



Sistemas Numéricos

“Hacia un nuevo estilo de enseñar y aprender”

MSc. Paco Bastidas Romo

MSc. Edwin Lozano

MSc. Milton Coronel Sánchez

MSc. Carlos Montenegro Balseca

Quito - Ecuador

BASE LEGAL PARA DIGITALIZACIÓN DE LIBROS CON DERECHOS DE AUTOR

El Sistema Integrado de Bibliotecas de la Universidad Central del Ecuador, digitalizará su acervo bibliográfico siempre y cuando sea para fines educativos y de investigación. No se permite la reproducción y distribución para la comercialización directa e indirecta de este.

La digitalización del material bibliográfico se lo realiza de acuerdo al Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación **Art. 212 numeral 9, Literal ii** “(...) Una biblioteca o archivo podrá, además, realizar los siguientes actos (...) La reproducción electrónica y comunicación pública de obras de su colección para ser consultadas gratuita y simultáneamente hasta por un número razonable de usuarios, sólo en terminales de redes de la respectiva institución o para usuarios de esa institución bajo su control, en condiciones que garanticen que no se puedan hacer copias electrónicas de esas reproducciones” y **literal vii** “La reproducción, adaptación, traducción, transformación, arreglo, distribución y comunicación de una obra protegida por derechos de autor o una prestación protegida por derechos conexos, en uno o más formatos accesibles para el uso exclusivo de personas con discapacidad”.

Este material se considera un producto intelectual a favor de su autor; por tanto, la titularidad de sus derechos se encuentra protegida por el Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación. La violación a dichos derechos constituye un delito que será responsabilidad del usuario.

Este libro está disponible físicamente en

Biblioteca:

[Centro de Información Integral](#)

Piso:

01

Estante:

12

Bandeja:

01

Convenio interinstitucional:

Enlace al catálogo:



"Los seres humanos tenemos dos problemas: una gran dificultad para entender las verdades universales, aparentemente complejas; y una gran facilidad para olvidar, aquellas que se consideran sencillas"

51623

E/2

B6

Verificado



Sistemas Numéricos

"Hacia un nuevo estilo de enseñar y aprender"

MSc. Paco Bastidas Romo

MSc. Edwin Lozano

MSc. Milton Coronel Sánchez

MSc. Carlos Montenegro Balseca

Quito - Ecuador

PORTADA:

Fondo: Verde naturaleza.

ϕ : "Número de Oro", número dorado o proporción áurea, es irracional, fue descubierto no como "unidad" sino como proporción. Se encuentra en "todas partes": Naturaleza, cuerpo humano, arquitectura, geometría, aritmética, Pirámide de Keops, tumba de Tutankamon, Partenón, entre otros.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988749 \dots$$

AUTORES:

MSc. Paco Bastidas Romo

MSc. Edwin Lozano

MSc. Milton Coronel Sánchez

MSc. Carlos Montenegro Balseca

DOCENTES DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
CARRERA DE PEDAGOGÍA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES
MATEMÁTICA Y FÍSICA

DERECHOS RESERVADOS.

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro por ningún medio: electrónico, mecánico u otros métodos; sin la autorización previa y por escrito de los autores.

INSTITUTO ECUATORIANO DE PROPIEDAD
INTELLECTUAL. DIRECCIÓN NACIONAL DE
DERECHOS DE AUTOR Y CONEXOS

CERTIFICADO: N° 052478

ISBN: 978-9942-8675-2-0

REVISIÓN DE PARES:

MSc. Orlando Ayala

MSc. Jaime Rivadeneira

DOCENTES UNIVERSIDAD TÉCNICA DEL NORTE

EDITORIAL: EDICIONES ECUAFUTURO

Francisco Fuentes No OE4 - 146 y Juan Palacios

TELF: (02) 3021 294 / 2621 593

Quito - Ecuador

INTRODUCCIÓN

Sería grato, para los autores, compilar un texto definitivo sobre "Sistemas Numéricos", que se convirtiera en el "manual completo", pero aquello no es posible. La gestión centrada en la enseñanza de esta temática es sumamente amplia y por lo mismo, se requiere de muchos años de experimentación.

Sin embargo, es hora, de "poner orden en los datos de nuestra experiencia didáctica" mediante una compilación de ideas, reflexiones, notas y actividades; para efectos de seguir un camino de aprendizaje y desarrollo individual e institucional.

En Matemática, un sistema numérico es un conjunto provisto de dos operaciones binarias (adición y multiplicación), que verifica ciertos axiomas (clausurativo, conmutativo, asociativo, modulativo, invertivo y distributivo de la multiplicación respecto de la adición), según el caso. Se caracterizan por ser extensiones de los números naturales, y además por tener una estructura algebraica (anillo, campo, entre otras), satisfacer propiedades de orden (total, parcial, estricto), topológicas y analíticas (densidad, completitud).

"Sistemas Numéricos", no se presenta para que usted la aprenda "de memoria", ni para que la adopte precipitadamente, sino para que encuentre un modo preciso de utilizarlo, mediante prácticas reflexivas (visión personal) e interactivas (visión grupal), en el estudio de la Matemática (Teoría de Conjuntos, Relaciones, Funciones, etc.)

Por fines estrictamente didácticos, se ha dividido el estudio de "Sistemas Numéricos" en siete capítulos: Números Naturales (parte 1), Números Naturales (parte 2), Enteros, Racionales, Irracionales, Reales, Teoremas de los números Reales y Complejos. En cada uno de ellos se especifican las definiciones básicas, teoremas (de ser necesario), ejemplos, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.

Los objetivos generales del presente estudio son: Propiciar el uso correcto de los axiomas y teoremas, y resolver ecuaciones e inecuaciones básicas, mediante proposiciones - razones. La matemática, construida sobre dichos conceptos básicos, será no solo más comprensible, sino también más interesante y "amigable".

Las amables sugerencias, de numerosos maestros y maestras, han permitido mejorar los primeros apuntes, no solo en la exposición de los principales contenidos de "Sistemas Numéricos" y sus ejercicios propuestos, sino, fundamentalmente en su enfoque didáctico. Dejamos constancia de nuestro infinito agradecimiento por todos sus comentarios.

Lo último, pero no por ello lo menos importante, nuestra gratitud y reconocimiento a los estudiantes de la Carrera de Pedagogía de las Ciencias Experimentales, Matemática y Física; de la Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación, de la Universidad Central del Ecuador; quienes contribuyeron para que esta edición sea una "realidad", la misma que lleva el sello de sus sugerencias tanto en su fondo como en su forma.

MSc. Paco Bastidas Romo & Otros.

