también las teorías principales a la luz de estas dos cuestiones.

Un intento de cardinalizar la utilidad individual se ha basado en el supuesto de que los individuos no puedan hacer realmente comparaciones muy precisas, de modo que cada persona tiene solamente un número finito de «niveles de discriminación». La diferencia entre un nivel de discriminación y el siguiente es la diferencia mínima de utilidad que es perceptible para el individuo. El individuo es «indiferente» entre todas las alternativas que pertenecen al mismo nivel de discriminación y podemos obtener una medida cardinal de la diferencia de utilidad entre dos alternativas cualesquiera comprobando cuántos niveles de discriminación las separan. La escala cardinal obtenida así es, desde luego, única salvo una transformación lineal positiva, y eligiendo un origen y una unidad se obtiene una función de utilidad cardinal única. Basándose en este enfoque, tocado primeramente por Borda (1781) y Edgeworth (1881), el problema de la cardinalización ha sido explorado por Armstrong (1951), Goodman y Markowitz (1952), y Rothenberg (1961), entre otros.

[5] Little señala que aunque las comparaciones interpersonales pueden ser, en este enfoque, perfectamente objetivas, la meta de maximizar la utilidad agregada para la sociedad está basada en un juicio de valor que puede no ser fácil de aceptar.

Respecto a la comparabilidad interpersonal, Goodman y Markowitz hacen la suposición normativa de que la significación ética de un movimiento de un nivel de discriminación al siguiente es la misma para todos los individuos e independiente del nivel inicial. El cálculo resulta muy sencillo con este supuesto. Si hay que comparar la alternativa x con la alternativa y, se cuentan los niveles de discriminación entre x e y en la escala de cada individuo y después se suman las diferencias de nivel con su correspondiente signo.

Las dificultades que entraña este enfoque son bastante claras. No es preciso destacar aquí los problemas prácticos en el uso de este método en la vida real (en todo caso son bastante claros), pero es que también hay dificultades analíticas. Primero, como los mismos Goodman y Markowitz señalan, no es posible observar todos los niveles de discriminación de un individuo, dado un conjunto fijo de alternativas. El sistema de numeración depende entonces de la disponibilidad real de las alternativas. Supóngase que sale al mercado un nuevo producto, ampliando el conjunto de alternativas posibles para el individuo; en estas condiciones es perfectamente posible que emerjan nuevos niveles de discriminación situados entre los antiguos, lo cual alterará el sistema de numeración de la utilidad utilizado para el individuo. La evaluación social entre dos alternativas x e y no será entonces independiente de qué otras alternativas estén disponibles.

Una segunda dificultad radica en la suposición ética de que la significación para el bienestar social de un cambio desde un nivel de discriminación al siguiente es la misma para todos los individuos. Esta suposición no sólo es arbitraria, sino eminentemente objetable cuando se trata de individuos con diferente sensibilidad de percepción. Hay quien tiene pocos niveles de discriminación pero siente muy intensamente la diferencia entre uno y otro y hay quien tiene un gran número de niveles de discriminación pero considera que no hay que preocuparse de la diferencia entre uno y el siguiente. En este caso el sistema de Goodman-Markowitz será muy parcial.[6] Realmente hay individuos que tienden a ser extremistas y encontrar

[6] De hecho, Arrow (1963) muestra (pp. 117-118) que con el sistema de Goodman-Markowitz una ligera diferencia en la sensibilidad de las dos personas puede convertir la desigualdad total (el individuo menos sensible no recibe ninguna renta, mientras que el otro recibe toda) en el resultado socialmente «óptimo» en un problema de distribución.

las cosas o «magníficas» u «horribles», mientras que otros distinguen muy bien entre grados como «excelente», «bueno», «mediocre», «malo» y «horrible». Parece manifiestamente injusto hacer la suposición ética de que la significación (para el bienestar) de transferir al primer individuo de «horrible» a «magnífico» es la misma que transferir al segundo individuo de «malo» a «mediocre». Lo que es particularmente objetable en este mecanismo no es que infrinja la condición *I* —que sí que la infringe—, sino que implica una suposición ética que parece arbitraria y objetable.

7.3. Usos de la cardinalización de von Neumann-Morgenstern

En general, el comportamiento de un individuo racional en un mercado que no implique riesgos puede explicarse completamente en función de la utilidad ordinal.[7] Si tratamos de derivar una escala de utilidad para un individuo en términos de su comportamiento bajo certidumbre perfecta, sin hacer algunas suposiciones muy especiales de «independencia» de grupos de artículos (o más generalmente, de conjuntos de acción),[8] los números de utilidad serán sólo únicos salvo una transformación monótona. Sin embargo, la situación cambia radicalmente cuando consideramos el comportamiento racional en situaciones arriesgadas. Como fue demostrado por von Neumann y Morgenstern (1947), suponiendo que el comportamiento de una persona satisface un conjunto de postulados claramente definibles, podemos encontrar un conjunto tal de números de utilidad correspondiente al conjunto de alternativas, que su comportamiento puede tomarse como un intento de maximizar la esperanza matemática de estos números de utilidad.[9] Y se demuestra que estos números son únicos salvo una transformación lineal positiva.

[7] De hecho, incluso la suposición de la existencia de una utilidad ordinal es demasiado exigente. Con una ordenación lexicográfica, las alternativas pueden estar completamente ordenadas sin que haya una escala de utilidad (ni siquiera ordinal) que pueda ser ajustada a ella. Véase Capítulo 3.

[8] Véase Samuelson (1947), Leontief (1947), (1947a), Debreu (1960), Koopmans (1966), Gorman (1968).

[9] La esperanza matemática de la utilidad es lo mismo que la «esperanza moral» de Bernouilli (1730). La utilidad de cada alternativa se pondera por su probabilidad. Véase también Ramsey (1931).

Un conjunto de postulados suficientes para esto fue expuesto por von Neumann-Morgenstern (1947), y otros conjuntos han sido presentados por Marschak (1950) y otros. Tienen mucho en común, pero los postulados de Marschak son más fáciles de seguir.

Hay cuatro postulados en el sistema de Marschak: (a) el postulado de *ordenación completa*, es decir, la relación de preferencia establece una ordenación débil entre todas las perspectivas; (b) el postulado de *continuidad*, es decir, si la perspectiva x es preferida a la perspectiva y y esta última a su vez es preferida a z, entonces hay una mezcla de probabilidad de x y z (una «lotería» que implica a las dos) que hace que el individuo sea indiferente entre esa mezcla y la certidumbre de y; (c) el postulado de que el número de perspectivas no indiferentes sea *suficiente*: debe haber al menos cuatro perspectivas mutuamente no indiferentes; y (d) el postulado de la *equivalencia de la mezcla de perspectivas equivalentes*, es decir, si la perspectiva x y la perspectiva x^* son indiferentes, entonces para cualquier perspectiva y, una mezcla de probabilidad dada de x e y debe ser indiferente a una mezcla similar de x^* e y.[10]

No podemos entrar aquí en una evaluación detallada de este método. Sin embargo, señalaremos algunos de los problemas más sencillos del uso del mismo. Primero, resulta claro que los postulados implican la siguiente propiedad de «monotonía»: «Si una alternativa es mejor que otra, aumenta la probabilidad de la primera a expensas de la última. Si las oportunidades son ilimitadas, elige la perspectiva que promete la mejor historia con el 100 por 100 de probabilidad.»[11] Pero como señala Marschak, un montañero con «amor al peligro» (o al juego) puede preferir una probabilidad de supervivencia del 95 por 100 a digamos del 80 por 100, pero también a una del 100 por 100. Para él no sirve la monotonía.

Una segunda reserva se refiere al postulado de continuidad. Una persona que considera el juego o el correr riesgos como «pe-

[10] Hay tres versiones diferentes del postulado (c) discutidas por Marschak. Hemos elegido la más fácil de comprender. Samuelson (1952) llama al postulado (d) «la suposición de fuerte independencia». También se denomina «el principio de cosa segura», especialmente en la literatura de la teoría de juegos.

[11] Marschak (1950), p. 138. (El resultado se sigue del Teorema 6 de Marschak.) La palabra «historia» se usa aquí en un sentido algo especial, significando las perspectivas en «intervalos de tiempo futuro, hasta un cierto punto temporal llamado horizonte», definido por Marschak como «historia futura» (p. 113).

caminoso» puede preferir una vida muy pobre sin correr riesgos (x) a jugar con una buena perspectiva de ganar una fortuna (y), y ésto último a jugar sin perspectivas de ganar (z). Pero aquí no puede haber una mezcla de x y z que le hagan indiferente a y, porque una vez que prueba fortuna en x, es decir, un albur de «una vida muy pobre sin riesgos», está ya en el cupo pecaminoso, y entonces podría preferir jugar con una buena perspectiva de ganar (y) a todas las combinaciones de x y z. Para él la preferencia de x frente a y radica en su pureza, que es destruida con un juego que implique x y z. Esto viola el postulado (b).

El postulado (d) está expuesto también a ciertas dudas. Desde luego, no excluye a la gente que ama u odia el riesgo, como señalan correctamente von Neumann y Morgenstern.[12] Pero hay personas que lo que les encanta es el *número* de loterías en que toman parte, no las probabilidades globales. Nadie nos discutirá que cualquier jugador prefiere intervenir en varias tiradas de ruleta en lugar de compendiar en una sola todas las probabilidades de una noche entera.

Lo que, sin embargo, es verdad es que los postulados no excluyen a las personas que tienen actitudes simples hacia el juego en sí, es decir, que les guste o no, siempre que esto esté relacionado solamente con la distribución global de probabilidades, simple o compuesta. Los números de utilidad tienen en cuenta la actitud hacia el riesgo, y esta es ciertamente una de las fuentes de objeción al uso de estas utilidades en la elección social. Arrow ha señalado que los indicadores de utilidad de von Neumann-Morgenstern pueden no ser la escala apropiada para utilizar en la elección social, es decir, «si estamos interesados primordialmente en hacer una elección social entre medidas políticas alternativas en la que no entran elementos del azar. Decir lo contrario sería afirmar que la distribución de la renta social debe ser gobernada por los gustos de los individuos por el juego».[13]

Esta objeción, a pesar de su aire de inocencia, es fuerte, y está relacionada con el problema general de la arbitrariedad de *cualquier* escala cardinal en elecciones sobre ciertas alternativas. Esta arbi-

[12] Véase von Neumann y Morgenstern (1947), p. 28, en el contexto de su postulado C. Véase también Marschak (1950), p. 139.

[13] Arrow (1951), p. 10.

trariedad se aplica a otros métodos de cardinalización, tales como el de suponer la independencia de conjuntos de acción.[14] Por ejemplo, una persona puede satisfacer la independencia al elegir entre estados sociales terrenos dados estados hipotéticos en el cielo, y viceversa, y esto puede ayudar a la cardinalización de sus utilidades en la tierra. Este elemento cardinal ¿debería ser relevante para las elecciones sociales aquí y ahora? No es ni mucho menos obvio. Además, la suposición de independencia que se precisa en este caso es más fuerte que la requerida para la cardinalización de von Neumann-Morgenstern (postulado (b) de Marschak, discutido arriba), puesto que esta última no niega la complementariedad en el sentido usual, como hace la primera.[15]

Todo esto es algo desalentador, pero tampoco del todo. En primer lugar, cualquier escala cardinal particular es sólo «arbitraria» en el sentido de que en las elecciones entre el conjunto de ciertas alternativas (o entre un subconjunto relevante de él) el comportamiento individual es consistente también con otros métodos de escalaje. Pero en un argumento ético uno puede desear elegir tal o cual escala particular (a pesar de esa «arbitrariedad») sobre la base de *otros* motivos que pueden especificarse adicionalmente. Segundo, como ha argumentado Harsanyi (1953) y (1955), podemos estar interesados en preferencias individuales que lleven un elemento «como-sí» de incertidumbre deliberadamente incorporado, como señalamos en el Capítulo 5. Los «juicios éticos» de la gente se pueden definir como juicios que suscribirían existiese la misma probabilidad de estar en el pellejo de cualquier otro. Con esta interpretación, las preferencias individuales serán elecciones entre alternativas arriesgadas y la «actitud hacia el juego» de la gente puede ser realmente un elemento apropiado en la elección social. Así pues, hay marcos de elección social para los cuales la cardinalización de von Neumann-Morgenstern *es* la relevante.

Tercero, no está todo perdido si se comprueba que hay más de un método de cardinalización relevante. Aun en ese caso pueden emplearse procedimientos de agregación para obtener cuasi-ordenaciones que clasifiquen algunos estados sociales en relación a otros,

[14] Véase Samuelson (1947), Leontief (1947), (1947a), Debreu (1960), Koopmans (1966) y Gorman (1968). Véase también Luce y Tukey (1964) y Luce (1966).

[15] Véase Samuelson (1952), Manne (1952), Malinvaud (1952) y otros en el mismo número de *Econometrica*, 20, 1952.

aunque no necesariamente todos ellos (véase Capítulo 7*, especialmente el Apartado 7*4). Podemos usar cada medida y tomar los rankings comunes, que de ese modo no serán contradictorios. Este problema será discutido en los Apartados 7.5 y 7*4.

La mensurabilidad cardinal es solamente una parte del problema de usar el utilitarismo;[16] otra es la agregación interpersonal. Con la cardinalización de von Neumann-Morgenstern esta dificultad es tan seria como en cualquier otro sistema, puesto que las medidas son enteramente personales. Cualquier método de normalización interpersonal está abierto a críticas. Puede alegarse que algunos sistemas, por ejemplo, asignar en la escala de cada persona el valor 0 a la peor alternativa y el valor 1 a la mejor, son interpersonalmente «justos», pero el argumento es dudoso. Primero, hay otros sistemas con simetría comparable, por ejemplo, el sistema, que discutimos antes, de asignar 0 a la peor alternativa y el valor 1 a la *suma* de utilidades de todas las alternativas. Ninguno de los dos sistemas es notablemente menos justo que el otro (uno supone igual utilidad máxima para todos y el otro igual utilidad media), pero darán bases diferentes de elección social.[17] Segundo, al comparar las medidas de utilidad de diferentes personas, uno puede desear deliberadamente tener en cuenta la variabilidad interpersonal de la capacidad para la satisfacción; dar, por ejemplo, consideración especial a la gente físicamente disminuida cuya medida de disfrute cabe contemplarla como uniformemente más baja.[18]

Una vez más, la situación no es realmente desesperada del todo, aunque los problemas son serios. Una forma de enfrentarse al problema es usar una serie de esquemas alternativos de normalización

[16] La expresión «utilitarismo» se usa aquí en sentido muy amplio, como el enfoque de maximizar los bienestares individuales agregados. De hecho, el «utilitarismo» corresponde al caso especial en que el bienestar individual se identifica con la «utilidad» individual definida como el sentimiento psicológico de satisfacción de la persona. En economía y en algunas otras ciencias sociales es costumbre definir la utilidad como cualquier medida del bienestar individual, no necesariamente una medida del «placer» en el sentido de Bentham. Seguimos esta práctica, aunque es un procedimiento algo dudoso. Contrástese con Little (1950).

[17] En una contribución importante, Hildreth (1953) considera dos estados sociales X e Y especialmente definidos, tales que todos prefieren X a Y, y les asigna dos valores reales fijos a y b, respectivamente, en la escala de utilidad de todos (p. 87). Dada la suposición, es también un método posible de normalización interpersonal.

[18] Esto no es fácil de hacer en el marco utilitario, pero es importante en otros enfoques, por ejemplo, en la teoría de justicia de Rawls (Capítulo 9).

interpersonal y seleccionar aquellas clasificaciones por pares que sean invariantes con respecto a la elección de cualquiera de estos esquemas. Discutimos este método de «comparabilidad parcial» en el apartado siguiente, y más formalmente en el Capítulo 7*.

7.4. Comparabilidad parcial

Supongamos que estamos discutiendo las consecuencias que para el bienestar agregado de los romanos tuvo la quema de Roma mientras Nerón tocaba la lira. Reconocemos que Nerón estaba encantado mientras los demás romanos sufrían, pero aún así sostenemos que la suma total del bienestar descendió como consecuencia de ello. ¿Qué tipo de comparabilidad interpersonal estamos suponiendo? Si no hay comparabilidad en absoluto, podemos cambiar las unidades de utilidad de distintos individuos de modo diferente y multiplicando las medidas de utilidad de Nerón por un número suficientemente grande, sería posible hacer la ganancia de Nerón mayor en magnitud que la pérdida de los otros. De aquí que no estemos suponiendo no-comparabilidad. Pero ¿estamos suponiendo que las unidades de bienestar de cada romano pueden ponerse en una correspondencia uno a uno con las unidades de bienestar de cualquier otro romano? No necesariamente. Podríamos no estar seguros de qué correspondencia tomar y admitir cierta variabilidad, y aun así ser capaces de afirmar que independientemente de cuál de las distintas combinaciones posibles tomemos, la suma total descendió. Este es un caso intermedio entre no comparabilidad y comparabilidad total de unidades.

Veamos otro ejemplo. Supongamos que denunciamos la desigualdad existente en la distribución de la renta monetaria y afirmamos que esto equivale a un agregado más bajo del bienestar individual. ¿Estamos suponiendo que podemos poner las unidades de bienestar de todos en una correspondencia uno a uno? No tenemos por qué. Podemos estar algo inseguros acerca de las funciones de bienestar precisas de los distintos individuos y acerca de la correspondencia exacta entre las respectivas unidades de bienestar, y aun así afirmar con razón que en todos los casos posibles, dentro de las variaciones permitidas, la suma total es inferior a la que podría existir con una distribución más equitativa. El ataque de Robbins (1932) y otros contra la comparabilidad interpersonal no distingue entre compara-

bilidad *parcial* y comparabilidad *total* de unidades, y la consecuencia ha sido la exclusión virtual de toda consideración distributiva en la literatura formal sobre economía del bienestar. (Entre las excepciones están Lerner (1944), Dobb (1955), (1969), Fisher (1956), Mishan (1960) y algunos otros).

Lo que podemos hacer es introducir cierta variabilidad limitada en las unidades de bienestar relativo de diferentes individuos y manejar, no correspondencias uno a uno, sino correspondencias «muchos a muchos». El esquema general se desarrolla en el Capítulo 7*, pero aquí podemos ilustrar el enfoque con un sencillo ejemplo.

Considérese el caso siguiente: Hay tres individuos *A*, *B* y *C* y tres alternativas *x*, *y* y *z*. Como árbitros estamos intentando averiguar qué alternativa es socialmente más deseable en términos del bienestar agregado. Primero obtenemos las funciones de bienestar cardinal de los tres; cada una de ellas es desde luego única salvo una transformación lineal creciente. Reflexionamos sobre las correspondencias entre las unidades de bienestar de los tres individuos, pero no logramos decidirnos. Puede que nos inclinemos por usar el procedimiento de normalización de igualar el bienestar de la peor alternativa a 0 y el de la mejor a 1 para cada individuo, aun cuando no estemos realmente convencidos de que sea completamente correcto. Supongamos que esto conduce a la Tabla 7.1.

TABLA 7.1. Indicadores de bienestar tentativos

Individuos	Alternativas		
	x	*y*	*z*
A	1	0,90	0
B	1	0,88	0
C	0	0,95	1

Atendiendo a la suma de bienestar, la ordenación tentativa es *y*, *x*, *z*, en orden decreciente. ¿Qué otro criterio podemos usar? Obsérvese que ninguna de las alternativas de este conjunto es superior según Pareto a ninguna otra. En términos de decisión de mayoría obtenemos una ordenación social consistente, con *x* socialmente

y es posible que exista un elemento «óptimo» para grados incluso más bajos de comparabilidad parcial. En el ejemplo señalado teníamos $d = 0{,}0625$, e incluso con un grado tan bajo de comparabilidad se vio que existía una alternativa óptima. Con un grado de comparabilidad mayor que 0,25, se hubiese alcanzado una ordenación completa en ese ejemplo. La comparabilidad completa no sólo es una suposición dudosa, sino completamente innecesaria.

7.5. Suma del bienestar del tipo ordinal

Igual que existe cierta bruma de valores en las comparaciones interpersonales, puede haberla en la medida de la utilidad individual. Como señalamos antes, hay más de un sistema de cardinalización posible, y éticamente puede ser difícil establecer la superioridad de uno sobre otro. Si se admiten todos estos sistemas, entonces cada individuo estará asociado con un conjunto de funciones de utilidad, no todas transformaciones lineales unas de otras, a diferencia del caso de la cardinalidad. Desde luego todas serán transformaciones monótonas positivas unas de otras. Pero a diferencia del caso de la ordinalidad estricta, no estarán necesariamente incluidas todas las transformaciones monótonas. Llamaremos a este caso el del bienestar del «tipo ordinal». Un caso extremo de esto es la ordinalidad estricta, donde el conjunto incluye todas las transformaciones monótonas positivas, mientras que el otro extremo es la cardinalidad estricta, donde solamente se incluyen transformaciones *lineales* positivas.

Con utilidad del tipo ordinal y comparabilidad parcial es posible obtener una cuasi-ordenación de agregación empleando la regla de que si x tiene una suma de bienestar al menos tan grande como y bajo cualquier medida de utilidades individuales (dada por las suposiciones de mensurabilidad) y bajo toda correspondencia interpersonal (dada por las suposiciones de comparabilidad), entonces y sólo entonces es x al menos tan buena como y. Independientemente de las suposiciones de mensurabilidad y comparabilidad elegidas, una relación de agregación así definida será una cuasi-ordenación (es decir, será transitiva y reflexiva), e incorporará al menos la cuasi-ordenación de Pareto. Cuando más estrictas sean las suposiciones de mensurabilidad y comparabilidad, tanto más extensiva será la cuasi-ordenación. Es desde luego posible obtener una ordenación

completa incluso con menos que cardinalidad estricta y menos que comparabilidad completa.

El análisis formal se presenta en el Apartado 7*4. El punto importante a señalar aquí es que la cardinalidad y la comparabilidad interpersonal total de unidades de bienestar individual son supuestos *suficientes pero no necesarios* para la elección racional bajo maximización del bienestar agregado. De aquí que la exclusión de estos supuestos no inutilice a este método, contrariamente a lo que parece sostenerse frecuentemente. El gran atractivo de la maximización del bienestar agregado como método para el análisis de la elección colectiva, del cual el utilitarismo clásico es un caso especial, se basa en un uso implícito de una estructura más amplia que la permitida por la comparabilidad completa y la cardinalidad. Tal estructura general, que está definida y analizada en el Capítulo 7*, carece de la efectividad a prueba de incendios del utilitarismo clásico, que es uno de sus casos muy especiales, pero también evita el carácter absolutamente seguro del utilitarismo así como también su arbitrariedad ilimitada.

Capítulo 7*
CUASI-ORDENACIONES DE AGREGACION[1]

7*1. Comparabilidad y agregación

Sea X el conjunto de estados sociales alternativos, x. Cada individuo i tiene un conjunto L_i de funciones de bienestar W_i (de valores reales), cada una definida en X. Si el bienestar social es «mensurable ordinalmente», entonces cada elemento de L_i es una transformación monótona positiva de cada otro elemento y además toda transformación monótona positiva de cualquier elemento de L_i pertenece a L_i. Si por otro lado, el bienestar individual es «mensurable cardinalmente», entonces cada elemento de L_i es una transformación lineal positiva de cada otro elemento, y toda transformación lineal positiva de cualquier elemento de L_i pertenece a L_i.[2] En este apartado y en los dos siguientes supondremos que existe mensurabilidad cardinal del bienestar social. En el Apartado 7*4 se estudiará la agregación con utilidad no cardinal.

[1] Este capítulo está estrechamente relacionado con Sen (1970a).

[2] Por transformación lineal positiva se entienden aplicaciones del tipo siguiente: $U^1 = a + bU^2$, siendo a y b constantes y $b > 0$. Hablando estrictamente son «transformaciones afines» y no transformaciones lineales, un término que los algebristas reservarían para transformaciones homogéneas del tipo $U^1 = bU^2$.

Para sumar los niveles de bienestar individual, tenemos que elegir un elemento de cada L_i. Llamaremos combinación funcional a cualquiera de tales n-uplas de funciones de bienestar individual.

DEFINICIÓN 7*1. *Una combinación funcional, W, es cualquier elemento del producto cartesiano $\Pi_{i=1}^{n} L_i$, designado por L.*

Para comparar el bienestar agregado de estados sociales alternativos en X, definimos un subconjunto $\bar{L}$ de L, y sumamos las diferencias de bienestar individual entre cualquier par x, y en X para cada elemento de $\bar{L}$. La especificación de $\bar{L}$ refleja nuestros supuestos de comparabilidad interpersonal. Escribimos $x\,R^a\,y$ para decir que x tiene al menos tanto bienestar agregado como y.

DEFINICIÓN 7*2. *Un conjunto de comparación $\bar{L}$ es cualquier subconjunto especificado de L tal que declaramos que x tiene al menos tanto bienestar agregado como y, para cualquier par x, y, si y solamente si la suma de las diferencias de bienestar individual entre x e y es no negativa para todo elemento W de $\bar{L}$, es decir,*

$$\forall x,\ y \in X : [x\,R^a\,y \leftrightarrow \forall\, W \in \bar{L} : \sum_i \{W_i(x) - W_i(y)\} \geqq 0]$$

Definimos $x\,P^a\,y$ como $x\,R^a\,y$ y $\sim(y\,R^a\,x)$, y $x\,I^a\,y$ como $x\,R^a\,y$ y $y\,R^a\,x$.

Hay casos de comparabilidad interpersonal que merecen mención especial y que ayudan a ilustrar la relación entre la comparabilidad interpersonal y el conjunto de comparación. (W_i es el elemento del lugar i de cualquier W; es el nivel de bienestar de la persona i.)

DEFINICIÓN 7*3. (1) *La no comparabilidad se cumple si y solamente si $L = \bar{L}$.*

(2) *La comparabilidad total se cumple si y solamente si el ser $\bar{W}$ cualquier elemento de $\bar{L}$ implica que $\bar{L}$ incluye todas las combinaciones funcionales W (y sólo ellas) tales que para todo i,*

$$W_i = a + b\,\bar{W}_i$$

donde a y $b > 0$ son constantes, invariantes con respecto a i.

(3) *La comparabilidad unitaria se cumple si y solamente si el ser $\bar{W}$*

cualquier elemento de $\bar{L}$ implica que $\bar{L}$ incluye todas las combinaciones funcionales W (y sólo ellas) tales que para todo i,

$$W_i = a_i + b\,\bar{W}_i$$

donde a_i puede variar con i pero $b > 0$ debe ser invariante con respecto a i.

En el caso de no comparabilidad el conjunto L de combinaciones funcionales no se restringe de ningún modo para llegar al conjunto de comparación $\bar{L}$. En el caso de comparabilidad total se establece una correspondencia particular uno a uno entre las funciones de bienestar de los distintos individuos. En el caso de comparabilidad unitaria, si se especifica la función de bienestar de un individuo, se especifica una familia uniparamétrica de funciones de bienestar para cada otro individuo, difiriendo cada miembro de la familia en una constante (positiva o negativa). Puede observarse que en la comparabilidad unitaria los niveles absolutos de bienestar individual no son comparables (por ejemplo, no tiene sentido decir que la persona *A* está mejor que la persona *B*), pero sí las diferencias de bienestar (por ejemplo, tiene sentido decir que la persona *A* gana más que *B* en la elección del estado social x que en la de y). En este caso, las unidades de bienestar son comparables (hay una correspondencia uno a uno de las unidades de bienestar), aunque los orígenes son arbitrarios.

Los siguientes resultados relativos a la relación binaria de agregación R^a son importantes. $\bar{R}$ y $\bar{P}$ son las relaciones de preferencia de Pareto como se han definido en la Definición 2*2.

TEOREMA 7*1. *Con bienestares individuales cardinalmente mensurables*

(1) *Para cualquier $\bar{L}$, es decir, para todo posible supuesto de comparabilidad interpersonal, R^a es una cuasi-ordenación.*

(2) *Para cualquier $\bar{L}$, es decir, para todo posible supuesto de comparabilidad interpersonal, $\bar{R}$ es una subrelación de R^a, es decir, $\forall\, x, y \in X : [x\,\bar{R}\,y \rightarrow x\,R^a\,y]$ y $[x\,\bar{P}\,y \rightarrow x\,P^a\,y]$.*

(3) *Con no comparabilidad, $R^a = \bar{R}$.*

(4) *Con comparabilidad unitaria, o con comparabilidad total, R^a es una ordenación completa.*

Demostración: (1) La reflexividad de R^a se sigue directamente del hecho de que cada W_i es una transformación preservadora del

orden de R_i para cada elemento de L. La transitividad de R^a es también inmediata:

$$[x\,R^a\,y\ \&\ y\,R^a\,z] \to \sum_i [W_i(x) - W_i(y)] \geqq 0 \quad \text{y}$$
$$\sum_i [W_i(y) - W_i(z)] \geqq 0 \quad \text{para todo } W \in \bar{L}$$
$$\to \sum_i [W_i(x) - W_i(z)] \geqq 0 \quad \text{para todo } W \in \bar{L}$$
$$\to x\,R^a\,z$$

(2) Para cualesquiera $x,\ y \in X$:

$$x\,\bar{R}\,y \to \forall i : [W_i(x) - W_i(y)] \geqq 0 \quad \text{para todo } W \in L$$
$$\to x\,R^a\,y$$

puesto que $\bar{L} \subset L$. Además,

$$x\,\bar{P}\,y \to [\exists i : x\,P_i\,y\ \&\ \forall i : x\,R_i\,y]$$
$$\to \exists i : [W_i(x) - W_i(y)] > 0\ \&$$
$$\forall i : [W_i(x) - W_i(y)] \geqq 0 \quad \text{para todo } W \in L$$
$$\to x\,P^a\,y$$

puesto que $\bar{L} \subset L$.

(3) En vista de (2), lo único que hay que demostrar es $x\,R^a\,y \to x\,\bar{R}\,y$. Para cualquier $x,\ y$ en X, $\sim(x\,\bar{R}\,y) \to \exists j : y\,P_j\,x \to \exists j : [W_j(y) - W_j(x)] > 0$, para todo $W \in L$. Para cada W, definimos $\alpha_1(W) = W_j(y) - W_j(x)$, y $\alpha_2(W) = \Sigma_{i,i\neq j}[W_i(x) - W_i(y)]$. Tómese cualquier $W^* \in L$ arbitrario. Si $\alpha_1(W^*) > \alpha_2(W^*)$, entonces evidentemente $\sim(x\,R^a\,y)$. Sin embargo, supongamos que $\alpha_1(W^*) \leqq \alpha_2(W^*)$. Consideremos ahora $W^{**} \in L$ tal que $W_i^{**} = W_i^*$ para todo $i \neq j$, y $W_j^{**} = n\,W_j^*$, siendo n un número real mayor que $\alpha_2(W^*)/\alpha_1(W^*)$. Evidentemente, $\alpha_1(W^{**}) > \alpha_2(W^{**})$, y $W^{**} \in L$. Puesto que $\bar{L} = L$, dada la no comparabilidad, tenemos $\sim(x\,R^a\,y)$, lo que completa la demostración.

(4) En vista de (1) todo lo que precisamos mostrar es la completitud de R^a. Supongamos primero comparabilidad unitaria. Tomemos cualquier $W^* \in \bar{L}$, y cualesquiera $x,\ y \in X$. Obviamente, $\Sigma_i[W_i^*(x) - W_i^*(y)] \geqq 0$, o $\leqq 0$. Puesto que para todo $W \in \bar{L}$, para cada i, $W_i = a_i + b\,W_i^*$, para algún $b > 0$, debemos tener $\Sigma_i[W_i(x) - W_i(y)]$ no negativo para todo $W \in \bar{L}$, o no positivo para todo $W \in \bar{L}$. De aquí

que R^a deba ser completa. Puesto que la comparabilidad total implica que $\bar{L}$ es aún más restringido, claramente R^a debe ser también completa en este caso.

7*2. Comparabilidad parcial

La comparabilidad parcial es el término utilizado para todos los casos de comparabilidad interpersonal que se encuentran entre comparabilidad unitaria y no comparabilidad. Supongamos que $\bar{L}(0)$ y $\bar{L}(1)$ representan a $\bar{L}$ bajo no comparabilidad y comparabilidad unitaria, respectivamente.

DEFINICIÓN 7*4. *Si L es un subconjunto de* $\bar{L}(0)$ *y un superconjunto de* $\bar{L}(1)$, *entonces se cumple la comparabilidad parcial. Nos referiremos a* $\bar{L}$ *bajo comparabilidad parcial como* $\bar{L}(p)$.

Sabemos por el Teorema 7*1 que la relación de agregación R^a es una cuasi-ordenación bajo todo caso de comparabilidad parcial. Puesto que con vistas a la agregación estamos realmente interesados en las *unidades* de bienestar y no en los *orígenes* respectivos, es conveniente especificar el conjunto de vectores b de coeficientes de medidas de bienestar individual con respecto a cualquier conjunto de comparación $\bar{L}(p)$. Evidentemente el conjunto de b debe ser definido con respecto a algún $W^* \in L$ particular elegido para la normalización, al cual podemos llamar elemento de referencia. Puesto que la elección de W^* es completamente arbitraria, las propiedades del conjunto de b que nos interesan deben ser independientes del W^* particular elegido. Designamos al elemento del lugar i de b por b_i.

DEFINICIÓN 7*5. *El conjunto de todos los vectores b tal que algún* $W \in \bar{L}(p)$ *pueda ser expresado, para algún vector a, como* $(W_1, \ldots, W_n)$, *donde*

$$W_i = a_i + b_i W_i^*$$

se llama conjunto de coeficientes de $\bar{L}$ *con respecto a* W^*, *y será designado por* $B(W^*, \bar{L})$. *Cuando no haya posibilidad de ambigüedad nos referiremos a* $B(W^*, \bar{L})$ *como B.*

Quizá sea útil dar una representación de B. Considérese el espacio

euclidiano n-dimensional E^n, siendo n el número de individuos. Con comparabilidad unitaria, B es una semirrecta abierta con origen 0, excluyendo al 0.[3] Especificando algún elemento b del conjunto de coeficientes B, el resto puede obtenerse simplemente por multiplicación escalar por $t > 0$. La especificación precisa de la semirrecta con origen 0 dependerá del elemento W^* elegido para la representación; lo importante es que en este caso B será simplemente un radio desde el origen. Incidentalmente si W^* se elige de $\bar{L}$, entonces para todo i, j, debemos tener $b_i = b_j$ para todo b.

Por otro lado, con no comparabilidad, B será igual al ortante positivo de E^n, es decir, el ortante no negativo completo, salvo la frontera.[4] Cualquier vector estrictamente positivo puede ser elegido como b.

Dado el conjunto de estados sociales X y el conjunto de funciones de utilidad individual definidas en X, podríamos preguntarnos cuál sería la relación entre la magnitud de B y la cuasi-ordenación de agregación generada en cada caso. Obtengamos primero el siguiente resultado elemental, siendo R^1 y R^2 dos cuasi-ordenaciones de agregación con respecto a B^1 y B^2, respectivamente.

LEMA 7*a. *Si* $B^2 \subset B^1$, *entonces para todo* $x, y \in X : x R^1 y \rightarrow x R^2 y$.

La demostración es obvia. Puede señalarse que no se sigue que $x P^1 y \rightarrow x P^2 y$, de modo que R^1 no precisa ser una subrelación de R^2 siempre que $B^2 \subset B^1$. Una aclaración bastará. En un mundo de dos personas tómese $W^* \in \bar{L}$ como el elemento de referencia. Compárese un caso de comparabilidad unitaria (o total) que requiera $b_1 = b_2$ para cada W en $\bar{L}$, con un caso de comparabilidad estrictamente parcial, donde podemos elegir b_1/b_2 del intervalo cerrado (1, 2). Supóngase además que

$$[W_1^*(x) - W_1^*(y)] = [W_2^*(y) - W_2^*(x)] > 0$$

Evidentemente, $x I^1 y$ en el primer caso y $x P^2 y$ en el segundo. De aquí que R^1 no sea una subrelación de R^2.

Hemos definido la comparabilidad parcial con tanta generalidad

[3] Es necesario excluir el 0 puesto que solamente se permiten transformaciones lineales *positivas*.

[4] Se excluye la frontera porque sólo se permiten transformaciones lineales *positivas*.

que cualquier B desde una semirrecta al ortante positivo completo cae en esta categoría. Sin embargo, sería razonable esperar que B bajo comparabilidad parcial satisfará ciertas condiciones de regularidad. En primer lugar, los coeficientes deberían ser independientes de la escala. Si $b \in B$, entonces para todo $\lambda > 0$, $(\lambda b) \in B$, es decir, B deberá incluir todos los puntos de la semirrecta 0, b, excepto al 0. Por ejemplo, si (1, 2, 3) es un posible b, entonces también debería ser (2, 4, 6), ya que nada esencial depende de la escala de representación. Esto implica que B será un cono con vértice 0 pero excluyendo el propio 0, es decir, es el complemento de 0 en un cono con vértice 0.

Segundo, parece razonable suponer la convexidad de B. Por ejemplo, dado un coeficiente 1 para el individuo 1, si estamos dispuestos a aplicar ambos coeficientes 1 y 2 a las unidades de bienestar del individuo 2, deberíamos estar también dispuestos a aplicar 1,5. Con más generalidad, si b^1 y b^2 son dos elementos de B, entonces lo es también $tb^1 + (1 - t)b^2$ para cualquier $t : 0 < t < 1$. Puesto que con la excepción de 0, B es un cono, esto equivale a la convexidad del cono.

AXIOMA 7*1. *Independencia de escala y convexidad: Si* $b^1, b^2 \in B$, *entonces para todo* $t^1, t^2 \geqq 0$, *excepto para* $t^1 = t^2 = 0$, *puede concluirse que* $(t^1 b^1 + t^2 b^2) \in B$.

Este axioma es más o menos irrecusable. En el apartado siguiente introducimos una serie de requisitos cada vez más fuertes.

7*3. Regularidad y simetría

Introduzcamos ahora un axioma de regularidad.

AXIOMA 7*2. *Regularidad: Para toda partición posible del conjunto de individuos en dos subconjuntos* (V^1 *y* V^2), *si* B^2 *es un subconjunto propio de* B^1, *entonces*

$$\exists (b^1 \in B^1 \ \& \ b^2 \in B^2) : [\{\forall i \in V^1 : b_i^2 < b_i^1\} \ \& \ \{\forall i \in V^2 : b_i^2 > b_i^1\}]$$

TEOREMA 7*2. *Con bienestares individuales cardinales, dado el Axioma* 7*2, $B^2 \subset B^1$ *implica que* R^1 *es una subrelación de* R^2.

Demostración: Si $B^1 = B^2$, entonces evidentemente $R^1 = R^2$, de

modo que podemos concentrarnos en el caso en que B^2 es un subconjunto propio de B^1. En vista del Lema 7*a todo lo que hay que probar es que $x P^1 y \rightarrow x P^2 y$, para todo $x, y \in X$. Supongamos por el contrario que para algún $x, y \in X$, tenemos $x P^1 y \ \& \sim(x P^2 y)$. En vista del Lema 7*a esto implica que $x P^1 y$, $x R^2 y$ y $y R^2 x$. Puesto que $x I^2 y$, debemos tener $\forall b^2 \in B^2 : \Sigma_i[W_i^*(x) - W_i^*(y)]b^2 = 0$. Hacemos una partición de los individuos en dos grupos J y K tales que $i \in J$ si y solamente si $x P_i y$, e $i \in K$ en caso contrario. Por el Axioma 7*2 podemos aseverar que $\exists b^1 \in B^1 : \Sigma_i[W_i^*(x) - W_i^*(y)]b_i^1 < 0$, o $\forall i : x I_i y$. Pero ninguna de las alternativas podría ser cierta puesto que $x P^1 y$, y esta contradicción establece el teorema.

Puede observarse que el Axioma 7*1 no es necesario para el Teorema 7*2. Sin embargo, este hecho puede no ser muy importante desde un punto de vista práctico, puesto que la convexidad e independencia de escala parecen hacer al Axioma 7*2 menos objetable.

¿Cómo es de exigente el axioma de regularidad? Considérense B^1 y B^2 como dos conos convexos (excluyendo el vértice). Lo que el axioma de regularidad afirma es que si B^2 es un subconjunto propio de B^1, entonces hay al menos una semirrecta en B^2 que es un *radio* interior de B^1. Lo único que excluye esto es la posibilidad de que la relajación de la comparabilidad esté tan sesgada que todos los casos permitidos en el conjunto más pequeño sean simplemente posiciones límite en el conjunto mayor. Esto es, en todo caso, imposible si la dimensión lineal del cono que representa B^2 es n, cuando n es el número de individuos. Además, incluso si la dimensión lineal de B^2 es menor que n, se cumplirá el axioma de regularidad, a menos que el paso de B^2 a B^1 esté muy sesgado.

Un requisito algo más fuerte que la regularidad es el de la «simetría débil».

AXIOMA 7*3. *Simetría débil*:[5] *Cada B es un cono poliédrico convexo definido por* $B = [b/\forall i, j : (b_i/b_j) \leqq \beta_{ij} \geqq 1]$ *excepto el origen, y para cualquier par* B^1 *y* B^2, $[\exists i, j : \beta_{ij}^1 > \beta_{ij}^2] \rightarrow [\forall i, j : \beta_j^1 > \beta_{ij}^2]$.

[5] Un requisito más débil, suficiente para nuestros resultados, será permitir que los conjuntos de coeficientes sean conos cerrados y convexos (no necesariamente poliédricos) y exigir que en cualquier par de conjuntos de coeficientes haya un conjunto tal que para todos los hiperplanos a través del origen, si ese conjunto se encuentra en un lado de ellos, el otro se encuentre estrictamente sobre ese lado.