Quito, 26 de septiembre del 2016.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1: NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

1.1.	Introducción	1
1.1.1.	Sistema de numeración decimal	1
1.1.2.	Axiomas de los números naturales	2
1.2.	Igualdad de números $\mathbb{N}$	2
1.2.1.	Axiomas de la igualdad	2
1.3.	Suma de números naturales	3
1.3.1.	Definición	3
1.3.2.	Axiomas de la adición.	5
1.3.3.	Aplicaciones	5
1.3.4.	Definición de resta	7
1.4.	Multiplicación de números naturales	8
1.4.1.	Definición	8
1.4.2.	Axiomas de la multiplicación	8
1.4.3.	Aplicaciones	9
1.4.4.	Definición de división	10
1.5.	Axiomas: Distributivo - recolectivo	12
1.6.	Desigualdad de números $\mathbb{N}$	13
1.6.1.	Definición	13
1.6.2.	Axiomas de la desigualdad (orden)	14
1.6.3.	Aplicaciones	15

CAPÍTULO 2: NÚMEROS NATURALES (PARTE 2)

2.1.	Introducción	17
2.2.	Potenciación	17
2.2.1.	Definiciones básicas	17
2.2.2.	Teoremas de la potenciación	18
2.2.3.	Operaciones de la potenciación	18
2.2.4.	Aplicaciones	18
2.3.	Radicación	20
2.3.1.	Definiciones básicas	20
2.3.2.	Teoremas de la radicación	20

2.4.	Tipos de números naturales	21
2.4.1.	Múltiplo - submúltiplo	21
2.4.2.	Par - impar	22
2.4.3.	Primo - compuesto	22
2.5.	Caracteres de divisibilidad.	23
2.5.1.	Divisibilidad para 2	23
2.5.2.	Divisibilidad para 3	23
2.5.3.	Divisibilidad para 5	24
2.6.	Descomposición en factores primos	24
2.7.	Máximo común divisor de números naturales	25
2.7.1.	Descomposición en factores primos	25
2.7.2.	Método sintético	27
2.7.3.	Divisiones sucesivas	27
2.8.	Mínimo común múltiplo de números naturales	29
2.8.1.	Descomposición en factores primos	30
2.8.2.	Método sintético	31
2.8.3.	Fórmula (por el mcd)	32

CAPÍTULO 3: NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

3.1.	Introducción	33
3.2.	Números enteros ($\mathbb{Z}$)	33
3.2.1.	Enteros positivos	33
3.2.2.	Enteros negativos	34
3.2.3.	Enteros opuestos	34
3.2.4.	Axiomas de los números enteros	35
3.3.	Igualdad de números enteros	36
3.3.1.	Axiomas de la igualdad	36
3.4.	Adición de números enteros	37
3.4.1.	Valor absoluto	37
3.4.2.	Ley de los signos	37
3.4.3.	Axiomas de la adición	39
3.4.4.	Aplicaciones	39
3.4.5.	Definición de resta	41
3.5.	Multiplicación de números enteros	43
3.5.1.	Ley de los signos	43
3.5.2.	Axiomas de la multiplicación	43
3.5.3.	Aplicaciones	44
3.5.4.	Definición de división	45
3.6.	Axiomas: Distributivo - recolectivo	46

3.7.	Desigualdad de números enteros	47
3.7.1.	Definición	47
3.7.2.	Axiomas de la desigualdad (orden)	47
3.7.3.	Aplicaciones	48
3.8.	Potenciación	49
3.8.1.	Definiciones básicas	50
3.8.2.	Teoremas de la potenciación	50
3.8.3.	Operaciones de la potenciación	50
3.9.	Radicación	51
3.9.1.	Definiciones básicas	51
3.9.2.	Teoremas de la radicación	52

CAPÍTULO 4: NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

4.1.	Introducción	53
4.2.	Números racionales ($\mathbb{Q}$)	53
4.2.1.	Clases de números fraccionarios	54
4.2.2.	Representación geométrica de los números racionales	54
4.2.3.	Fracciones iguales	55
4.2.4.	Simplificación de fracciones	55
4.2.5.	Expresión decimal de los números racionales	56
4.2.6.	Fracción generatriz de un número decimal	59
4.2.7.	Axiomas de los números racionales	59
4.3.	Igualdad de números racionales	59
4.3.1.	Axiomas de la igualdad	60
4.4.	Suma de números racionales	60
4.4.1.	Valor absoluto	61
4.4.2.	Casos de la suma de números racionales	61
4.4.3.	Axiomas de la adición	63
4.4.4.	Aplicaciones	64
4.4.5.	Definición de resta	65
4.5.	Multiplicación de números racionales	66
4.5.1.	Casos de la multiplicación	66
4.5.2.	Ley de los signos	67
4.5.3.	Axiomas de la multiplicación	67
4.5.4.	Aplicaciones	68
4.5.5.	Definición de división	69
4.6.	Axiomas: Distributivo-recolectivo	70
4.7.	Desigualdad de números racionales	71
4.7.1.	Desigualdad	71
4.7.2.	Axiomas de la desigualdad (orden)	71
4.7.3.	Aplicaciones	72

4.8.	Potenciación (exponentes enteros)	74
4.8.1.	Definiciones básicas	74
4.8.2.	Teoremas de la potenciación	74
4.8.3.	Operaciones de la potenciación	75
4.9.	Radicación	75
4.9.1.	Definiciones básicas	75
4.9.2.	Teoremas de la radicación	76

CAPÍTULO 5: NÚMEROS REALES ($\mathbb{R}$)

5.1.	Introducción	77
5.2.	Números irracionales	79
5.2.1.	Expresión decimal de un número irracional	79
5.2.2.	Operaciones con números irracionales	80
5.2.3.	Representación gráfica de números irracionales	81
5.3.	Números reales	82
5.3.1.	Representación geométrica	82
5.4.	Axiomas de los números reales	82
5.5.	Igualdad de números reales	82
5.5.1.	Axiomas de la igualdad.	82
5.6.	Adición de números reales	83
5.6.1.	Valor absoluto	83
5.6.2.	Axiomas de la adición	84
5.6.3.	Aplicaciones	85
5.6.4.	Definición de resta	86
5.7.	Multiplicación de números reales	86
5.7.1.	Axiomas de la multiplicación	86
5.7.2.	Aplicaciones	88
5.7.3.	Definición de división	89
5.8.	Axiomas: Distributivo - Recolectivo	90
5.9.	Orden en los números reales	91
5.9.1.	Desigualdad	91
5.9.2.	Axiomas de la desigualdad (orden)	92
5.9.3.	Aplicaciones	93
5.10.	Potenciación (Exponentes racionales)	94
5.10.1.	Definiciones básicas	95
5.10.2.	Teoremas de la potenciación	95
5.10.3.	Operaciones de la potenciación	96

5.11.	Radicación	96
5.11.1.	Definiciones básicas	96
5.11.2.	Teoremas de la radicación	97
5.11.3.	Igualdad de radicales	97
5.11.4.	Simplificación de radicales	98
5.11.5.	Obtención de dos radicales con el mismo índice	98
5.11.6.	Radicales semejantes	98
5.11.7.	Operaciones con radicales	99
 CAPÍTULO 6: TEOREMAS DE LOS NÚMEROS REALES		
6.1.	Introducción	103
6.2.	Teoremas básicos de la igualdad	103
6.2.1.	Resolución de ecuaciones básicas	110
6.3.	Teoremas básicos de la desigualdad	111
6.3.1.	Resolución de inecuaciones básicas	122
6.4.	Axiomas: Distributivo - recolectivo	123
6.5.	Uniformidad	124
 CAPÍTULO 7: NÚMEROS COMPLEJOS ($\mathbb{C}$)		
7.1.	Introducción	125
7.2.	Determinación	126
7.2.1.	Forma Binómica	126
7.2.2.	Clases de números complejos	126
7.2.3.	Operaciones forma binómica	128
7.3.	Forma rectangular	132
7.3.1.	Clases de números complejos	133
7.3.2.	Axiomas de la igualdad	133
7.3.3.	Operaciones	134
7.4.	Forma polar	138
7.4.1.	Conversión: Forma binómica a polar	139
7.4.2.	Operaciones y axiomas	139
7.5.	Forma trigonométrica	145
7.5.1.	Conversión: Forma binómica a trigonométrica	146
7.5.2.	Operaciones	146
8.	ANEXOS	155
9.	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	170

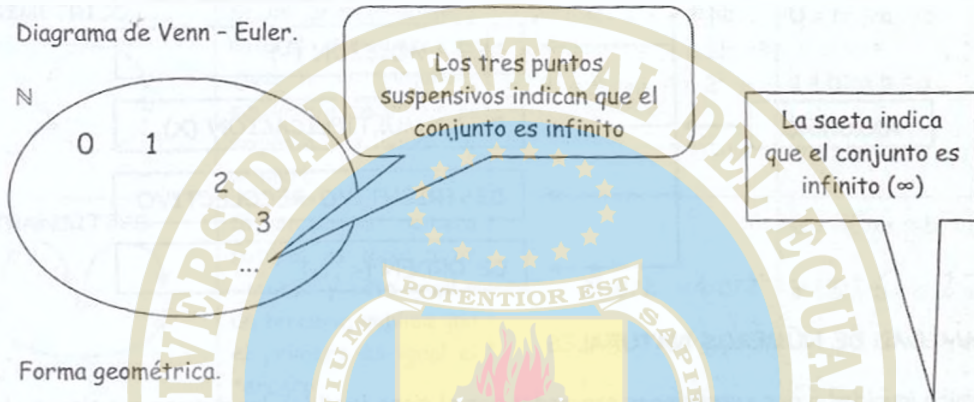
CAPÍTULO 1

NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

1.1. INTRODUCCIÓN

El conjunto de los números: 0, 1, 2, 3, ..., usados para contar los elementos de un conjunto, se llama conjunto de los números naturales. Se representa con la letra $\mathbb{N}$ o $\mathbf{N}$, mayúscula (negritas). Este conjunto se puede determinar de varias maneras, las más importantes son: diagrama de Venn - Euler, forma geométrica, extensión y comprensión:

a. Diagrama de Venn - Euler.



b. Forma geométrica.



c. Extensión

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

d. Comprensión

$$\mathbb{N} = \{x / x \text{ es número natural}\}$$

Observación: Los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones, ya que las tareas de contar y de ordenar son las más elementales en el tratamiento de las cantidades.

1.1.1. SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL.

Se llama sistema de numeración al conjunto de símbolos (números o letras) y reglas que permiten representar todos los números. Según los símbolos y reglas elegidos, se obtienen distintos sistemas de numeración, por ejemplo: decimal, romano, binario, entre otros.

El sistema que tiene mayor uso es el sistema de numeración decimal, llamado así porque usa diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; cada uno de los cuales se llama cifra. Los números que tienen una sola cifra se llaman dígitos y los de más de una cifra polidígitos.

En este sistema de numeración decimal, el conjunto de diez unidades (u) se llama decena (d), el conjunto de 10 decenas se llama centena (c); el de 10 centenas se llama unidad de mil, y así sucesivamente. Por ejemplo: El 24 tiene: 2 decenas y 4 unidades, es decir:

$$24 = 20 + 4 = 2 \times 10 + 4 \times 1$$

EJERCICIOS

1. Expresa los siguientes números como la suma de las unidades, decenas, centenas, unidades de mil, decenas de mil, según corresponda:

1. 12

2. 27

3. 53

4. 135

5. 431

6. 230

7. 1 420

8. 2 300

9. 4 671

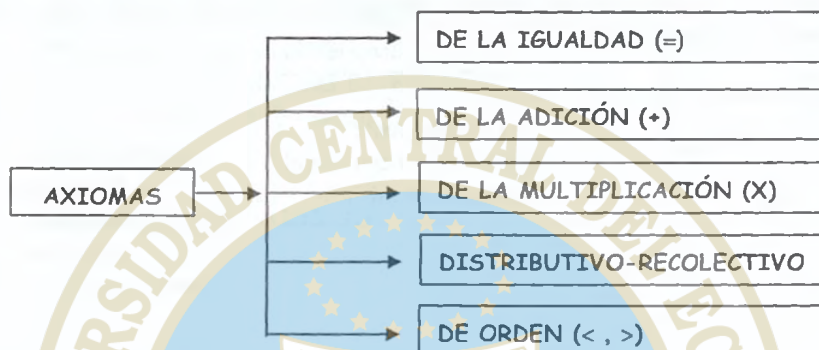
10. 10 428

11. 12 467

12. 15 432

1.1.2. AXIOMAS DE LOS NÚMEROS NATURALES

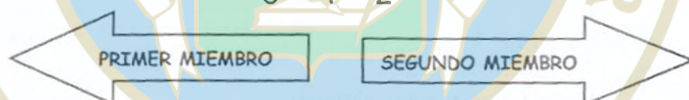
Se llama **axioma** a la proposición que se supone verdadera. Los axiomas de los números $\mathbb{N}$ son:



1.2. IGUALDAD DE NÚMEROS NATURALES

Se denomina igualdad a dos expresiones separadas por el signo igual ($=$), las mismas que tienen el mismo valor numérico. Por ejemplo: $6 = 4 + 2$. En una igualdad, la expresión que se antepone al signo igual ($=$) se llama **primer miembro**; la expresión que sigue al signo $=$ se llama **segundo miembro**, por ejemplo:

$$6 = 4 + 2$$



1.2.1 AXIOMAS DE LA IGUALDAD:



A continuación, se indican: la definición, un ejemplo y la forma simbólica de cada una de los axiomas de la igualdad: La expresión, $U = \mathbb{N}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números naturales". De igual forma: $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a , para todo b , para todo c ", respectivamente.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. DICOTOMÍA	Entre dos números naturales cualesquiera se cumple una y solo una de las siguientes relaciones: son iguales o son diferentes.	4 y 3 son diferentes $4 \neq 3$ 2 y 2 son iguales $2 = 2$	$U = \mathbb{N}, \forall a, \forall b:$ $a = b \vee a \neq b$
2. REFLEXIVO	Todo número natural es igual a sí mismo.	Si el número natural es el 3, entonces $3 = 3$. Si es 9 entonces $9 = 9$	$U = \mathbb{N}, \forall a:$ $a = a$
3. SIMÉTRICO	Si un primer número natural cualquiera es igual a un segundo, equivale a decir que el segundo es igual al primero.	$2^2 \in \mathbb{N}$ y $4 \in \mathbb{N}:$ $2^2 = 4 \leftrightarrow 4 = 2^2$	$U = \mathbb{N}, \forall a, \forall b:$ $a = b \leftrightarrow b = a$
4. TRANSITIVO	Si un primer número natural es igual a un segundo y este igual a un tercero, implica que el primero es igual al tercero.	$4 = 2^2 \wedge 2^2 = 8/2 \rightarrow 4 = 8/2$	$U = \mathbb{N}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$
5. ADITIVO	Si a cada miembro de una igualdad se suma un mismo número natural cualquiera, la igualdad se conserva (subsiste, permanece).	Si a la igualdad $3+5 = 8$ se suma el número 4, se tiene: $(3+5)+4 = 8+4$. La igualdad se conserva $(12 = 12)$.	$U = \mathbb{N}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge c = c \Rightarrow a + c = b + c$
6. MULTIPLICATIVO	Si a cada miembro de una igualdad se multiplica por un mismo número natural ($\mathbb{N}$) cualquiera, la igualdad se conserva (subsiste, permanece).	Si la igualdad $4+2 = 6$ se multiplica por el número 3, se tiene: $(4+2) \times 3 = 6 \times 3$. La igualdad se conserva $(18 = 18)$.	$U = \mathbb{N}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