Este requisito es mucho más fuerte que el axioma de regularidad. Con este último es suficiente que un rayo en $B^2 \subset B^1$ sea un rayo interior de B^1, mientras que con la simetría débil todo rayo en B^2 ha de ser interior en B^1, si B^2 es un subconjunto propio de B^1. En el caso de simetría débil, si se relaja la amplitud de la comparabilidad entre cualquier par de individuos, tiene que relajarse para todo par de individuos. Sin embargo, el grado exacto de relajación puede variar de un par a otro (de aquí que sea «débil», en contraste con la «simetría fuerte» que veremos después). También impone una simetría direccional entre cada individuo de un par. Si la cota mínima superior de la relación de coeficientes sube entre i y j, entonces la cota máxima inferior de la relación debe descender (es decir, la cota mínima superior de la relación entre j e i debe subir). La motivación del Axioma 7*3 es eliminar el sesgo direccional en casos alternativos de comparabilidad parcial. Esto arroja el siguiente resultado importante:

LEMA 7*b. *Con bienestares individuales cardinales, dados los Axiomas* 7*1 *y* 7*3, *la relación binaria de inclusión de conjuntos define una ordenación en la clase de todos los conjuntos de coeficientes.*

Demostración: Puesto que $B \subset B$ para todo B, y $B^3 \subset B^2$ & $B^2 \subset B^1 \rightarrow B^3 \subset B^1$, para todo B^1, B^2 y B^3, sabemos que $\subset$ debe ser reflexiva y transitiva. Si $B^1 \neq B^2$, entonces dada la convexidad, para algún i, j, $\sup_{b^1 \in B^1}(b^1_i/b^1_j)$ es estrictamente mayor o estrictamente menor que $\sup_{b^2 \in B^2}(b^2_i/b^2_j)$. Sin pérdida de generalidad suponemos que es estrictamente mayor. Entonces por el axioma de simetría débil tenemos que para todo i, j, $\sup_{b^1 \in B^1}(b^1_i/b^1_j) > \sup_{b^2 \in B^2}(b^2_i/b^2_j)$. Puesto que B^1 y B^2 son conos convexos (excluyendo el vértice); esto implica que $B^2 \subset B^1$.

En vista del Teorema 7*2 y el Lema 7*b, obtenemos inmediatamente el resultado siguiente, observando el hecho de que el Axioma 7*3 implica el Axioma 7*2:

TEOREMA 7*3. *Para bienestares individuales cardinales, si* R^1 *y* R^2 *son dos cuasi-ordenaciones de agregación generadas por dos casos de comparabilidad parcial, entonces dados los Axiomas* 7*1 *y* 7*3, *o bien* R^1 *es una subrelación de* R^2, *o* R^2 *es una subrelación de* R^1, *y la relación binaria entre cuasi-ordenaciones de «ser una subrelación de» define una ordenación completa en todas las cuasi-ordenaciones de agregación posibles bajo comparabilidad parcial.*

Tenemos así una secuencia de cuasi-ordenaciones, cada una de las cuales es una subrelación de la siguiente, empezando por la cuasi-ordenación de Pareto, que viene dada por la no comparabilidad, y terminando con una ordenación completa, que viene dada por la comparabilidad unitaria. Entre ellas se encuentran todos los casos de comparabilidad parcial, y a medida que se eleva la amplitud de la comparabilidad parcial, es decir, a medida que B disminuye, la cuasi-ordenación de agregación se amplía (si es que cambia), sin contradecir ninguna cuasi-ordenación anterior obtenida para un grado más bajo de comparabilidad parcial.

En este caso puede ser útil una medida del grado de comparabilidad parcial. Para cada par ordenado de individuos i, j se define la relación siguiente, a la que llamaremos razón de comparabilidad:

$$c_{ij} = \inf_{b \in B} (b_i/b_j) / \sup_{b \in B} (b_i/b_j)$$

Podemos definir el grado de comparabilidad parcial como la media aritmética de las razones de comparabilidad para cada par ordenado de individuos.

DEFINICIÓN 7*6. *Dados los Axiomas* 7*1 *y* 7*3, *el grado de comparabilidad parcial* $d(B)$ *viene medido por la media aritmética de* c_{ij} *para todos los pares ordenados* i, j.

Puesto que cada c_{ij} debe encontrarse dentro del intervalo cerrado $[0, 1]$ el grado de comparabilidad parcial está también definido en este intervalo. Además, se cumple el siguiente teorema:

TEOREMA 7*4. *Para bienestares individuales cardinales, dados los Axiomas* 7*1 *y* 7*3, $d(B) = 0$ *implica que la cuasi-ordenación de agregación será la misma que la cuasi-ordenación de Pareto* R, *y* $d(B) = 1$ *implica que será una ordenación. Además, si* $d(B^2) > d(B^1)$, *la cuasi-ordenación de agregación* R^1 *será una subrelación de la cuasi-ordenación de agregación* R^2.

Demostración: Si $d(B) = 1$, evidentemente $c_{ij} = 1$ para cada par ordenado i, j. En este caso B consistirá solamente en un rayo a través del origen y se cumplirá la comparabilidad unitaria. Sabemos por el Teorema 7*1 que en este caso R^a será una ordenación completa. Si, por otra parte, $d(b) = 0$, cada c_{ij} debe ser igual a cero, de modo que la razón b_i/b_j puede variarse sin límites (excepto los impuestos

por el hecho de que cada b_i sea un número positivo) para todo i, j. Esto implica que se cumple la no comparabilidad y por el Teorema 7*1 sabemos que $R = \bar{R}$.

Si $d(B^2) > d(B^1)$, entonces para algún i, j, $c_{ij}^1 < c_{ij}^2$. Esto implica que para algún par i, j, o bien $\sup (b_i^1/b_j^1) > \sup (b_i^2/b_j^2)$ o $\inf (b_i^1/b_j^1) < \inf (b_i^2/b_j^2)$. Si lo primero, entonces se sigue del Axioma 7*3 que B^2 es un subconjunto propio de B^1. Si lo segundo, entonces $\sup (b_j^1/b_i^1) > \sup (b_j^2/b_i^2)$, y una vez más B^2 debe ser un subconjunto propio de B^1. Ahora bien, puesto que la simetría débil implica regularidad, se sigue del Teorema 7*2 que R^1 debe ser una subrelación de R^2.

Del Teorema 7*4 se desprende que si además de las suposiciones relativamente inocuas de convexidad e independencia de escala se cumple la simetría débil, entonces todos los casos de comparabilidad parcial pueden medirse con un grado preciso, $d(B) = q$, de comparabilidad parcial, con propiedades interesantes. q es un número real del intervalo cerrado $[0, 1]$, y la cuasi-ordenación correspondiente R^q es una subrelación de todas las cuasi-ordenaciones obtenidas con todos los grados superiores de comparabilidad parcial ($d > q$), mientras que todas las cuasi-ordenaciones con grados más bajos de comparabilidad parcial ($d < q$) son subrelaciones de R^q. Esta propiedad de monotonía en la relación entre el contenido de grados de comparabilidad en el intervalo $[0, 1]$ y la secuencia de cuasi-ordenaciones de agregación desde la cuasi-ordenación de Pareto a una ordenación completa es una fenómeno de cierta importancia.

También debe destacarse que no es *necesario* suponer $d(B) = 1$ para generar una ordenación completa, aunque es suficiente. Incluso con $d(B) < 1$ puede lograrse la completitud. El grado necesario dependerá de la configuración precisa de las funciones de bienestar individuales.

Un caso más restrictivo que la simetría débil es el de «simetría fuerte», que se define a continuación.

AXIOMA 7*4. *Simetría fuerte: Existe alguna combinación funcional* $W^* \in \bar{L}(p)$ *tal que para cada* B $(W^*, \bar{L})$, $\sup_{b \in B}(b_i/b_j)$ *es exactamente el mismo para todos los pares ordenados* i, j.

Evidentemente, la simetría fuerte implica la simetría débil, pero no viceversa. Además, bajo simetría fuerte c_{ij} es el mismo para todo i, j. Podemos expresar el grado de comparabilidad parcial simple-

mente como cualquier c_{ij}. Es de destacar que la propiedad de tener la misma cota superior depende del W^* que elijamos como punto de referencia; W^* ya no es, pues, inconsecuente. El axioma de simetría fuerte asevera que para *algún* W^* se cumple este conjunto de desigualdades, pero no, desde luego, para toda elección arbitraria de W^*.

Un ejemplo de simetría fuerte relacionado con un caso discutido en el Capítulo 7 es el siguiente: Considérese la restricción de que para algún número real p, $0 < p < 1$, y para todo i, j debemos tener $p < (b_i/b_j) < 1/p$. El grado de comparabilidad parcial según la Definición 7*6 vendrá dado por p^2, que se encontrará en el intervalo cerrado $[0, 1]$, y al aumentar p de 0 a 1, nos moveríamos monótonamente desde no comparabilidad a comparabilidad unitaria.

Con simetría fuerte es fácil especificar un grado suficiente de comparabilidad parcial que garantice la completitud de la cuasi-ordenación de agregación. Para cualquier par de alternativas x, y en X, se dividen los individuos en dos clases: J consistente en todos aquellos que prefieren x a y, y K, consistente en todos aquellos que consideran a y al menos tan buena como x.

Definimos

$$m(x, y) = \sum_{i \in J} [W_i^*(x) - W_i^*(y)]$$

y

$$m(y, x) = \sum_{i \in K} [W_i^*(y) - W_i^*(x)]$$

Ahora definimos $a(x, y)$ como lo siguiente:

$$a(x, y) = \frac{\min [m(x, y), m(y, x)]}{\max [m(x, y), m(y, x)]}$$

TEOREMA 7*5. *Para bienestares individuales cardinales, con convexidad, independencia de escala y simetría fuerte, la cuasi-ordenación de agregación será completa si el grado de comparabilidad parcial es mayor o igual a* a^{*2}, *donde* $a^* = sup_{x,y \in X}\, a(x, y)$.

Demostración: Para cualquier par x, y, la completitud puede no cumplirse si y solamente si $\Sigma_i[W_i(x) - W_i(y)] > 0$ para algún $W \in \bar{L}$,

y < 0 para algún otro $W \in \bar{L}$. Considérese primero W^*. Sin pérdida de generalidad, supongamos $\Sigma_i[W_i^*(x) - W_i^*(y)] > 0$, es decir, $m(x, y) > m(y, x)$. Tenemos que mostrar que la suma de las diferencias de bienestar entre x e y es no negativa para todo $W \in \bar{L}$. Supongamos que d sea el grado de comparabilidad parcial, de modo que la razón de las unidades de bienestar de dos personas cualesquiera puede ser reducida a lo sumo por un factor $p = d^{1/2}$. Si, contrariamente al teorema, la suma de las diferencias de bienestar entre x e y es negativa para cualquier $W \in \bar{L}$, entonces $[pm(x, y) - m(y, x)] < 0$. De aquí que $p < [m(y, x)/m(x, y)]^{1/2}$. Pero esto es imposible puesto que $p = \sup_{x,y \in X} a(x, y)$. Esta contradicción prueba que la cuasi-ordenación de agregación debe ser completa.

Está claro que la comparabilidad unitaria es una suposición innecesariamente exigente, y algún grado de comparabilidad parcial estricta, es decir, $d < 1$, puede dar una ordenación completa —precisamente la misma ordenación que uno obtendría bajo comparabilidad unitaria (o comparabilidad total).

7*4. Adición de bienestar no cardinal

Hasta ahora se ha supuesto que cada elemento de L_i es una transformación lineal positiva de cada otro elemento, es decir, el bienestar individual es cardinalmente mensurable. Esta suposición es innecesariamente fuerte para ejercicios de comparabilidad parcial. En lo que sigue relajamos esta restricción y L_i puede incluir elementos que no sean transformaciones lineales unos de otros, aunque cada uno de ellos debe ser una transformación monótona positiva. Sin embargo, no es necesario incluir toda transformación monótona positiva. Habrá, por tanto, casos que sean más restringidos que la mensurabilidad cardinal y menos que la mensurabilidad ordinal.

DEFINICIÓN 7*7. *Si, para todo i, cada elemento de L_i es una transformación monótona positiva de cada otro elemento de L_i, y cada transformación lineal positiva de cualquier elemento de L_i está en L_i, entonces el bienestar individual es del tipo ordinal.*

Cabe señalar que los casos en que la medida del bienestar es estrictamente ordinal (incluyendo *todas* las transformaciones mo-

nótonas positivas) y estrictamente cardinal (incluyendo *solamente* transformaciones lineales positivas) son ambos casos especiales de bienestar del tipo ordinal. De hecho, el tipo ordinal es una clase muy general de mensurabilidad.

Definimos L como antes: el producto cartesiano de L_i para todo i, y $\bar{L}$ como cualquier subconjunto de él, como antes, en el contexto de la relación de agregación R^a como en la Definición 7*2. La definición de no comparabilidad permanece inalterable, o sea $L = \bar{L}$. El teorema siguiente es una generalización de tres de las cuatro proposiciones del Teorema 7*1:

TEOREMA 7*6. *Con bienestares individuales del tipo ordinal*

(1) *Para cualquier* $\bar{L}$, R^a *es una cuasi-ordenación.*

(2) *Para cualquier* $\bar{L}$, $\bar{R}$ *es una subrelación de* R^a, *es decir,*

$$\forall x, y \in X : [\{x \bar{R} y \rightarrow x R^a y\} \ \& \ \{x \bar{P} y \rightarrow x P^a y\}]$$

(3) *Con no comparabilidad,* $R^a = \bar{R}$.

Las demostraciones son exactamente como en el Teorema 7*1, porque la propiedad de cardinalidad no se utiliza en las demostraciones.

Consideremos ahora una elección entre solo un par $x, y \in x$. Tomemos un elemento W^* en $\bar{L}$. Llamemos g_i^* a

$$g_i^* = [W_i^*(x) - W_i^*(y)]$$

Supongamos primero que g_i^* no es cero. Para cualquier elemento W en $\bar{L}$, sea $\hat{b}_i$ un número real tal que

$$g_i^* \hat{b}_i = [W_i(x) - W_i(y)] = g_i$$

Considérese ahora la n-upla $(\hat{b}_1, ..., \hat{b}_n)$, designada por $\hat{b}$.

DEFINICIÓN 7*8. *Para cualquier par especificado* $x, y \in X$, *el conjunto de todos los* $\hat{b}$ *tales que* $g_i = g_i^* \hat{b}_i$, *para todo* i *y para algún* W *en* $\bar{L}$, *se llama el conjunto de coeficientes de* $\bar{L}$ *con respecto a* W^*, *y se designa por* $\hat{B}(W^*, \bar{L})$.

Se comprueba fácilmente que si se cumple la cardinalidad, entonces el conjunto de coeficientes $\hat{B}$ será el mismo independiente-

mente del par x, y que tomemos, y además será el mismo que el conjunto de coeficientes B tal como se definió en la Definición 7*5. Se comprueba ahora fácilmente que los Lemas 7*a y 7*b y los Teoremas 7*2, 7*3 y 7*4 son todos válidos con bienestar del tipo ordinal, si consideramos solamente un par de alternativas x, y, después de reemplazar B por $\hat{B}$ en todos los axiomas. Cada uno de los axiomas se define ahora para cada par x, y.

Además, sabemos por el Teorema 7*6 que R^a bajo el tipo ordinal de bienestar individual debe ser una cuasi-ordenación independientemente del número de alternativas implicadas. Esto nos permite establecer inmediatamente los teoremas siguientes:

TEOREMA 7*7. *Para bienestares individuales del tipo ordinal, si el Axioma 7*2 se cumple para cada par* x, $y \in X$, *entonces* $\bar{L}^2 \subset \bar{L}^1$ *implica que* R^1 *es una subrelación de* R^2.

TEOREMA 7*8. *Para bienestares individuales del tipo ordinal, y cumpliéndose los Axiomas 7*1 y 7*3 para todo par* x, $y \in X$, *si* R^1 *y* R^2 *son dos cuasi-ordenaciones de agregación, entonces* R^1 *es una subrelación de* R^2 *o* R^2 *es una subrelación de* R.[1]

TEOREMA 7*9. *Para bienestares individuales del tipo ordinal y cumpliéndose los Axiomas 7*1 y 7*3 para todo par* x, $y \in X$,

$$[\forall x, y : d(\hat{B}) = 0] \rightarrow R^a = \bar{R}$$
$$[\forall x, y : d(\hat{B}) = 1] \rightarrow R^a \quad \text{es una ordenación}$$

y

$$[\forall x, y : d(\hat{B}^2) > d(\hat{B}^1)] \rightarrow R^1 \quad \text{es una subrelación de } R^2.^6$$

Los teoremas se establecen fácilmente usando el Teorema 7*6 y los Teoremas 7*2, 7*3 y 7*4.

[6] Obsérvese que $d(\hat{B})$ se define ahora por separado para cada par x, $y \in X$.

Capítulo 8
CARDINALIDAD CON O SIN COMPARABILIDAD

8.1. Ventajas del regateo y elección colectiva

El uso de funciones de bienestares individuales para la elección colectiva plantea como mínimo tres problemas distintos (pero interdependientes), a saber, (a) mensurabilidad del bienestar individual, (b) comparabilidad interpersonal del bienestar individual, y (c) la forma de una función que especifique una relación de preferencia social, dada las funciones de bienestar individual y los supuestos de comparabilidad. En los Capítulos 7 y 7* se examinaron un cierto número de suposiciones alternativas acerca de (a) y (b), pero la operación sobre las medidas de bienestar individual era simplemente la de adición. Naturalmente, es posible combinarlas de otras formas.

En su solución al «problema del regateo», Nash (1950) toma el *producto* (y no la *suma*) de los bienestares individuales, después de una elección adecuada de orígenes. El modelo es de dos personas, aunque es posible generalizarlo. Hay un cierto estado social $\bar{x}$ (el «statu quo») que será el resultado final si las dos personas no logran llegar a un acuerdo. Si ambas partes consideran a $\bar{x}$ al menos tan bueno como cualquier otra alternativa que pueda lograrse mediante el regateo, entonces el problema será trivial puesto que la ausencia de un convenio de regateo no puede dañar a nadie. Si por el contrario, hay resultados

cooperativos que ambos prefieran a $\tilde{x}$, entonces el problema puede ser interesante. Pero de nuevo se convertirá en trivial si ambas partes tienen exactamente el mismo conjunto de elección para los resultados cooperativos, ya que entonces pueden elegir un resultado que sea óptimo para ambos. El problema se presenta cuando hay un conflicto de interés entre ambas personas. Ambas se benefician de la cooperación, pero una gana más con ciertos convenios que con otros, mientras que la otra gana menos con aquéllos. Esa es la razón del regateo.

Los supuestos que hace Nash sobre el comportamiento individual bajo incertidumbre permiten una representación cardinal de las preferencias individuales. Nash propone una solución que consiste en maximizar el producto de las diferencias entre la utilidad de un resultado cooperativo x (superior según Pareto a $\tilde{x}$) y el resultado statu quo $\tilde{x}$ para las dos, es decir, maximizar $[U_1(x) - U_1(\tilde{x})]$ $[U_2(x) - U_2(\tilde{x})]$. Esto equivale a maximizar el producto de utilidades después de una elección adecuada del origen.[1]

Es obvio que la solución de Nash tiene la propiedad de ser invariante con respecto a los cambios de orígenes y unidades de funciones de utilidad individual. Los orígenes quedan eliminados al restar y las unidades simplemente cambian la escala del producto sin cambiar la *ordenación* de los resultados por el valor del producto. Aquí es donde se absorbe la ausencia de comparabilidad interpersonal, puesto que las unidades de utilidad de cualquier individuo y el origen pueden desplazarse sin tener en cuenta el origen y las unidades de utilidad de la otra persona.

Si bien es cierto que esta invariancia con respecto a la elección del origen y a la unidad de la función de utilidad individual la cumplen otras formas funcionales,[2] la formulación del producto satis-

[1] Podría pensarse que esta operación no es sino una *adición* disfrazada, ya que maximizar el producto es equivalente a maximizar la suma de los logaritmos de los números. Lo único que hace falta —según esto— es interpretar la propia transformación logarítmica de una función de utilidad como una función de utilidad. Sin embargo, esto no es legítimo, puesto que la cardinalidad, tal como la utiliza Nash (y ciertamente otros), permite solamente transformaciones lineales, que excluyen las transformaciones logarítmicas. Además, lo que se precisaría es una mezcla, a saber: primero una transformación para obtener $U_i(\tilde{x}) = 0$, y *después* un desplazamiento logarítmico. No es obvio en absoluto que todas las propiedades de preferencia se conservasen en un cambio híbrido de esta especie.

[2] Por ejemplo, podemos tomar $[U_1(x) - U_1(\tilde{x})]^{\alpha}[U_2(x) - U_2(\tilde{x})]^{\beta}$, siendo α y β dos números reales positivos.

face además el requisito que impone Nash de «simetría» en el tratamiento de los dos individuos.[3] Los axiomas exactos y la demostración de que la solución de Nash es la única que los satisface son presentados en el Capítulo 8*.

Ahora bien, independientemente de que sumemos las utilidades individuales, o las multipliquemos, o las manipulemos de alguna otra forma, la variabilidad de las unidades u orígenes de las utilidades individuales plantea un problema. Es instructivo contrastar la manera de abordar este problema en los dos enfoques que hemos considerado hasta ahora. En el método de agregación de los Capítulos 7 y 7*, los orígenes no son relevantes ya que para generar una ordenación social solamente se suman *diferencia* de utilidad entre x e y para todos los individuos. Las unidades sí son cruciales, pero si se relacionan sistemáticamente las variaciones en las unidades de un individuo con las variaciones en las unidades de otros, entonces el ranking de los estados sociales puede no ser muy sensible a estas variaciones. La relación sistemática puede variar desde una correspondencia uno a uno (en el caso de comparabilidad unitaria completa) dando una ordenación completa, a ninguna en absoluto (no comparabilidad) cuando en la elección social solamente se reflejan las preferencias e indiferencias de Pareto. Entre medias hay una serie de posibilidades, con cuasi-ordenaciones de distinto grado de completitud. En el método de Nash, por el contrario, no se introduce tal comparabilidad, pero se elimina los orígenes mediante el uso del statu quo, mientras que las unidades se hacen irrelevantes gracias a la forma multiplicativa. Esto hace que la solución colectiva dependa decisivamente del punto de statu quo. *Ceteris paribus*, un punto de statu quo diferente producirá generalmente una solución de Nash distinta.

¿Es justificable esta dependencia de un resultado precisamente definido no cooperativo? La respuesta parece depender en gran medida del objetivo del estudio. Al *predecir* el resultado real de una lucha de regateo, el statu quo es claramente relevante, ya que define lo que ocurrirá si las dos partes no se ponen de acuerdo en una solución cooperativa. Existe siempre la amenaza de que este resultado, que

[3] Podemos, desde luego, obtener esto en el ejemplo dado en la nota 2 tomando $\alpha = \beta$, pero entonces la *ordenación* social generada será exactamente la misma que en el sistema de Nash de comparar productos simples.

es inferior para ambos, surja como solución final.[4] A la hora de repartir las ganancias según un acuerdo, el estado $\tilde{x}$ es claramente relevante. En efecto, como ha señalado Harsanyi, existe un proceso de hacer y aceptar concesiones que fue propuesto en origen por Zeuthen (1930) y que no es nada desdeñable, el cual dará precisamente el resultado de Nash.

Sin embargo, esto no significa que la solución de Nash sea un resultado atrayente desde el punto de vista ético y que recomendemos un mecanismo de elección colectiva que la incorpore. Una predicción óptima no es necesariamente un resultado equitativo o justo. En un mercado de trabajo con desempleo, los trabajadores pueden acceder a aceptar salarios inhumanos y malas condiciones de empleo, ya que en ausencia de un contrato pueden morir de inanición ($\tilde{x}$); pero esto no quiere decir que esa solución sea un resultado deseable en ningún sentido. En efecto, aun cuando, comparada con $\tilde{x}$, una solución particular pueda ser simétrica en la distribución de las ganancias de utilidad del regateo entre trabajadores y capitalistas, cabría afirmar que los trabajadores son explotados porque su poder de regateo era débil.

Quizá sea útil aclarar este contraste tomando el modelo de Harsanyi (1955) de los «juicios éticos», aún cuando sea solamente uno de los modelos posibles. Lo que alguien *recomendaría* como solución imaginando que tuviese las mismas probabilidades de estar en cualquiera de las dos partes, constituye, en ese modelo, una recomendación «ética». Por otro lado lo que él *predirá* como resultado probable, tomando las partes tal como son, es algo totalmente distinto. La «solución de regateo» de Nash parece ser bastante poco intere-

[4] El análisis puede ser extendido admitiendo «amenazas» específicas entre los jugadores, en la forma de posturas que adoptarían, caso de no llegarse a un acuerdo cooperativo. Amenazando al otro con líneas de conducta que presumiblemente le podrían acarrear terribles consecuencias, un jugador puede tratar de fortalecer su propio poder de regateo. El modelo de Nash puede ampliarse para incluir tales «amenazas»; sobre esto, véase Nash (1953) y Luce y Raiffa (1957). Señalemos de paso que las teorías de la amenaza implican un problema nada fácil de eliminar: si falla el regateo, puede que no les interese ya a los jugadores llevar a cabo sus amenazas. Amenazar con hacer algo que dañe al otro jugador a expensas de dañarse uno mismo sólo puede ser efectivo si el otro jugador cree que éste hará de hecho tal cosa si falla el regateo; pero evidentemente, no entra dentro del interés racional de éste hacer algo de este estilo una vez que ha acabado el regateo. La teoría de las amenazas tienen que enfrentarse con este problema.

sante desde el primer punto de vista y podría representar al segundo si es que representa algo. Sea o no predictiva la solución de Nash (para dudas sobre el particular véase Luce y Raiffa (1957)), su relevancia ética parece muy pequeña.

Este contraste es muy general y puede ponerse de relieve con modelos éticos diferentes del de Harsanyi, por ejemplo, con modelos de maximización de bienestar agregado con comparabilidad parcial, o con los modelos de equidad y justicia de Rawls (1958), (1967), o con los «principios de gradación» de Suppes (1966), con mecanismos de elección colectiva tales como el método de decisión de mayoría.

Es digno de destacar que muchas soluciones supuestamente éticas son similares en espíritu a la solución de Nash. Por ejemplo, el interesante uso que hace Braithwaite de la teoría del juego como «una herramienta para el filósofo moral» parece estar basado en una identificación de estas dos cuestiones. En el ejemplo de Braithwaite hay un tal Lucas a quien le gusta tocar el piano en su habitación y un tal Mateo a quien le gusta improvisar jazz con la trompeta en la habitación adyacente, con insonorización imperfecta entre las habitaciones. Se molestan mutuamente si tocan juntos, pero, como es natural, el trompetista molesta más al pianista que el pianista a aquél. La solución final que recomienda Braithwaite divide el tiempo entre los dos, dando bastante más al trompetista que al pianista. Como dice Braithwaite ((1955), p. 37), «la ventaja de Mateo radica exclusivamente en el hecho de que él, el trompetista prefiere que ambos toquen al mismo tiempo que no tocar ninguno, mientras que Lucas, el pianista, prefiere el silencio a la cacofonía». Mateo tiene la ventaja de la amenaza en ausencia de un contrato, y es muy posible que efectivamente se llegue a la solución de Braithwaite si Lucas y Mateo entablan negociaciones.[5] Pero, ¿en qué sentido esta solución «obtiene la máxima producción de satisfacción compatible con una distribución equitativa»?[6] Un juez imparcial seguramente dictaminará que el hecho de que Mateo puede amenazar a Lucas más eficazmente (y más ruidosamente) que Lucas a Mateo, no le confiere a éste el derecho de una porción mayor del tiempo de tocar.

[5] Sin embargo, véase Luce y Raiffa (1957), pp. 145-150. Véase también Raiffa (1953), para un enfoque alternativo, y Luce y Raiffa (1958), pp. 143-145.

[6] Braithwaite (1955), p. 9. Véase también Lucas (1959).

Y el mismo Mateo quizá conceda que si no hubiese sabido si iba a ser Lucas o Mateo antes de decidir sobre un sistema de distribución del tiempo, habría ignorado la ventaja de la amenaza y recomendado un reparto del tiempo más equitativo. Una solución basada en las ventajas de la amenaza de las dos partes puede realmente ser muy poco equitativa.

Señalemos, sin embargo, que también es posible adoptar la postura del «realista empedernido» y decir que todas las discusiones éticas son insustanciales y que lo realmente interesante es la predicción del resultado. ¿Qué objeto tiene discutir lo que debería suceder si no va a suceder? Este punto de vista, de respetable antigüedad, no es muy útil en una teoría de elección colectiva. Primero, parte del objeto del estudio de la elección colectiva es hacer crítica social. Utilizando ciertos juicios de valor aceptados en círculos muy amplios se pueden criticar los mecanismos de elección colectiva al uso, lo cual, a la larga, podría contribuir al desarrollo de un mecanismo de elección más apropiado. Segundo, el poder de regateo de los distintos grupos es a su vez una función del concepto que se tenga de la naturaleza de la sociedad y de sus mecanismos de elección. El sentimiento de injusticia para un cierto grupo (por ejemplo, los trabajadores) puede contribuir a crear instituciones (por ejemplo, sindicatos) que alteren el poder de regateo relativo de los distintos grupos. El análisis de Rousseau de la «injusticia» y la teoría de Marx de la «explotación» por tomar dos ejemplos obvios, han tenido un impacto mucho mayor en la conformación del mundo que lo que hubiese previsto el «realista empedernido».[7] Tercero, existe a menudo un conflicto entre los principios generales que suscribe la gente y los cursos de acción que elige. Estos principios pueden tomar la forma de condiciones sobre la elección colectiva, y el análisis de sus implicaciones lógicas es una base interesante y útil para la discusión y la argumentación en las decisiones sociales. También es útil examinar los mecanismos existentes de elección colectiva a la luz de los principios generalmente aceptados en la sociedad, para comprobar la consistencia de la teoría y la práctica.

Para terminar este apartado diremos que las soluciones propuestas por Nash, Braithwaite y otros en modelos similares podrían ser

[7] Lenin sólo pudo terminar seis capítulos de su *El Estado y la Revolución*, ya que luego sobrevino la Revolución de Octubre.

relevantes para predecir ciertos resultados de regateos y negociaciones, pero parecen ser soluciones muy poco atrayentes en función de los juicios de valor que generalmente se aceptan al tratar los principios de elección colectiva. La importancia asignada al punto del statu quo y a las ventajas de la amenaza y la evitación completa de comparaciones interpersonales parecen excluir toda una clase de juicios éticos que son relevantes para la elección colectiva.

8.2. Cardinalidad e imposibilidad

Obsérvese que la dependencia de la elección social de actitudes hacia el punto de statu quo ($\bar{x}$) es una violación de la «independencia de alternativas irrelevantes», una vez redefinida para poder aplicarla al caso en que la preferencia social es una función de funciones de bienestar individual (en contraposición al caso en que es una función de ordenaciones individuales). De hecho, si además de las condiciones de Nash exigimos también que la elección social entre dos resultados cooperativos cualesquiera x e y dependa solamente de los números de bienestar para x e y de los dos individuos, entonces resultaría inmediatamente un teorema de imposibilidad.

Este problema afecta no sólo al método de Nash sino a todos los usos de la cardinalidad en ausencia de cualquier comparabilidad interpersonal (es decir, suponiendo la invariancia de la elección social con respecto a transformaciones lineales positivas de funciones de utilidad individual). En efecto, el resultado de imposibilidad de Arrow puede extenderse sin más al uso de funciones de utilidad cardinales individuales (en lugar de ordenaciones individuales) como argumentos de reglas de elección colectiva. Un funcional de bienestar social (SWFL) es un mecanismo que especifica una y solamente una ordenación social para un conjunto dado de funciones de bienestar individual (una función por cada individuo). La no comparabilidad requiere que cualquier transformación (permitida por el supuesto de mensurabilidad) de la función de bienestar de cualquier individuo deje inalterada la ordenación social. La cardinalidad requiere que estén permitidas todas las transformaciones lineales positivas de cualquier función de utilidad atribuida a cualquier individuo. Dadas éstas, podemos exigir las condiciones de Arrow, convenientemente adaptadas al caso de un SWFL: dominio no restringido,

principio de Pareto débil, no dictadura, y la independencia de alternativas irrelevantes. Las tres primeras son fáciles de redefinir, mientras que la última se redefine haciendo la preferencia social entre x e y invariante mientras permanezca invariante la medida de utilidad de cada individuo para x e y. Juntando estas condiciones obtenemos otra imposibilidad (Teorema 8*2), en la línea del teorema general de posibilidad de Arrow, pero ahora aplicada a los SWFL con funciones de utilidad individual cardinal.[8]

Puede ser instructivo comparar este resultado de imposibilidad con las cuasi-ordenaciones de agregación que fueron obtenidas en los Capítulos 7 y 7*. Esa relación estaba basada en la invariancia, no con respecto a toda posible transformación lineal de las funciones de utilidad individual, sino solamente con respecto a algunas (las de $\bar{L}$, un subconjunto especificado de L), reflejando así nuestros supuestos acerca de la comparabilidad interpersonal. Con comparabilidad unitaria y cardinalidad, la regla de agregación es un SWFL con un dominio no restringido que satisface el principio de Pareto, la no dictadura y la independencia de alternativas irrelevantes. La diferencia crucial se basa en introducir la comparabilidad. Se indicó antes que si se supone la no comparabilidad, la cuasi-ordenación de agregación coincidirá con la cuasi-ordenación de Pareto (Teorema 7*1). Lo que muestra el Teorema 8*2 es que, no ya las reglas de agregación, sino todas las reglas inclusivas de Pareto no dictatoriales e independientes de alternativas irrelevantes para pasar de funciones de bienestar individual a una ordenación social serán incapaces de generar una ordenación social si la cardinalidad se combina con la no comparabilidad.

Esto no es, desde luego, sorprendente. Dada la no comparabilidad, las intensidades de preferencia relativas de los individuos sobre cualquier par pueden variarse en la forma que queramos, con tal de no invertir el signo, es decir, sin invertir la ordenación, de modo que la cardinalidad apenas sirve de nada en las ordenaciones individuales cuando se combina con la no comparabilidad. Para meter por algún

[8] Esto confirma la conjetura de Samuelson (1967) sobre el particular. Samuelson no menciona el requisito de no comparabilidad, pero está implícito en su discusión anterior de la invariancia con respecto a las transformaciones de unidades y origen. Incidentalmente, en Sen (1966b), al que Samuelson hace referencia en este contexto, la propuesta no era introducir la cardinalidad a solas, sino en conjunción con la comparabilidad.

lado la cardinalidad tenemos que relajar una de las otras condiciones. El procedimiento de Nash infringe la condición de independencia de alternativas irrelevantes haciendo el conjunto de elección dependiente del statu quo $\tilde{x}$, mientras que el procedimiento de agregación lo hace permitiendo la comparabilidad interpersonal total o parcialmente. La cardinalidad por sí sola no parece matar ningún dragón, y a nuestro pequeño San Jorge habrá que buscarlo en otra parte.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo 8*
REGATEOS Y FUNCIONALES DE BIENESTAR SOCIAL

8*1. El problema de regateo de Nash

Resulta instructivo considerar el modelo de regateo de Nash como un ejercicio de pasar de las funciones de bienestar individual a una ordenación social suponiendo la cardinalidad del bienestar individual pero no la comparabilidad interpersonal.[1] La solución depende de un estado social destacado $\tilde{x}$, al que podemos llamar el punto de statu quo y que representa lo que sucedería si no hay cooperación entre los negociadores. Supongamos que X representa todos los estados sociales disponibles cuando las dos partes cooperan. Se supone que hay puntos en X que ambos prefieren al statu quo $\tilde{x}$. Además, el problema de regateo de Nash se refiere a una sociedad de dos personas. Aunque existe una extensión natural al caso de n personas, nosotros seguiremos la propia formulación de Nash.

Cada punto x de X se proyecta en un par de números de utilidad que representan el bienestar de los dos individuos respectivamente, para cualquier W dado. El conjunto de tales pares de números de

[1] Véase Nash (1950). Para una exposición excelente y una evaluación crítica, véase Luce y Raiffa (1957). Véase también Nash (1953) y Harsanyi (1956), (1966).

utilidad, que corresponde al conjunto de todos los elementos en $\bar{X}$ para cualquier W, se llamará $U(X, W)$ o U abreviadamente. Puede considerarse como un subconjunto del espacio euclidiano bidimensional. Supondremos, siguiendo a Nash, que U es compacto y convexo.

Aunque nuestra presentación diferirá algo de la de Nash, nuestros cinco axiomas serán esencialmente equivalentes a los ocho de Nash. Usamos la Definición 7*1 de una combinación funcional W, como cualquier elemento del producto cartesiano $\Pi_{i=1}^{n} L_i$ de conjuntos individuales de funciones de bienestar.

DEFINICIÓN 8*1. *Una función de solución de regateo (en lo sucesivo BSF) es una relación funcional que elige uno y solamente un estado social $\tilde{x} \in X$ para cualquier combinación funcional especificada $W \in L$, dado el estado social destacado $\tilde{x} \in X$ que representa el statu quo.*

Emplearemos el siguiente conjunto de axiomas:

AXIOMA 8*1. *Utilidad cardinal de buen comportamiento: Para cada i, todo elemento de L_i es una transformación lineal positiva de cada otro elemento, y toda transformación lineal positiva de cualquier elemento de L_i pertenece a L_i. Además, cada W_i es continuo en X, y para cualquier $W \in L$, U es compacto y convexo.*

AXIOMA 8*2. *No comparabilidad: El valor de la BSF es invariante con respecto a la elección de W en L.*

AXIOMA 8*3. *Optimalidad débil de Pareto: El recorrido de la BSF está limitado a aquellos elementos de $x \in X$ tales que $\sim[\exists\, y \in X : y \bar{P} x]$.*

AXIOMA 8*4. *Propiedad α: Si $\bar{x}$ es la solución dada por la BSF cuando X es el conjunto de los estados sociales y $\bar{x} \in S \subset X$, entonces $\bar{x}$ es la solución dada por la BSF para S.*[2]

AXIOMA 8*5. *Simetría: Si para algún $W^* \in L$, $W_1^*(\tilde{x}) = W_2^*(x)$, y para ese $W^* \in L$, U es simétrico,*[3] *entonces $W_1^*(\bar{x}) = W_2^*(\bar{x})$.*

TEOREMA 8*1. *Para cualquier X, una BSF que satisface los Axio-*

[2] Luce y Raiffa llaman a ésto independencia de alternativas irrelevantes (1957). Sin embargo, no debe confundirse con la condición de Arrow del mismo nombre. Más adelante discutimos la condición correspondiente a la de Arrow; véase Axioma 8*6. Véase Capítulo 1* sobre la propiedad α.

[3] Esto es, si $(a, b) \in U$, entonces $(b, a) \in U$.

mas 8*1-8*5 *debe dar una solución* x^0 *tal que* $x^0 \in X$, $x^0 \bar{\bar{P}} \tilde{x}$, *y para cualquier* $W \in L$

$$x^0 = \bar{x} \max_{\substack{x \in X \\ x \bar{\bar{P}} \tilde{x}}} [W_1(x) - W_1(\tilde{x})][W_2(x) - W_2(\tilde{x})]$$

Demostración: El punto x^0, tal como se ha descrito, evidentemente existe y es único por la compacidad y convexidad de U. Además, es invariante con respecto a la elección de $W \in L$ gracias a la cardinalidad. Considérese ahora que $W^* \in L$ tal que $W_1^*(\tilde{x}) = W_2^*(\tilde{x}) = 0$ y $W_1^*(x^0) = W_2^*(x^0) = 1$; tal $W^* \in L$ existe por cardinalidad. Por la elección de x^0, no hay ninguna $x \in X : W_1^*(x) \cdot W_2^*(x) > 1$. De aquí que no exista ninguna $x \in X : [W_1^*(x) + W_2^*(x)] > 2$, pues si existiese tal x, entonces una combinación convexa (W_1^*, W_2^*) de $(W_1^*(x), W_2^*(x))$ y $(1, 1)$ dará $W_1^*, W_2^* > 1$, y además, por convexidad, (W_1^*, W_2^*) pertenecerá a U. Es ahora fácil construir un conjunto simétrico U^* en el espacio de utilidad correspondiente a X^*, que incluya todo $(W_1^*(x), W_2^*(x))$ para todo $x \in X$, es decir, $X \subset X^*$, y ningún x tal que $W_1^*(x) \geqq 1$, *y* $W_2^*(x) \geqq 1$, excepto $x = x^0$. Por los Axiomas 8*3 (optimalidad de Pareto débil) y 8*5 (simetría), x^0 viene dado por la BSF para X^*, dado $W^* \in L$. Por el Axioma 8*4 (propiedad α), x^0 viene dado por la BSF para $X \subset X^*$, dado $W^* \in L$. Por el Axioma 8*2 (no comparabilidad), x^0 viene dado por la BSF para X, dado cualquier $W \in L$. La demostración se completa comprobando que x^0 satisface siempre los Axiomas 8*1-8*5.

Aunque la solución de Nash satisface la propiedad α, que ha sido descrita como una condición de independencia de alternativas irrelevantes por Radner y Marschack (1954), Luce y Raiffa (1958), y otros, infringe el equivalente cardinal de la independencia de alternativas irrelevantes de Arrow. Aquí definimos la condición de Arrow en una forma muy débil, *ad hoc* para una BSF en tanto que opuesta a una regla de elección colectiva. Considérese que x^0 es elegido y x^1 rechazado por la BSF de x, dado un statu quo $\tilde{x}$, de modo que x^0 sea socialmente preferido a x^1. Supongamos ahora que $\tilde{x}$ cambia pero que todo lo demás permanece igual, incluyendo $W_i(x^0)$ y $W_i(x^1)$ para cada i. Si la elección entre x^0 y x^1 debe ser independiente de alternativas irrelevantes, entonces la BSF no debería ahora elegir x^1 y rechazar x^0.

AXIOMA 8*6. *Independencia: Para algún* $W \in L$ *y* $\hat{W} \in \hat{L}$, *definidos en* X, *si para todo* x, $\forall i : W_i(x) = \hat{W}(x)$, *entonces la BSF debe dar la misma solución para* $W \in L$ *que para* $\hat{W} \in \hat{L}$.