1.3. SUMA DE LOS NÚMEROS NATURALES

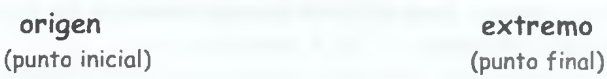
1.3.1. DEFINICIÓN

Se llama suma (adición) de dos números naturales a y b al número c . El número c indica el número de elementos del conjunto formado por los a elementos del primer conjunto y los b elementos del segundo conjunto. Esta operación se representa simbólicamente por: $a + b = c$.

Por ejemplo, cuatro manzanas y cinco manzanas se pueden sumar, poniéndolas juntas y contándolas a continuación, de una en una hasta llegar a 9: $4 + 5 = 9$.

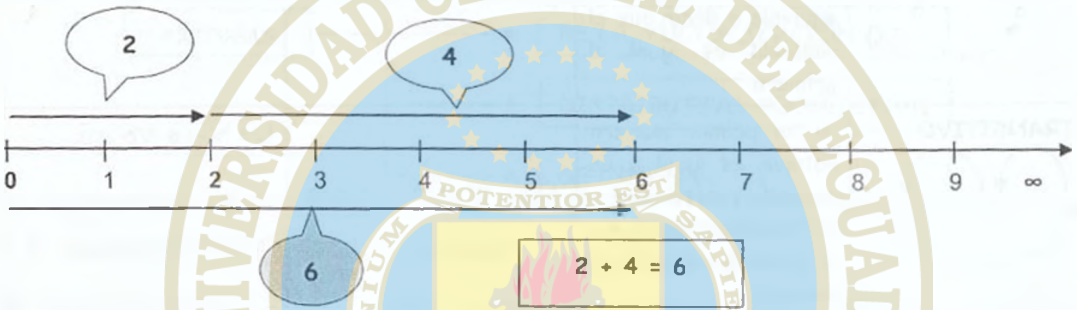
Observación: El 4 y el 5 se llaman sumandos, y el 9 adición o suma total de los dos primeros.

Generalmente, es conveniente representar la suma de números naturales mediante los movimientos de un punto sobre la semirrecta numérica, utilizando flechas. Reconoceremos dos puntos en las flechas: el origen y el extremo, de la siguiente manera:



En la siguiente figura se representa la suma $2 + 4 = 6$:

- 1. Graficamos el origen de la flecha 2 en el 0 y su punto final en el 2,
- 2. Luego el origen de la flecha 4 en el 2 y su extremo en el punto 6,
- 3. La suma se representa por la flecha 6, cuyo origen se encuentra en el 0 y el punto final en el 6.



Para sumar números con más de una cifra se toma en cuenta los valores relativos de sus cifras. Por ejemplo: $14 + 27 = 41$

decenas

Unidad

d u

+1

1 4

2 7

4 1

$4 + 7 = 11$

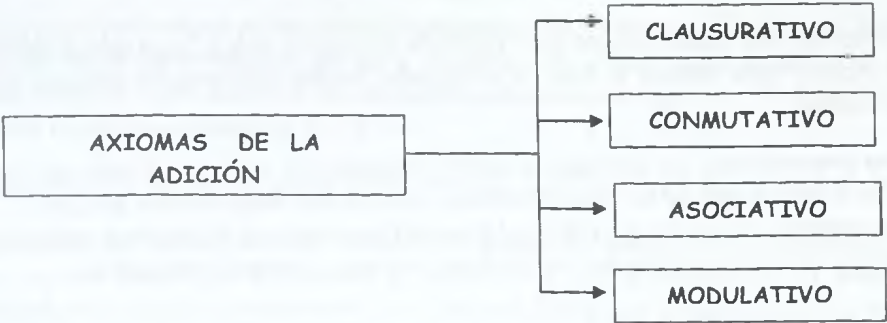
$11 = 1(10) + 1$

Escribo la unidad y sumo 1 en la columna d (decenas).

EJERCICIOS

- 1. Grafique, en la recta numérica, el movimiento de un punto que fuese de:
 - 1. 0 a 3
 - 2. 2 a 4
 - 3. 0 a 4
 - 4. 3 a 6
 - 5. 1 a 5
 - 6. 2 a 5
 - 7. 1 a 4
 - 8. 4 a 6
- 2. Hallar el resultado de las siguientes sumas utilizando la representación geométrica:
 - 1. $3 + 2 =$
 - 2. $3 + 4 =$
 - 3. $4 + 3 =$
 - 4. $5 + 2 =$
 - 5. $6 + 4 =$
 - 6. $4 + 5 =$
 - 7. $6 + 7 =$
 - 8. $0 + 5 =$
- 3. Hallar el resultado de las siguientes sumas utilizando el valor relativo de sus cifras:
 - 1. $23 + 52 =$
 - 2. $63 + 79 =$
 - 3. $94 + 89 =$
 - 4. $125 + 232 =$
 - 5. $136 + 84 =$
 - 6. $64 + 235 =$
 - 7. $1234 + 456 =$
 - 8. $238 + 1235 =$

1.3.2. AXIOMAS DE LA ADICIÓN



A continuación se indican: la definición, un ejemplo y la forma simbólica de cada uno de los axiomas:

En los siguientes axiomas, $U = \mathbb{N}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números naturales". $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno", y se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	La suma de dos números naturales cualesquiera es un número natural único.	$2 \text{ y } 4 \in \mathbb{N} \wedge 2+4=6$ $6 \in \mathbb{N}$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \exists c (\exists! c):$ $a + b = c \Rightarrow c \in \mathbb{N}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los sumandos no altera la suma total.	$5 + 4 = 4 + 5$ $9 = 9$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b:$ $a + b = b + a$
3. ASOCIATIVO	Los sumandos naturales se pueden agrupar o asociar de cualquier modo, sin que altere la suma total.	$(2+3)+5=2+(3+5)$ $5+5=2+8$ $10=10$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. MODULATIVO	Existe uno y solo un número natural, 0, tal que sumado con cualquier número, el resultado es siempre ese mismo número natural. El cero (0), se llama elemento idéntico, neutro o módulo de la adición.	$9+0=0+9=9$ $3+0=0+3=3$	$U = \mathbb{N}. \forall a, S_0 (\exists! 0):$ $0 + a = a + 0 = a$

1.3.3. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BASICAS)

Se llama ecuación a la relación de igualdad que se cumple sólo para determinados valores de las variables. Las variables o incógnitas se indican mediante las últimas letras del alfabeto: x, y, z, entre otras. Por ejemplo: La ecuación $x + 3 = 10$, contiene una variable; $x + y = 6$ contiene dos incógnitas.