El siguiente resultado es obvio:

COROLARIO 8*1.1. *No hay ninguna BSF que satisfaga los Axiomas* 8*1-8*6.

La demostración es inmediata puesto que la solución de Nash es sensible a $\tilde{x}$.[4] Esta propiedad de la solución de Nash no es necesariamente objetable en el contexto de un modelo positivo de soluciones de regateo, pero sus limitaciones éticas son importantes y fueron discutidas en el Capítulo 8.

8*2. Funcional de bienestar social

Veamos ahora una formulación más general del problema de usar la cardinalidad con no-comparabilidad. Definimos un funcional de bienestar social siguiendo la definición de una SWF:

DEFINICIÓN 8*2. *Un funcional de bienestar social (SWFL) es una relación funcional que especifica una y solamente una ordenación social* R *en* X, *para cualquier* W, *es decir, para cualquier n-upla de funciones de bienestar individual* $W_1, \ldots, W_n$, *cada una definida en* X.

Obsérvese que una SWF es un caso especial de un SWFL, en el cual solamente se usan las propiedades de ordenación individuales. Puede también señalarse que así como la relación de agregación para cualquier $W \in L$ es un SWFL, en el Capítulo 7* la relación de agregación se hizo una función de $\bar{L} \subset L$ y no necesariamente de un elemento individual $W \in L$.

En correspondencia con las condiciones de Arrow en una SWF, imponemos condiciones similares sobre un SWFL.

Condición (*dominio no restringido*): El dominio del SWFL incluye los W lógicamente posibles, a saber, todos los posibles n-uplas de funciones de bienestar individual definidas en X.

[4] Hay, de hecho, cierta redundancia en esto, como se verá claro en el Apartado 8*2.

Condición $\bar{I}$ (*independencia de alternativas irrelevantes*): Si para todo i, $W_i(x) = \hat{W}_i(x)$ y $W_i(y) = \hat{W}_i(y)$ para algún par $x, y \in X$ y para algún par de combinaciones de bienestar W y $\hat{W}$, entonces $x R y \leftrightarrow x \hat{R} y$, donde R y $\hat{R}$ son las ordenaciones sociales correspondientes a W y $\hat{W}$.

Condición $\bar{D}$ (*no dictadura*): No hay ningún i tal que para todos los elementos en el dominio del SWFL, $x P_i y \rightarrow x P y$.

Condición $\bar{P}$ (*principio débil de Pareto*): Si para todo i, $x P_i y$, entonces para todos los elementos en el dominio del SWFL, consistentes con éste, tenemos $x P y$.

Condición C (*cardinalidad*):[5] Para cada i toda posible transformación lineal de cualquier elemento de L_i pertenece a L_i.

Condición $\bar{M}$ (*no comparabilidad*): Para cualquier L, la ordenación social R dada por el SWFL para cada $W \in L$ debe ser la misma.

TEOREMA 8*2. *No hay ningún SWFL que satisfaga las condiciones* $\bar{U}$, $\bar{I}$, $\bar{D}$, $\bar{P}$, $\bar{C}$ *y* $\bar{M}$.

Demostración: Considérese un par $x, y \in X$. Para $W \in L$, tenemos $W_i(x)$ y $W_i(y)$ para todo i. Considérese ahora un cambio en las funciones de bienestar individual, manteniendo iguales las ordenaciones individuales, en el que L se transforma en $\hat{L}$. Evidentemente, por la condición $\bar{C}$, que nos da los grados de libertad para la medida del bienestar para cada persona, podemos encontrar un $\hat{W} \in \hat{L}$, tal que $W_i(x) = \hat{W}_i(x)$ y $W_i(y) = \hat{W}_i(y)$. Por la condición $\bar{I}$, $x R y \leftrightarrow x \hat{R} y$, donde R y $\hat{R}$ son ordenaciones sociales correspondientes a W y $\hat{W}$. De aquí que, por $\bar{M}$, las ordenaciones sociales deben ser las mismas para los elementos de L que para los de $\hat{L}$. Así pues, los únicos posibles SWFL que satisfacen las condiciones $\bar{I}$ y $\bar{C}$ son todas las SWF, con R meramente una función de las n-uplas de ordenaciones individuales $(R_1, ..., R_n)$.[6] Pero sabemos por el Teorema 3*1 que ninguna SWF satisface las condiciones U, I, D y P, las cuales son implicadas

[5] No exigimos que *todos* los elementos de L sean transformaciones lineales de cada uno. Sin embargo, podemos añadirlo sin alterar el resultado. Inicialmente, la condición $\bar{C}$ obliga un SWFL solamente en conjunción con la Condición $\bar{M}$.

[6] De hecho, R sobre cada par de estados sociales es una función de la n-upla de R_i solamente sobre *ese* par.

por las condiciones $\bar{U}$, $\bar{I}$, $\bar{D}$ y $\bar{P}$ para SWFL. Esto completa la demostración.

Este problema no se planteó en la agregación en el Capítulo 7*, puesto que el criterio de elección colectiva se definió allí en términos de invarianza para cada W en un $\bar{L} \subset L$ especificado, sin requerir invariancia con respecto a la elección de todo W de L. La elección de $\bar{L}$ reflejaba nuestra suposición sobre la comparabilidad interpersonal. El Teorema 8*2 confirma la sospecha de que la simple cardinalidad sin comparabilidad alguna puede no ser útil.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo 9
EQUIDAD Y JUSTICIA

9.1. Universalización y equidad

Un método de hacer comparaciones interpersonales es tratar de ponerse en el lugar de otro, enfoque que ha florecido en varias formas en culturas diferentes a lo largo de la historia de los tiempos, aunque el uso que se le ha dado varía mucho de una sociedad a otra.

La así llamada Regla de Oro del Evangelio es una expresión —más bien restringida— de este método: «Haz a los demás lo que quieres que los demás hiciesen contigo». El estudio de Kant de la «ley moral» está estrechamente relacionado con este enfoque de situarse uno mismo en el lugar de otros, como es su regla general: «Actúa siempre según la máxima de que puedas al mismo tiempo hacer que sea una ley universal».[1] El principio de «equidad» de Sidgwick es una expresión particularmente útil de este método:[2]

[1] Véase Kant (1785). En la traducción de Abbott, Kant (1907), p. 66.

[2] Sidgwick (1907), Libro III, Cap. XIII, p. 379. Sidgwick atribuyó esto a Kant: «Que lo que está bien para mí debe estar bien para todas las personas en circunstancias similares —que era la forma en que yo acepté la máxima kantiana— me pareció ciertamente fundamental, ciertamente verdad y no sin importancia práctica» (p. xvii). Para un estudio del argumento de generalización, véase Singer (1961).

... cualquier acción que juzguemos correcta para uno mismo, implícitamente la juzgamos correcta para todas las personas similares en circunstancias similares. O bien, expresándolo de otra forma, 'si un tipo de conducta que sea recta (o equivocada) para mí no es recta (o equivocada) para otro, debe ser por causa de alguna diferencia entre los dos casos, distinta del hecho de que yo y él somos distintas personas'. Una postura análoga cabría enunciarla con igual verdad con respecto a lo que debería hacerse *a* —y no *por*— diferentes individuos.[3]

Una ampliación relativamente reciente de este método se encuentra en Hare (1952), (1963). Hare relaciona la cuestión de «equidad», en el sentido de Sidgwick, con la propiedad de «universalizabilidad» de los juicios de valor en general (en circunstancias exactamente similares deberían hacerse juicios exactamente similares), y hace de esto una cuestión de *significado* no un principio moral que podríamos desear fuese satisfecho por los juicios de valor. La siguiente cita de Hare ((1961), pp. 176-177) quizá ayude a ejemplificar su interpretación:

Supongamos que yo le digo a alguien «Usted no debe fumar en este compartimiento», y que hay niños en el compartimiento. La persona a la que me dirijo, si se pregunta por qué yo he dicho que no debía fumar, probablemente mirará en derredor, observará a los niños, y comprenderá la razón. Pero supóngase que habiendo examinado todo lo examinable en el compartimiento, dice «Está bien; me iré al de al lado: allí hay otro compartimiento tan bueno como éste; de hecho es exactamente igual, y hay también niños». Al oir ésto yo pensaría que no comprendió la función de la palabra «debe», porque «debe» siempre se refiere a algún principio general; y si el compartimiento contiguo es en realidad exactamente como éste, todo principio aplicable a éste lo debe ser al otro. Yo podría, por tanto, responder: «Pero mire, si usted no debe fumar en este compartimiento y el otro es justamente como este, tiene la misma clase de ocupantes, las mismas advertencias en las ventanillas, etc., entonces obviamente no debería fumar en ese otro.»

Hare (igual que Sedgwick) opina que la similitud de circunstancias incluye permutaciones interpersonales *como si*, quedando igual

[3] El célebre epitafio de Martin Engelbrodde ha sido citado por Arrow (1963) como un ejemplo de este enfoque de «simpatía extendida».

Aquí yace Martin Engelbrodde,
Ten piedad de mi alma, Señor,
Como yo la tendría si fuese el Señor,
Y Tú fueses Martin Engelbrodde.

La interesante cuestión de si el Señor debería estar obligado a apiadarse del alma de Engelbrodde bajo el principio de equidad de Sidgwick se deja como ejercicio para el lector.

todo lo demás. Si un blanco surafricano sostiene que la discriminación racial es buena, pero concede que su criterio hubiese sido diferente si él fuese negro, entonces en el sistema de Hare revelaría una ignorancia de «la forma en que funciona la palabra 'bueno'». En cambio, si el criterio fuese tomado como un principio moral y no como una cuestión semántica, entonces el surafricano blanco en cuestión podría ser llamado, en cierto sentido, *inmoral*, pero no, en ningún sentido, *ignorante* (del lenguaje de la ética).

En todo esto deben distinguirse claramente dos cuestiones diferentes: (a) la cuestión de la universalizabilidad de los juicios de valor, y (b) la cuestión de si las permutaciones interpersonales *como si, ceteris paribus*, deberían tomarse como circunstancias «exactamente similares». Consideramos primero la cuestión (a).

La universalizabilidad es ciertamente un criterio extensamente aceptado y, como Arrow ha argumentado en otro contexto, «los juicios de valor pueden equiparar fenómenos empíricamente distinguibles, pero no pueden diferenciar estados empíricamente indistinguibles».[4] Sin embargo, el uso de la universalizabilidad plantea al menos dos problemas difíciles. Primero, tomarla como una necesidad lógica en lugar de como un principio moral implica una violación de la llamada «ley de Hume», que afirma que ningún juicio de valor puede deducirse de premisas exclusivamente factuales. El valor normativo, según este punto de vista, debe ser una función definida sobre estados factuales, y aunque no existe obligación de aceptar ninguna forma particular de la función sobre bases factuales (como ocurre en la clásica posición «naturalista»), debe requerirse que dos estados factuales idénticos tengan el mismo valor normativo. Si esto se toma como una necesidad lógica, el que dos estados sean factualmente iguales (un hecho) parece implicar que son igualmente buenos (un juicio de valor).[5] Esto no tiene por qué perturbar a nadie, excepto a aquellos totalmente fieles a la ley de Hume, entre los cuales, sin embargo, figura el mismo Hare.[6]

[4] Arrow (1963), p. 112.

[5] Véase Sen (1966a). En términos de la teoría de la identidad, si $x = y$, entonces $f(x) = f(y)$, para toda f. Esto es así incluso si f es una función moral. La primera aseveración es factual y la segunda moral.

[6] «Yo he sido en el pasado, y todavía lo soy, un resuelto defensor de la doctrina de Hume de que uno no puede deducir juicios morales de proposiciones no morales de hecho» (Hare (1963), p. 186). Véase también Hare (1961), pp. 29-31, 79-93.

Una dificultad más importante para la universalizabilidad que la fidelidad a la doctrina de Hume se refiere al *alcance* del principio, independientemente de si se interpreta como una necesidad lógica o como una regla normativa. ¿*Pueden* dos situaciones ser exactamente iguales? Si no es así, entonces la universalizabilidad está vacía de contenido. Aunque dos situaciones no sean exactamente similares, puede desde luego alegarse que son «relevantemente similares»: por ejemplo, comprar un coche con una cierta matrícula y comprar otro físicamente idéntico excepto en la matrícula. El concepto de similitud relevante, que implica a su vez un juicio de valor, no es fácil de definir aunque una posible línea es la siguiente: Si x e y son exactamente similares excepto en algunos respectos, y si los juicios de una persona relativos a x e y son independientes de esos respectos, entonces x e y son relevantemente similares en el sistema de esa persona. En esta forma ampliada, la universalizabilidad exigirá que los juicios de una persona sean exactamente similares para x e y cuando las dos alternativas son relevantemente similares. Esta extensión tiene sus problemas, pero al parecer menos serios que la naturaleza posiblemente vacía de la universalizabilidad en su forma no adulterada.

Veamos ahora la segunda cuestión sin cambiar lo demás. ¿Conservan la «similitud»? Las permutaciones interpersonales. Si se toma así, como lo hace Hare, entonces el principio de equidad de Sidgwick es una consecuencia directa de la universalizabilidad. Si no es así, surge entonces la cuestión de la similitud relevante y tendremos que enfrentarnos con el problema del surafricano blanco, quien podría sostener que el que él sea blanco o negro *es* una diferencia relevante en su sistema. Hare excluiría esto, pero parece posible adoptar el punto de vista de que tal juicio, aunque «perverso», no es imposible en virtud de la disciplina del lenguaje de la moral.

Hay una dificultad adicional en el uso que hace Hare de las permutaciones interpersonales para desarrollar un criterio para juicios morales. De hecho, es posible que ningún juicio pase tal prueba, y habría que plantearse el caso en que un individuo no puede honradamente decir que mantendrá exactamente los mismos juicios bajo toda permutación interpersonal concebible. En la medida en que Hare tiene razón en creer que la disciplina del lenguaje moral al uso sí requiere la universalizabilidad en este sentido exigente, y en la medida en que este lenguaje es utilizado por la gente significativamente,

puede sostenerse que el criterio, en conjunto, no define un conjunto vacío de juicios de valor. Sin embargo, no hay duda de que este requisito es severo, especialmente porque se supone que es aplicable a todo tipo de juicio moral.[7]

Un conjunto de reglas algo menos exigente ha sido propuesto por una serie de autores en el contexto específico de juicios sobre «equidad», «justicia» y «preferencias éticas (en tanto que opuestas a subjetivas)». Estos requisitos son menos rigurosos por dos razones. Primera, se pretende aplicarlos a ciertas categorías limitadas de virtudes morales (como equidad y justicia). Segunda, y quizá más importante, la condición de hacer el mismo juicio bajo toda permutación concebible de posiciones personales se sustituye por el requisito de que el juicio sea hecho en una situación en la que el individuo ignora la posición exacta que ha de ocupar en cualquiera de los estados sociales considerados. A continuación examinaremos algunos de estos enfoques.

9.2. Equidad y justicia maximin

El análisis de Rawls del concepto de equidad hace uso de una situación hipotética (la «posición original») en la que los individuos eligen «principios» en un estado de primordial igualdad, sin saber su propia situación en los estados sociales que resulten de ella e ignorando incluso sus rasgos personales de cara a las posiciones sociales. En tal situación, los principios que serían generalmente aceptados satisfarían el criterio de «equidad», siendo el resultado de un acuerdo equitativo sin intereses creados. (Véase Rawls (1958), (1963), (1963a), (1967), y (1968).)

Rawls deriva sus principios de «justicia» de su criterio de equidad. Su concepto de «justicia como equidad» expresa la idea de que los principios de justicia son aquellos que serían elegidos en una situación inicial que fuese equitativa. A diferencia del modelo de Hare, no se exige mantener un juicio moral en toda posición que una persona

[7] Entre los filósofos ha habido una animada discusión acerca de la validez y utilidad del enfoque de Hare en punto a diversas cuestiones. Véase, por ejemplo, Madell (1965), Montague (1965), Gauthier (1968), para señalar sólo algunas de estas contribuciones. El propio Hare bosqueja algunos problemas, incluyendo el de la «debilidad de la voluntad» y el problema de los «fanáticos»; véase Hare (1960), (1963).

puede ocupar a través de permutaciones interpersonales. En lugar de ello, los principios de justicia son aquellos que serían aceptados en una situación de equidad en la «situación original».

En otro lugar se ha destacado una cierta similitud entre este punto de vista y el análisis de Rousseau de la «voluntad general» y de un hipotético «contrato social».[8] Los principios de justicia pueden ser considerados como soluciones de juegos cooperativos en la «posición original». Sin embargo, el enfoque de Rawls difiere esencialmente de los de Nash (1950), (1953), Raiffa (1953) y Braithwaite (1955) en que las nociones de «equidad» y «justicia» no están relacionadas con soluciones cooperativas de problemas de regateo en situaciones *reales* con desigualdades interpersonales dadas (por ejemplo, de riqueza económica, poder político y contingencias similares), sino con soluciones cooperativas en un estado de igualdad primordial. Por consiguiente, nuestra reserva (véanse Capítulos 8 y 8*) acerca de las primeras como interpretaciones de equidad y justicia no se aplican a Rawls.

Habiendo así establecido una estructura para la equidad, Rawls argumenta que en la «posición original» se habrían elegido los dos siguientes principios de justicia: (a) «toda persona que participe en una práctica, o que se vea afectada por ella, tiene el derecho a la máxima libertad compatible con una libertad análoga para todos»; y (b) «las desigualdades son arbitrarias a menos que sea razonable esperar que van a redundar en beneficio de todos y siempre que las posiciones y puestos a los que van ligadas, o de los que emanan aquéllas, estén abiertos a todos» (Rawls (1958)).

El significado de estos principios no es completamente obvio, pero del análisis de Rawls resulta que el factor a maximizar es el bienestar del individuo peor situado (Rawls (1963)). El primer principio recomienda la extensión de la libertad de cada cual, siempre que todos reciban una libertad similar. Los conflictos interpersonales es el tema del segundo principio, que exige «disponer las desigualdades sociales de tal modo que el peor esté lo mejor posible», es decir, hacer que el nivel de bienestar del individuo peor situado sea lo más alto posible.

Este último criterio está bien definido en aquellos casos en que

[8] Runciman y Sen (1965) dan una interpretación de la «voluntad general» de Rousseau y de la «posición original» de Rawls en el marco de la teoría de juegos.

se pueden hacer comparaciones interpersonales ordinales para descubrir quién es la persona peor situada. Es esencialmente un criterio «maximin», en el que se maximiza el elemento mínimo del conjunto de bienestares individuales.[9] El interés de Rawls se centra en el tipo de instituciones a elegir, pero el principio maximin puede utilizarse también para ordenar estados sociales basándose en las ordenaciones individuales. Para cualquier estado social, ordenamos los individuos según su bienestar y escogemos al individuo peor situado, anotando su nivel de bienestar para compararlo con el del individuo peor situado en otro estado social distinto. Mientras cada individuo tenga una ordenación completa y exista algún método para ordenar el bienestar de individuos diferentes, es decir, para hacer comparaciones interpersonales de niveles de bienestar, podemos obtener una ordenación social completa.

¿Es este procedimiento de maximin una SWF en el sentido de Arrow? No lo es, porque la SWF de Arrow es una función que especifica una y solamente una ordenación social para cualquier colección dada de ordenaciones individuales. Supongamos que todas las ordenaciones individuales permanecen igual, pero que el nivel de bienestar del individuo i, la persona que antes estaba en peor situación en el estado social x, asciende para cada alternativa, lo que hace que ya no sea el hombre peor situado en la situación x. La ordenación social que implica x, estando basada ahora en un bienestar individual diferente, puede ser distinta. Esto no estaría permitido por una SWF.

Hay otra forma de considerar el contraste. Una SWF, o más generalmente una CCR, especifica una relación de preferencia social basada en el conjunto de ordenaciones individuales de estados sociales reales. Para el tipo de comparación de Rawls, lo que se precisa no es meramente una ordenación de estados sociales desde el punto de vista de la posición de cada cual, sino un ranking de estados sociales con permutaciones interpersonales. La proposición de que el individuo i tiene un nivel de bienestar más elevado en el estado x que el individuo j en el estado y puede refundirse así: es mejor ser la persona i en el estado x que la persona j en el estado y. Si hay m estados y n

[9] Para el uso del criterio de justicia de Rawls, la mensurabilidad del bienestar individual no es realmente necesaria, ni siquiera en el sentido ordinal. El criterio puede ser presentado en términos de ordenaciones (Capítulo 9*), y las discusiones sobre él no precisan en absoluto ninguna medida de bienestar.

individuos, lo que está implicado es una ordenación $\hat{R}$ de *mn* alternativas. Dada tal ordenación, la ordenación maximin rawlsiana de los *m* estados sociales se obtiene inmediatamente.[10] Por otra parte, una CCR (o una SWF) habría hecho que la ordenación social dependiese de *n* ordenaciones, cada una definida sobre *m* estados sociales. Una CCR está basada en *n* ordenaciones de *m* elementos, mientras que los mecanismos de elección maximin rawlsianos se basan en una sola ordenación de *mn* elementos.

Esta ordenación ampliada sobre *mn* posiciones puede reflejar la valoración de un solo individuo o incluso representar el punto de vista unánime de todos. No es absurdo suponer aquí la unanimidad puesto que todos ordenan las posiciones, teniendo in mente que ser la persona *i* en el estado *x* no significa tener sólo la posición social de *i* sino también sus rasgos subjetivos.[11] Sin embargo, aun así pueden surgir diferencias de juicio entre una persona y otra, y si fuese así, habría que enfrentarse aquí con un problema similar al que surge en una CCR o en una SWF. Por el momento supondremos unanimidad en la ordenación de «posiciones», o bien que todo el ejercicio lo efectúa un observador consistente.

Pero, ¿hasta qué punto es atrayente el criterio de maximin como regla de decisión social? Como criterio formal, entraña de entrada una serie de problemas de los cuales pueden ser importantes los siguientes:

(1) Aunque satisface la versión más débil de la regla de Pareto (condición *P*), puede infringir su versión más fuerte. Considérense dos situaciones *x* e *y* con los siguientes niveles de bienestar de dos individuos *A* y *B*:

	Bienestar de *A*	Bienestar de *B*
estado *x*	10	1
estado *y*	20	1

[10] Estrictamente, no se necesita una ordenación, puesto que las posiciones «no peores» pueden clasificarse de cualquier manera e incluso pueden no estar clasificadas *vis-a-vis* las otras.

[11] Esta identidad de ordenaciones de posiciones no debe confundirse con la identidad de juicios sobre estados sociales requerida en el modelo de Hare. Una persona con una ordenación dada de posiciones podría no obstante recomendar elecciones diferentes, según la posición que él mismo ocupe.

La regla del maximin hará a x e y indiferentes, mientras que y es superior según Pareto a x. Puesto que la acentuación de la desigualdad no redunda en «beneficio de todos» y el individuo peor situado no está mejor bajo y que bajo x, socialmente no se puede juzgar a y mejor que x.[12]

(2) Nuestros valores sobre la desigualdad no pueden ser adecuadamente reflejados por la regla del maximin, debido a que el interés exclusivo por el bienestar del individuo o grupo de individuos peor situado oculta otros varios aspectos relacionados con la igualdad. Considérense los siguientes estados alternativos:

	Bienestar de A	Bienestar de B	Bienestar de C
estado x	100	80	60
estado y	100	61	61

La regla del maximin indicará que y es preferida a x. Sin embargo, mientras que el hueco entre B y C se reduce, se acentúa el que existe entre A y B. No hay medidas simples de desigualdad para un grupo, y además nuestros valores suelen ser demasiado complicados para resumirlos en una regla tan simple como la de «mejorar al peor situado».

Aunque esta crítica es válida, su importancia no es muy obvia. Si los rasgos institucionales son tales que una reducción del hueco entre el promedio y el mínimo sólo puede lograrse a base de reducir

[12] Podemos evitar este problema definiendo una ordenación lexicográfica en la forma siguiente, sin perder la esencia de la regla del maximin, para una comunidad de n individuos:

(1) Maximizar el bienestar del individuo peor situado.

(2) Para igual bienestar de los individuos peor situados, maximizar el bienestar del segundo individuo peor situado.

⋮

(n) Para igual bienestar de los individuos peor situados de los segundos peor situados, ..., de los $(n-1)$-ésimos peor situados, maximizar el bienestar del individuo mejor situado.

En el ejemplo del texto, y es obviamente preferido a x con esta regla, a la cual podemos llamar la regla del maximin lexicográfica.

la desigualdad tal como la miden otros índices, es absurdo que el problema nos quite el sueño. Los juicios de este tipo suelen ser no básicos y el trasfondo factual es importante. La argumentación de Rawls está basada en un cierto marco institucional, y para evaluar la efectividad de su criterio tenemos que tener esto presente. Sin embargo, es probable que la dificultad sea más seria en la elección entre estados sociales en general —lo cual es nuestro problema— que en la elección entre ciertas instituciones, que es lo que ocupa a Rawls.

(3) Debido a su naturaleza puramente ordinal, el criterio del maximin no es sensible a magnitudes de ganancias y pérdidas. Aquí no vale decir que una ligera ganancia de la persona peor situada queda anulada por grandes ganancias (tan grandes como nos atrevamos a postular) de las demás. *No* hay transacciones.

(4) Para Rawls, la justificación de la regla maximin se basa en su relación con el principio de «equidad», y los argumentos anteriores pueden no ser relevantes en ese contexto. No cabe duda de que el requisito de «equidad» es altamente atrayente. El hecho de que la gente elija un sistema siendo totalmente ignorante de sus atributos personales satisface ciertamente un importante valor en nuestro sistema moral. El nexo entre el concepto de «equidad» y los dos principios de «justicia» que identifican la regla del maximin se basa en la creencia de que en un acuerdo «equitativo» se elegirán estos dos principios ¿Es aceptable este argumento?

La teoría de la toma de decisiones bajo incertidumbre no da conclusiones muy definitivas en problemas de este tipo. Ciertamente, con una visión predominantemente pesimista la regla del maximin será la única a elegir. Hay también otros argumentos, que Rawls (1967), (1968) especifica. La regla es clara y relativamente fácil de manejar. A diferencia del método del utilitarismo, no es ciega para las distribuciones de utilidad entre los individuos. En su aplicación a elecciones institucionales militará contra la persecución —religiosa o de otro tipo— puesto que los sufrimientos del hombre sometido a una inquisición nunca serán borrados por la ganancia del inquisidor, por grande que ésta sea. En varias cuestiones institucionales Rawls ha demostrado perfectamente el atractivo del método maximin. Sin embargo, persiste el hecho de que la solución maximin de Rawls es muy especial, y la aseveración de que *debe* ser elegida en la posición original no es totalmente convincente. Incluso rechazando el criterio

de maximizar la utilidad esperada, que discutimos en el próximo apartado, hay otros criterios a considerar.[13] El índice de pesimismo-optimismo de Hurwicz (1951), del que la regla maximin es un caso extremo (correspondiente a un grado de pesimismo igual a 1), es una posibilidad que puede ser explorada, después de una generalización adecuada. Elegir una regla de elección particular (en este caso el maximin) entre muchas, puede ser apropiado a veces, pero pretender que debe ser elegida por individuos racionales en la «posición original» parece una suposición bastante rígida.

No es nuestro propósito evaluar aquí la contribución valiosa y altamente original de Rawls a las nociones de equidad y justicia. Su principal interés se centra no tanto en la ordenación de estados sociales, que es nuestro objetivo, como en encontrar instituciones justas (en contraposición a injustas), lo cual es un problema algo diferente. El enfoque de Rawls para este último problema es relevante también para la primera cuestión, pero no da un cuadro completo en ese contexto.

Finalmente, es digno de destacar que el principio de equidad de Rawls es más fundamental que sus principios de justicia, que él deriva del primero. Y es posible aceptar los criterios de Rawls de equidad sin comprometerse enteramente con su identificación de la justicia.[14] De hecho, a la idea de recomendar moralmente un mecanismo de elección colectiva cabe darle bastante contenido en términos de la noción de una incertidumbre *como si*, como señala Rawls.

[13] Para una introducción brillante a los distintos criterios de decisión, véase Luce y Raiffa (1957), Capítulo 13 y Raiffa (1968).

[14] Una objeción, mitad jocosa, mitad seria, a los criterios de equidad de Rawls y otros es la que sigue: ¿Por qué limitarse a ponerse en el lugar de otros seres humanos, y no de otros animales también? ¿Está la línea biológica tan nítidamente dibujada? Lo que se le escapa a esta línea de ataque es el hecho de que Rawls está cristalizando una idea de equidad que nuestro sistema de valores parece tener, en lugar de construir una regla de equidad en el vacío, basada en ciertas nociones de simetría biológica. Las revoluciones se hacen para imponer un tratamiento equitativo de los seres humanos, no para pedir igualdad para los animales. «Si yo estuviese en su pellejo» es relevante para un argumento moral, mientras que «si yo estuviese en sus garras» no lo es. Nuestros sistemas éticos quizá tuvieron como a veces se sostiene, un origen biológico, pero lo que está aquí en juego es el *uso* de estos sistemas y no una *manufactura* de ellos sobre algún tipo de lógica biológica. La mitad jocosa de la objeción es pues más interesante que la mitad seria.

9.3. Impersonalidad y maximización de la utilidad esperada

Harsanyi (1955) considera dos conjuntos de preferencias para cada individuo. Sus «preferencias subjetivas» son sus preferencias tal como «son realmente».[15] Sus «preferencias éticas» deben satisfacer la característica de ser «impersonales».

> Las preferencias de un individuo satisfacen este requisito de impersonalidad si indican qué situación social elegiría en el caso de no saber cuál sería su posición personal en la nueva situación elegida (ni en cualquiera de sus alternativas), es decir en el caso de tener las mismas *probabilidades*, de obtener cualquiera de las posiciones sociales existentes en esta situación, desde la más alta hasta la más baja.[16]

Este concepto de «impersonalidad» está estrechamente relacionado con las nociones de «universalizabilidad» y «equidad» discutidas en los dos últimos apartados. La «universalizabilidad» de Hare es la más exigente de las tres condiciones. Para satisfacerla, el juicio de una persona debe permanecer inalterable independientemente de en qué pellejo esté. La «equidad» de Rawls requiere aceptación en la «posición original», sin saber dentro de qué pellejo estaría uno. La «impersonalidad» de Harsanyi requiere aceptación bajo la suposición de equiprobabilidad. Las semejanzas entre los conceptos de Rawls y Harsanyi son chocantes, y lo serían aún más si el «principio de razón insuficiente» pudiese usarse para convertir la «ignorancia» de Rawls en la «equiprobabilidad» de Harsanyi. Rawls rechaza ésto y elige el criterio maximin no probabilístico. Sin embargo, Harsanyi define su «impersonalidad» directamente en términos de equiprobabilidad *como si*, y supone además que los individuos satisfarán los postulados de von Neumann-Morgenstern (o Marschak) de comportamiento racional bajo riesgo (véase el Capítulo 7 para una exposición de los postulados). Por tanto, las preferencias éticas están determinadas por la maximización de la utilidad esperada, y bajo la suposición de equiprobabilidad esto se reduce simplemente a maximizar la suma de las utilidades de todos. El utilitarismo viene pues, invocado

[15] Estas funciones de utilidad personal no eliminan, desde luego, la interdependencia entre las utilidades de los individuos y corresponden a lo que Arrow llama «valores» en lugar de «gustos» (Arrow (1963), p. 18; Harsanyi (1955), p. 315).

[16] Harsanyi (1955), p. 316. Véase también Vickrey (1945), p. 329. También Harsanyi (1953), Leibenstein (1965) y Pattanaik (1968a).

sobre la base de la «impersonalidad», y las utilidades relevantes son del tipo de von Neumann-Morgenstern, facilitando así el problema de cardinalización que discutimos en el Capítulo 7.

Aparte de este enfoque directo de las preferencias éticas, Harsanyi explora también un método más general para la elección social y demuestra el teorema siguiente: Si las preferencias sociales, así como también las preferencias individuales, satisfacen los postulados de Marschak (o de von Neumann-Morgenstern), y si el que todo el mundo sea indiferente implica indiferencia social, entonces el bienestar social debe ser una suma ponderada de las utilidades individuales.[17] Hay varias formas de usar este teorema (véase Pattanaik (1968a)). Harsanyi toma las preferencias sociales como la «función de bienestar social de un individuo dado»,[18] lo cual proporciona una base para su noción de «preferencias éticas», que en este sentido son un tipo de «preferencias sociales». Bajo la suposición de equiprobabilidad, las preferencias éticas son aquellas preferencias sociales que usan la suma no ponderada (es decir, equiponderada) de utilidades.

¿Hasta qué punto es satisfactorio el test de impersonalidad? Las dificultades siguientes parecen ser relativamente serias.

(1) Consideremos una sociedad esclavista con 99 hombres libres y 1 esclavo. El último sirve a los primeros para beneficio de ellos y para disgusto suyo. Dada una probabilidad igual de estar en la posición de cualquiera, es posible que alguien estuviese dispuesto a correr el riesgo de un 1 por 100 de ser un esclavo, puesto que esa probabilidad del 99 por 100 de ser un hombre libre servido por un esclavo podría aguijonear su fantasía. ¿Sería entonces moralmente defendible una sociedad de esclavos? Mucha gente no aceptaría este test.

Obsérvese de paso que en este caso el modelo rawlsiano de «justicia» tenderá a dar juicios diferentes del que se deriva de la «impersonalidad». Como la noción del maximin se centra en el bienestar del individuo peor situado, los problemas de este tipo no pueden aparecer en el uso de ese criterio. Análogamente, pretender que la esclavitud o la discriminación racial es «justa» con el requisito de «universalizabilidad» de Hare exigiría mucho más que el test usado

[17] Teorema V en Harsanyi (1955), p. 314. Véase también Fleming (1952).
[18] Harsanyi (1955), p. 315.

aquí. El autor del juicio tendrá que mantenerlo no sólo bajo el supuesto de equiprobabilidad de impersonalidad, sino cuando se imagine él mismo ocupando (con certeza) cada situación relevante en esa situación social.

(2) Considérese ahora un problema algo distinto. Supongamos dos estados sociales alternativos representados por x e y con una situación de bienestar de dos personas, como se indica a continuación:

	Bienestar de 1	Bienestar de 2
estado x	1	0
estado y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

En función de la utilidad esperada, el supuesto de impersonalidad hará que los dos sean indiferentes entre x e y, puesto que ambos tienen un valor esperado de $\frac{1}{2}$. Pero, ¿son igual de atrayentes? Quien valore la igualdad como tal (y no por razones derivadas de que la igualdad maximiza el agregado de bienestares individuales),[19] preferirá categóricamente el estado y al x. Diríase que en las elecciones sociales lo que nos interesa no es sólo la esperanza matemática del bienestar con impersonalidad, sino también la distribución exacta de ese bienestar entre los individuos.

En una nota interesante e importante, Diamond (1967) ha argumentado que la «suposición de fuerte independencia» (o el «principio de cosa segura»; véase Apartado 7.3, p. 100) es la parte culpable en el marco de preferencia social de Harsanyi.[20] Esta suposición está incluida en el conjunto de los postulados de Marschak aceptados por Harsanyi.

	probabilidad 0,5	probabilidad 0,5
lotería I	$U_A = 1, \quad U_B = 0$	$U_A = 0, \quad U_B = 1$
lotería II	$U_A = 1, \quad U_B = 0$	$U_A = 1, \quad U_B = 0$

[19] Nótese que las unidades en la tabla de más arriba son de bienestar individual y no de renta o producción.

[20] Véase también Strotz (1958), (1961) y Fisher y Rothenberg (1961), (1962).

Diamond considera un caso de dos individuos (digamos *A* y *B*) y dos «loterías» alternativas (digamos I y II). Si se elige II, es cierto que el individuo *A* tendrá una unidad de utilidad mientras que *B* no tendrá ninguna. Con I hay una probabilidad de 0,5 de que *A* tenga una unidad de utilidad y *B* ninguna, pero hay también una probabilidad de 0,5 de que ocurra lo contrario.

En términos de maximización de la utilidad esperada agregada, I y II son igualmente buenas, teniendo un valor agregado esperado de 1. Parece razonable ser indiferente entre el segundo premio de I y el de II, porque parecen iguales salvo la sustitución de los rótulos *A* y *B*. Pero el primer premio de ambas loterías es el mismo, de modo que «el principio de cosa segura» (o «la suposición de fuerte independencia») nos haría indiferentes entre I y II. Sin embargo, la lotería II parece injusta para el individuo *B*, mientras que la lotería I le da a *B* su oportunidad De ahí la exclusión de Diamond del «principio de cosa segura» en su aplicación a la elección social.

Sin embargo, debe observarse que el argumento de Diamond depende crucialmente de que los niveles del bienestar individual (y por tanto también los «orígenes») sean comparables, suposición que no se necesita para el modelo de bienestar agregado de Harsanyi ni para el caso en ningún modelo de bienestar agregado. Supongamos que añadimos 1 a la función de bienestar individual de *B*, manteniendo inalterable la función de bienestar de *A*. En el espacio de utilidades las dos loterías se transforman en lo siguiente:

	probabilidad 0,5	probabilidad 0,5
lotería I	$U_A = 1, \quad U_B = 1$	$U_A = 0, \quad U_B = 2$
lotería II	$U_A = 1, \quad U_B = 1$	$U_A = 1, \quad U_B = 1$

Ahora es fácil construir un argumento en favor de II frente a I sobre bases muy parecidas a las que utiliza Diamond para preferir I a II. Y esto con un mero cambio en el origen de la función de bienestar de un individuo, que deja completamente inalterada la ordenación del bienestar agregado. Evidentemente, el tipo de comparabilidad que Harsanyi necesita es, en este respecto, menos exigente que el que necesita Diamond para criticar a Harsanyi. Puesto que ni

Harsanyi ni Diamond exponen explícitamente sus supuestos de comparabilidad interpersonal, el debate no es fácil de evaluar. En nuestra terminología (Capítulos 7 y 7*), Harsanyi necesita «comparabilidad unitaria», para el ejercicio de agregación, mientras que Diamond necesita «comparabilidad total» para ser capaz de lograr su objetivo.

También cabe preguntarse si la suposición de fuerte independencia es realmente culpable *incluso* si se supone la comparabilidad total. Alguien podría argumentar que *después* de efectuarse la lotería el resultado final será que una persona tendrá una unidad de utilidad y la otra ninguna en ambos casos, de modo que atendiendo a la distribución *real* de utilidades (y no a la distribución *anticipada*) la lotería I no es más igualitaria (y por tanto tampoco más atractiva) que la lotería II. ¿Por qué preocuparse del proceso de lotería si el resultado va a ser una distribución 1 — 0 de todas formas? Esta es una postura posible, aunque hay gente que encontraría más equitativo conservar la fase intermedia aleatoria.[21]

Aceptemos o no la independencia fuerte, el hecho es que el atractivo de la maximización de la utilidad esperada es dudoso. El ejemplo dado en la tabla de la pág. 176 se aplica en general a la maximización de la utilidad esperada. Y el argumento para elegir $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en lugar de (1, 0) parece bastante fuerte si se supone comparabilidad total, Mientras que el utilitarismo en general y el criterio de Harsanyi en particular serían indiferentes entre los dos, la regla maximin hubiese favorecido la distribución igualitaria.[22] La cuestión crucial es la de la comparabilidad, puesto que la comparabilidad unitaria excluirá cualquier consideración posible de igualdad en las distribuciones de utilidad sin afectar al utilitarismo y al criterio de Harsanyi.

Añadamos que igual que introdujimos la «comparabilidad parcial» de *unidades* en los Capítulos 7 y 7*, podemos usar la comparabilidad parcial de *orígenes* de utilidad (y más generalmente, de *niveles absolutos* de bienestar, cardinales o no) de diferentes personas.

[21] En un seminario dirigido por Arrow, Rawls y yo mismo, en Harvard, en el otoño de 1968, se vio que los participantes (unos treinta en total) se dividieron aproximadamente en mitades iguales sobre este tema.

[22] Siendo este un caso bipersonal, no pueden plantearse aquí algunas de las dificultades con que tropieza el criterio bastante extremo de Rawls y que discutimos en la última sección.

El marco formal seguirá las mismas líneas que el marco de comparabilidad parcial de unidades, pero resistimos la tentación de entrar en detalles. El lector interesado puede intentarlo.

Es interesante contrastar los requisitos formales del criterio maximin con el principio utilitario. El primero requiere comparabilidad de niveles de bienestar, mientras que el segundo no. Por otra parte, éste sólo cabe considerarlo como un principio de ordenación a prueba de fuego cuando se suponen la cardinalidad y la comparabilidad unitaria, mientras que el criterio del maximin funciona perfectamente bien con ordinalidad e incluso con ordenaciones sin posible representación numérica. Estas consideraciones técnicas no son, desde luego, éticamente decisivas, pero sí relevantes. El utilitarismo puede ser aceptado con entusiasmo si podemos comparar diferencias de bienestar para diferentes personas, pero no niveles. Por otra parte, si no podemos comparar unidades, o si podemos comparar niveles, el entusiasmo será limitado. Al evaluar estos principios para nuestros propios juicios sociales podemos quedar peor que considerando los tipos de comparaciones interpersonales que tendemos a hacer.

9.4. Principios de gradación de justicia

Mientras que el criterio maximin y el principio de utilidad dan ordenaciones sociales completas, dados sus respectivos supuestos de mensurabilidad y comparabilidad, el modelo de Suppes (1966) de «principios de gradación» da solamente ordenaciones parciales. Sobre la base de estos principios de gradación, Suppes traza reglas éticas de comportamiento en juegos bipersonales. Dado el estado de naturaleza y las decisiones o actos elegidos por las dos personas, puede averiguarse el conjunto de consecuencias sobre cada una. Siendo S el conjunto de estados de naturaleza, D_1 y D_2 los conjuntos respectivos de decisiones o actos disponibles para las dos personas y C_1 y C_2 los conjuntos respectivos de consecuencias para las mismas, la «función de decisión social» de Suppes[23] especifica valores de C_1 y C_2 para cada combinación de S, D_1 y D_2. El objeto es encontrar una ordenación parcial de los pares de consecuencias sobre las dos.