La expresión del lado izquierdo del signo igual se llama primer miembro y la del lado derecho segundo miembro. Se llama término a cada una de las expresiones, separadas por el signo "+" o "-", que se encuentran en cada miembro. En la ecuación $x + 3 = 10$, la letra "x" y el "3" son términos del primer miembro, y el "10" del segundo miembro.

Resolver una ecuación es determinar los valores de las incógnitas que hacen cierta (verdadera) la igualdad. Estos valores se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación.

El proceso para resolver una ecuación consiste en: partir de la ecuación dada y, luego aplicar definiciones, axiomas, y/o teoremas, hasta obtener el valor de la incógnita. Pueden utilizarse dos columnas llamadas: proposiciones y razones.

- 1. En la columna **proposiciones**, se escriben los pasos utilizados para **despejar** la incógnita. Despejar significa separar la incógnita, de las otras cantidades, en el primer miembro de la ecuación.
- 2. En la columna **razones**, se escribe la razón (justificación) para cada uno de los pasos realizados en la parte izquierda. Las razones pueden ser: definiciones, axiomas, teoremas, entre otras.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x + 0 = 7$

Proposiciones	Razones
1. $x + 0 = 7$	Dato
2. $x = 7$	Axioma modulativo (+)

La solución o raíz de una ecuación se representa mediante un punto en la semirrecta numérica, por ejemplo:



Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $4 + 2 = x$

Proposiciones	Razones
1. $4 + 2 = x$	Dato
2. $x = 4 + 2$	Axioma simétrico (=)
3. $x = 6$	Axioma clausurativo (+)



Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $x = 4 + 2 + 5$

Proposiciones	Razones
1. $x = 4 + 2 + 5$	Dato
2. $x = (4 + 2) + 5$	Axioma Asociativo (+)
3. $x = 6 + 5$	Axioma clausurativo (+)
4. $x = 11$	Def. (+)



Observación: el símbolo “//” significa que existen otros números naturales en la semirrecta numérica.

EJERCICIOS

- 1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando los axiomas de la igualdad y de la adición de los números naturales. Represente la solución en la semirrecta numérica.
 - 1. $x + 0 = 6$
 - 2. $x = 1 + 0$
 - 3. $y = 2 + 4$
 - 4. $5 + 4 = y$
 - 5. $y = 1 + 4 + 7$
 - 6. $y = 1 + 0 + 3$
 - 7. $x + 0 = 20$
 - 8. $x = 30 + 0$
 - 9. $z = 5 + 9$
 - 10. $15 + 14 = y$
 - 11. $y = 1 + 14 + 17$
 - 12. $y = 21 + 0 + 13$
 - 13. $z + 0 = 35$
 - 14. $z = 45 + 0$
 - 15. $z = 15 + 29$
 - 16. $25 + 34 = y$
 - 17. $y = 51 + 34 + 97$
 - 18. $y = 121 + 0 + 136$
 - 19. $x + 0 = 12$
 - 20. $x = 8 + 0$

1.3.4. DEFINICIÓN DE RESTA

Se llama resta (diferencia) de dos números naturales a y b al número c . El número c indica el número de elementos del conjunto formado por los a elementos del primer conjunto menos los b elementos del segundo conjunto. Esta operación se representa simbólicamente por: $a - b = c$. Por ejemplo, nueve manzanas menos cinco manzanas: $9 - 5 = 4$

Observación: El 9 se llama minuendo, el 5 sustraendo, y el 4 resta o diferencia de los dos primeros.

La sustracción, no es una operación interna en $\mathbb{N}$, pues la diferencia de dos números naturales puede no ser un número natural. La sustracción es posible sólo cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo. Por ejemplo: La expresión $3-9 =$, no está definida en el conjunto de los números naturales, porque 3 no es mayor o igual que 9 (el resultado no es un número natural).

Generalmente, es conveniente representar la resta de números naturales mediante los movimientos de un punto sobre la semirrecta numérica, utilizando flechas; los movimientos hacia la derecha son en sentido positivo y los movimientos hacia la izquierda en sentido negativo. Por ejemplo: $6 - 2 = 4$.

- 1. Graficamos el origen de la flecha 6 en 0 y su punto final en 6,
- 2. Luego el origen de la flecha -2 en 6 y su extremo en el punto 4.
- 3. La resta se representa por la flecha 4, cuyo origen se encuentra en 0 y su punto final en 4.



Para restar dos números con más de una cifra se toma en cuenta los valores relativos de sus cifras. Por ejemplo: $14 - 8$.

decenas

unidad

d

u

-1

1

4

-

8

0

6

Como no es posible restar 4-8, entonces se toma una decena de la columna d:

$10 + 4 = 14$

$14 - 8 = 6$

Escribo el 6 y sumo los números de la columna d: $-1 + 1 = 0$

EJERCICIOS

- 1. Hallar el resultado de las siguientes restas utilizando la representación geométrica, en los casos que sea posible:
 - 1. $3 - 2 =$
 - 2. $8 - 3 =$
 - 3. $4 - 8 =$
 - 4. $8 - 5 =$
 - 5. $6 - 2 =$
 - 6. $4 - 5 =$
 - 7. $12 - 7 =$
 - 8. $0 - 4 =$
- 2. Resolver las siguientes restas y luego represente la solución en la semirrecta numérica, en los casos que sea posible.
 - 1. $29 - 8$
 - 2. $10 - 3$
 - 3. $15 - 18$
 - 4. $123 - 49$
 - 5. $54 - 38$
 - 6. $125 - 234$
 - 7. $123 - 119$
 - 8. $1234 - 827$

1.4. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS NATURALES

1.4.1. DEFINICIÓN

Se llama producto de un número natural a por otro b, al número natural c que se obtiene sumando b veces el número a. Simbólicamente se indica de la siguiente manera:

$axb = c \Leftrightarrow c = a + a + a \dots + a; b \text{ veces } a$

Por ejemplo: el producto $8 \times 3 = 24$ es igual a la suma de 3 sumandos iguales a 8: $24 = 8 + 8 + 8$.

Observación: se llama factores a los números a y b (a se llama multiplicando, b multiplicador y c producto). Algunas veces se llama factor a los números a y b. El producto de cualquier número natural a por el número cero, es igual a cero.

Los operadores (símbolos) de la multiplicación son: la x, un punto, o un paréntesis. Si los números están expresados literalmente, se suprime el signo y se escriben las letras una a continuación de la otra: Por ejemplo: si $a = 3, b = 4$ y $c = 12$.

$3 \times 4 = 12 \qquad 3 \cdot 4 = 12 \qquad ab = c$

Para multiplicar números con más de una cifra se toma en cuenta los valores relativos de sus cifras. Por ejemplo: $14 \times 17 = 238$.

centenas

C

decenas

D

Unidad

U

1

4

1

7

9

8

1

4

2

3

8

7x4 = 28

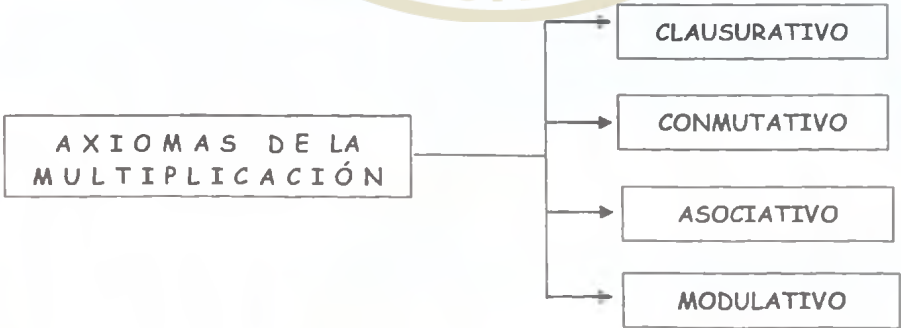
7x1 = 7

7 + 2 = 9

1. Escriba los factores uno debajo del otro, en la parte superior el factor con mayor número de cifras, de manera que queden alineados (unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc.), y trace una línea horizontal por debajo de ellos.

2. Multiplique la cifra de las unidades del factor inferior por cada una de las cifras del factor superior, y en los casos en que el producto resulte 10 ó mayor que 10, escriba la cifra de las unidades y sume la de las decenas al producto siguiente.

1.4.2. AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN



En los siguientes Axiomas, $U = \mathbb{N}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números naturales". $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno", y se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	El producto de dos números naturales cualesquiera es un número natural único.	$2 \times 4 \in \mathbb{N} \wedge 2 \times 4 = 8$ $\rightarrow 8 \in \mathbb{N}$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \exists c (\exists!c):$ $a \cdot b = c \Rightarrow c \in \mathbb{N}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los factores no altera el producto total.	$5 \times 4 = 4 \times 5$ $20 = 20$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b:$ $a \cdot b = b \cdot a$ $a.b = b.a$
3. ASOCIATIVO	Los factores se pueden agrupar o asociar de cualquier modo, sin que altere el producto.	$(3 \times 2) \times 6 = 3 \times (2 \times 6)$ $6 \times 6 = 3 \times 12$ $36 = 36$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(ab)c = a(bc)$
4. MODULATIVO	Existe uno y solo un número natural, tal que multiplicado por cualquier número natural el resultado es siempre ese mismo número natural. El uno (1), se llama elemento idéntico, neutro o módulo de la multiplicación.	$9 \times 1 = 1 \times 9 = 9$ $3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$	$U = \mathbb{N}. \forall a, S_1 (\exists!1):$ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ $1a = a1 = a$

1.4.3. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

Resolver una ecuación es determinar los valores de las incógnitas que hacen verdadera la igualdad. Estos valores se llaman soluciones o raíces de la ecuación. Por ejemplo:

Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x = 4 \cdot 2 \cdot 5$

Proposiciones

- $x = 4 \cdot 2 \cdot 5$
- $x = (4 \cdot 2) \cdot 5$
- $x = 8 \cdot 5$
- $x = 40$

Razones

- Dato
Axioma Asociativo (x)
Axioma clausurativo (x)
Def. (x)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando los axiomas de la igualdad y de la multiplicación de los números naturales. Represente la solución en la semirrecta numérica.

- | | | | |
|------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. $x \cdot 1 = 6$ | 2. $x = 1 \cdot 3$ | 3. $y = 2 \cdot 4$ | 4. $5 \cdot 4 = y$ |
| 5. $y = 1 \cdot 4 \cdot 7$ | 6. $y = 1 \times 2 \times 3$ | 7. $x \cdot 1 = 12$ | 8. $x = 13 \cdot 1$ |
| 9. $z = 5 \times 9$ | 10. $15 \cdot 14 = y$ | 11. $y = 1 \cdot 14 \cdot 17$ | 12. $y = 21 \times 1 \times 13$ |
| 13. $z \cdot 1 = 35$ | 14. $z = 45 \cdot 1$ | 15. $z = 15 \times 29$ | 16. $25 \cdot 34 = y$ |
| 17. $y = 51 \cdot 4 \cdot 9$ | 18. $y = 12 \times 1 \times 13$ | 19. $x \cdot 1 = 2$ | 20. $x = 8 \cdot 1$ |

1.4.4. DEFINICIÓN DE DIVISIÓN

Sean: a, b y c números naturales. Dividir un número a para otro $b, b \neq 0$, es encontrar un número c tal que $c \cdot b = a$, siendo a múltiplo de b (**división exacta**). En forma simbólica, se tiene:

$$a \div b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a; a \text{ múltiplo de } b \wedge b \neq 0.$$

Por ejemplo: $36/4 = 9$ si y solo si $9 \times 4 = 36$; 36 es múltiplo de 4 y $4 \neq 0$.

Observación: El número 36 se llama dividendo, el 4 divisor y el resultado 9 se llama cociente.

La división tampoco es una operación interna en $\mathbb{N}$, pues el cociente de dos números naturales puede no ser un número natural (no lo es cuando el dividendo no es múltiplo del divisor).

Los operadores (signos) de la división son: ($\div$) o bien los dos puntos (:), una raya inclinada (/), una línea horizontal ($\overline{\hspace{1cm}}$), o la galera ($\boxed{\hspace{1cm}}$). Por ejemplo:

$12:3 = 4$

$$12/3 = 4$$

$$\frac{12}{3} = 4$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 3} \\ 4 \end{array}$$

La división se usa para indicar el número de veces que un número dado contiene a otro. Por ejemplo, 12 contiene al 3 cuatro veces; por eso 12 dividido entre 3 es 4.

1. Todo número natural dividido para la unidad es igual al mismo número: $a \div 1 = a$. $2 \div 1 = 2$.
2. Todo número natural, diferente de 0, dividido para sí mismo es igual a 1: $a \div a = 1$; $a \neq 0$.

Observaciones:

1. De acuerdo con lo que se exige en la definición, el divisor no puede ser cero. La división para 0, o bien no existe o no está definida. Por ejemplo:

$5/0 = x \leftrightarrow 5 = 0x$; no **existe** ningún número x que multiplicado por 0 dé 5.