[23] No debe confundirse con la SDF definida en este libro (véase Definición 4*1).

Sean $(x, 1)$ y $(x, 2)$ las consecuencias sobre los dos individuos 1 y 2, respectivamente, en alguna situación de decisión bipersonal que ha de ser comparada con otra, en la cual las consecuencias sobre los dos son respectivamente $(y, 1)$ e $(y, 2)$. La cuestión es comprobar x con y en términos de «simpatía extendida». Sabemos que x será superior de Pareto a y si el individuo 1 considera a $(x, 1)$ al menos tan buena como $(y, 1)$, el individuo 2 considera $(x, 2)$ al menos tan buena como $(y, 2)$, y al menos uno de ellos prefiere estrictamente el componente respectivo de x al de y. Sin embargo, el ranking «*más justo que*» está hecho para cada individuo por separado en términos de sus propios gustos. La esencia del método es usar la ordenación del individuo sobre el conjunto de consecuencias individuales, es decir, sobre $(x, 1)$, $(x, 2)$, $(y, 1)$, $(y, 2)$, etc., para obtener la relación de justicia requerida sobre el conjunto de estados sociales, es decir, x, y, etc. Si el individuo 1 encuentra que prefiere $(x, 1)$ a $(y, 1)$ y considera a $(x, 2)$ al menos tan buena como $(y, 2)$, entonces juzga a x más justa que a y. Hace el mismo juicio si prefiere $(x, 2)$ a $(y, 2)$ y encuentra a $(x, 1)$ al menos tan buena como $(y, 1)$.

Hasta aquí, no es más que un juicio parecido a los de Pareto, hecho en términos de las propias preferencias del individuo. Pero el individuo podría ahora invertir la distribución interpersonal real de consecuencia. Supongamos que encuentra que los requisitos de más arriba no se satisfacen, pero sí el conjunto siguiente. Prefiere estrictamente $(x, 1)$ a $(y, 2)$, y considera a $(x, 2)$ al menos tan buena como $(y, 1)$. Esto es, prefiere estar él mismo en la situación x que estar en el pellejo del individuo 2 en la situación y, y le gusta estar en el pellejo del individuo 2 en la situación x al menos tanto como estar él mismo en la situación y. De nuevo decidirá que x es más justa que y. De igual manera si prefiere estrictamente $(x, 2)$ a $(y, 1)$, y considera que $(x, 1)$ es al menos tan buena como $(y, 2)$, puede considerar de nuevo a x más justa que y.

Las condiciones reseñadas en los dos últimos párrafos indican la base del «principio de gradación de justicia» de Suppes para cada individuo, que define una ordenación estricta parcial sobre los pares de consecuencias. Puesto que el principio de comparación puede parecer ligeramente difícil, por ser poco familiar y nuevo (un tributo a la originalidad de Suppes), la condición puede expresarse de un modo algo distinto (haciéndola algo más débil), requiriendo preferencia estricta para ambas comparaciones. La regla de Suppes dice que x es

más justa que *y* según el individuo *i*, si (a) prefiere estar él mismo en *x* mejor que en *y* y también prefiere ser el otro individuo en *x* mejor que en *y*, o (b) prefiere estar él mismo en *x* mejor que el otro individuo en *y*, y prefiere ser el otro individuo en *x* mejor que él mismo en *y*. En cualquier caso hay algo superior en *x* frente a *y* en términos de su propia ordenación de preferencia, ya sea reteniendo sus posiciones respectivas o invirtiéndolas.

Suppes demuestra que la relación de ordenación «más justo que» define una ordenación parcial estricta sobre el conjunto de pares de consecuencias, es decir, la relación es «asimétrica» y «transitiva». Suppes procede entonces a usar tres definiciones basadas en el principio de gradación de justicia para perfilar dos reglas de comportamiento ético. Un *elemento admisible de justicia*[24] para un individuo *i* es un par de consecuencias que no es menos justo que cualquier par factible de consecuencias, según la ordenación de preferencias de ese individuo. *Un punto de justicia* es un conjunto de estrategia, una para cada jugador, que conduce a un elemento admisible de justicia. Una *estrategia saturada de justicia* para un jugador es una estrategia tal que independientemente de la estrategia que el otro jugador escoja en el juego bipersonal, el resultado es un punto de justicia.

Basándose en estas definiciones, Suppes sugiere dos reglas de comportamiento «orientado a la justicia»:

I Si los principios de gradación de justicia de los dos individuos dan la misma ordenación parcial estricta, y si hay un punto de justicia único, entonces debe elegirse la estrategia perteneciente a cada punto.

II Si para cualquier jugador el conjunto de estrategias saturadas de justicia no es vacío, debe elegir una.

Estas reglas de comportamiento tendrán sentido en la medida en que tenga sentido el *principio de gradación* de justicia definido por Suppes, aunque lo inverso no es necesariamente correcto, puesto que las reglas de comportamiento son hasta cierto punto arbitrarias.[25]

[24] Suppes lo llama «elemento admisible (J_i)».

[25] Véase el ejemplo dado por Suppes (1966) en pp. 304-305 para ilustrar un caso en que una estrategia saturada de justicia da lo que parece una solución *menos* «equitativa y justa» que el análisis del punto de equilibrio.

En lo que sigue, nos concentraremos en los méritos del principio de gradación propiamente dicho, que está más próximo a nuestro interés por las reglas de elección colectiva.

Uno de los méritos del principio de gradación de justicia de Suppes es que parece satisfacer el requisito de «universalizabilidad» tal como fue bosquejado por Hare (1952), (1963), según una interpretación,[26] incluso en el contexto de intercambiabilidad interpersonal. Puesto que la regla de comparación es simétrica entre las posiciones de los individuos, la persona puede sostener honestamente que si mantiene que x es más justa que y, lo hace *independientemente* de estar en su propia posición o en la de otra persona. El que la primera situación sea $[(x, 1), (x, 2)]$ o $[(x, 2), (x, 1)]$ y la segunda $[(y, 1), (y, 2)]$ o $[(y, 2), (y, 1)]$, no supone diferencia alguna para el ranking de justicia entre las dos situaciones. Por consiguiente, parece pasar un test exigente.

Una segunda ventaja es que el enfoque de Suppes, a diferencia de los de Harsanyi y de Rawls, no requiere comparaciones interpersonales de bienestar. No tenemos que comparar los niveles de bienestar de diferentes personas, y todas las comparaciones están hechas en términos de la ordenación de un individuo dado con sus propios gustos y preferencias. Además, a diferencia del método de Harsanyi, no se necesita la cardinalización de los índices de bienestar de los individuos.

Sin embargo, por evitar la cardinalización y las comparaciones interpersonales se paga un precio. A diferencia de las ordenaciones generadas por el criterio de Rawls o el de Harsanyi, el ranking dado por el principio de gradación de Suppes es *incompleto*. La crítica puede que no sea demasiado seria, ya que la ordenación, aunque incompleta, puede ayudar a resolver una serie de importantes problemas en los que intervienen consideraciones de justicia,

Cabe, en cambio, formular un reparo muy serio acerca del principio de gradación en sí. Como consecuencia de hacer todas las comparaciones en términos de los gustos del mismo individuo, las diferencias personales en las preferencias encuentran poco reflejo en el principio. Considérese el ejemplo siguiente, en el que los dos pares de consecuencias están expresados en términos de artículos disfrutados por los individuos, sin externalidades: Para dar el sentido

[26] Sin embargo, hay una interpretación diferente y más apropiada de Hare para la cual esto no es cierto. Véase nota 28 más abajo.

de la diferencia de gustos, supongamos que el individuo 1 es un devoto musulmán y el individuo 2 un devoto hindú, siendo los artículos en cuestión la carne de cerdo y la carne de vaca. Se supone que al musulmán le gusta la vaca y no el cerdo, mientras que al hindú le gusta el cerdo pero no puede soportar el pensamiento de comer carne de vaca. Suponiendo una disponibilidad ilimitada, el musulmán es indiferente entre distintas cantidades de cerdo y el hindú entre diferentes cantidades de vaca. Los dos resultados alternativos vienen dados por x e y.

	El musulmán	El hindú
estado x	2 cerdo, 0 vaca	0 cerdo, 2 vaca
estado y	0 cerdo, 1 vaca	1 cerdo, 0 vaca

Está claro que y es mejor según Pareto que x, puesto que el musulmán prefiere 1 unidad de vaca a 2 unidades de cerdo, mientras que el hindú prefiere 1 unidad de cerdo a 2 unidades de vaca. ¿Qué dice el principio de gradación de justicia desarrollado por Suppes? Pues que ambos individuos encuentran a x más justo que y. El musulmán prefiere $(x, 2)$ mejor que $(y, 1)$, es decir, prefiere tener 2 unidades de vaca mejor que una sola. Y es indiferente entre $(x, 1)$ e $(y, 2)$, es decir, entre tener 2 unidades de cerdo y 1 sola unidad. Análogamente, el hindú prefiere $(x, 1)$ a $(y, 2)$, y es indiferente entre $(x, 2)$ e $(y, 1)$. Así pues, ambos encuentran a x preferible a y por el principio de gradación de justicia. Pero y es superior según Pareto a x.

Cuando la elección está entre x e y, x es admisible de justicia mientras que y no lo es. Es fácil construir un juego en que x corresponda al único punto de justicia y obtener un respaldo ético en términos del modelo de Suppes para elegir estrategias tales que x se convierta en el resultado. El resultado parece extremadamente perverso. La raíz del problema está en el procedimiento por el cual cada individuo puede hacer comparaciones en términos de sus propios gustos, en nombre de sí mismo así como también de los demás.[27]

[27] Cf. «No hagas a los demás lo que quieres que los demás te hagan a tí. Sus gustos pueden no ser los mismos.» «La Regla de Oro» en «Máximas para Revolucionarios», en George Bernard Shaw, *Man and Superman*, Londres, 1903.

A diferencia de los modelos de Harsanyi y Rawls, el modelo de Suppes no impide el requisito de que uno deba tener los rasgos subjetivos (en particular, gustos) del otro cuando se pone en su lugar. Este es el origen del problema.[28]

Sin embargo, es fácil de eliminar. Ponerse en lugar del otro debería equivaler a tener sus mismas circunstancias objetivas y a identificarse *también* con él en términos de sus rasgos subjetivos. Esto, que le dimos el nombre de axioma de identidad en el Capítulo 9*, elimina la dificultad totalmente, pero a un precio. Con esta interpretación, una comparación de $(x, 1)$ con $(y, 2)$ o de $(x, 2)$ con $(y, 1)$ *es* una comparación interpersonal. Sin embargo, no es una pérdida de mayor cuantía. De lo que llevamos dicho se desprende que en materia de justicia poco se puede decir sin introducir cierto grado de comparabilidad interpersonal. La reformulación requerida de los principios de gradación de Suppes pone de relieve este punto.

9.5. Principio de gradación, maximin y utilitarismo

Los principios de gradación de Suppes pueden ser extendidos desde su mundo bipersonal a las sociedades de n personas, como hacemos en el Capítulo 9*. Una vez extendida (y combinada con el axioma de identidad), la relación de Suppes se revela como una piedra fundamental de la relación del maximin y del utilitarismo. Si x es más justo que y en el sentido de Suppes (con el axioma de identidad impuesto), entonces x debe tener un agregado de bienestar mayor que y (relación utilitaria) y además el individuo peor parado en x debe estar al menos tan bien situado como cualquier individuo en y (relación maximin) (véanse Teoremas 9*5 y 9*7).

Esta propiedad es extremadamente importante. Como señalamos antes, las demandas conflictivas del criterio maximin y de utilitarismo son difíciles de resolver. Ambos tienen rasgos atractivos y otros que no lo son tanto. El principio de gradación, restringido convenientemente, parece captar los elementos comunes más atrayentes de los dos.

[28] Puesto que el ponerse en lugar del otro en el modelo de Hare se supone que incluye los *rasgos subjetivos* del otro, el criterio de Suppes no pasa, de hecho, el test de «universalizabilidad».

Sin embargo, como da solamente una ordenación parcial estricta, es un criterio incompleto. Lo que hace en esencia, es separar la parte relativamente libre de controversia de la elección interpersonal y nos lleva bastante más allá del criterio de Pareto. Esto es especialmente cierto en la extensión a n personas de la relación de Suppes; el número de permutaciones interpersonales posibles viene dado por $n!$, es decir, por $n(n-1)(n-2)\cdots 1$. En un mundo bipersonal hay solamente dos permutaciones, pero 3.628.800 permutaciones interpersonales diferentes en un mundo de diez hombres. La relación de Pareto se ocupa de una sola correspondencia uno a uno. En cambio, hay 3.628.800 maneras *diferentes* en las que x puede ser más justo que y en una sociedad de diez personas usando el principio de gradación ampliado.

Así pues, la versión ampliada del principio de gradación es muy rica. Aunque no da una ordenación social completa, exprime al máximo el uso de la «dominancia» (o desigualdad vectorial), que es el elemento común en el criterio maximin, utilitarismo y otros procedimientos de elección colectiva que implican comparabilidad interpersonal.

Capítulo 9*
IMPERSONALIDAD Y CUASI-ORDENACIONES COLECTIVAS

9*1. Principios de gradación de justicia

La noción de justicia, como vimos en el Capítulo 9, está estrechamente relacionada con la «simpatía extendida», es decir, con la noción de ponerse en el lugar de otro.

DEFINICIÓN 9*1. *Supongamos que* (x, i) *representa estar en la posición del individuo* i *en el estado social* x.

Hasta ahora hemos considerado a R_i definida siempre sobre alternativas tales como (x, i), (y, i), etc. Ahora R_i será definida también sobre tales alternativas como (x, i), (y, j), etc., cuando $i \neq j$. Tal R_i, designada por $\tilde{R}_i$, la denominaremos una ordenación individual *extendida*.

DEFINICIÓN 9*2. $\tilde{R}_i$ *es la ordenación del individuo i-ésimo definida en el producto cartesiano de* X *y* H, *donde* X *es el conjunto de estados sociales y* H *el conjunto de individuos.*

LEMA 9*a. *Una subrelación de* $\tilde{R}_i$ *para cada* i *está definida por* R_i.

La demostración es obvia por el hecho de que $x R_i y$ viene ahora

definida por $(x, i)\,\tilde{R}_i\,(y, i)$. Definimos $\tilde{P}_i$ e $\tilde{I}_i$ análogamente a como hemos definido $\tilde{R}_i$.

Obsérvese que x es superior según Pareto a y, es decir, $x\,\bar{P}\,y$, si y solamente si $\forall i : [(x, i)\,\tilde{R}_i\,(y, i)\ \&\ \exists i : [(x, i)\,\tilde{P}_i\,(y, i)]$.

Suppes (1966) ha definido un importante criterio de justicia haciendo uso de la simpatía extendida en un caso bipersonal. Presentamos aquí una extensión a n personas del modelo de Suppes, en la que intervienen correspondencias uno a uno del conjunto de individuos H sobre el propio H, tales que $k = \rho(j)$, donde la persona j se aplica en la persona k. Llamemos T al conjunto de tales correspondencias uno a uno entre H y H. Por definición, $x\,J_i\,y$ equivale a «x es más justo que y según la persona i».

DEFINICIÓN 9*3. *Para todos los pares* x, y *en* X,

$$x\,J_i\,y \leftrightarrow \exists\,\rho \in T: [\{\forall j : (x, j)\,\tilde{R}_i\,(y, \rho(j))\}\ \&\ \{\exists j : (x, j)\,\tilde{P}_i\,(y, \rho(j))\}]$$

Según la persona i, x es más justo que y si hay una transformación uno a uno del conjunto de individuos en sí mismo, tal que él preferiría estar en la posición de alguien en x a estar en la de esa persona en y, y también preferiría, o sería indiferente, a estar en la posición de *cada* persona en x que estar en la posición de la persona correspondiente en y.

Suppes ha mostrado (su Teorema 2) que para el caso bipersonal que considera, J_i será una ordenación parcial estricta sobre los posibles estados sociales. El resultado se generaliza más abajo para el caso de n personas.[1]

TEOREMA 9*1. *Cada* J_i *es una ordenación parcial estricta sobre* X, *es decir,* J_i *es asimétrica y transitiva para todo conjunto lógicamente posible de ordenaciones individuales extendidas* $(\tilde{R}_i)$.

Demostración: Para cualesquiera x, y, $z \in X$, y para cualquier $i \in H$,

[1] Sin embargo, no podemos usar el método de Suppes para la demostración puesto que él muestra el resultado por un estudio completo de todos los casos posibles —un método que funciona bien para su situación bipersonal, pero no para situaciones generales de n personas.

$$x J_i y \;\&\; y J_i z$$
$$\rightarrow \exists \rho, \mu \in T: [\{\forall j : (x, j)\, \tilde{R}_i\, (y, \rho(j))\}$$
$$\&\; \{\exists j : (x, j)\, \tilde{P}_i\, (y, \rho(j))\} \;\&\; \{\forall k : (y, k)\, \tilde{R}_i\, (z, \mu(k))\}]$$
$$\rightarrow [\{\forall j : (x, j)\, \tilde{R}_i (z, \pi(j))\} \;\&\; \{\exists j : (x, j)\, \tilde{P}_i (z, \pi(j))\}]$$

donde $\pi(j) = \mu(\rho(j))$. Puesto que π es también una correspondencia uno a uno entre H y H, es decir, $\pi \in T$, podemos concluir que $x J_i z$, lo que demuestra la transitividad.

La asimetría se demuestra ahora por contradicción. Supongamos $x J_i y$ & $y J_i x$ para algún $x, y \in X$. Entonces hay ρ y μ en T tales que

$$\forall j : (x, j)\, \tilde{R}_i\, (y, \rho(j)) \tag{1}$$
$$\&\; \forall k : (y, k)\, \tilde{R}_i\, (x, \mu(k)) \tag{2}$$
$$\&\; \exists j : (x, j)\, \tilde{P}_i\, (y, \rho(j)) \tag{3}$$

Sin pérdida de generalidad llamemos 1 a una persona particular j para quien (3) se cumple. De (2) y (3), tenemos para $\pi(j) = \mu(\rho(j))$,

$$(x, 1)\, \tilde{P}_i\, (x, \pi(1)) \tag{4}$$

Claramente es imposible que $\pi(1) = 1$. Sin pérdida de generalidad, llamemos a $\pi(1)$ la persona 2.

De (1) y (2) obtenemos

$$(x, 2)\, \tilde{R}_i\, (x, \pi(2)) \tag{5}$$

Obviamente es imposible que $\pi(2) = 2$, puesto que $\pi(1) = 2$, y π es una correspondencia uno a uno. Es también imposible que $\pi(2) = 1$, puesto que entonces (4) y (5) serían contradictorias. Sea $\pi(2) = 3$.

Procediendo de esta forma para distintas personas 3, 4, 5, ..., n, obtenemos

$$(x, 3)\, \tilde{R}_i\, (x, 4)$$
$$\vdots$$
$$(x, n-1)\, \tilde{R}_i\, (x, n) \tag{6}$$

De (4), (5) y (6) concluimos que

$$(x, 1)\, \tilde{P}_i\, (x, n) \tag{7}$$

Por (1) y (2), sabemos que

$$(x, n)\, \tilde{R}_i\, (x, \pi(n)) \qquad (8)$$

Pero como π es una correspondencia uno a uno y $\pi(n)$ no puede ser 2, 3, ..., n, debemos tener $\pi(n) = 1$. Puesto que (7) y (8) se contradicen, nuestra suposición inicial debe ser insostenible, y de aquí que J_i sea asimétrica, lo que completa la demostración.

La relación de justicia de Suppes J_i es por tanto una ordenación parcial estricta, es decir, «un principio de gradación», tal como Suppes define ese principio (asimétrico y transitivo). No es, sin embargo, una regla de elección colectiva como ha sido definida en el Capítulo 2*, puesto que J_i depende no meramente del conjunto de R_i sino de $\tilde{R}_i$, siendo cada R_i meramente una subrelación de $\tilde{R}_i$. En el apartado siguiente redifinimos el concepto de regla de elección colectiva para darle más generalidad.

9*2. Suppes y Pareto

DEFINICIÓN 9*4. *Una regla general de elección colectiva (en lo sucesivo GCCR) es una relación funcional que especifica una y solamente una relación de preferencia social R en el conjunto de estados sociales X, para cualquier n-upla de ordenaciones individuales* $(\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n)$, *donde cada* $\tilde{R}_i$ *es una ordenación sobre el producto de X y H.*

Los principios de gradación de Suppes, tal como son generalizados aquí para el caso de n personas, son un conjunto de GCCR. De hecho, toma la forma especial de determinar $R = J_i$ sobre la base de una y solamente una $\tilde{R}_i$ de modo que hay n de tales principios alternativos cuando hay n individuos.

Sin embargo, el resultado siguiente parece perturbador:

TEOREMA 9*2. *Cuando el número de individuos es de 2 o más, la relación estricta débil de Pareto* $\bar{P}$ *es incompatible con cada* J_i, *para* $i = 1, ..., n$, *para algún conjunto lógicamente posible de preferencias individuales,* $\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n$.

Demostración: Numeremos a los individuos 1, ..., n. Consideremos $\mu \in T$, tal que $\mu(j) = j + 1$, para $j < n$, y $\mu(n) = 1$.

Considérense los siguientes rankings de preferencias de cada persona i para algún par $x, y \in X$, para todo j:

$$(x, \mu(j))\ \tilde{P}_i\ (y, j) \tag{9}$$
$$(y, i)\ \tilde{P}_i\ (x, i) \tag{10}$$

Representando la función inversa de μ por μ^{-1}, obtenemos de (9) y (10) lo siguiente para todo i:

$$[(x, \mu(i))\ \tilde{P}_i\ (y, i)]\ \&\ [(y, i)\ \tilde{P}_i\ (x, i)]\ \&\ [(x, i)\ \tilde{P}_i\ (y, \mu^{-1}(i))] \tag{11}$$

Si existe más de un individuo en la comunidad, es decir, $n > 1$, $\mu(i)$ tal como se ha definido no es lo mismo que i, ni es i lo mismo que $\mu^{-1}(i)$. De aquí que no haya contradicción en (9) y (10). Para cada $\tilde{R}_i$, (9) define n pares ordenados sin elementos en común y junto con (10) obtenemos un orden estricto de cuatro elementos, a saber, el dado en (11).

Tomemos cualquier conjunto de $(\tilde{R}_i)$ que sea compatible con (9) y (10). Es inmediato que para todo i, $x\ J_i\ y$, por (9). También es obvio por (10) que $y\ \bar{\bar{P}}\ x$. Esto demuestra el teorema.[2]

El siguiente corolario es inmediato.

COROLARIO 9*2.1. *Cuando el número de individuos es de 2 o más, la relación estricta de Pareto $\bar{P}$ es incompatible con todo J_i para $i = 1, ..., n$, para algún conjunto lógicamente posible de preferencias individuales, $\tilde{R}_1, ..., \tilde{R}_n$.*

Esto se sigue de: $\forall\ x, y \in X : x\ \bar{\bar{P}}\ y :\rightarrow x\ \bar{P}\ y$. Puesto que el principio de gradación puede contradecir al principio de Pareto débil, ciertamente puede contradecir al principio de Pareto fuerte.

9*3. Axiomas de identidad y los principios de gradación

El problema de la incompatibilidad de la cuasi-ordenación de Pareto con las ordenaciones parciales estrictas de justicia puede ser eliminado imponiendo ciertas restricciones a las preferencias

[2] Un ejemplo sencillo para el caso bipersonal viene dado por $[\{(x, 2)\ P_1\ (y, 1)\}\ \&\ \{(y, 1)\ P_1\ (x, 1)\}\ \&\ \{(x, 1)\ P_1\ (y, 2)\}]$, y $[\{(x, 1)\ P_2\ (y, 2)\}\ \&\ \{(y, 2)\ P_2\ (x, 2)\}\ \&\ \{(x, 2)\ P_2\ (y, 1)\}]$ donde $x\ J_i\ y$ para $i = 1, 2$, pero $y\ \bar{\bar{P}}\ x$.

extendidas de los individuos, $\tilde{R}_i$. El axioma de identidad discutido en el Capítulo 9, y que puede justificarse sobre bases éticas como una parte importante del ejercicio de simpatía extendida, sirve también a este propósito.

AXIOMA 9*1. *Identidad*: $\forall x, y \in X$:

$$[\forall i : \{(x, i)\, \tilde{R}_i\, (y, i) \leftrightarrow \forall j : (x, i)\, \tilde{R}_j\, (y, i)\}]$$

Cada individuo j, al situarse en el lugar de la persona i, adopta los gustos y preferencias de i.

TEOREMA 9*3. *Bajo el axioma de identidad, para cada persona* i, $\bar{P}$ *es compatible con* J_i, *y además* $\forall x, y \in X : [x\, \bar{P}\, y \rightarrow x\, J_i\, y]$.

Demostración: Para cualquier $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} x\, \bar{P}\, y \rightarrow & [\{\forall i : (x, i)\, \tilde{R}_i\, (y, i)\} \;\&\; \{\exists i : (x, i)\, \tilde{P}_i\, (y, i)\}] \\ & \rightarrow \forall i : [\{\forall j : (x, j)\, \tilde{R}_i\, (y, j)\} \;\&\; \{\exists j : (x, j)\, \tilde{P}_i\, (y, j)\}] \\ & \rightarrow \forall i : x\, J_i\, y \end{aligned}$$

Una suposición más exigente es la dada por el axioma de identidad completa.

AXIOMA 9*2. *Identidad completa*: $\forall i, j : \tilde{R}_i = \tilde{R}_j$.

Es trivial que bajo el axioma de identidad completa, $J_i = J_j$ para todas las personas i, j. Podemos referirnos a R y J sin subíndices bajo el axioma de identidad completa, ya que el subíndice no comportará ninguna diferencia.

9*4. La relación maximin de justicia

El criterio de justicia propuesto por Rawls (1958), (1963), (1967), admite ahora una formalización. Aunque Rawls habla de medidas de bienestar y calcula el valor maximin (véase Capítulo 9), sus criterios son lo bastante generales para ser expresados en términos de ordenaciones solamente. Nos referimos a $\tilde{R}$, que puede ser interpretado como la ordenación extendida de una cierta persona i, $\tilde{R}_i$, sin el subíndice, o alternativamente como $\tilde{R}_i$ para todo i bajo el

axioma de identidad completa. Bajo la primera interpretación, la relación de Rawls refleja juicios sobre justicia hechos por un individuo particular, mientras que bajo la segunda reflejará los juicios sobre justicia hechos por todos. La relación maximin de justicia se designará por M.

DEFINICIÓN 9*5. *Para todos los pares* x, y *en* X:

$$x\,M\,y \leftrightarrow [\exists\, k : \{\forall\, i : (x, i)\,\tilde{R}\,(y, k)\}]$$

Si no es peor ser cualquiera en el estado social x que ser el individuo k en el estado y, entonces x es al menos tan justo como y.

TEOREMA 9*4. *La relación maximin de justicia* M *define una ordenación en el conjunto de estados sociales* X, *si* $\tilde{R}$ *está definida en el producto completo de* X *y* H.

Demostración: Es obvio que M es reflexiva. Es transitiva puesto que

$$\begin{aligned}\forall\, x, y, z \in X : x\,M\,y \;\&\; y\,M\,z \\ \rightarrow ([\exists\, k : \{\forall\, i : (x, i)\,\tilde{R}\,(y, k)\}] \;\&\; [\exists\, j : \{\forall\, i : (y, i)\,\tilde{R}\,(z, j)\}] \\ \rightarrow [\exists\, j : \{\forall\, i : (x, i)\,\tilde{R}\,(z, j)\}] \\ \rightarrow x\,M\,z\end{aligned}$$

Finalmente, la completitud de M se demuestra por contradicción. Supongamos $\sim(x\,M\,y)$ & $\sim(y\,M\,x)$ para algún $x, y \in X$. Evidentemente

$$\sim[\exists\, k : \{\forall\, i\,(x, i)\,\tilde{R}\,(y, k)\}] \;\&\; \sim[\exists\, j : \{\forall\, i : (y, i)\,\tilde{R}\,(x, j)\}]$$

Esto significa que el conjunto $[(x, i) \cup (y, j)]$ con $i = 1, ..., n$, y $j = 1, ..., n$ no tiene elemento menor («peor») con respecto a $\tilde{R}$. Pero esto es imposible puesto que el conjunto es finito y $\tilde{R}$ es una ordenación.[3]

Para cualquier $\tilde{R}$ dado, la relación de justicia de Suppes J implica la relación de justicia de Rawls M, pero no viceversa.

TEOREMA 9*5. *Para cualquier* $\tilde{R}$ *dada y para todo* x, y *en* X: $x\,J\,y \rightarrow$ $\rightarrow x\,M\,y$, *pero lo inverso no se cumple.*

[3] Véase Lema 1*j. La existencia de un elemento mínimo se demuestra de la misma forma que la existencia de un mejor elemento.

Demostración:

$$x\,J\,y \rightarrow \exists\,\rho \in T\colon [\forall j : (x,j)\,\tilde{R}\,(y,\rho(j))]$$
$$\rightarrow \exists\,k : [\forall j : (x,j)\,\tilde{R}\,(y,k)]$$
$$\rightarrow x\,M\,y$$

Para comprobar lo inverso, considérese la ordenación $\tilde{R}$ siguiente en un mundo bipersonal biestatal: $(y,\ 1)\,\tilde{P}\,(x,\ 1)$, $(x,\ 1)\,\tilde{P}\,(x,\ 2)$ y $(x,\ 2)\,\tilde{P}\,(y,\ 2)$. Claramente, $x\,M\,y$, pero $\sim(x\,J\,y)$.

Sin embargo, obsérvese que incluso bajo el axioma de identidad completa, la relación de Pareto $\tilde{P}$ (y la relación de Suppes J) no implicarán la relación de preferencia estricta de Rawls.[4]

LEMA 9*b. *Incluso bajo el axioma de identidad completa,* $\exists\,\tilde{R}$: $[x\,\bar{P}\,y\ \&\ y\,M\,x]$.

Demostración: Considérese un par x, y en X dos individuos 1 y 2 tales que $(x,\ 1)\,\tilde{P}\,(y,\ 1)$, $(y,\ 1)\,\tilde{R}\,(x,\ 2)$ y $(x,\ 2)\,\tilde{I}\,(y,\ 2)$. Puesto que $(y,\ i)\,\tilde{R}\,(x,\ 2)$ para $i = 1,\ 2$, tenemos $y\,M\,x$; pero $x\,\tilde{P}\,y$. Es trivial extender el ejemplo a un número cualquiera de individuos.

Sin embargo, la versión estricta de la preferencia de Pareto $\bar{\bar{P}}$ implica la relación estricta de Rawls. Y, desde luego, la preferencia débil de Pareto implica la relación débil de Rawls.

TEOREMA 9*6. *Bajo el axioma de identidad completa, para todo* x, y *en* X:

(1) $x\,\bar{R}\,y \rightarrow x\,M\,y$; y
(2) $x\,\bar{\bar{P}}\,y \rightarrow [x\,M\,y\ \&\ \sim(y\,M\,x)]$.

Demostración: Para todo x, y en X:

$$x\,\bar{R}\,y \rightarrow \forall\,i : (x,i)\,\tilde{R}_i\,(y,i)$$
$$\rightarrow \exists\,k : [\forall\,i : (x,i)\,\tilde{R}\,(y,k)]$$
$$\rightarrow x\,M\,y$$

Por tanto (1) se cumple

$$(y\,M\,x) \rightarrow \exists\,k : [\forall\,i : (y,i)\,\tilde{R}\,(x,k)]$$
$$\rightarrow \exists\,k : (y,k)\,\tilde{R}_k\,(x,k)$$
$$\rightarrow \sim(x\,\bar{\bar{P}}\,y)$$

[4] Sin embargo, implicará preferencia estricta bajo la regla maximin lexicográfica definida en la nota 12 del Capítulo 9, p. 171.

De aquí que (2) se cumpla, puesto que $x \bar{\bar{P}} y \rightarrow x \tilde{R} y$, y $x \bar{R} y \rightarrow x M y$, por (1).

9*5. Justicia y agregación

Es interesante comparar las relaciones de justicia con la relación de agregación discutida en el Capítulo 7*. Para esto es conveniente considerar una versión más débil de la relación de Suppes J.

DEFINICIÓN 9*6. *Para todos los pares x, y en X:*

$$x O_i y \leftrightarrow \exists \rho \in T: [\forall j : (x,j) \tilde{R}_i (y, \rho(j))]$$

Puede comprobarse que $x J_i y$ es equivalente a $x O_i y \ \& \ \sim(y O_i x)$.

El Teorema 9*5 puede ser reforzado observando que $x O y$ es suficiente para $x M y$, y no es necesario $x J y$.

COROLARIO 9*5.1. *Para cualquier $\tilde{R}$ dada y para todo x, y en X: $x O y \rightarrow x M y$ aunque lo inverso no se cumple.*

La misma demostración que en el Teorema 9*5.

Sin demostración, señalamos el resultado siguiente:

LEMA 9*c. *Toda O_i es una cuasi-ordenación en X, es decir, O_i es reflexiva y transitiva para cada conjunto lógicamente posible de ordenaciones individuales extendidas ($\tilde{R}_i$).*

Consideremos cualquier función de bienestar de valores reales $U(x, i)$, definida para todo i y todo x en X.

DEFINICIÓN 9*7. *Para todo x, y en X, $x A y$, es decir, x tiene un agregado de bienestar al menos tan grande como y, si y solamente si*

$$\sum_i [U(x,i) - U(y,i)] \geqq 0$$

Para cualquier U, A es obviamente una ordenación.

Pasemos seguidamente a la relación entre A y O para cualquier $\tilde{R}$ particular.

TEOREMA 9*7. *Si U es una representación real de $\tilde{R}$, entonces O es una subrelación de A.*

Demostración: Supongamos $x\,O\,y$, y para algún ρ, $(x, j)\,\tilde{R}\,(y, \rho(j))$, para todo j. Entonces $\Sigma_i[U(x,i) - U(y,i)] = \Sigma_j[U(x,j) - U(y,\rho(j))] \geqq \geqq 0$. De aquí que $x\,A\,y$. Además, si $x\,J\,y$, entonces para algún j, $(x, j)\,\tilde{P}\,(y, \rho(j))$, y de aquí que $x\,A\,y$ & $\sim(y\,A\,x)$.

Ahora bien, en términos del modelo del Capítulo 7* cualquier U corresponde a un $W \in L$, particular, de modo que $W_i(x) = U(x, i)$.

COROLARIO 9*7.1. *Para cualquier supuesto de mensurabilidad y comparabilidad interpersonal de bienestar individual, si cada* $W \in \bar{L}$ *es una representación real de* $\tilde{R}$, *entonces* O *es una subrelación de* R^a.

La demostración se sigue inmediatamente del Teorema 9*7.

Es de destacar que el supuesto de cardinalidad no se necesita (véase Apartado 7*4). Dada la ordinalidad estricta, una $\tilde{R}$ dada representa una comparación interpersonal completa de niveles ordinales de bienestar individual. Sin embargo, dada la cardinalidad estricta, una $\tilde{R}$ particular puede coexistir con una $\bar{L}$ que represente una comparabilidad no total, pues están permitidas aquellas variaciones interpersonales en orígenes y unidades que no alteren la ordenación subyacente a U.

Capítulo 10
ELECCION DE MAYORIA Y SISTEMAS AFINES

10.1. El método de decisión de mayoría

De todas las reglas de elección colectiva, el método de decisión de mayoría ha sido quizá el más estudiado. En 1770 Borda realizó ya estudios nada triviales de los procedimientos de votación, y en 1785 Condorcet había evaluado muchos de los problemas analíticos de la regla de mayoría. En el siglo XIX aumentó el interés por el método de decisión de mayoría, y su estudio atrajo a figuras tan diversas como Laplace (1814) y Lewis Carroll (es decir, C. L. Dodgson (1876)).[1]

Como sistema, la regla de mayoría se emplea en diversos tipos de elecciones colectivas. Su atractivo es fácil de explicar. Como una CCR, satisface los principios de Pareto (condiciones *P* y *P**), dominio no restringido (condición *U*), no dictadura (condición *D*), independencia de alternativas irrelevantes (condición *I*), neutralidad (condición *N*), anonimidad (condición *A*), responsividad positiva (condición *S*) y otras condiciones atrayentes. Realmente el MMD es la única CCR decisiva que satisface estas condiciones (de hecho, la

[1] Sobre la historia de los estudios de decisión de mayoría véase Black (1958) y Riker (1961).

única que satisface las condiciones *U*, *N*, *A* y *S*) como se mostró en el Teorema 5*1.

Las deficiencias del MMD son también importantes. Primero, como se señaló en los Capítulos 3 y 4, el MMD puede conducir a intransitividad y además a una violación de la aciclicidad. El famoso caso de la «paradoja de la votación», discutido en el Capítulo 3, es un ejemplo de ésto. Como SWF o como SDF no funciona para algunas configuraciones de preferencias individuales.

Segundo, infringe las condiciones *L* y *L** y da poco radio de acción a la libertad personal. Si el deseo de cierta mayoría es que yo me ponga cabeza abajo dos horas cada mañana, el MMD hará de ésto un estado socialmente preferido, independientemente de cómo vea yo esta exigente perspectiva. Y es que hay áreas de elección donde incluso el defensor más acérrimo de la regla de mayoría dudará en recomendar el MMD como el procedimiento adecuado de decisión social. Pero si el MMD es aplicable a ciertas elecciones y a otras no, pueden surgir problemas de incompatibilidad de modo muy análogo a como surgieron en el Capítulo 6.[2] El uso de un procedimiento de decisión para ciertas elecciones y de otro para otras plantea graves problemas de consistencia. Desde luego el MMD puede conducir, por derecho propio, a intransitividad y a violaciones de la aciclicidad, pero su combinación con otras reglas parece añadir una nueva dimensión al problema. No obstante, muchos preferirán tal procedimiento híbrido a un uso inflexible del MMD en todas las esferas de la elección social.

Tercero, el MMD no tiene en cuenta las intensidades de preferencia, cuando cabe perfectamente argüir que lo que importa no es sólo el *número* de los que prefieren *x* a *y* y el de los que prefieren *y* a *x*, sino también *por cuanto* prefiere cada cual una alternativa a la otra. Como se indicó en el Capítulo 8, el introducir la cardinalidad sin comparabilidad interpersonal puede no ser una gran ayuda, pero con algo de comparabilidad (no necesariamente mucha) puede lograrse bastante. En el Capítulo 7 se estudió el procedimiento de agregación —del cual el utilitarismo es un caso especial— haciendo suposiciones muy débiles, y dicho procedimiento puede ser un serio rival para el MMD.

[2] De hecho, esto resulta claro de los Teoremas 6*1-6*3, puesto que el MMD incluye el principio de Pareto.

Finalmente, aparte de ignorar las intensidades relativas de preferencia, el MMD también ignora cualquier comparación posible entre niveles absolutos de bienestar de diferentes personas. Tiene en cuenta juicios tales como «yo preferiría estar en el estado x a estar en el estado y», pero no juicios como «yo preferiría ser el señor A en el estado x a ser el señor B en el estado y». Lo cual es una ventaja desde algunos puntos de vista, especialmente porque el último tipo de preferencias son bastante difíciles de recoger y elaborar para estudios prácticos de elección colectiva. Por otra parte, esta característica del MMD (y ciertamente de todas las CCR basadas en ordenaciones individuales R_i en lugar de $\tilde{R}_i$) le resta fuerza de atracción. Los criterios que discutimos en el Capítulo 9, que incorporan nociones de equidad y justicia, se opondrían al MMD.

Como procedimiento institucional el MMD tiene la virtud de hacer uso efectivo de ordenaciones individuales en un mundo de comunicación imperfecta. Las intensidades de preferencia y las medidas relativas de bienestar son difíciles de manejar en un contexto interpersonal, y aunque nuestros juicios de valor pueden hacer uso de estos conceptos, no son fáciles de reunir y manejar. También entraña dificultades prácticas el decidir qué elecciones son realmente privadas y cuáles son de la incumbencia de otros. El MMD es un procedimiento no absurdo e ignora todas estas complicaciones. Haciendo una virtud de la independencia de alternativas irrelevantes, neutralidad y anonimidad, toma la forma de una institución no complicada. Y aunque su tosquedad es algo chocante, su simplicidad, simetría y lógica primitiva parecen atraer a muchos.

10.2. Probabilidad de mayorías cíclicas

¿Hasta qué punto es grave el problema de inconsistencia de la decisión de mayoría? ¿Cuál es la probabilidad de que no exista un «vencedor por mayoría», es decir, de que no haya ninguna alternativa que obtenga una mayoría sobre cada una de las otras del conjunto? Aunque son preguntas difíciles de responder, ha habido algunos intentos de abordarlas.[3] Guilbaud (1952), Riker (1961), Campbell

[3] Véase Riker (1961) para un estudio muy bueno de los problemas de inconsistencia bajo la regla de mayoría.

y Tullock (1965), (1966), Klahr (1966), Williamson y Sargent (1967), Garman y Kamien (1968), Niemi y Weisberg (1968) y De Meyer y Plott (1969), entre otros, han proporcionado amplios estudios sobre este problema.

En todos estos cálculos hay que hacer ciertas suposiciones sobre la distribución de probabilidad de diferentes ordenaciones individuales para cada persona. Una de ellas es particularmente simple y ha atraído a no pocos autores: la de que todas las ordenaciones son igualmente probables para cada individuo.[4] Confiando el análisis solamente a ordenaciones fuertes, Guilbaud (1952) calculó que la probabilidad de mayorías cíclicas era solamente del 8,77 por 100. Garman y Kamien (1968) y Niemi y Weisberg (1968) han obtenido un modelo exacto de probabilidad para el caso de que no haya vencedor por mayoría al variar el número de votantes, como se muestra en la Tabla 10.1. La tabla supone la existencia de tres alternativas, preferencias estrictas de los individuos y equiprobabilidad.

TABLA 10.1. Probabilidad de que no haya vencedor por mayoría para tres alternativas

Número de personas	Probabilidad	Número de personas	Probabilidad
1	0,0000	17	0,0827
3	0,0556	19	0,0832
5	0,0694	21	0,0836
7	0,0750	23	0,0840
9	0,0780	25	0,0843
11	0,0798	...	...
13	0,0811	∞	0,0877
15	0,0820		

[4] Garman y Kamien (1968) llaman a esto una «cultura imparcial», que parece un nombre algo inapropiado para una suposición factual dudosa. En esta «cultura imparcial», dada la elección entre que yo sea decapitado al amanecer y que siga viviendo, la probabilidad de que yo prefiera una u otra será exactamente un medio. Protesto.

Debe observarse que la probabilidad de que se llegue a un *impasse*, aunque nunca es muy alta, aumenta con el número de individuos implicados. Al principio aumenta rápidamente, pero pronto se hace muy insensible; un aumento en el número de votantes desde 9 hasta cualquier cifra incrementa la probabilidad de fracaso en menos de un 1 por 100. En conjunto, como señala Guilbaud, hay una probabilidad de menos de 1 en 11 de que no surja un vencedor por mayoría.

La probabilidad de fracaso es, sin embargo, muy sensible al número de alternativas. La Tabla 10.2 muestra las probabilidades de la ausencia de un vencedor por mayoría para distintos números de alternativas cuando el número de individuos es muy grande. La fuente es Niemi y Weisberg (1968).

Parece que a medida que aumenta el número de alternativas, la probabilidad de mayorías cíclicas tiende hacia 1.

El hecho parece algo deprimente, pero en realidad no lo es tanto, porque el supuesto de equiprobabilidad *es* un caso muy especial e implica la negación de la sociedad en un sentido significativo.

TABLA 10.2. Valores límites de la probabilidad de que no haya vencedor por mayoría

Número de alternativas	Probabilidad	Número de alternativas	Probabilidad
1	0,0000	20	0,6811
2	0,0000	25	0,7297
3	0,0877	30	0,7684
4	0,1755	35	0,7914
5	0,2513	40	0,8123
10	0,4887	45	0,8292
15	0,6087		

Los valores mantenidos por la gente y sus intereses personales y de grupo determinan una serie de nexos entre las preferencias individuales. Las preferencias individuales no se determinan recurriendo a una rueda de ruleta para elegir entre todas las posibles alternativas, sino que vienen impuestas por fuerzas sociales, econó-

micas, políticas y culturales específicas, que conforman ciertos patrones dentro del conjunto de preferencias individuales. Estos patrones no tienen por qué ser de conformidad. Un desacuerdo profundo puede producir decisiones de mayoría consistentes. Por ejemplo, en una sociedad de dos clases en la que «la lucha de clases» tome la forma de que todos los miembros de una clase (por ejemplo, los capitalistas) tienen exactamente la preferencia opuesta a cada miembro de la otra clase (por ejemplo, los trabajadores), la decisión de mayoría debe ser transitiva, independiente del número de gente en cada clase.[5] Incluso en ausencia de un contraste tan agudo, hay modelos de preferencia individual que evitarán inconsistencias de elección.[6]

Tomando cualquier distribución de probabilidad sobre las ordenaciones posibles (sin suponer necesariamente equiprobabilidad), Garman y Kamien (1968) y Niemi y Weisberg (1968) han obtenido expresiones generales para la probabilidad de que no exista vencedor por mayoría.[7] Sin embargo, los resultados son difíciles de interpretar. Se supone que las distribuciones de probabilidad se aplican a todos los individuos indiscriminadamente, pero según la naturaleza de las alternativas sociales y las variaciones en gustos, antecedentes de clase, etcétera, de los diferentes individuos, las distribuciones pueden realmente diferir sustancialmente. Ni estas cuestiones, ni otras relativas a la elección apropiada de supuestos, son fáciles de resolver para estos modelos probabilísticos.[8]

[5] A las culturas para las cuales la probabilidad de mayorías cíclicas es mayor que bajo equiprobabilidad («cultura imparcial») las llaman «antagónicas» Garman y Kamien (1968), p. 314. Lo cual es confundente, puesto que el antagonismo entre dos clases puede hacer a la regla de mayoría rigurosamente consistente.

[6] Discutimos éstos en la próxima sección. En la línea probabilística, un enfoque importante es el de Williamson y Sargent (1967), que demuestran que una ligera ligazón entre las preferencias de los distintos individuos produce una elevada probabilidad de transitividad. La definición de ligereza es, sin embargo, problemática.

[7] Si s_t es la probabilidad de que una persona seleccione la ordenación t, r_t una variable aleatoria que representa el número de individuos que eligen la ordenación t, en una sociedad de m individuos y n alternativas, la probabilidad p de que no haya ganador por mayoría viene dada por

$$p = \sum_{r \in R} \binom{m}{r_1, r_2, \ldots, r_{n!}} \prod_{t=1}^{n!} s_t^{r_t}$$

[8] Véase nota 6 en Niemi y Weisberg (1968), p. 318. También Klahr (1966), pp. 385-386.

Por otro lado existe un problema fundamental de motivación e interpretación. No está totalmente claro lo que representa una distribución de probabilidad de ordenaciones individuales. ¿Son *probabilidades subjetivas* de algún observador externo que conoce los estados sociales y los individuos pero no sus ordenaciones? ¿O son *frecuencias* de diferentes tipos de ordenaciones que surgen en períodos distintos en la misma sociedad o en diferentes sociedades? Si tomamos esta última interpretación, ¿en qué sentido permanece igual el conjunto de alternativas mientras varían sus ordenaciones, dado que el conjunto de elecciones disponibles cambiará en el tiempo y de una sociedad a otra? Si tomamos la primera interpretación, es de prever que mucho dependerá de las fuentes de información del observador y ciertamente de su actitud hacia la ignorancia e incertidumbre (por ejemplo, su aceptación o rechazo del principio de «razón insuficiente»).

Una pregunta mejor definida y mucho más relevante es la siguiente: Dadas las variaciones en el tiempo (entre ahora y el período T) del conjunto de alternativas disponibles X, del conjunto de individuos H, y del conjunto de ordenaciones individuales (R_i) definidas sobre X para cada i en H, para cada período de tiempo, ¿en qué proporción de los casos será el MMD incapaz de dar un vencedor por mayoría y en qué proporción de los casos tendrá éxito, entre ahora y el período T? Es razonable estar interesado en obtener una respuesta a esta pregunta antes de recomendar (o rechazar) el MMD para tal sociedad, pero no es una cuestión que pueda ser contestada en términos de formulaciones de probabilidad sobre un conjunto dado de alternativas para un conjunto dado de individuos. Sin embargo, la ampliación de estos estudios para incluir cambios temporales (o de una sociedad a otra) de individuos, alternativas y patrones de ordenación no es fácil de hacer y requerirá muchísimo más estudio empírico del que se puede prever en el futuro próximo.

Los cálculos de probabilidad indicados antes son, sin embargo, relevantes para el problema más limitado de obtener la probabilidad subjetiva de mayorías cíclicas de un observador. Lo cual no debe descartarse a la ligera, porque puede facilitar el estudio racional de las CCR, aunque tampoco debe perderse de vista la naturaleza relativamente limitada del ejercicio.

10.3. Preferencias restringidas

Un enfoque alternativo del problema de las mayorías cíclicas es el que iniciaron Black (1948) y Arrow (1951). Demostraron que si el conjunto de preferencias individuales satisface un cierto patrón unimodal, al cual denominaron «preferencia de un solo pico», entonces las decisiones de mayoría deben ser transitivas con independencia del número de individuos que mantienen cualquiera de las posibles ordenaciones, en el supuesto de que el número total de personas sea impar. El método hace uso del patrón cualitativo de preferencias, en lugar de una distribución de números (como del enfoque probabilístico).

La existencia de un solo pico o máximo es una característica no carente de cierta racionalidad política. Si los individuos clasifican las alternativas en términos de alguna dimensión (por ejemplo, en qué medida es izquierdista la alternativa en cuestión), y en cualquier elección por pares vota por la alternativa que está más cerca de la propia posición, entonces el patrón de preferencia individual es de un solo pico. Por ejemplo, considérese una elección entre EI (extrema izquierda), IM (izquierda moderada), JI (justo a la izquierda del centro), CA (centro absoluto), JD (justo a la derecha del centro), DM (derecha moderada) y ED (extrema derecha). Un extremista de izquierda los ordenará (en orden decreciente) así: EI, IM, JI, CA, JD, DM, ED. El de extrema derecha tendrá la ordenación: ED, DM, JD, CA, JI, IM, EI. Un centrista tendrá una ordenación que incorporará dos cadenas: CA, JD, DM, ED y CA, JI, IM, EI. Análogamente, una persona situada justo a la izquierda del centro se suscribirá a dos cadenas: JI, CA, DM, ED y JI, IM, EI. Y así sucesivamente. Si el número de votantes es impar, entonces independientemente del número total implicado y de la distribución de ese total en el espectro, las decisiones de mayoría serán transitivas.

El aspecto gráfico de la expresión «de un solo pico» se hace evidente al ordenar las alternativas sobre una línea horizontal de izquierda a derecha y representando los niveles de bienestar de las gentes, o utilidades, sobre el eje vertical. Todas las curvas de utilidad mostrarán entonces un solo máximo.

Aunque este pequeño ensayo de pictografía puede servir de agenda, hay que hacer algunas advertencias. Primera, aun en el caso de que no sea posible ninguna representación de utilidad de las preferencias

individuales, éstas pueden no obstante ser de un solo pico, ya que la condición de un solo pico es una propiedad de un conjunto de ordenaciones, y no de las funciones de utilidad. Segunda, es obvio que la condición de un solo pico no equivale a decir que cualquier manera arbitraria de ordenar las alternativas sobre el eje horizontal da curvas de utilidad unimodales, sino que *existe* al menos un método de ordenarlas para el cual las curvas de utilidad son unimodales.[9] Tercera, hablando estrictamente no es necesario que todas las alternativas sean ordenables en la forma de un solo pico, sino que cada conjunto de tres alternativas («ternas») sea ordenable de este modo. Esta última condición es más débil y suficiente para el resultado. Finalmente, la condición de un solo pico, tal como la definió Arrow (1951), permite una porción horizontal en la curva de utilidad bajo ciertas circunstancias. Así pues, la naturaleza del gráfico es realmente más compleja de lo que cabría pensar.

La condición real es que si x, y y z es la forma correcta de ordenar tres alternativas, entonces cualquiera que encuentre a x al menos tan buena como y, debe encontrar a y estrictamente mejor que z. Análogamente, cualquiera que encuentre a z al menos tan buena como y, debe preferir y a x. Esto es, desde luego, equivalente a que y no sea la peor en opinión de nadie: es decir, que todos prefieren y a alguna de las otras dos alternativas. Para otras disposiciones —(y, z, x) y (z, x, y)— la condición de un solo pico equivaldrá a que z no sea la peor y a que x no sea la peor, respectivamente.[10] Así pues, la condición de un solo pico es equivalente a la característica de un acuerdo parcial: todos están de acuerdo en que alguna alternativa particular no es la peor en la terna.

Esto plantea inmediatamente la siguiente cuestión: ¿Qué ocurre si alguna alternativa no es la mejor, o si alguna alternativa no ocupa la posición media en la ordenación de preferencias de nadie? El resultado es el mismo, y la condición generalizada de «restricción de

[9] De hecho, habrá dos disposiciones posibles siempre que haya una, puesto que la unimodalidad es independiente de la dirección y una inversión exacta de la disposición servirá también. Para un análisis del «pico único» en términos de la «teoría del despliegue», véase Coombs (1964), Caps. 9 y 19.

[10] Esto agota todas las posibilidades, puesto que la unimodalidad con (z, y, x), (x, z, y) y (y, x, z) son exactamente equivalentes, respectivamente, a la unimodalidad con las tres disposiciones mencionadas.

valores»[11] requiere que todos estén de acuerdo en que alguna alternativa no es la mejor, o en que alguna alternativa no es la peor, o que todos estén de acuerdo en que alguna alternativa no ocupa la posición media en el ranking de nadie en la terna. Si la restricción de valores (en lo sucesivo, VR) se cumple para cada terna, entonces la regla de mayoría será transitiva si el número de votantes es impar. No es necesario que la misma subclase de VR se cumpla para cada terna. Puede que en alguna terna una alternativa sea «no la mejor», en otra terna una alternativa sea «no la peor» y en una tercera terna una alternativa sea «no la media», etc., y aún así cumplirse la transitividad. De hecho es posible un debilitamiento adicional de la condición. Aunque las personas que son indiferentes entre todas las tres alternativas de una terna infringen la VR, realmente no representan ningún problema serio para la transitividad. De ahí que se permitan indiferencias sobre ternas completas (es decir, individuos «no interesados»); lo único que se exige es que el número de individuos «interesados» sea impar.

Este requisito de imparidad es, sin embargo, perturbador y poco atrayente. Algunos dirán que no importa demasiado que uno de los votantes se vea elevado a una presidencia impotente caso de ser par el número de votantes; pero no es así, puesto que la preferencia social dependerá precisamente de *quién* es elegido para la gloria sin poder. Esta restricción de imparidad *es* seria y nada fácil de desechar.

Afortunadamente puede mostrarse que la restricción de imparidad es innecesaria si lo que nos interesa es generar una función de elección social y no una ordenación social, es decir, si el MMD ha de ser una SDF y no una SWF.[12] Mientras cada terna satisfaga VR, las decisiones de mayoría serán cuasi-transitivas, independientemente del número de individuos implicados, y por tanto habrá una mejor alternativa en cada subconjunto de alternativas. De hecho puede también mostrarse que si las ordenaciones individuales son estrictas (es decir, antisimétricas), es que la restricción de valor es la condición necesaria y suficiente para que el MMD sea una SDF

[11] Sen (1966). Véase también Vickrey (1960), Inada (1964), Ward (1965) y Majumdar (1969).

[12] Teorema VIII en Sen (1969). Este resultado ocurre también en la demostración del Teorema I en Pattanaik (1968). Fishburn (1970) ha generalizado este resultado para preferencias individuales que sean cuasi-transitivas.

satisfecha para cada terna (Teorema 10*8; sobre el concepto de «necesidad» véase Definición 10*9).

Sin embargo, cuando las ordenaciones individuales no son necesariamente estrictas, pueden servir otras condiciones distintas de la VR. Una de tales condiciones es «el acuerdo limitado»,[13] que requiere que todos estén de acuerdo en que alguna alternativa (digamos x) sea al menos tan buena como alguna alternativa (digamos y) en cada terna. Una tercera condición es la «restricción extrema» (Sen y Pattanaik (1969)), que requiere que si alguien prefiere x a y e y a z, entonces z es unívocamente mejor en la ordenación de alguien si y solamente si x es unívocamente peor en su ordenación.

El acuerdo limitado (o LA) es fácil de seguir, pero en cambio se imponen algunas observaciones explicatorias sobre la restricción extrema (o ER). La restricción extrema incluye varios casos interesantes. Primero, cubre lo que Inada (1968) llama «preferencias ecoicas»: si alguien prefiere estrictamente x a y e y a z, entonces nadie prefiere estrictamente z a x. También cubre las «preferencias antagonistas» de Inada, por las cuales si alguien prefiere x a y e y a z, entonces todos los restantes o tienen esta ordenación particular, o mantienen su opuesta (a saber, preferir z a y e y a x), o encuentran que x y z son igualmente buenas. Finalmente, cubre las «preferencias dicotómicas» de Inada: cada individuo es indiferente entre al menos un par de alternativas (no necesariamente el mismo par para cada individuo) en cada terna.

Puede mostrarse que si cualquier terna satisface ER, entonces la preferencia social generada por el MMD debe ser totalmente transitiva en ella. Si una terna satisface LA, entonces la relación de preferencia de mayoría será cuasi-transitiva. De hecho, puede también demostrarse que satisfacer VR, LA o ER en cada terna es la condición necesaria y suficiente para que la decisión de mayoría sea una SDF (Teorema 10*6; también Sen y Pattanaik (1969)). En lo que se refiere a una SWF, es decir, generar una ordenación social en lugar de una función de elección social, la condición necesaria y suficiente es que cada terna satisfaga ER (Teorema 10*7; también Inada (1969) y Sen y Pattanaik (1969)).

Estos resultados aclaran hasta qué punto los modelos cualitativos

[13] Esto es una versión debilitada de las «preferencias tabú» de Inada; véase Sen y Pattanaik (1969).

(en contraposición a las distribuciones numéricas) de preferencias individuales pueden garantizar la transitividad de la relación de mayoría y la existencia de un ganador por mayoría en cada subconjunto.[14] Si estas condiciones se satisfacen, entonces, con independencia de la distribución del número de preferencias individuales, será posible la elección social racional mediante la regla de mayoría. Si por elección racional entendemos la existencia de una mejor alternativa en cada conjunto (que satisface la propiedad α), entonces cualquiera de ER, VR y LA servirá. Sin embargo, si necesitamos que también se satisfaga la propiedad β, entonces debemos necesitar una ordenación social, de modo que debemos exigir ER. La cuestión de la necesidad de la propiedad β que según vimos en el Capítulo 4 es importante para el teorema general de posibilidad de Arrow, es también crucial para la elección racional mediante el MMD.

Vale la pena subrayar que los patrones de preferencias individuales que son suficientes para evitar intransitividad o aciclicidad no requieren uniformidad en ningún sentido estricto. Hay varios tipos de antagonismo que están permitidos y, de hecho, algunos conducirán gloriosamente a la satisfacción de VR o ER. El acuerdo limitado requiere cierta uniformidad, pero solamente sobre un par en cada terna. La restricción de valores requiere acuerdo sobre la posición relativa de alguna alternativa, pero en un sentido muy débil. La gente puede discrepar sobre si x es la mejor o la peor, pero mientras estén de acuerdo en que no es intermedia, servirá. Análogamente, pueden estar de acuerdo en que alguna alternativa no es la mejor (o no la peor), pero nada más. La restricción extrema permite una amplia variedad de relaciones: «ecoica» (parcialmente similar), «antagonista» (fuertemente opuesta) o «dicotómica» (requiriendo justamente una indiferencia para todos en cada terna, pero no necesariamente indiferencia entre las *mismas* dos alternativas).

Sin embargo, debe reconocerse que estas condiciones son bastante restrictivas y que pueden o no ser satisfechas por sociedades es-

[14] Este requisito es algo más exigente que la existencia de un vencedor por mayoría para todo el conjunto, como en el estudio de Garman y Kamien (1968), y Niemi y Weisberg (1968). Pattanaik (1968) ha mostrado que si todas las ternas consistentes solamente en *alternativas óptimas de Pareto* son restringidas de valores, entonces hay un vencedor por mayoría. Extendiendo este resultado, se muestra en Sen y Pattanaik (1969) que si todas las ternas consistentes en alternativas óptimas de Pareto satisfacen VR o ER, debe existir entonces un vencedor por mayoría.

pecíficas. Se trata de un problema de investigación empírica. Parece ser que en muchos problemas económicos de distribución y asignación ninguna de las condiciones funcionará en ausencia de externalidades.[15] Por ejemplo, la división de un pastel homogéneo entre tres personas, interesada cada una solamente en su propia parte del pastel, batirá todas las condiciones y producirá mayorías cíclicas. Uno de los motivos de obtener las condiciones necesarias y suficientes para la elección racional bajo decisión de mayoría es motivar la investigación dirigida sobre los patrones reales de preferencias.

10.4. Condiciones sobre las reglas de elección colectiva y preferencias restringidas

Señalamos en el Capítulo 5 que el MMD es la única CCR decisiva con un dominio no restringido que satisface las condiciones *I*, *N*, *A* y *S*. Es interesante preguntar si las condiciones sobre preferencias individuales, por ejemplo, VR, ER o LA, que son suficientes para la elección racional bajo el MMD, son también suficientes para las reglas de elección colectiva que satisfacen algunas de estas cinco condiciones pero no todas. De esta forma los resultados pueden ser generalizados para clases más amplias de CCR.

Se muestra en el Capítulo 10* que cualquier CCR decisiva que sea independiente de alternativas irrelevantes y neutral (*N*), y no negativamente responsiva (*R*), debe dar una relación de preferencia social cuasi-transitiva si las preferencias individuales son restringidas de valor para cada terna. Así pues, VR funciona para una nutrida clase de reglas de elección colectiva, por ejemplo, la regla de mayoría de dos tercios,[16] decisiones de mayoría polietápica,[17] regla de mayoría

[15] Lo cual no es, sin embargo, una tragedia, puesto que el MMD es, en cualquier caso, una base insatisfactoria para decisiones de distribución ya que ignora intensidades de preferencias y evita comparaciones interpersonales (cf. Capítulos 7 y 7*). El principal atractivo del MMD es para elecciones políticas entre unos cuantos «paquetes» fijos (por ejemplo, programas de partido), donde las cuestiones de distribución están muy mezcladas con otros asuntos.

[16] Esta CCR se usa extensivamente. Para generar una ordenación completa podemos definir que x es al menos tan bueno como y si y solamente si y no es preferido a x por una mayoría de dos tercios.

[17] Esto incluye la democracia representativa si el representante elegido representa los puntos de vista de sus componentes. Véase Murakami (1966), (1968), y Pattanaik (1968b).

estricta,[18] regla de mayoría semiestricta.[19] Análogamente, LA funciona para cualquier CCR decisiva que sea independiente de alternativas irrelevantes y neutral (*N*), no negativamente responsiva (*R*) e inclusiva de Pareto (*P**). Esto se aplica también a muchas CCR, aunque no a todas para las que sirve la VR.

Por otra parte, ER no es fácilmente ampliable a otras reglas de elección colectiva. Una CCR puede ser neutral (*N*), anónima (*A*), no negativamente responsiva (*R*) e inclusiva de Pareto (*P**), y no obstante infringir la cuasi-transitividad para preferencias individuales que satisfagan ER. Si reforzamos la responsividad no negativa (*R*) para convertirla en responsividad positiva (*S*), entonces retrocederemos simplemente al MMD.

Podemos, en cierto sentido, obtener posiciones intermedias, y de hecho la regla de mayoría semiestricta nos permite aproximarnos indefinidamente al MMD, pero mientras la CCR no sea exactamente el MMD, la restricción extrema no nos garantiza ni siquiera la cuasi-transitividad (Teorema 10*5). Pero una vez que tomamos el MMD, ER es suficiente para la transitividad total. La restricción extrema parece estar excluida precisamente para decisiones de mayoría. En esto difiere tajantemente de la restricción de valor y acuerdo limitado.

[18] Su definición es ésta: *x* es preferido a *y* si y solamente si no es el caso de que al menos 50 por 100 de todas las personas (y no sólo de las no indiferentes) prefieren *y* a *x*.

[19] Es una mezcla de la regla de mayoría y de la regla de mayoría estricta. Véase Definición 10*7.

Capítulo 10*
PREFERENCIAS RESTRINGIDAS Y ELECCION RACIONAL

10*1. Dominio restringido

Black (1948) y Arrow (1951) han señalado que si las preferencias individuales tienen un cierto tipo de «similitud», el MMD dará entonces resultados transitivos. Esto equivale a una relajación de la condición *U* cuando es aplicada a las CCR. En este capítulo se investigan también las consecuencias de relajar la condición de dominio no restringido considerando restricciones en los tipos de ordenaciones individuales. El problema es interpretado más ampliamente que en Black (1948) y Arrow (1951), en tres aspectos.[1] Primero, estamos interesados no sólo en la transitividad de preferencia social, sino también en generar una función de elección social, es decir, estamos interesados en el MMD como una SDF y no sencillamente como una SWF. Segundo, el MMD tiene ciertas propiedades, por ejemplo, neutralidad, como fue señalada en el Capítulo 5*. Algunas de las condiciones de suficiencia para la decisión de mayoría son, de hecho, condiciones de suficiencia para una clase más amplia de reglas de elección colectiva que satisfacen algunas pero no todas

[1] Este capítulo se basa en Sen (1966), (1969), y Sen y Pattanaik (1969).

las propiedades del MMD. Estudiamos las condiciones de suficiencia en este marco más general. Tercero, para una cierta clase de restricciones, identificamos las condiciones necesarias y suficientes para la elección racional bajo el MMD.

Antes de especificar algunas restricciones, será conveniente separar aquellas personas que son indiferentes entre todas las alternativas, pues introducen problemas lógicos peculiares.

DEFINICIÓN 10*1. *Un individuo interesado en un conjunto de alternativas es un individuo que no es indiferente entre cada par de elementos del conjunto.*

Ahora definimos tres restricciones específicas.

DEFINICIÓN 10*2. *Restricción de valores (VR):*[2] *En una terna (x, y, z) hay alguna alternativa, digamos x, tal que todos los individuos interesados i están de acuerdo en que no es la peor, o en que no es la mejor, o en que no es la media:*

$$[\forall i : x P_i y \vee x P_i z] \vee [\forall i : y P_i x \vee z P_i x] \vee [\forall i : (x P_i y \;\&\; x P_i z) \vee (y P_i x \;\&\; z P_i x)]$$

DEFINICIÓN 10*3. *Restricción extrema (ER):*[3] *Si para una terna ordenada (x, y, z), hay alguien que prefiere x a y e y a z, entonces cualquiera considera que z es unívocamente la mejor si y solamente si considera a x unívocamente la peor, es decir,*

$$(\exists i : x P_i y \;\&\; y P_i z) \rightarrow \{\forall j : z P_i x \rightarrow (z P_i y \;\&\; y P_j x)\}$$

Una terna satisface ER si y solamente si se cumple la condición de más arriba para cada terna ordenada obtenible de esa terna:

DEFINICIÓN 10*4. *Acuerdo limitado (LA):*[4] *En una terna hay un*

[2] En Sen (1966) la restricción de valores fue definida como una condición sobre las preferencias de *todos* los individuos, interesados o no interesados, pero en el «teorema de posibilidad sobre preferencias restringidas de valores» se mostró que era suficiente aplicar la restricción solamente a los individuos interesados. Aquí la restricción de valores se define de tal manera que solamente están implicados los individuos interesados.

[3] Véase Sen y Pattanaik (1969). Véase también Inada (1969).

[4] Es una versión más débil de la «preferencia tabú» de Inada (1969). Véase Sen y Pattanaik (1969).

par ordenado (x, y) *tal que todo el mundo considera a* x *al menos tan buena como* y, *es decir,* $\forall i : x R_i y$.

Llamaremos $N(x P y)$ al número de individuos para los cuales $x P_i y$, $N(x R y)$ al número para los cuales $x R y$, $N(x P y R z)$, al número para los cuales $x P_i y$ & $y R_i z$, y así sucesivamente.

A continuación indicamos algunos resultados preliminares.

LEMA 10*a. *ER, VR y LA son completamente independientes entre sí, es decir, cualquier par de estas tres podría ser satisfecho sin el tercero, y cualquiera de ellos podría ser satisfecho sin el par restante.*

Demostración: La demostración se sigue de los siguientes seis ejemplos

(1) $x P_1 y P_1 z$
$z P_2 y P_2 x$
$y P_3 x I_3 z$
$x I_4 z P_4 y$

ER se satisface, pero VR y LA son infringidos por este conjunto de tipos de preferencia individual.

(2) $x P_1 y P_1 z$
$z P_2 x P_2 y$

ER es infringida, pero VR y LA se satisfacen ambas.

(3) $x P_1 y P_1 z$
$z P_2 y P_2 x$
$y P_3 z P_3 x$

VR se satisface, pero ER y LA son infringidas.

(4) $x P_1 y P_1 z$
$y P_2 z I_2 x$
$z I_3 x P_3 y$

VR es infringida, pero ER y LA se satisfacen ambas.

(5) $x P_1 y P_1 z$
$y P_2 z P_2 x$
$x P_3 y I_3 z$
$x I_4 y P_4 z$
$y I_5 z P_5 x$

LA se satisface, pero ER y VR son infringidas.

(6) $x P_1 y P_1 z$
$z P_2 y P_2 x$

LA es infringida, pero ER y VR se satisfacen ambas.

El resultado siguiente se refiere a la negación conjunta de VR, ER y LA.

LEMA 10*b. *Si un conjunto de ordenaciones sobre una terna infringe VR, ER y LA, entonces hay un subconjunto de tres ordenaciones en ese conjunto que infringe VR, ER y LA.*

Demostración: Sobre una terna x, y, z hay trece ordenaciones lógicamente posibles y 8192 ($=2^{13}$) subconjuntos del conjunto de estas trece ordenaciones, de los cuales uno es vacío. Por conveniencia designamos a estas ordenaciones de un modo especial y suprimimos el subíndice i en la relación de preferencia, por ejemplo, escribiremos P en lugar de P_i.

(1.1)	$x P y P z$	(1.2)	$x P y I z$	(1.3)	$x I y P z$
(2.1)	$y P z P x$	(2.2)	$y P z I x$	(2.3)	$y I z P x$
(3.1)	$z P x P y$	(3.2)	$z P x I y$	(3.3)	$z I x P y$
(4)	$x P z P y$	(5)	$z P y P x$	(6)	$y P x P z$
(7)	$x I y I z$				

Para infringir ER, al menos una de estas ordenaciones debe ser una cadena, es decir, debe satisfacer la antisimetría. Sin pérdida de generalidad se elige la ordenación 1.1, es decir, $x P y P z$. Debe observarse primero que no hay otra ordenación que, junto con 1.1, forme un par que infrinja VR y LA. De aquí que el conjunto más pequeño de ordenaciones que infringen VR, ER y LA deba tener al menos tres elementos.

Es fácil comprobar que los únicos conjuntos de tres ordenaciones inclusivos de 1.1 que infringen VR vienen dados por [1.1, 2.1 o 2.2 o 2.3, 3.1 o 3.2 o 3.3]. Hay nueve de tales conjuntos. Cada uno de estos infringe ER y solamente uno satisface LA, a saber, [1.1, 2.2, 3.3], donde $x R_i z$ para todo i. Hay pues, ocho conjuntos de tres ordenaciones que infringen VR, ER y LA, y a esta clase de ocho conjuntos la llamamos Ω.

Seguidamente, consideremos conjuntos inclusivos de 1.1, pero que tengan más de tres ordenaciones que infringen VR, ER y LA. Si

estos conjuntos incluyen cualquier miembro de Ω, entonces el resultado se sigue inmediatamente. Se comprueba fácilmente que para infringir VR sin incluir algún miembro de Ω, un conjunto de ordenaciones inclusivas de 1.1 debe incluir al menos uno de los siguientes conjuntos de cuatro ordenaciones:[5]

(I)	1.1, 1.2, 1.3, 2.3	(III)	1.1, 1.2, 2.2, 2.3
(II)	1.1, 1.2, 1.3, 3.2	(IV)	1.1, 1.3, 3.2, 3.3

Ninguno de estos conjuntos de cuatro ordenaciones infringe LA. Por ejemplo, $y\,R\,z$ se cumple en cada ordenación de I. Para incluir una ordenación con $z\,P\,y$, (a) debemos incluir 3.1, 3.2 o 3.3, en cuyo caso el conjunto incluirá algún miembro de Ω, o (b) debemos incluir la ordenación 4 o 5, en cuyo caso puede verse de nuevo que el conjunto incluye algún miembro de Ω salvo intercambio formal de y y z, y de x y z, respectivamente. Análogamente, en II falta $y\,P\,x$, en III $z\,P\,y$ y en IV $y\,P\,x$, y en cada caso la inclusión de cualquier ordenación que llene esta laguna introduce algún miembro de Ω. Esto establece el lema.

10*2. Restricción de valores y acuerdo limitado

En primer lugar presentamos un lema mundano, pero útil, que implica restricción de valores.

LEMA 10*c. *Si un conjunto de preferencias individuales es restringido de valores en una terna* (x, y, z), *se cumple al menos una de las ecuaciones* (1), (2) *y* (3), *y al menos una de las ecuaciones* (4), (5) *y* (6):

(1)	$N(x\,I\,y\,I\,z) = N(x\,R\,y\,R\,z)$	(4)	$N(x\,I\,y\,I\,z) = N(y\,R\,x\,R\,z)$
(2)	$N(x\,I\,y\,I\,z) = N(y\,R\,z\,R\,x)$	(5)	$N(x\,I\,y\,I\,z) = N(x\,R\,z\,R\,y)$
(3)	$N(x\,I\,y\,I\,z) = N(z\,R\,x\,R\,y)$	(6)	$N(x\,I\,y\,I\,z) = N(z\,R\,y\,R\,x)$

Demostración: Supongamos que x no es la mejor. Entonces aquellos individuos que mantengan $(x\,R_i\,y\ \&\ y\,R_i\,z)$ **o** $(x\,R_i\,z\ \&\ z\,R_i\,y)$ deben ser no intercalados. De aquí que se cumplan (1) y (5). Análogamente (2) y (4) se cumplen si y no es la mejor, y (3) y (6) se cumplen si z no es

[5] Podría parecer que no es así si incluimos la ordenación 4 o 5 o 6, por ejemplo, [1.1, 4.5 ó 3.2 ó 2.3, 6 ó 2.2 ó 1.3]. Pero los tres últimos elementos de cada una de estas posibilidades forman un miembro de Ω, salvo la sustitución de x e y, o y y z, o z y x.

la mejor. Análogamente se comprueba que si una de las alternativas no es la peor, o no la media, al menos deben cumplirse dos de las condiciones (1)-(6), una de (1)-(3), y una de (4)-(6).

TEOREMA 10*1. *Si una regla de elección colectiva decisiva es independiente de alternativas irrelevantes y neutral (N), y no negativamente responsiva (R), y si las preferencias individuales son restringidas de valores en una terna, entonces la regla debe dar relaciones de preferencia social todas ellas cuasi-transitivas en esa terna.*

Demostración: Si se infringe la cuasi-transitividad en una terna (x, y, z) entonces para alguna correspondencia uno a uno entre (x, y, z) y (u, v, w) debemos tener $u\,P\,v$, $v\,P\,w$ y $w\,R\,u$. Se muestra ahora que si se cumple una de las ecuaciones (1)-(3) y una de (4)-(6) del Lema 10*3, entonces esta configuración es imposible.

Considérese primero (1). Podemos comprobar que

$$\begin{aligned}(1) &\to \forall i : \{\sim(x\,I_i\,y\,I_i\,z) \to \sim(x\,R_i\,y \;\&\; y\,R_i\,z)\\ &\to \forall i : \{\sim(x\,I_i\,y\,I_i\,z)\\ &\qquad\qquad \to [(x\,R_i\,y \to z\,P_i\,y) \;\&\; (y\,R_i\,z \to y\,P_i\,x)]\}\\ &\to \forall i : \{[(x\,P_i\,y \to z\,P_i\,y) \;\&\; (x\,I_i\,y \to z\,R_i\,y)]\\ &\qquad\qquad \&\; [(y\,P_i\,z \to y\,P_i\,x) \;\&\; (y\,I_i\,z \to y\,R_i\,x)]\}\\ &\to [(x\,R\,y \to z\,R\,y) \;\&\; (y\,R\,z \to y\,R\,x)]\end{aligned}$$

por neutralidad y responsividad no negativa, [6]

$$\to [(x\,R\,y \;\&\; y\,R\,z \;\&\; z\,R\,x) \to (x\,I\,y \;\&\; y\,I\,z)]$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}(2) &\to [(x\,R\,y \;\&\; y\,R\,z \;\&\; z\,R\,x) \to (y\,I\,z \;\&\; z\,I\,x)]\\ (3) &\to [(x\,R\,y \;\&\; y\,R\,z \;\&\; z\,R\,x) \to (z\,I\,x \;\&\; x\,I\,y)]\end{aligned}$$

Así pues, si se cumple una al menos de las tres implicaciones (1), (2) y (3), es imposible entonces tener $u\,P\,v$, $v\,P\,w$ y $w\,R\,u$, donde (u, v, w) representa (x, y, z), o (y, z, x), o (z, y, x). Análogamente, si se cumple una de (4), (5) o (6), entonces $u\,P\,v$, $v\,P\,w$ y $w\,R\,u$ es imposible para la

[6] Esto se comprueba fácilmente. Si $(x\,P_i\,y \leftrightarrow z\,P_i\,y)$ & $(x\,I_i\,y \leftrightarrow z\,I_i\,y)$, entonces por neutralidad, $(x\,P\,y \to z\,P\,y)$ & $(x\,I\,y \to z\,I\,y)$. Por consiguiente, si $(x\,P_i\,y \to z\,P_i\,y)$ & $(x\,I_i\,y \to z\,R_i\,y)$, entonces por responsividad no negativa, $(x\,P\,y \to z\,P\,y)$ & $(x\,I\,y \to z\,R\,y)$, de modo que $x\,R\,y \to z\,R\,y$. Análogamente, $y\,R\,z \to y\,R\,x$.

asignación de (u, v, w) a (y, x, z), o a (x, z, y), o a (z, y, x). Pero no hay otra asignación posible. De aquí que si se satisface la restricción de valores para preferencias individuales sobre cada terna, entonces la relación de preferencia social debe ser cuasi-transitiva para cada terna.

TEOREMA 10*2. *Si una regla de elección colectiva decisiva es independiente de alternativas irrelevantes y neutral (N), no negativamente responsiva (R), y satisface el criterio fuerte de Pareto (P*), debe dar entonces una relación de preferencia cuasi-transitiva sobre una terna si las preferencias individuales satisfacen el acuerdo limitado sobre esa terna.*

Demostración: Sean x, y, z cualquier terna. Sin pérdida de generalidad sea $\forall i : x R_i y$. De aquí que $\forall i : (y P_i z \rightarrow x P_i z) \,\&\, (y I_i z \rightarrow x R_i z)$, de modo que por neutralidad y responsividad no negativa,[7] tenemos $y R z \rightarrow x R z$. Análogamente $z R x \rightarrow z R y$. Así pues, $(x R y \,\&\, y R z \,\&\, z R x) \rightarrow (x R y \,\&\, y I z \,\&\, x I z)$. Considérese ahora la hipótesis $y R x$. Puesto que $\forall i : x R_i y$, el criterio fuerte de Pareto implica que $\forall i : x I_i y$. De aquí que,

$$y R x \rightarrow \forall i : \{[(x P_i z \rightarrow y P_i z) \;\&\; (x I_i z \rightarrow y I_i z)]\}$$
$$\forall i : \{[(z P_i y \rightarrow z P_i x) \;\&\; (z I_i y \rightarrow z I_i x)]\}$$
$$\rightarrow [(x R z \rightarrow y R z) \;\&\; (z R y \rightarrow z R x)]$$

Entonces,

$$(y R x \;\&\; x R z \;\&\; z R y) \rightarrow (y R x \;\&\; x I z \;\&\; z I y)$$

La relación R no puede infringir la cuasi-intransitividad sin que se cumpla al menos uno de los dos «círculos» $(x R y \,\&\, y R z \,\&\, z R x)$ o $(y R x \,\&\, x R z \,\&\, z R y)$, y si se cumple uno de ellos, entonces deben regir al menos dos indiferencias en este conjunto de tres relaciones. Esto significa que la violación de la cuasi-transitividad es imposible, lo cual establece el teorema.

No necesitamos, desde luego, una prueba especial para la suficiencia de VR y LA para el método de decisión de mayoría.

TEOREMA 10*3. *Si las preferencias individuales satisfacen VR o LA en*

[7] El razonamiento se da en la nota 6.

cada terna, entonces el método de decisión de mayoría es una SDF en un conjunto finito de alternativas para cada configuración posible de preferencias individuales.

Demostración: Por el Teorema 5*1, el MMD es una regla de elección colectiva decisiva sobre cada par, que satisface la neutralidad y la responsividad positiva; y por el Lema 5*d esto significa que satisface también el principio fuerte de Pareto y la responsividad no negativa. De aquí que por los Teoremas 10*1 y 10*2, las preferencias sociales generadas por el MMD deben ser cuasi-transitivas cuando las preferencias individuales satisfacen VR o LA en cada terna. Pero por el Lema 1.k, cada una de las relaciones de preferencia social generadas por el MMD dará una función de elección. De aquí que el MMD sea una función de decisión social en todos los conjuntos posibles de preferencias individuales.

10*3. Restricción extrema

A continuación demostramos que la restricción extrema es suficiente para la transitividad de la relación de preferencia de mayoría R,

TEOREMA 10*4. *Todos los conjuntos lógicamente posibles de preferencias individuales que satisfacen la restricción extrema para cualquier terna están en el dominio de la SWF de decisión de mayoría sobre esa terna.*

Demostración: Si cada individuo es indiferente entre dos alternativas al menos de una terna, entonces obviamente se cumplirá ER para esa terna. La transitividad se demuestra fácilmente en este caso. De las trece posibles ordenaciones en una terna (x, y, z) indicadas en la demostración del Lema 10*b, solamente siete incluyen al menos una indiferencia, a saber, (1.2), (1.3), (2.2), (2.3), (3.2), (3.3) y (7). Llamando al número de individuos que cumplen cualquiera de las ordenaciones de preferencia respectiva $N(1, 2)$, $N(1, 3)$, etc., resulta claro que

$$\begin{aligned}
&(x\,R\,y\ \&\ y\,R\,z)\\
&\rightarrow \{N(1.2) + N(3.3) - N(2.2) - N(2.3)\} \geqq 0\\
&\ \&\ \{N(1.3) + N(2.2) - N(3.2) - N(3.3)\} \geqq 0\\
&\rightarrow \{N(1.2) + N(1.3) - N(2.3) - N(3.2)\} \geqq 0\\
&\rightarrow x\,R\,z
\end{aligned}$$

Análogamente, $u\,R\,v\ \&\ v\,R\,w \rightarrow u\,R\,w$, para cualquier correspondencia uno a uno entre (x, y, z) y (u, v, w).