2. Aun en el supuesto que el dividendo, también, sea 0; es decir, la división: $0/0$, daría como resultado cualquier valor, dado que cualquier número multiplicado por el divisor 0 da 0. Por ejemplo:

$0/0 = 3 \leftrightarrow 0 = 0.3$; $0/0 = 12 \leftrightarrow 0 = 0.12$; $0/0 =$ Infinitas respuestas (cualquier valor)

1.4.4.1. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

Resolver una ecuación es determinar los valores de las incógnitas que hacen verdadera la igualdad. Estos valores se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación. Por ejemplo:

Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x \div 1 = 7$

Proposiciones	Razones
1. $x \div 1 = 7$	Dato
2. $x = 7$	$a/1 = a$



Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $3 \div 0 = x$

Proposiciones	Razones
1. $3 + 0 = x$	Dato
2. $x = 3 \div 0$	Axioma simétrico (=)
3. $x = \exists$ (no existe)	No está definido en $\mathbb{N}$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $3 + 2 = x$

Proposiciones	Razones
1. $3 + 2 = x$	Dato
2. $x = 3 + 2$	Axioma simétrico (=)
3. x no es un número natural	No está definido

EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando los axiomas de la igualdad y de la multiplicación de los números naturales. Represente la solución en la semirrecta numérica.

1. $x + 1 = 6$	2. $x = 6 + 3$	3. $y = 8 + 4$
4. $15 + 5 = y$	5. $x \div 1 = 9$	6. $x = 16 \div 4$
7. $z = 9 + 3$	8. $5 \div 4 = y$	9. $y = 1 \div 0$
10. $z + 1 = 5$	11. $z = 5 \div 0$	12. $z = 5 \div 3$
13. $5 + 3 = y$	14. $y = 15 + 3$	15. $y = 12 \div 4$
16. $x + 1 = 2$	17. $x = 8 \div 1$	18. $z = 5 \div 7$

2. Construya un mentefacto para la operación división.

Dividir un número natural a para otro $b \neq 0$, es encontrar un número natural c tal que $c \cdot b = a$, siendo a múltiplo de b . En forma simbólica, se tiene:

$$a + b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a;$$

$$a \text{ múltiplo de } b \wedge b \neq 0.$$

Operaciones en $\mathbb{N}$

División

$\neq$ { Suma
Multiplicación
Resta

Todo número $\mathbb{N}$ dividido para la unidad es igual al mismo número:

$$\forall a \in \mathbb{N}: a \div 1 = a.$$

$$2 \div 1 = 2.$$

Todo número $\mathbb{N}$, diferente de 0, dividido para sí mismo es igual a 1:

$$\forall a \in \mathbb{N}: a \div a = 1; a \neq 0$$

$$2 \div 2 = 1$$

Todo número $\mathbb{N}$, diferente de 0, dividido para 0 no existe o no está definido (ND).

$$a \div 0 = \exists; a \neq 0,$$

$$4 \div 0 = \text{No definido}$$

Cero dividido para cero es una indeterminación (Ind).

$0 \div 0$
Indeterminación
(infinitas respuestas, cualquier valor)

1.5. AXIOMAS DISTRIBUTIVO-RECOLECTIVO

El producto de un número natural cualquiera por la suma de dos números naturales cualesquiera, es igual a la suma de los productos de ese número natural por cada uno de los sumandos. El Axioma distributivo se escribe, en forma simbólica, de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c; a (b + c) = a.b + a.c$$

DISTRIBUTIVO

Ejemplo:

$$2 \times (5 + 3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$$
$$2 \times 8 = 10 + 6 \rightarrow 16 = 16$$

Si en la definición simbólica, del axioma distributivo, se aplica el axioma simétrico de la igualdad, se tiene:

$$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c; a.b + a.c = a.(b + c)$$

RECOLECTIVO

Ejemplo:

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 2 (5 + 3)$$
$$10 + 6 = 2 \cdot 8 \rightarrow 16 = 16$$

La operación realizada en el ejemplo anterior se conoce, generalmente, como axioma recolectivo o factor común. Si consideramos lo anotado anteriormente, el axioma distributivo - recolectivo se escribe en forma simbólica de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c; a (b + c) = a.b + a.c \wedge a.b + a.c = a.(b + c)$$

1.5.1. 1.5.1. APLICACIONES

Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo o recolectivo, según corresponda.

Ejemplo 1. $5(1 + 3) = 20$

Proposiciones	Razones
1. $5.(1 + 3) = 20$	Dato
2. $5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 20$	Axioma distributivo
3. $5 + 15 = 20$	Axioma modlativo, Def. (x)
4. $20 = 20$	Def. (+)

Ejemplo 2. $3.4 + 5.4 = 32$

Proposiciones	Razones
1. $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 32$	Dato
2. $4.(3 + 5) = 32$	Axioma recolectivo
3. $4 \cdot 8 = 32$	Def. (+)
4. $32 = 32$	Def. (x).

EJERCICIOS

1. Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo o recolectivo según corresponda:

1. $3.(4 + 2) = 18$

4. $3.2 + 5.2 = 16$

7. $5.(1 + 2) = 15$

10. $4.2 + 5.2 = 18$
2. $7.(4 + 5) = 63$

5. $4.3 + 5.4 = 32$

8. $1.(4 + 3) = 7$

11. $3.4 + 5.4 = 32$
3. $2.(3 + 5) = 16$

6. $2.3 + 3.5 = 21$

9. $3.(2 + 3) = 15$

12. $3.4 + 5.3 = 27$

1.6. DESIGUALDAD DE NÚMEROS NATURALES

1.6.1. DEFINICIÓN

La desigualdad, es una relación matemática entre dos expresiones que no son iguales. Los símbolos utilizados para denotar una desigualdad son:

$<$ (menor que) o $>$ (mayor que)

1. Un número natural a es menor que un número natural b , si en la recta numérica el punto a está a la izquierda del punto b , se escribe: $a < b$. Por ejemplo: $4 < 7$.



El $4 < 7$, porque el 4 se encuentra a la izquierda del 7.

2. Un número natural b es mayor que un número natural a , si en la recta numérica el punto b está a la derecha del punto a , se escribe: $b > a$. por ejemplo: $7 > 4$.



El $7 > 4$, porque el 7 se encuentra a la derecha del 4.

Definición 1: a es menor que b es equivalente a decir que: la diferencia $(b - a)$ es un número natural (mayor que 0). La expresión anterior se escribe, en forma simbólica, de la siguiente manera:

$$a < b \Leftrightarrow (b - a) > 0$$

Ejemplo: $0 < 1$ porque $1 - 0 = 1$; 1 es natural.

Definición 2: a es mayor que b es equivalente a decir que: la diferencia $(a - b)$ es un número natural. En forma simbólica se tiene:

$$a > b \Leftrightarrow (a - b) > 0$$

Ejemplo: $7 > 5$ porque $7 - 5 = 2$; 2 es natural.

Observación: El elemento a , $a \in \mathbb{N}$, se dice primer elemento de los números naturales sí, para todo $x \in \mathbb{N}$, $a < x$. El 0 es el primer elemento de $\mathbb{N}$.

EJERCICIOS

1. Grafique los siguientes pares de números en la recta numérica e indique si el primero es menor o mayor que el segundo.

1. 3 y 4

2. 4 y 1

3. 1 y 2

4. 2 y 5

5. 2 y 3

6. 0 y 2

7. 3 y 0

8. 2 y 2
2. Grafique las siguientes desigualdades. Luego cambie el signo " $<$ " por " $>$ ", utilizando la equivalencia: $a < b \Leftrightarrow b > a$.