Consideremos ahora el cumplimiento no trivial de ER; supongamos que alguien mantiene (1.1). Imaginemos que, contrariamente al teorema, ER se cumple en esta terna, pero que las decisiones de mayoría son todavía intransitivas. Sabemos entonces que exactamente una de las siguientes debe ser cierta: $[x\,R\,y,\ y\,R\,z,\ z\,R\,x]$, «el círculo hacia adelante», y $[y\,R\,x,\ x\,R\,z,\ z\,R\,y]$, «el círculo hacia atrás». Supongamos que se cumple el primero. Como hay un individuo tal que $x\,P_i\,y\ P_i\,z$, tenemos:

$$\begin{aligned} z\,R\,x &\rightarrow [N(z\,P\,x) \geqq N(x\,P\,z)] \\ &\rightarrow [N(z\,P\,x) \geqq 1] \\ &\rightarrow [\exists\, i : z\,P_i\,y\ \&\ y\,P_i\,x], \quad \text{por ER.} \end{aligned}$$

La última ordenación estricta sobre esa terna, y aplicando nuevamente ER, nos quedamos solamente con un conjunto de cuatro ordenaciones que satisfacen ER, que son (1) $x\,P_i\,y\,P_i\,z$, (2) $z\,P_i\,y\,P_i\,x$; (3) $y\,P_i\,z\,I_i\,x$; y (4) $x\,I_i\,z\,P_i\,y$. Refiriéndonos al número de personas que cumplen cada una de estas ordenaciones como N_1, N_2, N_3 y N_4, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} (x\,R\,y\ \&\ y\,R\,z\ \&\ z\,R\,x) \rightarrow\ & [\{N_1 + N_4 \geqq N_2 + N_3\} \\ & \&\ \{N_1 + N_3 \geqq N_2 + N_4\}\ \&\ \{N_2 \geqq N_1\}] \\ \rightarrow\ & [\{N_1 = N_2\}\ \&\ \{N_3 = N_4\}] \\ \rightarrow\ & (y\,R\,x\ \&\ x\,R\,z\ \&\ z\,R\,y) \end{aligned}$$

Así pues, el círculo hacia adelante implica el círculo hacia atrás, y la intransitividad es imposible.

La única posibilidad restante es que sólo se cumpla el círculo hacia atrás.

$$\begin{aligned} (z\,R\,y\ \&\ y\,R\,x) &\rightarrow [N(z\,P\,y) - N(x\,P\,y)] + [N(y\,P\,x) - N(y\,P\,z)] \geqq 0 \\ &\rightarrow [N(z\,P\,y\,R\,x) - N(x\,P\,y\,R\,z) \\ &\quad + N(z\,R\,y\,P\,x) - N(x\,R\,y\,P\,z)] \geqq 0 \\ &\rightarrow N(z\,P\,y\,R\,x) + N(z\,R\,y\,P\,x) > 0 \end{aligned}$$

puesto que $N(x\,P\,y\,R\,z) > 0$, ya que alguien cumple $x\,P_i\,y\,P_i\,z$ por hipótesis.

Además, por ER debemos tener

$$N(z\,P\,y\,I\,x) = N(z\,I\,y\,P\,x) = 0$$

Por tanto, obviamente, $N(z\,P\,y\,P\,x) > 0$.

Como sabemos que alguien cumple $z\,P_i\,y\,P_i\,x$, además de que alguien cumple $x\,P_i\,y\,P_i\,z$, las únicas ordenaciones de preferencias individuales permisibles son las numeradas más arriba (1), (2), (3) y (4). El resto de la demostración consiste en probar que en estas circunstancias el círculo hacia atrás implica el círculo hacia adelante, y se omite aquí porque es exactamente similar a la demostración del inverso, dada más arriba. Así pues, la intransitividad es imposible si ER se cumple.

Aunque ER es suficiente para la transitividad de la decisión de mayoría, no lo es para las reglas que se encuentran infinitamente próximas al MMD. Considérese una regla de elección colectiva decisiva que satisface las condiciones *U*, *N*, *A* y *R*. No llega a ser el MMD en virtud de la diferencia entre *R* (responsividad no negativa) y *S* (responsividad positiva), como sabemos por el Teorema 5*1. Podemos incluso adelantarnos en el camino hacia el MMD imponiendo también la condición *P**. ¿Podemos llegar aún más cerca del MMD sin recorrer todo el camino?

Un ejemplo de una regla de decisión que sea natural, anónima, y no negativamente responsiva, es el siguiente:

DEFINICIÓN 10*5. *La regla de mayoría estricta*:

$$\forall\, x,\ y \in X : [N(x\,P\,y)/N] > \tfrac{1}{2} \leftrightarrow x\,P\,y$$

siendo N el número total de individuos. Además, $x\,R\,y \leftrightarrow \sim(y\,P\,x)$.

El lema siguiente es inmediato:

LEMA 10*d. *Si x P y según la regla de mayoría estricta, entonces x P y según el método de decisión de mayoría.*

De hecho, puede observarse que $x\,P\,y$ bajo decisión de mayoría requiere que $N(x\,P\,y)$ sea mayor que $\frac{1}{2}N^*$, siendo N^* el número de individuos no indiferentes en la relación entre x e y. El Lema 10*d se sigue simplemente del hecho de que $N^* \leqq N$.

Por el Lema 5*d sabemos que el criterio fuerte de Pareto estará

implicado por la responsividad positiva en presencia de neutralidad pero lo inverso no se cumple. Puesto que la responsividad positiva se introducirá también en la decisión de mayoría, dadas las otras condiciones, un camino de moverse hacia la decisión de mayoría sin llegar allí es incorporar también el criterio fuerte de Pareto. Considérese una versión inclusiva de Pareto de la regla de mayoría estricta.

DEFINICIÓN 10*6. *La regla de mayoría estricta inclusiva de Pareto:* $\forall x, y \in X : x P y$ *si y solamente si* $[\{N(x\,P\,y)/N\} > \frac{1}{2}] \veebar [\forall i : x R_i y \,\&\, \& \exists i : x P_i y]$. *Además,* $x R y \leftrightarrow \sim(y P x)$.

Puede ahora definirse un continuo de reglas de decisión de grupo, que será intermedio entre la regla de mayoría estricta (en la forma inclusiva de Pareto o no) y el método de decisión de mayoría. Podemos exigir que $N(x P y)$ sea mayor que alguna combinación convexa de N y N^*.

DEFINICIÓN 10*7. *Regla de mayoría semiestricta:*

$$\forall x,\ y \in X : N(x P y)/[pN + (1 - p)N^*] > \tfrac{1}{2} \leftrightarrow x P y$$

para algún p dado del intervalo abierto $]0, 1[$. *Además,* $x R y \leftrightarrow \leftrightarrow \sim(y P x)$.

Evidentemente, si $p = 0$, entonces se trata de la regla de mayoría, y si $p = 1$, entonces es la regla de mayoría estricta. Sin embargo, puesto que confinamos p al intervalo *abierto* $]0, 1[$, estas posibilidades se excluyen, aunque podemos acercarnos indefinidamente o bien a la regla de mayoría o bien a la regla de mayoría estricta.

Como dentro de la clase de la regla de mayoría semiestricta podemos acercarnos indefinidamente al método de decisión de mayoría, surge la cuestión de si la restricción extrema puede ser suficiente para algunos casos de regla de mayoría semiestricta. A continuación demostramos que ER no es suficiente para la regla de mayoría semiestricta, independientemente de lo cerca que estamos del método de decisión de mayoría.

TEOREMA 10*5. *La restricción extrema no es una condición suficiente para la cuasi-transitividad de la regla de mayoría semiestricta sobre cualquier terna, independientemente del p que elijamos.*

Demostración: Como estamos interesados también en el criterio fuerte de Pareto, demostramos este teorema siguiendo una línea de razonamiento que no se vería perturbada si impusiéramos además la inclusión de Pareto. Considérese una terna x, y, z y las siguientes cuatro ordenaciones de preferencia individual, que es un conjunto que satisface ER:

(1) $x P_i y P_i z$ (3) $y P_i z I_i x$
(2) $z P_i y P_i x$ (4) $x I_i z P_i y$

Sea N el número de individuos que cumplen la ordenación j, para $j = 1, 2, 3, 4$. Tomemos $N_1 = 2$, $N_2 = 1$, y $N_3 = N_4 = q$, donde q es un número entero positivo tal que $0 < 1/q < p$. Es fácil comprobar que tal q existe siempre independientemente de lo pequeño que sea $p > 0$. Por construcción, $x P y$, $y P z$ y $x I z$, lo que infringe la cuasi-transitividad. Esto completa la demostración.

Podemos, pues, acercarnos tanto como queramos a la regla de mayoría tomando p indefinidamente próximo a 0, pero ER sigue siendo insuficiente. Queda también claro que el criterio de Pareto (débil o estricto) no alterará nada, puesto que ambos están satisfechos (trivialmente) por las decisiones de grupo especificadas más arriba.

Sin embargo, tan pronto como p se hace 0, es decir, tan pronto como tengamos el método de decisión de mayoría, ER se convierte en una condición suficiente no sólo para la cuasi-transitividad, sino para la transitividad total, como se muestra en el Teorema 10*4.

10*4. Condiciones necesarias y suficientes para la elección racional

Deduzcamos ahora las condiciones necesarias y suficientes para derivar una función de elección social o una ordenación social mediante el método de decisión de mayoría para un conjunto finito de alternativas. Primero se enuncian las definiciones de suficiencia y necesidad. Puesto que estas definiciones serán aplicadas tanto a SWF como a SDF, nos referiremos al dominio de f, que será interpretado apropiadamente en los casos respectivos.

DEFINICIÓN 10*8. *Una condición sobre el conjunto de preferencias individuales es suficiente si cada conjunto de preferencias individuales que satisfagan esta condición debe estar en el dominio de f.*

DEFINICIÓN 10*9. *Una condición sobre el conjunto de preferencias individuales es necesaria si cualquier violación de la condición da una lista de ordenaciones individuales tales que alguna asignación de estas ordenaciones a cierto número de individuos*[8] *hace que el patrón de preferencia individual caiga fuera del dominio de f.*

La definición de suficiencia fue usada por Arrow (1951), y la necesidad fue propuesta en origen por Inada (1969). No son las únicas definiciones posibles de condiciones necesarias y suficientes, pero tienen sentido si las restricciones han de pesar sobre la lista de ordenaciones permisibles para los individuos y no sobre la distribución del número de individuos entre las posibles ordenaciones. Si más del 50 por 100 de los electores afectados comparten la misma cadena, entonces independientemente de las ordenaciones que mantengan los otros, la decisión de mayoría dará una ordenación social. Sin embargo, las restricciones que consideramos son aquellas que se aplican solamente a los tipos de ordenaciones de preferencia permisibles y no al número de los que las soportan.

TEOREMA 10*6. *La condición necesaria y suficiente para que un conjunto de ordenaciones individuales en un conjunto finito de alternativas esté en el dominio de la SDF de decisión de mayoría es que cada terna de alternativas satisfaga al menos una de las condiciones VR, ER y LA.*

Demostración: La suficiencia de VR, LA y ER se sigue inmediatamente del Teorema 10*1, 10*2 y 10*4. Solamente tenemos que ocuparnos de la necesidad.

Sabemos por el Lema 10*b que si un conjunto de ordenaciones individuales infringe VR, ER y LA, entonces ese conjunto debe incluir un subconjunto de tres ordenaciones que también infringe aquellas tres restricciones. Además, por la demostración sabemos que hay esencialmente ocho subconjuntos de tres ordenaciones[9] que infringen

[8] Cada individuo debe tener una y solamente una ordenación, pero una misma ordenación puede ser asignada a tantos individuos como queramos, o a ninguno.

[9] Hay, de hecho, cuarenta y ocho de tales subconjuntos si tratamos a x, y y z como constantes. Pero los restantes son todos exactamente como el descrito más abajo, excepto por la sustitución de x por y; o y por z; o z por x; o y por x y z por y y x por z; o z por x y x por y e y por z. Se aplica exactamente el mismo análisis en cada caso.

VR, ER y LA: [1.1, 2.1 o 2.2 o 2.3, 3.1 o 3.2 o 3.3], excluyendo [1.1, 2.2, 3.3], donde

(1.1) $x P y P z$		
(2.1) $y P z P x$	(2.2) $y P z I x$	(2.3) $y I z P x$
(3.1) $z P x P y$	(3.2) $z P x I y$	(3.3) $z I x P y$

Tenemos que mostrar que en cada uno de estos ocho casos alguna asignación de estas ordenaciones entre cierto número de individuos producirá una relación de preferencia de mayoría que no da una función de elección.

Considérense primero los casos representados por [1.1, 2.1 o 2.3, 3.1 o 3.2]. Sea N_1 el número de personas que cumplen 1.1, N_2 el número que cumplen 2.1 o 2.3 y N_3 el número que cumple 3.1 o 3.2. Si suponemos $N_1 > N_2$, $N_1 > N_3$ y $(N_2 + N_3) > N_1$, debemos tener entonces $x P y$, $y P z$ y $z P x$. Un ejemplo sencillo es $N_1 = 3$, $N_2 = N_3 = 2$.

Esto deja cuatro casos. Consideremos seguidamente los dos conjuntos siguientes: [1.1, 2.1 o 2.3, 3.3]. Con el mismo convenio sobre la numeración, si tomamos $N_2 > N_1 > N_3$ y $N_1 + N_3 > N_2$, tenemos nuevamente $x P y$, $y P z$ y $z P y$. Un ejemplo sencillo es $N_1 = 3$, $N_2 = 4$ y $N_3 = 2$. Finalmente, tomamos los casos dados por [1.1, 2.2, 3.1 o 3.2]. Tomando $N_3 > N_1 > N_2$ y $N_1 + N_2 > N_3$, obtenemos $x P y$, $y P z$ y $z P x$, como por ejemplo, $N_1 = 3$, $N_2 = 2$ y $N_3 = 4$. Esto completa la prueba de necesidad, lo cual establece el teorema.

Seguidamente se obtienen las condiciones necesarias y suficientes para la transitividad total de decisiones de mayoría.

TEOREMA 10*7. *La condición necesaria y suficiente para que un conjunto de ordenaciones individuales esté en el dominio de la SWF de decisión de mayoría es que cada terna de alternativas satisfaga la restricción extrema.*

Demostración: Consideremos la necesidad de ER. Supongamos que ER es infringida. Esto significa que hay (digamos) algún individuo i tal que $x P_i y P_i z$, y otro cuya preferencia satisface *uno u otro* de los tipos siguientes, (1) $z P_j x$, $z P_j y$ y $x R_j y$, o (2) $z P_j x$, $y P_j x$, $y P_j x$ y $y R_j z$. Supongamos que hay un individuo i y un individuo j. Si j cumple (1), entonces la decisión de mayoría dará $x P y$, $y I z$ y $x I z$, que implica una función de elección, pero no es una ordenación.

Análogamente, si j cumple (2), entonces $x\,I\,y$, $y\,P\,z$ y $x\,I\,z$, lo cual no es tampoco una ordenación. De aquí que quede demostrada la necesidad de ER. La suficiencia de ER quedó ya demostrada en el Teorema 10*4.

10*5. El caso especial de preferencias antisimétricas

Podemos considerar ahora un caso especial: cuando las preferencias individuales son cadenas, es decir, las ordenaciones son antisimétricas.

LEMA 10*e. *Si las ordenaciones individuales son antisimétricas, entonces ER* $\rightarrow$ *VR y LA* $\rightarrow$ *VR.*

Demostración: Supóngase que ER se satisface en alguna terna. Puesto que la indiferencia es imposible, no se plantea el caso del cumplimiento trivial de ER. Supongamos $x\,P_i\,y\,P_i\,z$ para algún i. Sabemos por ER que $\forall\, i : z\,P_i\,x \rightarrow z\,P_i\,y\ \&\ y\,P_i\,x$. Si no hay ningún individuo tal que $z\,P_i\,x$, entonces z no es la mejor en la ordenación de nadie, puesto que $\sim(z\,P_i\,x) \rightarrow x\,P_i\,z$, en el caso de ordenación antisimétrica. En este caso se cumple VR. Si, por otra parte, hay alguien que cumple $z\,P_i\,x$, y por tanto $z\,P_i\,y\,P_i\,x$, entonces cualquiera que cumpla $x\,P_i\,z$ debe cumplir $x\,P_i\,y\,P_i\,z$ por ER. Puesto que $\forall\, i : x\,P_i\,z \veebar z\,P_i\,x$ se sigue que en este caso $\forall\, i : \{x\,P_i\,y\,P_i\,z\} \veebar \veebar \{z\,P_i\,y\,P_i\,x)$. Nuevamente se satisface VR puesto que y no es la mejor (ni ciertamente la peor) en la ordenación de nadie. De aquí que ER $\rightarrow$ VR.

Supongamos que se satisface LA en alguna terna. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x\,R_i\,y$ se cumple para todo i, que en este caso significa $\forall\, i : x\,P_i\,y$. De aquí que x no es la peor (ni ciertamente y la mejor) en la ordenación de nadie. Por tanto, se cumple VR, lo cual completa la demostración.

Obsérvese que lo inverso no se cumple. VR no implica ER ni LA. Esto se comprueba rápidamente examinando la configuración siguiente: $x\,P_1\,y\,P_1\,z$, $z\,P_2\,y\,P_2\,x$, e $y\,P_3\,z\,P_3\,x$. ER y LA son ambas infringidas, pero y no es la peor en la ordenación de nadie, y de aquí que VR se cumpla.

Los teoremas relevantes sobre el MMD como SDF y SWF, respectivamente, pueden ahora derivarse para este caso especial.

TEOREMA 10*8. *Las condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto de cadenas individuales en un conjunto finito de alternativas*

esté en el dominio de la SDF de decisión de mayoría es que cada terna satisfaga la restricción de valores.[10]

Demostración: Puesto que ER, VR y LA son suficientes para todas las ordenaciones individuales, estrictas o no, VR es claramente suficiente en el caso de ordenaciones estrictas. Por el Teorema 10*6, VR o ER o LA debe cumplirse para cada terna como una condición necesaria para la existencia de una función de elección social, y por el Lema 10*e si ER o LA se cumple, así debe ser para VR en el caso de cadenas. De aquí que VR sea suficiente *y* necesaria.

TEOREMA 10*9. *Una condición necesaria para que un conjunto de cadenas individuales esté en el dominio de una SWF de decisión de mayoría es que cada terna de alternativas satisfaga la restricción de valores, pero no es una condición suficiente.*

La prueba de necesidad es obvia por el Teorema 10*7 y el Lema 10*e. El ejemplo siguiente muestra la insuficiencia de VR: Sean dos individuos tales que $x P_1 y P_1 z$ y $z P_2 x P_2 y$, lo que da $x P y$, $y I z$ y $x I z$. Se satisface la restricción de valores, pero hay intransitividad.[11] La condición necesaria y suficiente viene dada por el Teorema 10*7.

[10] Este teorema se cumple incluso con la definición original de restricción de valores en Sen (1966), y no sólo para la Definición 10*2 dada más arriba.

[11] Resulta también suficiente si el número de individuos es impar; véase Sen (1966).

Capítulo 11
TEORIA Y PRACTICA

11.1. Sistemas de elección colectiva

Está claro que existe una serie de formas radicalmente diferentes de basar la preferencia social en las preferencias de los miembros de la sociedad. Difieren entre sí no meramente en sus procedimientos estrictos, sino también en su enfoque general.

Uno de los enfoques ha recibido una formalización más completa que los otros, y es el caso de la «función de bienestar social» en el sentido de Arrow (1951), donde se especifica una ordenación social R para cada conjunto de ordenaciones individuales (R_i) .Una categoría algo más orientada hacia la elección es lo que llamamos «función de decisión social», en la que la función de elección es generada por una relación de preferencia social R que está determinada por el conjunto de ordenaciones individuales (R_i). En general, una SWF es una categoría especial de SDF, pero hay excepciones.[1] En cualquier caso, si la elección es nuestro objetivo, una SDF parece el punto de partida apropiado.

[1] Véase Capítulo 4. En esta referencia y en las subsiguientes, la mención de un capítulo sin asterisco incluye también la mención al capítulo correspondiente con asterisco, pero no a la inversa.

Las exigencias de consistencia de una SDF pueden ser menores que las de una SWF, y esto afecta a varios resultados, incluyendo el famoso teorema de «imposibilidad» de Arrow (Capítulos 3 y 4). Sin embargo, hay problemas similares al combinar principios diferentes de elección incluso para una SDF (Capítulos 4, 5 y 6). Mientras que las preferencias sociales no precisan ser transitivas y pueden satisfacer meramente la cuasi-transitividad o la aciclicidad, las SDF tropiezan con dificultades para incorporar un conjunto de condiciones más o menos razonables en la elección colectiva. Pero sucede que alguna de estas condiciones no son realmente muy razonables, y los conflictos subyacentes pueden aclararse tomando distintos tipos de SDF que pongan de relieve las propiedades de estas condiciones (Capítulos 5 y 6).

Otro enfoque es exigir menos que una SDF, es decir, no exigir que la relación de preferencia social deba generar una función de elección. Las cuasi-ordenaciones, que infringen la completitud pero que orientan la elección colectiva en muchas situaciones, son a menudo útiles, puesto que puede incorporar principios más débiles (y aceptados más universalmente) de elección colectiva, libres de algunos de los dilemas enloquecedores. Las alternativas no son todo o nada, sino que existen muchas posibilidades intermedias razonables (Capítulos 7 y 9).

Las preferencias individuales pueden tomar también formas diferentes. Varios sistemas de elección colectiva están de hecho basados en una información más completa sobre las actitudes individuales hacia las alternativas sociales que la que sería transmitida solamente por ordenaciones. En lugar de ordenaciones, pueden utilizarse funciones de utilidad en forma ordinal o cardinal o en alguna forma intermedia que nosotros catalogamos como tipo ordinal (Capítulo 7); y estas medidas de utilidad, o de bienestar pueden ser usadas sin comparabilidad interpersonal (Capítulo 8), o con ella (Capítulos 7 y 9). Además, la comparabilidad puede ser de varios tipos, y con algunas suposiciones puede definirse un continuo de comparabilidad parcial de unidades de bienestar que vaya desde la no comparabilidad hasta la comparabilidad completa de unidades (Capítulo 7).

Por otro lado, el acento puede recaer, no en la comparabilidad de *unidades* de bienestar, sino de *niveles* de bienestar. En lugar de tomar ordenaciones individuales R_i definidas sobre estados sociales

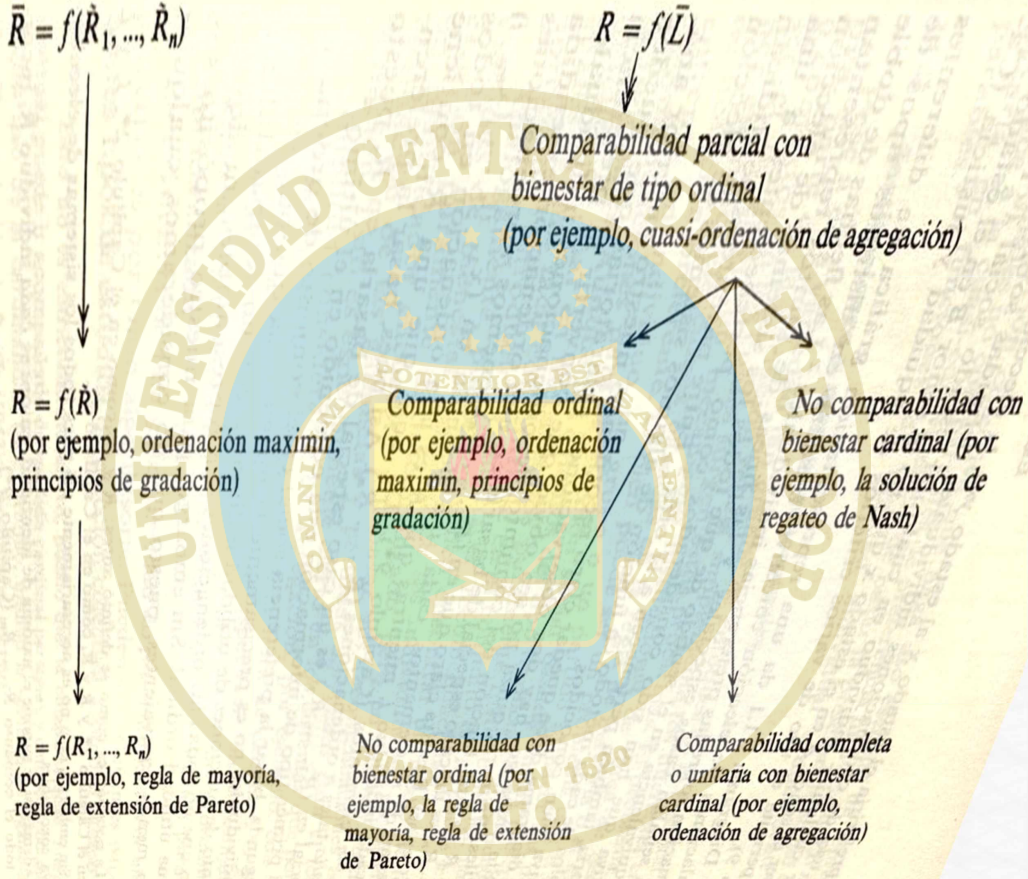


Diagrama 11.1. Ingredientes de los sistemas de elección colectiva

(«Yo preferiría el estado x al estado y»), la elección colectiva puede hacer uso de ordenaciones individuales definidas sobre la posición de ser cualquier individuo en cualquier estado social («Yo preferiría ser el señor A en el estado x que no el señor B en el estado y»). Esto permite el uso de varios criterios de equidad y justicia (Capítulo 9).

El Diagrama 11.1 da una representación gráfica de diferentes formulaciones de elección colectiva basadas en distintos tipos de información sobre las preferencias individuales.[2] Las flechas de doble punta señalan casos especiales, y las líneas de puntos representan casi equivalencia en el sentido de que todos los sistemas de elección colectiva que han sido considerados como pertenecientes a una categoría, también pertenecen a la otra.[3] Entre paréntesis se indican ejemplos de cada método en función de algunos sistemas de elección colectiva bien conocidos.

El diagrama debe quedar claro recordando nuestro anterior análisis. Sin embargo, hay dos observaciones aclaratorias que pueden ser útiles. Primera, quizá no sea obvio que convertir la preferencia social R en una función del conjunto de ordenaciones individuales $(R_1, ..., R_n)$ es un caso especial de basarla en una ordenación extendida $\tilde{R}$, pero es así. Resulta claro que en $(R_1, ..., R_n)$ tenemos n ordenaciones separadas de m elementos, cada una definida en $(x_1, i), ..., (x_m, i)$ para cada individuo i, mientras que R es una ordenación en todos estos mn elementos (Capítulo 9*). De aquí que una $\tilde{R}$ contiene *inter alia* tales n ordenaciones $(R_1, ..., R_n)$. Así pues, basar la preferencia social en $(R_1, ..., R_n)$ es un caso especial de basarla en $\tilde{R}$, puesto que el primer tipo de información está contenido en el último.[4]

Segunda, basar la preferencia social en el conjunto de ordenaciones individuales no es precisamente la misma cosa que basarla en el conjunto de funciones de utilidad individual con no comparabilidad, puesto que no todas las ordenaciones son representables; ni siquiera por una utilidad ordinal. Sin embargo, para nuestro propósito son más o menos equivalentes, puesto que no consideramos cualquier

[2] La notación es como se definió antes: R y R_i como en el Capítulo 2*, L y $\bar{L}$ como en el Capítulo 7*, y $\tilde{R}$ y $\tilde{R}_i$ como en el Capítulo 9*.

[3] Sin embargo, esto no es necesariamente así para todos los sistemas de elección colectiva *concebibles*.

[4] Además, si se supone el axioma de identidad, entonces *cada* individuo $\tilde{R}_i$ incorporará todo el conjunto $R_1, ..., R_n$ (Capítulo 9*).

sistema de elección colectiva que haga uso esencial de representaciones ordinales no comparables de preferencia individual. Lo mismo se aplica a la cuasi-equivalencia de basar la preferencia social en $\hat{R}$ y basarla en funciones de utilidad individual ordinalmente comparables.[5]

11.2. Instituciones y marcos conceptuales

Pese a esta variedad tan grande de enfoques en la elección colectiva, parte de la variación refleja simplemente los diferentes campos o contextos en los cuales surgen estos problemas. El problema puede ser el de elegir un mecanismo institucional de toma de decisión, por ejemplo, elecciones basadas en la regla de mayoría o el método de notación preferente. O bien puede ser un problema con el que se enfrenta un individuo, un grupo o un partido al hacer sus propias recomendaciones para la elección social basada en las preferencias individuales. Aunque los cálculos del tipo implicado en $\hat{R}_i$ pueden ser difíciles de usar en mecanismos puramente institucionales, para los cuales es más fácil concentrarse en el conjunto de R_i puede ser muy apropiado introducir $\hat{R}_i$ al hacer recomendaciones.

Análogamente, puede ser difícil encontrar un medio de reflejar medidas de bienestar cardinal de los individuos en un sistema de elección puramente institucionalizado, pero en cambio puede que un planificador encuentre útil basar sus recomendaciones en una evaluación de las ganancias y pérdidas *agregadas* para el total de la nación. Esto es especialmente cierto en los sistemas que permiten una amplitud considerable de agregación, por ejemplo, con «comparabilidad parcial» (Capítulo 7). A la hora de decidirse, el planificador puede encontrar conveniente especificar un subconjunto $\bar{L}$ en L, mientras que quizá sea imposible idear un procedimiento mecánico satisfactorio para especificar $\bar{L}$ en una elección puramente institucionalizada.

La existencia de una gran variedad de procedimientos de elección colectiva es por tanto algo ilusoria. Pueden ser relevantes para diferentes tipos de estudios de elección colectiva. Como el campo es tan

[5] Esto no es estrictamente cierto, puesto que la comparabilidad interpersonal ordinal puede ir acompañada de medida cardinal personal, y entonces podemos hacer algún uso de la cardinalidad (por ejemplo, usando la solución de regateo de Nash (1950), o solución de Raiffa (1953) o Braithwaite (1955)).

vasto, será útil catalogar unos pocos tipos diferentes de estudios que caen todos bajo el amplio sombrero de la teoría de la elección colectiva, pero que difieren esencialmente entre sí.

(1) *Los mecanismos institucionales* de elección social están basados en alguna teoría de elección colectiva. Por ejemplo, el uso de la regla de mayoría implicará cierto compromiso implícito con los principios de anonimidad, neutralidad y responsividad positiva (Capítulo 5).[6] Análogamente, una adhesión completa a un sistema de mercado libre en ausencia de externalidades puede estar justificada sobre la base de la optimalidad de Pareto, y no precisar más que lo que puede suponer el uso implícito de la regla de extensión de Pareto con sus principios implicados (Capítulo 5). Análogamente, las instituciones sociales pueden prever libertades individuales en ciertas elecciones de acuerdo con la condición *L* (Capítulo 6).

(2) *Las decisiones de planificación*, tomadas típicamente por una comisión responsable ante algún cuerpo político (por ejemplo, un parlamento), requieren una teoría que relacione los objetivos de la planificación con las preferencias individuales. Criterios como la regla de agregación (Capítulo 7) o la regla del maximin (Capítulo 9) pueden ser usados implícita o explícitamente. El interés por el «bienestar agregado» o por el «bienestar del grupo peor situado», es muy corriente en las medidas de política económica aun cuando el ejercicio por lo general no sea llevado a cabo muy sistemáticamente.

(3) Al hacer *crítica social* o al *argumentar sobre política social*, es preciso evaluar sistemas de elección colectiva. Las *condiciones* sobre los sistemas de elección colectiva adquieren aquí especial relevancia (por ejemplo, las condiciones discutidas en los Capítulos 3-9). La gama de problemas es muy amplia y van desde asesorar al gobierno hasta argumentar en favor de su derrocamiento revolucionario. Muchos de los principales avances en las teorías de la elección colectiva parece que proceden de tales estudios eminentemente prácticos, especialmente los últimos.[7] La crítica y la protesta sociales toman por lo general la forma de postular principios de elección colectiva que los mecanismos existentes no satisfacen.

[6] También está la cuestión de la transitividad y la de generar una función de elección (Capítulo 10).

[7] Cf. Gramsci (1957), pp. 140-42.

(4) Los problemas de las *decisiones de comité* son casos especiales de elección colectiva. Los comités pueden ser grandes o pequeños, formales o informales, y las instituciones tienen que variar. Con grupos pequeños son posibles varios procedimientos institucionales que pueden no ser variables para grupos grandes, por ejemplo, tener sistemas informales de tomar en cuenta las intensidades de preferencia (típico de muchas comisiones) o usar un sistema informal de comercio de votos (típico de cuerpos legislativos). La cuestión de la transitividad es particularmente transparente para las decisiones de comisión (Capítulo 10).

(5) Los problemas de *cooperación pública* dependen de procedimientos de elección colectiva y de su evaluación por la gente. En muchos problemas es importante no sólo que se haga justicia, sino que se vea que se hace. La planificación para el desarrollo económico requiere a veces imponer un sacrificio a la población, y la distribución de la carga (por ejemplo, impuestos) puede implicar consideraciones de equidad, justicia y medida de ganancias y pérdidas relativas (Capítulos 7 y 9). Lo importante no es sólo el problema de *lograr* equidad, justicia, etc., sino también el *dejar claro* que las elecciones hechas tienen estas características cuando son contempladas desde el punto de vista de la población en conjunto. La diferencia entre éxito y fracaso en la planificación está a menudo estrechamente relacionada con la cooperación y el entusiasmo públicos y aunque los así llamados «realistas» a menudo parecen desdeñar esas «vagas consideraciones normativas» como la equidad y la justicia, tales consideraciones parecen eminentemente relevantes para el éxito o fracaso incluso en términos de los índices más imperfectos.

11.3. Expresión de preferencias individuales

Son varias las dificultades que pueden surgir al diseñar sistemas de expresión de preferencias individuales encaminadas a la elección colectiva. En primer lugar, hay «consideraciones de juego» que podrían distorsionar las preferencias en el proceso de expresión. El «votar honestamente» no redunda a menudo en beneficio de la persona.[7]

[7] Véase Arrow (1951), pp. 80-81, Majumdar (1956), y Luce y Raiffa (1957), Apartado 14.8.

Esta dificultad es perfectamente general, pero su relevancia varía mucho con el sistema de elección colectiva. Como ha argumentado Murakami, con aquellos sistemas de elección colectiva que son negativamente responsivos a las preferencias individuales, el alcance de lo que los votantes pueden conseguir distorsionando sus preferencias es muy limitado.[8] Esto se aplica en particular al MMD. Distorsionando sus preferencias no puede una persona aumentar el peso sobre su alternativa preferida, ya que el mayor peso que puede poner sobre ella es votar sinceramente.

Un ejemplo relativo al MMD puede ayudar a aclarar este problema. Considérense tres individuos 1, 2 y 3; la persona 1 prefiere x a y e y a z, la persona 2 y a x y x a z y la persona 3 z a x y x a y. La ordenación de mayoría declarará a x socialmente preferida a y y a z, e y socialmente preferida a z. La persona 2 puede romper la ordenación pretendiendo preferir y a z y z a x, lo cual crea mayorías cíclicas de x sobre y, y sobre z y z sobre x. Pero no puede introducir a y en el conjunto de elección de este modo, puesto que lo más que puede hacer para ayudar a y en el conjunto de elección es votar honestamente. Puede expulsar a x del conjunto de elección votando deshonestamente, pero no puede colocar a y dentro de él.

Sin embargo, esto no quiere decir que la distorsión estratégica no puede nunca ayudar a un individuo o un grupo a mejorar el resultado social bajo un mecanismo que sea no negativamente responsivo. Incluso bajo el MMD, la votación insincera puede ayudar a la selección de una alternativa preferida. La ilustración siguiente lo pone de manifiesto.[9] Supongamos tres alternativas y cuatro personas. La persona 1 prefiere x a y y z, entre las cuales es indiferente; la persona 2 es indiferente entre x e y y prefiere ambas a z; la persona 3 prefiere a a x y x a y; y la persona 4 cataloga a y por encima de z y a z por encima de x. El MMD dará bajo votación sincera: x preferida a y, y preferida a z y x y z indiferentes. En este caso x es el único elemento en el conjunto de elección social. Tanto 3 como 4 prefieren z a x, aun cuando para la persona 4 la alternativa

[8] Murakami (1968) Capítulo 4, Sección 10.

[9] Sugerida por Bengt Hansson. Este caso requiere que dos personas se pongan de acuerdo. Un caso en el que la insinceridad de uno es suficiente es el siguiente. 1 y 2 prefieren x a y e y a z; 3 prefiere z a x y x a y, y 4 prefiere y a z y z a x. Con votación sincera el MMD da a x como mejor elemento. Si en lugar de ello 4 pretende preferir z a y e y a x, entonces z será también un vencedor de mayoría, cosa que para él es mejor.

preferida no sea *z*. Si 3 y 4 pretenden ahora que ambos prefieren *z* a *y* e *y* a *x*, entonces el MMD dará: *z* preferida a *y*, *y* preferida a *x* y *x* y *z* indiferentes. Ahora es *z* el único miembro del conjunto de elección social, de modo que 3 y 4 salen mejor parados mediante este método perspicaz.[10] Así pues, la responsividad no negativa o incluso positiva no es garantía contra la eficacia de una votación insincera.

Digamos también que en algunas circunstancias las consideraciones «de juego» y el comercio de votos pueden ayudar a introducir algunas medidas de intensidades de preferencias individuales, y un equilibrio en el comercio de votos refleja un compromiso de intereses conflictivos.[11] Aunque hay reparos para aceptar estas soluciones como éticamente óptimas y equitativas (como se discutió en los Capítulos 2 y 8), estos modelos tienen cierto mérito como representaciones plausibles de elección social y pueden ayudar a aclarar las bases éticas de estas elecciones.

También ha habido intentos de obtener medidas de intensidades de preferencia de los individuos examinando su comportamiento al votar. Es ciertamente correcto, como ha señalado Coleman (1966a), que un votante puede considerar su acto de votar en función de sus probables efectos y, dadas sus preferencias frente al conjunto de alternativas sociales, su acción dependerá de su propia estimación de la distribución de probabilidades del comportamiento electoral de los demás y de la distribución de probabilidades de las consecuencias de los mecanismos de azar que pueden utilizarse en el sistema de elección, por ejemplo, en caso de empate. Así pues, los actos individuales de votar pueden considerarse como una elección entre loterías e implicarán una revelación de las intensidades individuales de preferencia. Sin embargo, las loterías serán de variedad muy limitada, de modo que cualquier esperanza de construir una función de utilidad sobre esta base es infundada. Por otro lado, tenemos que conocer las distribuciones de probabilidad subjetiva de cada individuo relativas al comportamiento electoral de los demás para

[10] Sin embargo, cuando la relación de preferencia social tiene que ser una *ordenación*, esta posibilidad está menos abierta; véase Murakami (1968). Por consiguiente, Murakami recomienda que la votación se haga enfrentando cada alternativa con las demás en una votación por pares, que revelaría intransitividades si es que las hubiese.

[11] Véase Buchanan y Tullock (1962), Coleman (1966), (1966a), y Wilson (1968), (1968a).

ser capaces de calcular las medidas de utilidad. Así pues, puede que no sea posible construir medidas cardinales para elecciones sociales prácticas sobre la base de observar meramente el comportamiento electoral real. El método es, sin embargo, ilustrativo.[12]

Pero, ante todo, está la cuestión más urgente, de si los individuos se comportan realmente en la forma postulada, es decir, maximizando la utilidad esperada de la votación a base de considerar el impacto probabilístico sobre las elecciones sociales reales. Esta cuestión precisa investigación empírica adicional, pero quizá merezca la pena exponer aquí una duda preliminar. Cuando el número de votantes es grande (por ejemplo, en elecciones nacionales), la probabilidad de que el voto de un individuo concreto afecte al resultado es ciertamente muy pequeña, e incluso un coste muy reducido (como puede ser el del transporte hasta el centro electoral) puede contrarrestarlo con creces. Aun así, la afluencia a las urnas puede ser muy alta.[13] Esto quizá indique que los individuos se ganan no tanto por la maximización de la utilidad esperada, sino por algo mucho más simple: el deseo de dejar constancia de la verdadera preferencia de uno.[14]

Desde luego, puede ser que la gente vote porque le guste votar. Esto podría explicar por qué la gente vota en las grandes elecciones; pero en el momento en que introducimos este tipo de consideración, dañamos la correspondencia ordinal entre votos y preferencias. Una persona puede ser indiferente y no obstante votar por una u otra alternativa si encuentra placer en votar. Si, por otra parte, el hecho de votar conlleva un coste, puede que se abstenga aunque prefiera una alternativa a otra, pero no con suficiente intensidad. De hecho, el

[12] Para maximizar la utilidad agregada, necesitamos, además de medidas de utilidad cardinal individual, algún sistema de comparabilidad interpersonal. Coleman señala esto como un elemento arbitrario. Para modelos descriptivos, uno puede tratar esto como un conjunto de parámetros, como en Coleman (1966), (1966a). Sin embargo, para modelos normativos, han de realizarse juicios sistemáticos sobre esto. (Véanse Capítulos 7, 8 y 9).

[13] También es posible que el interés de la gente por el resultado se centre no sólo en quién gana, sino por qué margen, lo cual siempre cambia con el voto de uno. Esto complicaría considerablemente los modelos de revelación de la utilidad. Además, puesto que el impacto de un voto más sobre el margen de triunfo (o derrota) es pequeño, el incentivo del votante para ejercer su voto parecería requerir todavía una explicación si queremos confinarnos al esquema de utilidad esperada.

[14] Cf. Robinson (1964), p. 10.

problema se plantea incluso cuando el votar no es una fuente ni de coste ni de placer. La probabilidad de que una persona indiferente vote por un candidato o se abstenga es entonces la misma. Así, independientemente de que el coste de votar sea negativo, positivo o cero, no habrá una correspondencia uno a uno entre (a) votar por x, (b) votar por y y (c) abstenerse, frente a (a) preferir x, (b) preferir y, y (c) ser indiferente.[15] Aunque el problema es analíticamente válido, no es terriblemente grave. Si el coste de votar es cero, entonces para *grandes* grupos de votantes el resultado global puede ser muy próximo a lo que ocurriría bajo la correspondencia uno a uno. El problema real surge cuando hay coste o placer al votar, y cuando estas magnitudes son relativamente grandes. Incluso en esta forma, el problema es solo uno de los muchos que intentan esta rama de la teoría de la elección.

11.4. Eficiencia y optimalidad de Pareto

Los problemas de la comunicación (y uso) de medidas cardinales son más serios que los de las ordenaciones, y esta ha sido en parte la causa de que los estudios de elección colectiva se hayan concentrado normalmente en las ordenaciones.[16] El enfoque más usual,

[15] En Sen (1964) se demuestra que esta falta de correspondencia uno a uno existe en general para todos los casos de maximización de utilidad continua. La expresión honesta de la preferencia de uno está en conflicto con la maximización de una función de utilidad continua, lo que parece un poco triste.

[16] Desde luego, al hacer una agregación para fines tales como el de una planificación, cabe introducir ciertas variaciones en las posibles funciones de utilidad de un individuo y obtener aun así una cuasi-ordenación, en la misma línea que el enfoque desarrollado en el Capítulo 7. Una alternativa, que es más exigente, es suplementar la ignorancia del planificador con una distribución de probabilidades, por ejemplo, como propone Lerner (1944) en el contexto del problema de distribución. Lerner supone que el planificador trabaja sobre la base de la misma distribución de probabilidades para cada individuo sobre las funciones de utilidad posibles (cóncavas), y que, dado el problema de la división de un total dado de renta homogénea, debe por tanto recomendar una división de un total dado de renta homogénea, debe por tanto recomendar una división igual sobre la base de maximizar la utilidad esperada. La suposición de equiprobabilidad que se precisa es, sin embargo, demasiado fuerte (véase Friedman (1947) y Samuelson (1964)), pero uno puede generalizar el enfoque de Lerner usando cualquier combinación de distribución de probabilidad. Cabe usar también criterios de decisión que no utilizan probabilidades, por ejemplo, la estrategia del maximin, y

al menos en economía, es el de la optimalidad de Pareto y el de la «eficiencia económica» (Capítulo 2).

Los análisis de los Capítulos 5 y 6 dejaron claro cuáles son los supuestos en que se basa esa concentración en la optimalidad de Pareto. Si uno adopta el punto de vista de que la optimalidad de Pareto es la única finalidad y que, mientras esto se logre, no tenemos necesidad de preocuparnos más (un enfoque que se adopta implícitamente en una gran parte de la moderna economía del bienestar, pero rara vez explícitamente), entonces uno está pidiendo precisamente una CCR que genere preferencia social cuasi-transitiva que satisfaga la condición *U* (dominio no restringido), *I* (independencia de alternativas irrelevantes), *P** (principio fuerte de Pareto) y *A* (anonimidad). El conjunto de estas condiciones implica que debemos declarar todos los puntos óptimos de Pareto como indiferentes, como se muestra en el Teorema 5*3. Este resultado da una axiomatización de un enfoque que está implícito en una parte sustancial de la moderna economía del bienestar.

En algunos respectos, el Teorema 5*3 es muy perturbador. Todas las condiciones impuestas son superficialmente atrayentes, pero la conclusión de que todos los puntos óptimos de Pareto son indiferentes, independientemente de consideraciones de distribución, es muy poco atractiva. De hecho, es este aspecto de la moderna economía del bienestar el que se toma más a menudo como blanco de las críticas.

Lo que este resultado posiblemente revela (como otros del presente libro) es la dificultad de postular condiciones generales sobre las reglas de elección colectiva debido a que son esencialmente opacas. Es más fácil asegurar la aceptación de estas condiciones que la aceptación de todas sus implicaciones. El teorema de posibilidad de Arrow (1951) puede interpretarse también bajo ese punto de vista.[17]

la conclusión de Lerner sobre igualdad se cumple en este caso también bajo suposiciones muy generales, como se muestra en Sen (1966b). Sin embargo, quedan problemas de interpretación de la ignorancia y de la incertidumbre, así como problemas de elección de un criterio de decisión entre muchos posibles.

[17] Dificultades similares parecen surgir en los intentos axiomáticos de establecer reglas de decisión específicas, por ejemplo, la elegante demostración de Koopmans (1960) de la necesidad de «impaciencia» para programas de acumulación racional, dados ciertos axiomas de decisión. Véase también Koopmans, Diamond y Williamson (1964). Los axiomas usados son aparentemente atrayentes, pero el método está sujeto a la dificultad discutida arriba.

Las dificultades persisten incluso con un uso muy limitado de la optimalidad de Pareto, a saber, tratándola como una condición necesaria pero no suficiente de optimalidad total. En este caso se le suele atribuir a la optimalidad de Pareto un atractivo indiscutible.[18] Pero resulta que incluso la versión débil de la relación de Pareto choca (Teorema 6*3) con una condición muy débil de libertad individual, que da a los individuos la libertad de hacer ciertas cosas personales (por ejemplo, elegir lo que uno debería leer). Aun dando solamente a dos individuos esa libertad y dándosela entre un par de alternativas a cada uno, puede que haya que infringir la relación de Pareto para asegurar la aciclicidad, que es más débil que la transitividad. El conflicto entre la libertad individual y la relación débil de Pareto no puede, desde luego, surgir en una elección entre un par, pero sí cuando existan más de dos alternativas. De aquí que la optimalidad de Pareto, incluso como condición necesaria pero no suficiente, queda abierta a ciertas objeciones. Que la optimalidad de Pareto no sea fácil de lograr en presencia de externalidades es algo muy conocido (véase Koopmans (1957)), pero lo que se desprende del análisis del Capítulo 6 es una seria duda sobre su *mérito* como objetivo cuando existen ciertos tipos de externalidades.

11.5. Observaciones finales

De entre las condiciones sobre la elección colectiva, el principio de Pareto es seguramente la más suave de las suaves. Las dificultades que entraña el uso universal siquiera de la regla de Pareto subraya la gravedad del problema de postular principios absolutos de elección colectiva que se cumplan en cualquier situación. Los sencillos principios que normalmente se proponen suelen ser esencialmente «no básicos» (Capítulo 5). Mediante una elección adecuada de hechos (por ejemplo, eligiendo configuraciones específicas de preferencias individuales o seleccionando motivaciones específicas como base

[18] Zeckhauser (1968) y Raiffa (1968) han construido argumentos para rechazar la optimalidad de Pareto en la elección de *acciones*, haciendo para ello uso de diferencias interpersonales en las expectativas probabilísticas acerca de las *consecuencias* de la acción. Sin embargo, estos argumentos no son para rechazar la relación de Pareto sobre el conjunto de consecuencias, o sobre el conjunto de estados sociales completamente especificados. A nosotros nos interesa esta última cuestión.

para las ordenaciones individuales) parece posible causar estragos en prácticamente todos los principios generales que se suelen recomendar para su aplicación universal.

Esta posición parece contradecir la necesidad de «generalización» y «universalización» que subrayan todas las teorías éticas desde Kant en adelante,[19] y que discutimos en el Capítulo 9. Sin embargo, esta contradicción es solamente superficial. No negamos que existan principios generales que asegurarían la adhesión total de una persona; lo que decimos es que los sencillos principios recomendados usualmente no son de ese tipo. Las condiciones del tipo de «anonimidad» y «neutralidad» están basadas sobre aspectos muy limitados de «similitud relevante», dejando fuera, entre otras cosas, la información acerca de la relación entre los individuos y la naturaleza de las alternativas (Capítulos 5 y 6) y la información sobre las intensidades de preferencia (Capítulo 7). «La independencia de alternativas irrelevantes», aunque menos restrictiva, también se concentra en la similitud en un sentido estrecho a saber: rankings individuales sobre el par relevante. Las intensidades de preferencia no cuentan (Capítulo 7), ni tampoco ninguna información indirecta que obtenemos observando los rankings de otras alternativas (aunque relacionadas), que podrían indicar algo sobre la motivación de una persona (Capítulo 6). Es esto último, y no las demás consideraciones acerca de las intensidades de preferencia lo que parece crucial en nuestra reserva acerca del Principio de Pareto (Apartado 6.5). Lo que está en litigio no es el enfoque de que en «situaciones similares deben hacerse juicios similares», sino los criterios para decidir qué situaciones *son* similares. Para hacer una aseveración completamente general sobre «similitud relevante» tendríamos que adentrarnos en un criterio enormemente complicado. Cabrá idear principios sencillos que capten lo esencial en muchos casos, pero no en todos, y aunque estos principios (por ejemplo las condiciones *I*, *N*, *A*, *P* y otras) pueden superficialmente tener la forma de principios universales, son de hecho no básicos en la mayoría de los sistemas de valores.

Ahora bien, incluso los principios no básicos, si son aplicables con amplitud suficiente, son útiles en la comprensión y evaluación de los procedimientos de elección colectiva. Solamente a un maso-

[19] «Actúa siempre con arreglo a un principio que tú puedas al mismo tiempo hacer que sea una ley universal» (Kant (1785)).

quista le gustaría tratar con todo el fárrago de detalles en cada situación que se le planteara. Los principios sencillos proporcionan atajos corrientes, y con tal de utilizarlos como guías útiles en lugar de como maestros a los que hay que obedecer hasta el final, no hay ningún problema. El teorema general de posibilidad de Arrow (Teorema 3*1) y otros teoremas de imposibilidad (Teoremas 4*3, 4*5, 5*1.1, 5*2, 6*1-6*3, 8*1.1, 8*2, 9*2, 9*2.1, 10*5) presentados en este libro, hay que mirarlos no como argumentos de nihilismo, sino como contribuciones positivas conducentes a esclarecer el papel de los principios en los sistemas de elección colectiva. Los mismos es cierto para los teoremas que aseveran resultados positivos sobre los mecanismos de elección (Teoremas 4*1, 4*2, 4*4, 5*1, 5*3, 7*1-7*9, 8*1, 9*1, 9*3-9*7, 9*5.1, 9*7.1, 10*1-10*4, 10*6-10*9).

Una vez reconocida la naturaleza no básica de los principios usuales de la elección colectiva, desaparecen algunas de las distinciones rígidas. Por ejemplo, en la economía del bienestar tradicional es costumbre distinguir entre los juicios paretianos, que son tratados como obligatorios, y los no paretianos, que son tratados como «arbitrarios». Esta dicotomía parece inoportuna por dos razones: porque el principio de Pareto es también en parte arbitrario (Capítulo 6) y porque algunos de los otros principios son también obligatorios en muchas situaciones (Capítulos 5-7 y 9). Por una parte, la casi exclusiva concentración sobre consideraciones paretianas ha confinado la economía del bienestar tradicional dentro de una caja muy estrecha, y por otra parte, le ha dado un sentido de invulnerabilidad ética que no parece sobrevivir a un examen profundo.

Un punto estrechamente relacionado con lo anterior es el de la aceptabilidad relativa de los diferentes sistemas de elección colectiva. Puesto que los sencillos principios que satisfacen los distintos sistemas parecen ser esencialmente no básicos, está claro que la evaluación de la deseabilidad relativa de los distintos sistemas dependerá de la naturaleza de la sociedad. Una forma de interpretar los distintos resultados de «imposibilidad» es decir que no hay un sistema «ideal» de elección colectiva que funcione bien en toda sociedad y para cada configuración de preferencias individuales (como indica el uso de la condición de «dominio no restringido» en casi todos los teoremas de imposibilidad). Algunos procedimientos de elección funcionan muy bien para algunos tipos de elección y algunos conjuntos de preferencias individuales, pero no para otros (véanse

Capítulos 5-7, 9 y 10), y naturalmente, nuestra evaluación de estos principios debe depender del tipo de sociedad a la que vayamos a aplicarlos. No hay nada excesivamente derrotista en esta modesta confesión.

Finalmente, merece la pena destacar que aunque los sistemas «puros» de elección colectiva suelen ser más atrayentes para los estudios teóricos de decisiones sociales, a menudo no son los sistemas más útiles de estudiar. Teniendo esto en cuenta, el presente libro ha presentado la debida atención a «impurezas» de un tipo u otro: comparabilidad interpersonal *parcial* (Capítulos 7 y 9), cardinalidad *parcial* (Capítulo 7), dominios *restringidos* (Capítulos 6 y 10), indiferencia social *intransitiva* (Capítulos 4 y 10), preferencia social *incompleta* (Capítulos 7 y 9), y así sucesivamente. Los procedimientos puros, que son mejor conocidos, parecen ser los casos límites de estos sistemas con impurezas.

Tanto desde el punto de vista de las instituciones como del de los marcos conceptuales, los sistemas impuros parecen los relevantes. La distribución relativa del espacio en este libro refleja la creencia, que hemos tratado de defender de que si bien la pureza es una virtud sencilla en el aceite de oliva, el aire del mar y heroinas de los cuentos populares, no ocurre otro tanto en los sistemas de elección colectiva.

BIBLIOGRAFIA

ALLEN, R. G. D., *Mathematical Economics*, Macmillan, Londres, 1959.

ARCHIBALD, G. C., «Welfare Economics, Ethics, and Essentialism», *Economica*, N. S., **26**, 1959.

ARISTÓTELES, *The Nicomachean Ethics*, editado por J. A. K. Thomson, Allen y Unwin, Londres, 1953.

ARMSTRONG, W. E., «A Note on the Theory of Consumer's Behavior», Oxford Economic Papers, N. S., **2**, 1950.

——, «Utility and the Theory of Welfare», *Oxford Economic Papers*, N. S., **3**, 1951.

ARROW, K. J., «A Difficulty in the Concept of Social Welfare», *Journal of Political Economy*, **58**, 1950.

——, *Social Choice and Individual Values*, Wiley, Nueva York, 1951; segunda ed. 1963.

——, «An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics», en Neyman, 1951 (1951a).

——, «Little's Critique of Welfare Economics», *American Economic Review*, **41**, 1951 (1951b).

——, «Le Principe de Rationalité dans les Décisions Collectives», *Économie Appliquée*, **5**, 1952.

ARROW, K. J., «Rational Choice Functions and Orderings», *Economica*, N. S., **26**, 1959.

——, «Economic Welfare and the Allocation of Resources for Invention», en K. J. Arrow et al., *The Rate and Direction of Inventive Activity*, Princeton University Press, Princeton, 1962.

——, «Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care», *American Economic Review*, **53**, 1963.

——, *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Yrjö Jahnssonin Säätiö, Helsinki, 1965.
——, «Values and Collective Decision Making», en Laslett y Runciman, 1967.
——, «Public and Private Values», en Hook (1967) (1967a).
——, «The Place of Moral Obligation in Preference Systems», en Hook (1967) (1967b).
ARROW, K. J., S. KARLIN y P. SUPPES, eds., *Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959*, Stanford University Press, Stanford, 1960.
AUMANN, R. J., «Utility Theory without the Completeness Axiom», *Econometrica*, **30**, 1962.
——, «Utility Theory without the Completeness Axiom: A Correction», **32**, 1964.
AYER, A. J., *Philosophical Essays*, Londres, 1959.
BANERJI, D., «Choice and Order: Or First Things First», *Economica*, N. S., **31**, 1964.
BARONE, E., «The Ministry of Production in the Collectivist State», en F.A. Von Hayek, ed., *Collective Economic Planning*, Routledge, Londres, 1935.
BARRY, D., *Political Argument*, Humanitarian Press, Nueva York, 1965.
BATOR, F. M., «The Anatomy of Market Failure», *Quarterly Journal of Economics*, **72**, 1958.
BAUMOL, W. J., «Community Indifference», *Review of Economic Studies*, **14**, 1946.
——, *Welfare Economics and the Theory of the State*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1952, segunda ed., 1966.
——, «The Cardinal Utility Which is Ordinal», *Economic Journal*, **68**, 1958.
BENTHAM, J., *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*, Payne, 1789; Clarendon Press, Oxford, 1907.
BERGSON, A., «A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics», *Quarterly Journal of Economics*, **52**, 1938.
——, «Socialist Economics», en H. S. Ellis, ed., *A Survey of Contemporary Economics*, Vol. I, Blakiston, Philadelphia, 1948.
——, «On the Concept of Social Welfare», *Quarterly Journal of Economics*, **68**, 1954.
——, *Essays in Normative Economics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1966.
BERNOUILLI, D., «Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis». *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Peropolitanae*, 1730, 1731, 1738; trad. por L. Sommer, «Exposition of a New Theory of the Measurement of Risk», *Econometrica*, **22**, 1954.
BIRKHOFF, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, 1940.
BISHOP, R. L., «A Zeuthen-Hicks Theory of Bargaining», *Econometrica*, **32**, 1964.
BLACK, D., «On the Rationale of Group Decision Making», *Journal of Political Economy*, **56**, 1948.
——, «The Decisions of a Committee Using a Simple Majority», *Econometrica*, **16**, 1948 (1948a).
——, *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, Cambridge, 1958.
BLACK, M., «The Gap Between Is and Should», *Philosophical Review*, **73**, 1964.
BLACKWELL, D., y M. A. GIRSCHIK, *Theory of Games and Statistical Decisions*, Wiley, Nueva York, 1954.
BLANCHE, R., *Axiomatics*, Trad. por G. B. Keene, Free Press of Glencoe, Nueva York, 1962.
BLAU, J. H., «The Existence of a Social Welfare Function», *Econometrica*, **25**, 1957.

BORDA, J. C., «Mémoire sur les Élections au Scrutin», *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1781; traducción inglesa por A. de Grazia, *Isis*, **44**, 1953.

BOULDING, K. E., «Welfare Economics», en B. F. Haley, ed., *A Survey of Contemporary Economics*, Vol. II, Blakiston, Philadelphia, 1952.

BOURBAKI, N., *Élements de Mathématique*, Hermann, Paris, 1939; traducción inglesa, *General Topology*, Parts I y II, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1966; Theory of Sets, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

BOWEN, H. R., «The Interpretation of Voting in the Allocation of Economic Resources», *Quarterly Journal of Economics*, **58**, 1943.

BRAITHWAITE, R. B., *Theory of Games as a Tool for the Moral Philosopher*, Cambridge University Press, Cambridge, 1955.

BRANDT, R. B., *Ethical Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1959.

——, ed., *Social Justice*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

——, examen de *Freedom and Reason* de Hare, *Journal of Philosophy*, **61**, 1964.

BROAD, C. D., «On the Function of False Hypotheses in Ethics», *International Journal of Ethics*, **26**, 1916.

BUCHANAN, J. M., «Individual Choice in Voting and the Market», *Journal of Political Economy*, **62**, 1954.

——, «Simple Majority Voting, Game Theory, and Resource Use», *Canadian Journal of Economics and Political Science*, **27**, 1961.

—— y G. TULLOCK, *The Calculus of Consent*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1962.

CAMPBELL, C. D., y G. TULLOCK, «A Measure of the Importance of Cyclical Majorities», *Economic Journal*, **75**, 1965.

CAMPBELL, C. D., y G. TULLOCK, «The Paradox of Voting-A Possible Method of Calculation», *American Political Science Review*, **60**, 1966.

CARNAP, R., *Introduction to Symbolic Logic and Its Application*, Dover, Nueva York, 1958.

CASSEN, R., «Alternative Approaches to the Theory of Social Choice», mimeografiado, 1967.

CHAKRAVARTY, S., «Alternative Preference Functions in Problems of Investment Planning on the National Level», en E. Malinvaud y M. Bacharach, eds., *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning*, Macmillan, Londres, y St. Martin's Press, Nueva York, 1967.

CHERNOFF, H., «Rational Selection of Decision Functions», *Econometrica*, **22**, 1954.

CHIPMAN, J. S., «The Foundations of Utility», *Econometrica*, **28**, 1960.

——, «The Lexicographic Representation or Preference Orderings», en el Simposio de Minnesota (1969).

CHURCH, A., *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, Princeton, 1956.

COLEMAN, J. S., «Foundations for a Theory of Collective Choice», *American Journal of Sociology*, **71**, 1966.

——, «The Possibility of a Social Welfare Function», *American Economic Review*, **56**, 1966 (1966a).

CONDORCET, Marqués de, *Essai sur l'Application de l'Analyse a la Probabilité des Décisions Rendues a la Pluralité des Voix*, Paris, 1785.

CONTINI, B., «A Note on Arrow's Postulates for a Social Welfare Function», *Journal of Political Economy*, **74**, 1966.

COOMBS, C. H., «Psychological Scaling without a Unit of Measurement», *Psychological Review*, **57**, 1950.

——, *A Theory of Data*, Wiley, Nueva York, 1964.

CRISWELL, J. H., H. SOLOMON y P. SUPPES, *Mathematical Methods in Small Group Processes*, Standford University Press, Standford, 1962.

CURRY, H. B., y R. FEYS, *Combinatory Logic*, North Holland, Amsterdam, 1958.

DAHL, R. A., *A Preface to Democratic Theory*, University of Chicago Press, Chicago, 1956.

—— y C. E. LINDBLOOM, *Politics, Economics and Welfare*, Harper, Nueva York, 1954.

DAVIDSON, D., y P. SUPPES, «A Finitistic Axiomatization of Subjective Probability and Utility», *Econometrica*, **24**, 1956.

DAVIS, R. G., Comment on Arrow and the 'New Welfare Economics'», *Economic Journal*, **68**, 1958.

DEBREU, G., «Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function», en Thrall, Coombs y Davis (1954).

——, *The Theory of Value*, Wiley, Nueva York, 1959.

——, «Topological Methods in Cardinal Utility Theory», en Arrow, Karlin y Suppes (1960).

DE GRAZIA, A., «Mathematical Derivation of an Election System», *Isis*, **44**, 1953.

DE MEYER, F., y C. R. PLOTT, «The Probability of a Cyclical Majority», *Econometrica*, en prensa.

DIAMOND, P., «Cardinal Welfare, Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility: A Comment», *Journal of Political Economy*, **75**, 1967.

DOBB, M. H., *On Economic Theory and Socialism*, Routledge, Londres, y International Publishers, Nueva York, 1955.

——, «A Note on Index Numbers and Compensation Criteria», *Oxford Economic Papers*, N. S., **8**, 1956.

——, «A Further Comment on the Discussion of Welfare Criteria», *Economic Journal*, **73**, 1963.

——, *Welfare Economics and the Economics of Socialism*, Cambridge University Press, Cambridge, 1969.

DODGSON, C. L., (Lewis Carroll), *A Method of Taking Votes on More than Two Issues*, Clarendon Press, Oxford, 1876, reimpreso en Black (1958).

DOWNS, A., *An Economic Theory of Democracy*, Harper, Nueva York, 1956.

——, «In Defence of Majority Voting», *Journal of Political Economy*, **69**, 1961.

DUMMETT, M., y R. FARQUHARSON, «Stability in Voting», *Econometrica*, **28**, 1961.

DUNFORD, N., y J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators*, Interscience, Nueva York, 1958.

EDGEWORTH, F. T., *Mathematical Psychics*, Kegan Paul, Londres, 1881.

EILENBERG, S., «Ordered Topological Spaces», *American Journal of Mathematics*, **63**, 1941.

ELLMAN, M. J., «Individual Preferences and the Market», *Economics of Planning*, **6**, 1966.

ELLSBERG, D., «Classic and the Current Notions of 'Measurable Utility'», *Economic Journal*, **64**, 1954.

——, «Risk, Ambiguity and the Savage Axioms», *Quarterly Journal of Economics*, **75**, 1961.

——, «Risk, Ambiguity and the Savage Axioms: Reply», *Quarterly Journal of Economics*, **77**, 1963.

FAGEN, R. R., «Some Contributions of Mathematical Reasoning to the Study of Politics», *American Political Science Review*, **55**, 1961.

FARQUHARSON, R., «An Approach to the Pure Theory of Voting Procedure», *Ph D. Thesis*, Oxford University, 1957-1958.

FARRELL, M. J., «Mr. Lancaster on Welfare and Choice», *Economic Journal*, **69**, 1959.

FENCHEL, W., *Convex Cones, Sets and Functions*, Departamento de Matemáticas, Princeton University (mimeografiado), 1953.

FLEMING, M., «A Cardinal Concept of Welfare», *Quarterly Journal of Economics*, **66**, 1952.

——, «Cardinal Welfare and Individualistic Ethics: A Comment», *Journal of Political Economy*, **65**, 1957.

FISHBURN, P. C., «Interdependence and Addivity in Multivariate Unidimensional Expected Utility», International Economic Review, **8**, 1967.

——, «Intransitive Individual Indifference and Transitive Majorities», *Econometrica*, **38**, 1970.

FISHER, F. M., «Income distribution, Value Judgments and Welfare», *Quarterly Journal of Economics*, **70**, 1956.

—— y J. ROTHENBERG, «How Income Ought to be Distributed: Paradox Lost», *Journal of Political Economy*, **69**, 1961.

——, «How Income Ought to be Distributed; Paradox Enow», *Journal of Political Economy*, **70**, 1962.

FRIEDMAN, M., «Lerner on the Economics of Control», *Journal of Political Economy*, **55**, 1947.

——, «The Expected-Utility Hypotheses and the Measurability of Utility», *Journal of Political Economy*, **60**, 1952.

——, *Essays in Positive Economics*, University of Chicago Press, Chicago, 1953.

FRIEDMAN, M., y L. J. SAVAGE, «The Utility Analysis of Choices Involving Risk», *Journal of Political Economy*, **56**, 1948.

FISCH, R., *New Methods of Measuring Marginal Utility*, Mohr, Tübingen, 1932.

——, *Maxima and Minima: Theory and Economic Applications*, Rand McNally, Nueva York, 1966.

GARMAN, M., y M. KAMIEN, «The Paradox of Voting: Probability Calculations», Behavioral Science, **13**, 1968.

GAUTHIER, D. P., «Morality and Advantage», *Philosophical Review*, **74**, 1967.

——, «Hare's Debtors», *Mind*, **77**, 1968.

GEORGESCU-ROEGEN, N., *Analytical Economics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1966.

GOODMAN, L. A., y H. MARKOWITZ, «Social Welfare Functions Based on Individual Rankings», *American Journal of Sociology*, **58**, 1952.

GORMAN, W. M., «Community Preference Fields», *Econometrica*, **21**, 1953.

——, «The Intransitivity of Certain Criteria Used in Welfare Economics», *Oxford Economic Papers*, N. S., **7**, 1955.

——, «Are Social Indifference Curves Convex?» *Quarterly Journal of Economics*, **73**, 1959.
——, «The Structure of Utility Functions», *Review of Economic Studies*, **35**, 1968.
GRAAFF, J. DE V., «On Optimum Tariff Structures», *Review of Economic Studies*, **17**, 1949.
——, *Theoretical Welfare Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1957.
——, «On Making Recommendations in a Democracy», *Economic Journal*, **72**, 1962.
GRAMSCI, A., *The Modern Prince and Other Writings*, trad. por L. Marks, Lawrence & Wishart, Londres, 1967.
GRANGER, G. G., *La Mathématique Sociale du Marquis de Condorcet*, Presses Universitaires de France, Paris, 1956.
GUILBAUD, G. Th., «Les Théories de l'Intérêt Général et le Probléme Logique de l'Aggrégation», *Économie Appliquée*, **5**, 1952.
HALMOS, P. R., *Algebraic Logic*, Chelsea, Nueva York, 1962.
HANSSON, B., «Choice Structures and Preference Relations», *Synthese*, **18**, 1968.
——, «On Group Preferences», *Econometrica*, **37**, 1969.
——, «Voting and Group Decision Functions», *Synthese*, en prensa.
HARE, R. M., *The Language of Morals*, Clarendon Press, Oxford, 1952; 2.ª ed., 1961.
——, *Freedom and Reason*, Clarendon Press, Oxford, 1963.
HARSANYI, J. C., «Cardinal Utility in Welfare Economics and in the Theory of Risk Taking», *Journal of Political Economy*, **61**, 1953.
——, «Cardinal Welfare, Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility», *Journal of Political Economy*, **63**, 1955.
——, «Approaches to the Bargaining Problem Before and After the Theory of Games: A Critical Discussion of Zeuthen's, Hicks', and Nash's Theories», *Econometrica*, **24**, 1956.
——, «Ethics in Terms of Hypothetical Imperatives», *Mind*, **67**, 1958.
——, «A General Theory of Rational Behavior in Game Situations», *Econometrica*, **34**, 1966.
HERSTEIN, I. N., y J. MILNOR, «An Axiomatic Approach to Measurable Utility», *Econometrica*, **21**, 1953.
HERZBERGER, H., «Ordinal Choice Structures», mimeografiado, 1968; *Econometrica*, próxima aparición.
HICKS, J. R., *Value and Capital*, Clarendon Press, Oxford, 1939.
——, «The Foundations of Welfare Economics», *Economic Journal*, **48**, 1939a.
——, «The Valuation of Social Income», *Economic*, N. S., **7**, 1940.
——, «The Rehabilitation of Consumers' Surplus», *Review of Economic Studies*, **8**, 1941.
——, «Consumers' Surplus and Index Numbers», *Review of Economic Studies*, **9**, 1942.
——, «The Valuation of Social Income: A Comment on Professor Kuznets' Reflections», *Economica*, N. S., **15**, 1948.
HILBERT, D., y W. ACKERMANN, *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea, Nueva York, 1960.
HILDRETH, C., «Alternative Conditions for Social Ordering», *Econometrica*, **21**, 1953.
HOBSBAWM, E. J., «Where are British Historians Going?», *The Marxist Quarterly*, **2**, 1955.

HOOK, S., ed., *Human Values and Economic Policy*, New York University Press, Nueva York, 1967.

HOUTHAKKER, H. S., «Revealed Preference and the Utility Function», *Economica*, **17**, 1950.

——, «On the Logic of Preference and Choice», en A. T. Tyminieniecka, ed., *Contributions to Logic and Methodology in Honor of J. M. Bochenski*, North-Holland, Amsterdam, 1965.

HURWICZ, L., «Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance», *Cowles Commission Discussion Paper, Statistics*, **370**, 1951.

——, «Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes», en Arrow, Karlin y Suppes (1960).

INADA, K., «Alternative Incompatible Conditions for a Social Welfare Function», *Econometrica*, **23**, 1955.

——, «On the Economic Welfare Function», *Econometrica*, **32**, 1964.

——, «A Note on the Simple Majority Decision Rule», *Econometrica*, **32**, 1964a.

——, «On the Simple Majority Decision Rule», *Econometrica*, **37**, 1969.

INTERNATIONAL ECONOMIC ASSOCIATION, *Economics of the Public Sector*, comunicaciones presentadas en la Round-Table Conference en Biarritz, 1966; J. Margolis y H. Guitton, eds., *Public Economics*, Macmillan, Londres, 1969.

JENSEN, N. E., «An Introduction to the Bernouillan Utility Theory», *Swedish Journal of Economics*, **69**, 1967.

JOHANSEN, L., *Public Economics*, North-Holland, Amsterdam, 1965.

KAHN, R. F., «Some Notes on Ideal Output», *Economic Journal*, **45**, 1935.

KALDOR, N., «Welfare Propositions in Economics», *Economic Journal*, **49**, 1939.

——, «A Comment (on Baumao)», *Review of Economic Studies*, **14**, 1946.

KANT, I., *Grundlegung zur Metaphysik der Sitten*, 1785; traducción al inglés de T. K. Abbot, *Fundamental Principles of the Metaphysics of Ethics*, 3.ª ed., Longmans, Londres, 1907.

——, *Critik der practischen Vernunft*, 1788; traducción al inglés de L. W. Beck, *Critique of Practical Reason*, Liberal Arts Press, Nueva York, 1956.

KEMP, M. C., «Arrow's General Possibility Theorem», *Review of Economic Studies*, **21**, 1954.

KENEN, P. B., y F. M. FISHER, «Income Distribution, Value Judgments and Welfare: A Correction», *Quarterly Journal of Economics*, 71, 1957.

KENNEDY, C. M., «The Common Sense of Indiference Curves», *Oxford Economic Papers*, N. S., **2**, 1950.

——, «The Economic Welfare Function and Dr. Little's Criterion», *Review of Economic Studies*, **20**, 1953.

——, «Comments (on Little and Sen)», *Economic Journal*, **73**, 1963.

KLAHR, D. A., «Computer Simulation of the Paradox of Voting», *American Political Science Review*, **60**, 1966.

KNIGHT, F. H., *The Ethics of Competition*, Allen and Unwin, Londres, 1935.

KOLM, S. Ch., «The Optimum Production of Social Justice», en International Economic Association, véase más arriba, 1966.

KOOPMANS, T. C., «Efficient Allocation of Resources», *Econometrica*. **19**, 1951.

——, *Three Essays on the State of Economic Science*, McGraw-Hill, Nueva York, 1957.

——, «Stationary Ordinal Utility and Impatience», *Econometrica*, **28**, 1960.
——, «Structure of Preference over Time», *Cowles Foundation Discussion Paper, 206*, 1966.
——, P. A. DIAMOND y R. E. WILLIAMSON, «Stationary Utility and Time Perspective», *Econometrica*, **32**, 1964.
KUHN, H. W., Y A. W. TUCKER, *Contributions to the Theory of Games*, Princeton University Press, Princeton, Vol. I, 1950, y Vol II. 1953.
KUZNETS, S., «On the Valuation of Social Income: Reflections on Professor Hicks' Article», *Economica*, N. S., **15**, 1958.
LANCASTER, K., «Welfare Propositions in Terms of Consistency and Extended Choice», *Economic Journal*, **68**, 1958.
——, «Welfare and Expanded Choice: Proof of the General Case», *Economic Journal*, **69**, 1959.
——y R. G. Lipsey, «The General Theory of the Second Best», *Review of Economic Studies*, **24**, 1957.
LANG, O., «The Foundations of Welfare Economics», *Econometrica*, **10**, 1942.
——, «The Scope and Method of Economics», *Review of Economic Studies*, **13**, 1945.
—— y F. M. TAYLOR, *On the Economic Theory of Socialism*, University of Minnesota Press, Minneapolis, 1952.
LAPLACE, P. S., *Théorie Analytique des Probabilités*, 2.ª ed., 1814.
LASLETT, P., y W. G. RUNCIMAN, *Philosophy, Politics, and Society, First Series*, Blackwell, Oxford, y Macmillan, Nueva York, 1958; *Second Series*, Blackwell, Oxford, y Macmillan, Nueva York, 1958; *Second Series*, Blackwell, Oxford, y Barnes y Noble, Nueva York, 1962; *Third Series*, Blackwell Oxford, y Barnes y Noble, Nueva York, 1967.
LEIBENSTEIN, H., «Notes on Welfare Economics and the Theory of Democracy», *Economic Journal*, 72, 1962.
——, «Long-Run Welfare Criteria», en Margolis, 1965.
LEIBERMAN, B., «Combining Individual Preferences into Social Choice», *Research Memorandum SP -III. 3*, Department of Sociology, University of Pittsburgh, Pittsburgh, 1967.
LENIN, V. I., *The State and Revolution*, Foreign Languages Publishing House, Moscú, 1966.
LEONTIEF, W., «A Note on the Interrelations of Subsets of Independent Variables of a Continuous Function with Continuous First Derivatives.» *Bulletin of American Mathematical Society*, 53, 1947.
—, «Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationships», *Econometrica*, **15**, 1947a.
LERNER, A. P., *Economics of Control*, Macmillan, Nueva York, 1944.
LITTLE, I. M. D., «A Reformulation of the Theory of Consumer's Behavior», *Oxford Economic Papers*, N. S., **1**, 1949.
——, «The Foundations of Welfare Economics», *Oxford Economic Papers*, N. S., **1**, 1949 (1949a).
——, *A Critique of Welfare Economics*, Clarendon Press, Oxford, 1950, 2.ª ed., 1957.
——, «Social Choice and Individual Values», *Journal of Political Economy*, **60**, 1952.
——, «Welfare Criteria: An Exchange of Notes», *Economic Journal*, **72**, 1962.

LITTLE, I. M. D., «Comments (on Dobb and Sen)», *Economic Journal*, **73**, 1963.
LORIMER, P., «A Note on Orderings» *Econometrica*, **35**, 1966.
LUCAS, J. R. «Moralists and Gamesmen», *Philosophy*, **34**, 1959.
LUCE, R. D., «Semi-orders and a Theory of Utility Discrimination», *Econometrica*, **24**, 1956.
——, «Two Extensions of Conjoint Measurement», *Journal of Mathematical Psychology*, **3**, 1966.
LUCE R. D., y H. RAIFFA, *Games and Decisions*, Wiley, Nueva York, 1957.
—— y J. W. TUKEY, «Simultaneous Conjoint Measurement: A New Type of Fundamental Measurement», *Journal of Mathematical Psychology*, **1**, 1964.
MADELL, G., «Hare's Prescriptivism», *Analysis*, **26**, 1965.
MAJUMDAR, T., «Choice and Revealed Preference», *Econometrica*, **24**, 1956.
——, «Armstrong and the Utility Measurement Controversy», *Oxford Economic Papers*, N. S., **9**, 1957.
——, *The Measurement of Utility*, Macmillan, Londres, 1958; 2.ª ed., 1962.
——, «Sen's General Theorem on Transitivity of Majority Decisions: An Alternative Approach», en T. Majumdar, ed., *Choice and Growth*, Oxford University Press, Calcuta, 1969.
——, «A Note on Arrow's Postulates for a Social Welfare Function: A Comment», *Journal of Political Economy*, **77**, 1969 (1969a)
MALINVAUD, E., «Note on von Neumann-Morgenstern Strong Independence Axiom», *Econometrica*, **20**, 1952.
——, «Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources», *Econometrica*, **21**, 1953; «A Corrigendum», *Econometrica*, **30**, 1962.
MANNE, A. S., «The Strong Independence Assumption-Gasoline Blends and Probability Mixtures», *Econometrica*, **20**, 1952.
MARGLIN, S. A., «The Social Rate of Discount and the Optimal Rate of Investment», *Quarterly Journal of Economics*, **77**, 1968.
MARGOLIS, J., ed., *The Public Economy of Urban Communities*, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1965.
MARSCHAK, J., «Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility», *Econometrica*, **18**, 1950; «Errata», *Econometrica*, **18**, 1950.
MARSHALL, A., *Principles of Economics*, Macmillan, Londres, 1890; 9.ª ed. (con comentarios de diversos autores), Macmillan, Londres, 1961.
MARX, K., *Economic and Philosophic Manuscript of 1844*, Foreign Languages Publishing House, Moscú, 1959.
——, *Critique of the Gotha Programme*, 1875; Foreign Languages Publishing House, Moscú, 1967.
—— y F. ENGELS, *Manifesto of the Communist Party*, 1848; Foreign Languages Publishing House, Moscú, 1948.
MAY, K. O., «A Set of Independent, Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision», *Econometrica*, **20**, 1952.
——, «A Note on Complete Independence of the Conditions for Simple Majority Decision», *Econometrica*, **21**, 1953.
——, «Intransitivity, Utility and Aggregation in Preference Patterns», *Econometrica*, **41**, 1966.

McGarvey, D. C., «A Theorem in the Construction of Voting Paradoxes», *Econometrica*, **21**, 1953.

Meade, J. E., «Welfare Criteria: An Exchange of Notes», *Economic Journal*, **72**, 1962.

Mill, J. S., *On Liberty*, 1859; Gateway, Nueva York, 1959.

——, *Utilitarism*, 1863; Dent, Londres, 1929.

Mills, C. W., *The Power Elite*, Oxford University Press, Nueva York, 1953.

Minnesota Symposium, *Consumption Theory without Transitive Indifference*, inédito, 1969.

Mishan, E. J., «An Investigation into Some Alleged Contradictions in Welfare Economics», *Economic Journal*, **67**, 1957.

Mishan, E. J., «Arrow and the 'New Welfare Economics': A restatement», *Economic Journal*, **68**, 1958.

——, «A Survey of Welfare Economics, 1939-59», *Economic Journal*, **70**, 1960.

——, «Welfare Criteria: An Exchange of Notes», *Economic Journal*, **72**, 1962.

——, «The Welfare Criteria that Aren't», *Economic Journal*, 74, 1964.

Montague, R., «Universalizability», *Analysis*, **25**, 1965.

Morris, W. E., «Professor Sen and Hare's Rule», *Philosophy*, **41**, 1966.

Murakami, Y., «A Note on the General Possibility Theorem of Social Welfare Functions», *Econometrica*, **29**, 1961.

——, «Formal Structure of Majority Decisions», *Econometrica*, **34**, 1966.

——, *Logic and Social Choice*, Macmillan, Londres, y Dover, Nueva York, 1968.

Myint, H., *Theories of Welfare Economics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1948.

Myrdal, G., *The Political Elements in the Development of Economics*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1954.

——, *Value in Social Theory*, editado por P. Streeten, Routledge, Londres, 1958.

Nanson, E. J., «Methods of Elections», *Transactions and Proceedings of the Royal Society of Victoria*, **18**, 1882.

Nash, J. F., «The Barding Problem», *Econometrica*, **18**, 1950.

——, «Two-Person Cooperative Games», *Econometrica*, **21**, 1953.

Neumann, J. von, y O Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1947.

Newman, P., «Mr. Lancaster on Welfare and Choice», *Economic Journal*, **69**, 1959.

Neyman, J., ed., *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, 1951; *Third Symposium*, University of California Press, Berkeley, 1956.

Nicholson, M. B., «Conditions for the 'Voting Paradox' in Committee Decisions», *Metroeconomica*, **42**, 1956,

Niemi, R., «Majority Decision-Marking with Partial Unidimensionality», *American Political Science Review*, **63**, 1969.

—— y H. Weisberg, «A Mathematical Solution for the Probability of the Paradox of Voting», *Behavioral Sciences*, **13**, 1968.

Nowell-Smith, P. H., *Ethics*, Penguin Books, Harmondsworth, 1954.

Olafson, F. A., ed., *Justice and Social Policy*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.

OLSON, M. N., *The Logic of Collective Action*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1964.

PARETO, V., *Cours d'Économie Politique*, Rouge, Lausana, 1897.

——, *Manuale di Economia Politica*, Societa Editrice Libraria, Milán, 1906; traducción al francés (revisada), *Manuel d'Économie Politique*, Giard, París, 1909.

PARK, R. E., «Comment (on Coleman)», *American Economic Review*, **57**, 1967.

PARSONS, T., y E. SHILS, *Toward a General Theory of Value*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1951.

PATTANAIK, P. K., «Aspects of Welfare Economics», *Ph. D. Thesis*, Delhi University, 1967.

——, «A Note on Leibenstein's 'Notes on Welfare Economics and the Theory of Democracy'», *Economic Journal*, **77**, 1967 (1967a).

——, «A Note on Democratic Decisions and the Existence of Choice Sets», *Review of Economic Studies*, **35**, 1968.

——, Risk, Impersonality and the Social Welfare Functions», *Journal of Political Economy*, **76**, 1968 (1968a).

——, «Transitivity and Choice under Multi-Stage Majority Decisions», *Discussion Paper 52*, Harvard Institute of Economic Research, 1968b.

——, «Sufficient Conditions for the Existence of a Choice Set under Majority Voting»; *Working Paper 14*, Delhi School of Economics, 1966. *Econometrica*, próxima aparición.

——, «A Generalization of Some Theorems on the Transitivity of Social Decisions with Restricted Individual Preferences», mimeografiado, 1969.

PIGOU, A. C., *The Economic of Welfare*, Macmillan, Londres, 1920.

PLOTT, C. R., «A Notion of Equilibrium and Its Possibility under Majority Rule», *American Economic Review*, **57**, 1967.

PRATT, J. W. RAIFFA y R. O. SCHLAIFER, *Introduction to Statistical Decision Theory*, McGraw-Hill, Nueva York, 1965.

QUINE, M. V., *Mathematical Logic*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1940; ed. rev., 1951; Harper, Nueva York, 1962.

RADER, T., «The Existence of a Utility Function to Represent Preferences», *Review of Economic Studies*, **31**, 1963.

RADNER, R., y J. MARSCHAK, «Note on Some Proposed Decision Criteria», en Thrall, Combs y Davis, 1954.

RAIFFA, H., «Arbitration Schemes for Generalized 2-person Games», en Kuhn y Tucker, 1953.

——, *Decisión Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., y Londres, 1968.

RAMSEY, F. P., *The Foundations of Mathematics*, Harcourt, Brace, Nueva York y Trubner, Borden, Londres, 1931.

RAPOPORT, A., *Fights, Games, and Debates*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1960.

RAWLS, J., «Outline of a Decision Procedure for Ethics», *Philosophical Review*, **60**, 1951.

——, «Two Concepts of Rules», *Philosophical Review*, **64**, 1955.

——, «Justice as Fairness», *Philosophical Review*, **67**, 1958; reimpreso en Olafson, 1961, y Laslett y Runciman, 1962.

RAWLS, J., «Constitutional Liberty and the Concept of Justice», en C. J. Friedrich y J. Chapman, eds., *Justice; Nomos 8*, Atherton Press, Nueva York, 1963.
——, «The Sense of Justice», Philosophical Review, **72**, 1963 (m1963a).
——, «Distributive Justice», en Laster y Runciman, 1967.
RAWLS, J., «Chapters on Justice», materials for Philosophy 171 at Harvard University, no publicado, 1968.
REDER, M. W., *Studies in the Theory of Welfare Economics*, Columbia University Press, Nueva York, 1947.
——, «Theories of Welfare Economics», *Journal of Political Economy*, **58**, 1950.
RESCHER, N., ed., *The Logic of Decisions and Action*, University of Pittsburg Press, Pittsburg, 1967.
RICHTER, M. R., «Revealed Preference Theory», *Econometrica*, **34**, 1966.
RICKER, W., «Voting and the Summation of Preferences: An Interpretative Bibliographical Review of Selected Developments during the Last Decade», *American Political Science Review*, **55**, 1961.
——, «Arrow's Theorem and Some Examples of the Paradox of Voting», en Ulmer, 1965.
ROBBINS, L., *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science*, Macmillan, Londres, 1932.
ROBERSTON, D. H., *Utility and All That*, Macmillan, Londres, 1952.
——, «Utility and All What?», *Economic Journal*, **64**, 1954.
ROBINSON, J., *Economic Philosophy*, Aldine, Chicago, 1962.
ROSS, W. D., *The Right and the Good*, Clarendon Press, Oxford, 1930.
ROSSER, J. B., y A. R. TURQUETTE, *Many-Valued Logics*, North-Holland, Amsterdam, 1952.
ROTHENBERG, J., «Conditions for a Social Welfare Function», *Journal of Political Economy*, **61**, 1953.
——, «Marginal Preference and the Theory of Welfare», *Oxford Economic Papers*, N. S., **5**, 1953a.
——, «Non-convexity, Aggregation and Pareto Optimality», *Journal of Political Economy*, **68**, 1960.
——, *The Measurement of Social Welfare*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1961.
ROUSSEAU, J. J., *Du Contrat Social*, 1763; traducción al inglés de M. Cranston, *The Social Contract*, Penguin Books, Harmondsworth, 1968.
RUGGLES, N., «The Welfare Basis of Marginal Cost Pricing Principle», *Review of Economic Studies*, **17**, 1949.
RUNCIMAN, W. G., *Social Justice*, Cambridge University Press, Cambridge, 1965.
—— y A. K. SEN, «Games, Justice, and the General Will», *Mind*, **74**, 1965.
RUSSELL, B., *Principles of Mathematics*, 2.ª ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1938.
——, *Philosophical Essays*, Longmans, Londres, 1910; Allen y Unwin, Londres, 1966; Simon y Schuster, Nueva York, 1967.
SAMUELSON, P. A., *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1947.
——, «Consumption Theory in Terms of Revealed Preference», *Economica*, N. S., **15**, 1948.

——, «Evaluation of Real National Income», *Oxford Economic Papers*, N. S., **2**, 1950.
——, «The Problem of Integrability in Utility Theory», *Economica*, N. S., **17**, 1950 (1950a).
——, «Probability, Utility and the Independence Axiom», *Econometrica*, **20**, 1952.
——, «Social Indifference Curves», *Quarterly Journal of Economics*, **70**, 1956.
——, «A. P. Lerner at Sixty», *Review of Economic Studies*, **31**, 1964.
——, *Collected Scientific Papers*, editado por J. Stiglitz, Vols. I y II, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1966.
——, «Arrow's Mathematical Politics», en Hook, 1967.
SAVAGE, L. J., «Note on the Strong Independence Assumption», *Econometrica*, **20**, 1950.
——, *The Foundations of Statistics*, Wiley, Nueva York, 1954.
SCITOVSKY, T., «A Note on Welfare Propositions in Economics», *Review of Economic Studies*, **9**, 1941.
——, «A Reconsideration of the Theory of Tariffs», *Review of Economic Studies*, **9**, 1942.
——, «The State of Welfare Economics», *American Economic Review*, **41**, 1951.
——, *Papers on Welfare and Growth*, Stanford University Press, Standford, 1964.
SCOTT, O., y P. SUPPES, «Foundational Aspects of Theories of Measurement», *Journal of Symbolic Logic*, **23**, 1958.
SEARLE, J. R., «How to Derive 'Ought' from 'Is'», *Philosophical Review*, **73**, 1964.
——, *Speech Acts*, Cambridge University Press, Londres, 1969.
SEN, A. K., «Distribution, Transitivity, and Little's Welfare Criteria», *Economic Journal*, **73**, 1963.
——, «Preferences, Votes and the Transitivity of Majority Decisions», *Review of Economic Studies*, **31**, 1964.
——, «Mishan, Little, and Welfare: A Reply», *Economic Journal*, **75**, 1965.
——, «A Possibility Theorem on Majority Decisions», *Econometrica*, **34**, 1966.
——, «Hume's Law and Hare's Rule», *Philosophy*, **41**, 1966 (1966a).
——, «Planners' Preferences: Optimality, Distribution, and Social Welfare», en International Economic Association, véase más arriba, 1966 (1966b).
——, «The Nature and Classes of Prescriptive Judgments», *Philosophical Quarterly*, **17**, 1967.
——, «Isolation, Assurance, and the Social Rate of Discount», *Quarterly Journal of Economics*, **81**, 1967 (1967a).
——, «Quasi-Transitivity, Racional Choice and Collective Decisions», *Review of Economic Studies*, **36**, 1969.
——, «The Impossibility of a Paretian Liberal», *Journal of Political Economy*, **78**, 1970.
——, «Interpersonal Aggregation and Partial Comparability», *Econometrica*, **38**, 1970 `1970a).
—— y P. K. PATTANAIK, «Necessary and Sufficient Conditions for Rational Choice under Majority Decision», *Journal of Economic Theory*, **1**, 1969.
SHUBIK, M., ed., *Essays in Mathematical Economics*, Princeton University Press, Princeton, 1967.

SIDGWICK, H., *The Method of Ethics*, Macmillan, Londres, 1907; Dover, Nueva York, 1966.
SIEGEL, S., y L. E. FOURAKER, *Bargaining and Group Decision Making*, MacGraw-Hill, Nueva York, 1960.
SINGER, M. S., *Generalizations in Ethics*, Knopf, Nueva York, 1961.
SONNENSCHEIN, H., «The Relationship between Transitive Preference and the Structure of Choice Space», *Econometrica*, **33**, 1965.
——, «Reply to 'A Note on Orderings'», *Econometrica*, **35**, 1967.
STEVENS, S. S., «Mathematics, Measurement and psychophysics», en S. S. Stevens, ed., *Handbook of Experimental Psychology*, Wiley, Nueva York, 1951.
——, «Psychophysics of Sensory Function», *The American Scientist*, **48**, 1961.
STEVENSON, C. L., *Ethics and Language*, Yale University Press, New Haven, 1944.
——, *Facts and Values: Studies in Ethical Analysis*, Yale University Press, New Haven, 1963.
STIGLER, G. J., «A Note on the Welfare Economics», *American Economic Review*, **30**, 1943.
STREETEN, P., «Economics and Value Judgment», *Quarterly Journal of Economics*, **64**, 1950.
——, «Introduction», in Myrdal, 1958.
STROTZ, R. H., «How Income Ought to de Distributed; A Paradox in Distributive Ethics», Journal of Political Economy, **66**, 1958.
——, «How Income Ought to be distributed: Paradox Regained», *Journal of Political Economy*, **69**, 1961.
SUPPES, P., «The Role of Subjective Probability and Utility in Decision Making», in Neyman, 1956.
——, *Introduction to Logic*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1958.
——, «Some Formal Models of Grading Principles», Synthese, **6**, 1966.
—— y D. DAVIDSON, «A Finitistic Axiomatization of Subjective Probability and Utility», *Econometrica*, **24**, 1956.
—— y M. WINET, «An Axiomatization of Utility Based on the Notion of Utility Differences», *Management Science*, **1**, 1955.
SZPILRAJN, E., «Sur l'Extension de l'Ordre Partiel», *Fundamenta Mathematicae*, **16**, 1930.
TARSKI, A., *Introduction to Logic*, Oxford University Press, Nueva York, 1941; 2.ª ed., 1946, 3.ª ed., 1965.
THEIL, H., «On the Symmetry Approach to the Committee Decision Problem», *Management Science*, **9**, 1963.
THRALL, R. M., D. H. COOMBS y R. L. DAVIS, eds., *Decision Processes*, Wiley, Nueva York, 1954.
THRUSTONE, L. L., «A Law of Comparative Judgment», *Psychological Review*, **34**, 1927.
TINTER, G., «A Note on Welfare Economics», *Econometrica*, **14**, 1946.
TULLOCK, G., «Problems of Majority Voting», *Journal of Political Economy*, **67**, 1959.
——, «Reply to a Traditionalist», *Journal of Political Economy*, **69**, 1961.
TULLOCK, G., «The Irrationality of Intransitivity», *Oxford Economic Papers*, N. S., **16**, 1964.

——, «The General Irrelevance of the General Imposibility Theorem», Quarterly Journal of Economics, **81**, 1967.

——, *Towards a Mathematics of Politics*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1968.

ULMER, S., et al., *Mathematical Applications in Political Science*, Southern University Press, 1965.

UZAWA, H., «Preference and Rational Choice in the Theory Consumption», en Arrow, Karlin y Suppes, 1960.

VEBLEN, T., *The Theory of the Leisure Class*, Macmillan, Londres, 1899.

VICKREY, W., «Measuring Marginal Utility by Reactions to Risk», *Econometrica*, **13**, 1945.

——, «Utility, Strategy, and Social Decision Rules», *Quarterly Journal of Economics*, **74**, 1960.

WARD, B., «Majority Voting and Alternative Forms of Public Enterprise», en Margolis, (1965).

WELDON, J. C., «On the Problem of Social Welfare Functions», *Canadian Journal of Economics and Political Science*, **18**, 1952.

WHITEHEAD, A. N., y B. RUSSEL, *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1913.

WICKSELL, K., *Lectures on Political Economy*, Routledge, Londres, 1935.

WILLIAMSON, O. E., y J. G. SARGENT, «Social Choice: A Probabilistic Approach», *Economic Journal*, **77**, 1967.

WILSON, J. Q., y E. C. BANFIELD, «Public Regardingness as a Value Premise and Voting Behavior», American Political Science Review, **52**, 1958.

WILSON, R., «An Axiomatic Model of Logrolling», *Working Paper No. 3*, Graduate School of Business, Standford University, 1968.

——, «A Class of Solutions for Voting Games», *Working Paper No. 156*, Graduate School of Business, Standford University, 1968 (1968a).

——, «A Game Theoretic Analysis of Social Choice», *Discussion Paper No. 2*, Institute of Public Policy Analysis, Standford University, 1968 (1968b).

WRIGHT, G. H. von, *The Logic of Preference*, Edinburgh University Press, Edinburgh, 1963.

ZECKHAUSER, R., «Group Decision and Allocation», *Discussion Paper No. 51*, Harvard Institute of Economic Research, 1968.

——, «Majority Rule with Lotteries on Alternatives», *Quarterly Journal of Economics*, **83**, 1969.

ZEUTHEN, F., *Problems of Monopoly and Economic Warfare*, Routledge, Londres, 1930.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM
SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

INDICE DE AUTORES

Ackermann, W., 23
Armstrong, W. E., 119
Arrow, K. J., 13, 17, 18, 21, 24, 29, 33, 34, 36, 38, 43, 46, 54-9, 66-9, 72, 90, 91, 96, 103, 104, 108, 118, 120, 123-24, 153, 158, 164, 165, 169, 174, 178, 205, 211, 227, 233, 238, 241.
Ayer, A. J., 86

Banerji, D., 3, 53
Baumol, W. J., 80
Bentham, J., 125
Bergson, A., 51-4
Bernouilli, D., 121
Bigelow, H., 12
Birkhoff, G., 24
Black, D., 197, 204, 211
Black, M., 78
Blau, J., 55
Borda, J. C., 119
Bourbaki, N., 24
Braithwaite, R. B., 151-52, 168, 231
Buchanan, J. M., 41-3, 91, 235
Campbell, C. D., 199
Carnap, R., 23
Cassen, R., 13, 40
Chernoff, H., 34
Chipman, J. S., 53
Church, A., 23, 24
Coleman, J. S., 235, 236
Condorcet, Marquis de, 33, 57
Coombs, C. H., 205

Dasgupta, P., 13
Debreu, G., 17, 24, 38, 53, 121
De Meyer, F., 200
Devarajan, C. G., 12
Diamond, P., 13, 176-78, 238
Dobb, M. H., 12, 79, 127
Dodgson, C. L. (Lewis Carroll), 57, 197
Dunford, N., 116

Edgeworth, F. T., 119

Fenchel, W., 247
Fishburn, P. C., 206
Fisher, F. M., 13, 40, 127, 176
Fleming, M., 175

Garman, M., 200, 202, 208
Gauthier, D. P., 167
Gibbard, A., 13, 68

Goodman, L. A., 119-20
Gorman, W. M., 48, 81, 121
Graaff, J. de V., 13, 52, 77, 79, 85
Gramsci, A., 232
Guilbaud, G.-Th., 199, 200

Hahn, F. H., 13
Hansson, B., 13, 36, 90, 234
Hare, R. M., 78, 81, 164-67, 170, 174, 182
Harsanyi, J., 13, 87-8, 124, 150, 151, 156, 174-78, 182, 184
Herzberger, H., 13, 31, 36
Hicks, J. R., 54, 78
Hilbert, D., 23
Hildreth, C., 125
Hobsbawn, E. J., 20
Houthakker, H. S., 65
Hume, D., 78
Hurwicz, L., 173

Inada, K., 13, 55, 206, 207, 212, 223

Kaldor, N., 47-48, 77
Kamien, M., 200, 202, 208
Kant, I., 163, 240
Kenen, P. B., 40
Klahr, D. A., 200, 202
Koopmans, T. C., 13, 121, 238

Laplace, P.-S., 197
Lange, O., 101
Lawrence, D. H., 104
Lefevre, G., 16
Leibenstein, H., 88, 174
Lenin, V. I., 56, 152
Leontief, W., 121
Lerner, A. P., 13, 88, 101, 127, 237, 238
Lincoln, A., 56
Little, I. M. D., 48, 77, 79, 85, 119, 125
Lorimer, P., 36
Lucas, J. R., 151
Luce, R. D., 34, 124, 150-51, 156-58, 173, 233

Madell, G., 167
Majumdar, T., 13, 206, 233
Malinvaud, E., 124
Manne, A., 124
Marglin, S. A., 13
Markowitz, H., 119-20
Marschak, J., 34, 122-24, 158, 174, 176
Marx, K., 1, 89, 152
May, K. O., 90, 93, 95
Mirrlees, J., 13
Mishan, E. J., 77, 127
Montague, R., 167
Morgenstern, O., 118, 121-25
Murakami, Y., 41, 55, 96, 209, 234-35

Nanson, E. J., 57, 58
Nash, J. F., 34, 147-53, 156-59, 229, 231
Nerón, Emperador, 126
Neumann, J., von, 118, 121-25, 174-75
Niemi, R., 200-02, 208
Nowell-Smith, P. H., 81

Pareto, V., 37, 51-2
Pattanaik, P. K., 13, 31, 88, 174, 175, 206-9, 211-12
Plott, C. R., 200

Quine, M. V., 23

Radner, R., 34, 158
Raiffa, H., 13, 34, 150-51, 156-58, 168, 173, 231, 233, 239
Ramsey, F. P., 121
Rawls, J., 13, 125, 151, 167-69, 172-74, 178, 182, 184, 191-93
Richter, M. R., 53
Riker, W., 197-99, 254
Robbins, L., 54, 78-9, 84
Robinson, J., 236
Rothenberg, J., 13, 115, 116, 119, 176
Rousseau, J. J., 152, 168
Runciman, W, G., 168
Russell, B., 31

Samuelson, P. A., 13, 48, 51, 53-4, 77-9, 85, 88, 121, 122, 154
Sargent, J. G., 200, 202
Schelling, T., 13
Schwartz, J. T., 116
Scitovsky, T., 47-9, 51-2, 77
Searle, J., 78
Shaw, G. B., 183

Sidgwick, H., 163-64, 166
Singer, M. S., 163
Sonnenschein, H., 36
Starr, R., 13
Starrett, D., 13
Stevenson, C. L., 86
Streeton, P., 79
Strotz, R. H., 176
Suppes, P., 23, 151, 179-85, 187, 189, 192-94
Swamys., 13
Szpilrajn, E., 29

Tarski, A., 17, 23, 24
Tukey, J. W., 124
Tullock, G., 41-3, 91, 200, 235

Vickrey, W., 174, 206

Ward, B., 206
Weisberg, H., 200-02, 208
Whitehead, A. N., 31
Williamson, O. E., 200, 202
Williamson, R. E., 238
Wilson, R., 42, 115, 235

Zeckhauser, R., 13, 239
Zeuthen, F., 150

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

INDICE DE MATERIAS

Aciclicidad, definición, 32, 66, 67
Acuerdo limitado (LA), definición, 207, 212-13
Amenazas, 149-53
Anonimidad (condición A), definición, 90, 94-5
Antisimetría, definición, 23
Asimetría, definición, 23
Asociación positiva, condición de, 91-2
Axioma de débil simetría, 139-142
Axioma de fuerte simetría, 142-43
Axioma de identidad, 191-94
Axioma de identidad completa, 191-94
Axioma de regularidad, 129-30, 138-40

Bastilla, 16
Bienestar del tipo ordinal, definición, 130-31, 144-45
Bienestar ordinal, 53-4, 120-21, 130-31, 132, 144-45
Biología y valores, 143
Bolsa de trabajo, 43

Cabildeo, 42, 235
Cadena, definición, 25
Cardinalidad de medidas de bienestar, 19, 118-25, 132-33, 147-49, 153-55, 156-61, 169-70, 228-31, 233, 235-36, 237
Clases e intereses de clase, 16-7, 20-1, 42-3, 89, 153-54, 201-02, 206-07, 232-33
Combinación funcional, definición, 133
Comercio de votos, 42, 232-33, 235
Comisiones reducidas, 233
Comparabilidad parcial, 126-30, 136-46, 228, 231, 242
Comparabilidad total, definición, 133
Comparabilidad unitaria, defincción, 133-34
Comparaciones interpersonales, 19-20, 116-21, 125-30, 133-44, 149, 153-55, 167-68, 169-85, 199-200, 228-31
Compatibilidad de cuasi-ordenaciones, 29
Completitud, definición, 17, 23
Condiciones de racionalidad para funciones de elección, 16-8, 32-6, 69-70
Condiciones O y O* sobre las reglas de elección colectiva, definición, 59, 71
Conjunto coeficiente, definición, 136, 145
Conjunto de comparación, definición, 133
Conjunto de elección, definición, 25

Conjunto máximo, definición, 25
Conjuntos decisivos, definición, 60-1
Consenso como una base de acción colectiva, 41-3
Cooperación pública y planificación, 233
Criterio maximin de Rawls, 168-73, 191-95, 232
Crítica social y elección colectiva, 152-53, 232-33
Cuasi-ordenación, definición, 18, 38
Cuasi-transitividad, definición, 31, 68
Curvas de indiferencia social, 51

Decisión bajo incertidumbre, 121-26, 171-73, 174-80
Distribución de la renta, 40, 51-2, 68, 81-6, 126-27, 171-73, 209, 237, 238
Dominio no restringido (condición U), 56, 57-8, 59-60, 71-5, 89, 109-10, 159, 203-10, 211-26, 238, 239-41

Economía del bienestar, tradicional, 37-9, 44-9, 51-5, 77-81, 127, 137-39, 240-42
Eficiencia económica, 47, 237-41
Elección colectiva, definición, 39-40, 44-5
Equidad, concepto de Rawls, 167-68, 172-73
Equidad, principio de Sidgwick, 163-64
Equilibrio competitivo, 38, 108
Estructura institucional, 169-70, 171-72, 231-32
Estructura social y reglas de elección colectiva, 19-21, 42, 89, 109, 152-53, 172, 200-03, 241-42
Explotación, 152
Expresión de preferencias individuales, 233-37
Exterioridades, 20-1, 209, 239

Función de bienestar real-valorada, 52-3
Funcional de bienestar (SWFL), 153-54, 159-60
Función de bienestar social, Arrowiana (SWF), definición, 53-5, 59
Función de bienestar social, Bergsoniana (SWF), definición, 51-2
Función de decisión social (SDF), definición, 66-7, 71
Función de elección, definición, 31-2
Función objetiva, 15
Función de solución de regateo, definición, 157

Ganador de mayoría, condiciones necesarias y suficientes para la existencia, 207-08, 222-26
Gente disminuida, 125
Grado de comparabilidad parcial, definición, 141

Hechos y valores, 82-6, 165-66, 239-40

II condición sobre la relación binaria de preferencia, definición, 27
IP condición sobre la relación binaria de preferencia, definición, 27
Impersonalidad, 174-79
Incertidumbre, 121-25, 167-68, 172, 174-79, 237
Independencia de alternativas no relevantes (condición I), 34, 55-6, 58, 60-4, 71-5, 108-09, 115-19, 124-26, 158, 160, 197-98, 240
Individuo, definición, 99
Individuo interesado, definición, 212
Ingredientes de elección colectiva, 16-20, 227-31
Interdependencia de preferencias, 20-1, 38-9, 174-75, 201-02, 203-09, 241-42
Interés, moralidad del, 84
Intransitividad de preferencia individual, 209-10

Juego, gusto para el, 122-23
Juicios básicos, 81-3, 84-6, 87-92, 239-41
Juicios no básicos, 81-3, 84-6, 87-92, 239-41, 242
Juicios de valor y elección colectiva, 20-1, 77-92, 101-09, 118-19, 120-21, 124, 125, 126-30, 150-53, 163-85, 197-99, 233, 236, 238, 239-42
Justicia, concepto de, 11, 125, 151-53, 167-85, 186-95, 220-31, 233

«Liberalismo» (condición L), definición, 102-03, 111, 239

Medida de utilidad de Neumann-Morgenstern, 121-25
Método axiomático, 89-92
Método de decisión de mayoría (MMD), 39, 57, 91-2, 94-6, 197-226, 231-32
Método emotivista para los juicios de valor, 83-6
Método de valor según categorías, 57-8, 115-16, 231

Neutralidad (condición N), 90-1, 93-100, 101-02, 197-98, 209-10, 216-17, 220, 239-40
Niveles de discriminación, 119-21
No-comparabilidad, 134
No-dictadura (condición D), 57-8, 60, 63-4, 67, 71-5
Notas necrológicas y economía del bienestar, 80

Oligarquía, 67-8
Optimalidad de Pareto, 37-8, 47, 91, 107-09, 232, 237-39
Ordenación, definición, 17, 25
Ordenación individual extendida, definición, 187
Ordenación lexicográfica, 53, 121
Ordenación parcial, definición, 25
Ordenación parcial estricta, definición, 25

PI condición de relación binaria de preferencia, definición, 27
PP condición de relación binaria de preferencia, definición, 27
«Paradoja de la votación», 57, 58, 67, 198
Preferencia con un solo máximo, 204-06
Preferencia revelada, 65-6
Preferencias antagonistas, 207
Preferencias dicotómicas, 207
Preferencias ecoicas, 207
Preferencias éticas, concepto de Harsanyi, 87-8, 150, 174-79
Preferencias individuales, orígenes sociales de, 20-1, 90, 109, 201-02, 209, 241-42
Preferencias tabú, 207
Principio de «cosa segura», 122, 176-78
Principio de Pareto (condiciones P y P*), 37-49, 55-6, 57-8, 60-4, 67, 72-5, 78, 91-2, 97-100, 107-09, 129, 134-36, 154, 157, 160, 185, 189-91, 198, 237-40, 241-42
Principios de gradación de justicia, 150-51, 179-85
Probabilidad de la existencia de un vencedor por mayoría, 199-203
Propiedad α, definición, 33, 69
Propiedad β, definición, 33, 69-70

«Realistas» 152, 233
Reflexividad, definición, 17, 23
Regateo, 42, 147-53, 156-59
Regla de mayoría estricta, 221
Regla de mayoría semiestricta, 221-22
«Regla de Oro» del Evangelio, 163
«Regla de Oro», versión Shaviana, 183
Regla del maximin lexicográfica, 170-71, 193
Regla general de elección colectiva, 189
Reglas de elección colectiva (CCR), definición, 39-40, 44-5
Reglas de elección colectiva decisivas, definición, 41, 45
Reglas de elección colectiva inclusivas de Pareto, 39-40, 46
Reglas de extensión de Pareto, 91-2, 97-100, 229-32, 237-40
Relación binaria, definición, 23
Relaciones de Pareto, $\overline{R}.\overline{P}.\overline{I}.$ y $\overline{\overline{P}}$, definición, 45-6
Responsividad no negativa (condición R), 91-2, 96-100, 209-10
Responsividad positiva (condición S), 90, 93-6
Restricción extrema (ER), definición, 207, 212
Restricción de valor (VR), definición, 206-07, 212
Revoluciones, 16, 42, 87, 152, 173, 232
Riesgo, actitud hacia el, 122-23

Sensatez, 19
Simetría, definición, 23

Similitud de circunstancias, 163-67, 240
Statu quo, 41-3, 147-53
Subrelación, definición, 30
Suposición de «fuerte independencia», 121, 122, 176-79

Teorema general de posibilidad, 55-8, 60-4, 66-8, 228, 240-41
Teorema general de posibilidad extendido a utilidades cardinales individuales, 153-55, 160-61
Teoría del juego y bienestar social, 122, 147-53, 168, 181, 235
Tests de compensación, 47
Transformación lineal, definición, 132
Transformación logarítmica, 148
Transitividad, definición, 17, 23

Universalizabilidad de juicios de valor, 164-67, 182, 184
Utilitarismo, 115, 118-25, 130-31, 172-73, 174-75, 178, 184, 198

Valores liberales, 102-04, 106-09, 111-13, 239
Voluntad general, concepto de Rousseau, 168
Votación «round-robin», 235
Votación y estrategia, 233-35
Votar, coste y placer de, 236-37

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Alianza Universidad

Volúmenes publicados

1 H. G. Johnson y otros: **Panoramas contemporáneos de la teoría económica**

2 F. H. Hahn y otros: **Panoramas contemporáneos de la teoría económica**

3 H. A. Simon y otros: **Panoramas contemporáneos de la teoría económica**

4 Enrique Ballestero: **Principios de economía de la empresa**

5, 6 Joachim Matthes: **Introducción a la sociología de la religión**

7 C. U. M. Smith: **Biología molecular: Enfoque estructural**

8 Morton D. Davis: **Teoría del juego**

9, 10 Colin Clark: **Las condiciones del progreso económico**

11 Lewis Mumford: **Técnica y civilización**

12 Erwin Panofsky: **Estudio sobre iconología**

13 Robin Fox: **Sistemas de parentesco y matrimonio**

14 Victor Sánchez de Zavala: **Hacia una epistemología del lenguaje**

15 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. La Revolución Bolchevique. 1. La conquista y organización del poder**

16 D. J. White: **Teoría de la decisión**

17 Martin J. Bailey: **Renta nacional y nivel de precios**

18 Nicolas Bourbaki: **Elementos de historia de las matemáticas**

19 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. La Revolución Bolchevique. 2. El orden económico**

20 C. U. M. Smith: **El cerebro**

21 James L. Riggs: **Modelos de decisión económica**

22 J. H. Elliott y otros: **Revoluciones y rebeliones de la Europa moderna**

23, 24 Kenneth E. Boulding: **Análisis económico**

25 S. A. Barnett: **La conducta de los animales y del hombre**

26 Renate Mayntz: **Sociología de la organización**

27 Werner Sombart: **El burgués**

28 James S. Duesenberry: **La renta, el ahorro y la teoría del comportamiento de los consumidores**

29 Jagjit Singh: **Ideas fundamentales sobre la teoría de la información, del lenguaje y de la cibernética**

30 Milton Friedman: **Teoría de los precios**

31 Walter Kaufmann: **Hegel**

32 Edward J. Kormondy: **Conceptos de ecología**

33 E. Faure y otros: **Aprender a ser**

34 Michael Akehurst: **Introducción al Derecho internacional**

35 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. La Revolución Bolchevique. 3. La Rusia soviética y el mundo**

36 Milton Friedman: **Una teoría de la función de consumo**

37 Angel Cabo, Marcelo Vigil: **Historia de España Alfaguara I. Condicionamientos geográficos. Edad Antigua**

38, 39 Marx W. Wartofsky: **Introducción a la filosofía de la ciencia**

40 J. A. García de Cortázar: **Historia de España Alfaguara II. La época medieval**

41 L. L. Whyte y otros: **Las estructuras jerárquicas**

42 Antonio Domínguez Ortiz: **Historia de España Alfaguara III. El Antiguo Régimen: Los Reyes Católicos y los Austrias**

43 W. V. Quine: **Filosofía de la lógica**

44 Gonzalo Anes: **Historia de España Alfaguara IV. El Antiguo Régimen: Los Borbones**

45 J. Piaget y otros: **Tendencias de la investigación en las ciencias sociales**

46 Miguel Artola: **Historia de España Alfaguara V. La burguesía revolucionaria**

47 Carl G. Hempel: **Filosofía de la Ciencia Natural**

48 Alec Nove: **Historia económica de la Unión Soviética**

49 Miguel Martínez Cuadrado: **Historia de España Alfaguara VI. La burguesía conservadora**

50 Ludwig Wittgenstein: **Tractatus logico-philosophicus**

51 Ramón Tamames: **Historia de España Alfaguara VII. La República. La Era de Franco**

52 Alexander y Margarete Mitscherlich: **Fundamentos del comportamiento colectivo**

53 Nicolás Sánchez-Albornoz: **La población de América Latina**

54 Yona Friedman: **Hacia una arquitectura científica**

55 Rodney M. Coe: **Sociología de la Medicina**

56 Colin Clark, Margaret Haswell: **Teoría económica de la agricultura de subsistencia**

57 C. M. Cipolla y otros: **La decadencia económica de los imperios**

58 Antonio Hernández Gil y otros: **Estructuralismo y derecho**

59, 60, 61 Steven Runciman: **Historia de las Cruzadas**

62 A. Einstein y otros: **La teoría de la relatividad**

63 Juan Díaz del Moral: **Historia de las agitaciones campesinas andaluzas**

64 Alfredo Deaño: **Introducción a la lógica formal**

65, 66 Karl Dietrich Bracher: **La dictadura alemana**

67 Lucy Mair: **Introducción a la antropología social**

68, 69, 70 A. D. Aleksandrov y otros: **La matemática: su contenido, métodos y significado**

71 N. Chomsky y otros: **La explicación en las ciencias de la conducta**

72 Jagjit Singh: **Ideas y teorías fundamentales de la cosmología moderna**

73 Richard S. Rudner: **Filosofía de la ciencia social**

74 A. Bandura y Richard H. Walters: **Aprendizaje social y desarrollo de la personalidad**

75 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. El interregno (1923-1924)**

76, 77 A. C. Crombie: **Historia de la ciencia: De S. Agustín a Galileo**

78 Manuel García Pelayo: **Burocracia y tecnocracia y otros escritos**

79, 80 B. Rusell, R. Carnap, W. V. Quine y otros: **La concepción analítica de la filosofía**

81 Angel Viñas: **La Alemania nazi y el 18 de julio**

82 John J. Taylor: **La nueva Física**

83 Antonio Truyol y Serra: **La sociedad internacional**

84 N. A. Chomsky y otros: **Semántica y sintaxis**

85 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. El socialismo en un solo país. 1. El escenario. El renacimiento económico.**

86 R. Carnap, O. Morgenstern, N. Wiener y otros: **Matemáticas en las ciencias del comportamiento**

87 Anselmo Lorenzo: **El proletariado militante**

88 Theodore Caplow: **Dos contra uno: teoría de coaliciones en las tríadas**

89 J. Daniel Quesada: **La lingüística generativo-transformacional: supuestos e implicaciones**

90 Gerald A. J. Hodgett: **Historia social y económica de la Europa medieval**

91 Enrique Ballestero: **El Balance: una introducción a las finanzas**

92 J. C. Turner: **Matemática moderna aplicada. Probabilidades, estadística e investigación operativa**

93 Charles M. Allan: **La teoría de la tributación**

94 Richard A. Bilas: **Teoría microeconómica**

95 E. K. Hawkins: **Los principios de la ayuda al desarrollo**

96 Alicia Yllera: **Estilística, poética y semiótica literaria**

97 George Dalton: **Sistemas económicos y sociedad**

98 G. Baddeley, G. G. Schlessinger, A. G. Sharpe y otros: **Química moderna.** Selección de J. C. Stark

99 David Metcalf: **La economía de la agricultura**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

100 José Luis Pinillos: **Principios de psicología**

101 William J. Barber: **Historia del pensamiento económico**

102 Patty Jo Watson, Steven A. LeBlanc, Charles L. Redman: **El método científico en arqueología**

103 William P. Alston: **Filosofía del lenguaje**

104 M. Bruce Johnson: **El comportamiento del consumidor. Consumo, renta y riqueza**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

105 Niko Tinbergen: **Estudios de etología. 1**

106 Dennis Swann: **La economía del Mercado Común**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

107 Francisco Rodríguez Adrados: **La Democracia ateniense**

108 Peter Dorner: **Reforma agraria y desarrollo económico**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

109 W. D. Hudson: **La filosofía moral contemporánea**

110 Norman Hampson: **Historia social de la Revolución Francesa.**

111 George Rosen: **Locura y sociedad. Sociología histórica de la enfermedad mental**

112 D. M. Winch: **Economía analítica del bienestar**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

113 Luis Angel Rojo: **Renta, precios y balanza de pagos**

114 Eric H. Lenneberg: **Fundamentos biológicos del lenguaje**

115 David S. Landes, Juan J. Linz, Louise A. Tilly, Charles Tilly y otros: **Las dimensiones del pasado. Estudios de historia cuantitativa.** Selección e introducción de Val R. Lorwin y Jacob M. Price

116 Enrique Ballestero: **Teoría de la contabilidad**

117 Walter Elkan: **Introducción a la teoría económica del desarrollo**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

118 José Luis Pinillos: **Historia y método de la psicología**

119 H. Aiken, Ch. Babbage, J. von Neuman, C. E. Shannon, A. M. Turing, W. G. Walter y otros: **Perspectivas de la revolución de los computadores**

120 E. H. Carr: **Historia de la Rusia Soviética. El socialismo en un solo país (1924-1926) 2. La lucha en el partido. El orden soviético**

121 Erwin Panofsky: **Renacimiento y renacimientos en el arte occidental**

122 Jerrold J. Katz: **La realidad subyacente del lenguaje y su valor filosófico**

123 B. J. Cohen: **Política de balanza de pagos**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

124 Roderick Floud: **Métodos cuantitativos para historiadores**

125 O. R. Frisch, M. F. Hoyaux, A. C. Rose-Innes, J. M. Ziman y otros: **Panorama de la física contemporánea.** Selección y comentarios de David Webber

126 Harry W. Richardson: **Economía del urbanismo**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

127 Robert E. Dowse y John A. Hughes: **Sociología política**

128 A. L. Lehninger, A. J. Marshall, W. M. Court Brown y otros: **Panorama de la biología contemporánea.** Selección y comentarios de Roland Hoste

129 Guillermo Díaz-Plaja: **Estructura y sentido del Novecentismo español**

130 Ronald Findlay: **Comercio y especialización**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

131 Renate Mayntz, Kurt Holm, Peter Hübner: **Introducción a los métodos de la sociología empírica**

132 133 B. J. McCormick, P. D. Kitchin, G. P. Marshall, A. A. Sampson, R. Sedgwick: **Introducción a la economía**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

134 James Littlejohn: **La estratificación social**

135 Alfonso de Cossío: **Instituciones de Derecho Civil, 1**

136 Alfonso de Cossío: **Instituciones de Derecho Civil, 2**

137 Ramón Tamames: **Fundamentos de estructura económica**

138 L. E. Orgel: **Los orígenes de la vida**

139 Michael Barratt Brown: **La teoría económica del imperialismo**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

140 John Boardman: **Los griegos en ultramar: comercio y expansión colonial antes de la era clásica**

141 H. W. Richardson: **Elementos de economía regional**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

142 Alfredo Deaño: **Introducción a la lógica formal, 2. La lógica de predicados**

143 Christopher Freeman: **La teoría económica de la innovación industrial**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

144 Edward R. Tannenbaum: **La experiencia fascista: sociedad y cultura en Italia (1922-1945)**

145 **Nuevos horizontes de la lingüística.** Introducción y selección de John Lyons

146 M. A. Utton: **La concentración industrial**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

147 Ray Hemmings: **Cincuenta años de libertad: Las ideas de A. S. Neill y la escuela de Summerhill**

148 G. K. Helleiner: **Comercio internacional y desarrollo económico**
Curso de Economía Moderna Penguin/Alianza

149 Daniel Bell: **El advenimiento de la sociedad post-industrial. Un intento de prognosis social**

150 Walter L. Wallace: **La lógica de la ciencia en la sociología**

BIBLIOTECA GENERAL
UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
QUITO

FECHA DE DEVOLUCION		

ES
DE
DE LA UNIVERSIDAD CEN-
TRAL, SU VENTA ES PENA-
DA POR LA LEY.

SIB - UCE

FECHA DE DEVOLUCIÓN		

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Al ser muy amplio el campo de actuación de la elección colectiva, la teoría que lo cubre sólo puede ser obra de varias disciplinas, sin que ninguna en particular esté en condiciones de exigir su monopolio; aunque es cierto que constituye un aspecto crucial de la ciencia económica (principalmente de la economía del bienestar y la teoría de la planificación), también se relaciona estrechamente con la ciencia política (en particular con la teoría del estado y la teoría de los procedimientos de decisión) y plantea importantes cuestiones filosóficas vinculadas a la ética (sobre todo a la teoría de la justicia). La autoridad de AMARTYA K. SEN en este sector interdisciplinario, ganada por sus anteriores trabajos monográficos, queda refrendada ahora con la publicación de esta obra de carácter sistemático sobre la relación entre los objetivos de la política social y las preferencias y aspiraciones de los miembros de una sociedad. ELECCION COLECTIVA Y BIENESTAR SOCIAL ha sido concebida tanto para informar a los lectores que sólo se interesen por las conclusiones generales de la teoría como para satisfacer a los especialistas que se preocupan además por la exposición formal y la derivación técnica de los resultados; para hacer compatible este doble objetivo, el profesor Sen ha llevado a cabo un «experimento estilístico» consistente en alternar los capítulos dedicados a los análisis formales y a las demostraciones de teoremas (marcados con un asterisco) con otros que permiten hacerse una idea intuitiva de los principales argumentos utilizados y de las conclusiones finales. Este doble nivel expositivo no es una concesión a la divulgación científica; si bien muchos problemas relacionados con la elección colectiva requieren un tratamiento riguroso (resultando en este caso improcedente los argumentos no técnicos), el sentido y relevancia de los resultados pueden y deben ser examinados mediante el lenguaje ordinario (ya que la discusión puramente formal del signif esul taría innecesariamente limitativa). La en l obra aplican principalmente la lógica stru mentos de lógica utilizados son expue des tinado a los especialistas.

Alianza E

UNIVERSIDAD CENTRAL
51959