1. $2 < 4$

2. $0 < 3$

3. $2 < 8$

4. $8 < 11$

5. $5 < 14$

6. $2 < 9$

7. $5 < 10$

8. $8 < 16$

1.5. AXIOMAS DISTRIBUTIVO-RECOLECTIVO

El producto de un número natural cualquiera por la suma de dos números naturales cualesquiera, es igual a la suma de los productos de ese número natural por cada uno de los sumandos. El Axioma distributivo se escribe, en forma simbólica, de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c; a(b + c) = a.b + a.c$$

DISTRIBUTIVO

Ejemplo:

$$2 \times (5 + 3) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$$

$$2 \times 8 = 10 + 6 \rightarrow 16 = 16$$

Si en la definición simbólica, del axioma distributivo, se aplica el axioma simétrico de la igualdad, se tiene:

$$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c; a.b + a.c = a.(b + c)$$

RECOLECTIVO

Ejemplo:

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 2(5 + 3)$$

$$10 + 6 = 2 \cdot 8 \rightarrow 16 = 16$$

La operación realizada en el ejemplo anterior se conoce, generalmente, como axioma recolectivo o factor común. Si consideramos lo anotado anteriormente, el axioma distributivo - recolectivo se escribe en forma simbólica de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c; a(b + c) = a.b + a.c \wedge a.b + a.c = a.(b + c)$$

1.5.1. 1.5.1. APLICACIONES

Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo o recolectivo, según corresponda.

Ejemplo 1. $5(1 + 3) = 20$

Proposiciones

1. $5(1 + 3) = 20$

2. $5 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 20$

3. $5 + 15 = 20$

4. $20 = 20$

Razones

Dato

Axioma distributivo

Axioma modulativo, Def. (x)

Def. (+)

Ejemplo 2. $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 32$

Proposiciones

1. $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 32$

2. $4(3 + 5) = 32$

3. $4 \cdot 8 = 32$

4. $32 = 32$

Razones

Dato

Axioma recolectivo

Def. (+)

Def. (x).

EJERCICIOS

1. Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo o recolectivo según corresponda:

1. $3(4 + 2) = 18$

4. $3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 16$

7. $5(1 + 2) = 15$

10. $4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 18$

2. $7(4 + 5) = 63$

5. $4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 32$

8. $1(4 + 3) = 7$

11. $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 32$

3. $2(3 + 5) = 16$

6. $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21$

9. $3(2 + 3) = 15$

12. $3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 27$

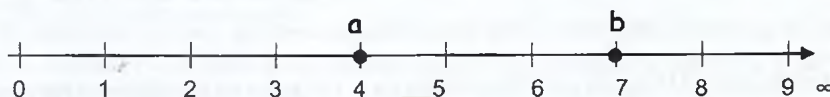
1.6. DESIGUALDAD DE NÚMEROS NATURALES

1.6.1. DEFINICIÓN

La desigualdad, es una relación matemática entre dos expresiones que no son iguales. Los símbolos utilizados para denotar una desigualdad son:

$<$ (menor que) o $>$ (mayor que)

1. Un número natural a es **menor** que un número natural b , si en la recta numérica el punto a está a la izquierda del punto b , se escribe: $a < b$. Por ejemplo: $4 < 7$.



El $4 < 7$, porque el 4 se encuentra a la izquierda del 7.

2. Un número natural b es **mayor** que un número natural a , si en la recta numérica el punto b está a la derecha del punto a , se escribe: $b > a$. por ejemplo: $7 > 4$.



El $7 > 4$, porque el 7 se encuentra a la derecha del 4.

Definición 1: a es menor que b es equivalente a decir que: la diferencia $(b - a)$ es un número natural (mayor que 0). La expresión anterior se escribe, en forma simbólica, de la siguiente manera:

$$a < b \Leftrightarrow (b - a) > 0$$

Ejemplo: $0 < 1$ porque $1 - 0 = 1$; 1 es natural.

Definición 2: a es mayor que b es equivalente a decir que: la diferencia $(a - b)$ es un número natural. En forma simbólica se tiene:

$$a > b \Leftrightarrow (a - b) > 0$$

Ejemplo: $7 > 5$ porque $7 - 5 = 2$; 2 es natural.

Observación: El elemento a , $a \in \mathbb{N}$, se dice primer elemento de los números naturales sí, para todo $x \in \mathbb{N}$, $a < x$. El 0 es el primer elemento de $\mathbb{N}$.

EJERCICIOS

1. Grafique los siguientes pares de números en la recta numérica e indique si el primero es menor o mayor que el segundo.

1. 3 y 4

2. 4 y 1

3. 1 y 2

4. 2 y 5

5. 2 y 3

6. 0 y 2

7. 3 y 0

8. 2 y 2

2. Grafique las siguientes desigualdades. Luego cambie el signo " $<$ " por " $>$ ", utilizando la equivalencia:

$$a < b \Leftrightarrow b > a.$$

1. $2 < 4$

2. $0 < 3$

3. $2 < 8$

4. $8 < 11$

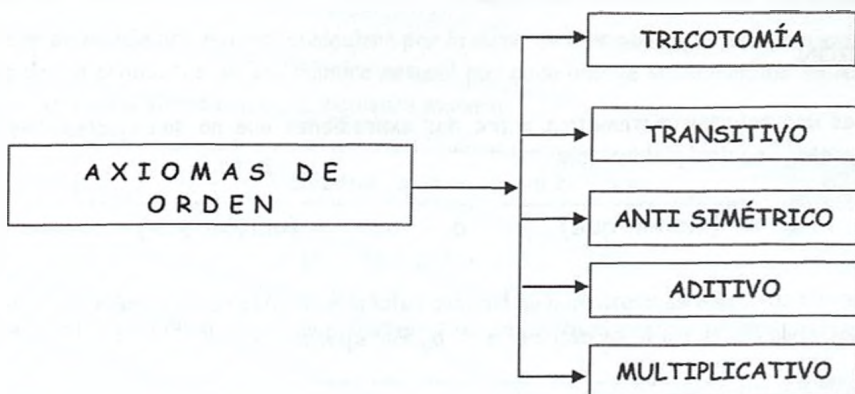
5. $5 < 14$

6. $2 < 9$

7. $5 < 10$

8. $8 < 16$

1.6.2. AXIOMAS DE LA DESIGUALDAD (ORDEN)



En los siguientes axiomas, $U = \mathbb{N}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números naturales". $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno", y se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. TRICOTOMÍA	Entre dos números $\mathbb{N}$ cualesquiera, se cumple una y solo una de las siguientes relaciones: - Son iguales - El 1º es mayor que el 2º - El 1º es menor que el 2º	2 y 2, se cumple que: $2 = 2$ 5 y 2, se cumple que: $5 > 2$ 1 y 3, se cumple que: $1 < 3$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b:$ $a = b \Leftrightarrow a > b \vee a < b$
2. TRANSITIVO 	Si un primer número natural es mayor (menor) que un segundo y éste mayor (menor) que un tercero, entonces el primero es mayor (menor) que el tercero.	$5 > 2 \wedge 2 > 0 \rightarrow 5 > 0$ $1 < 2 \wedge 2 < 3 \rightarrow 1 < 3$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$ $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
3. ANTISIMÉTRICO	Si un número natural es mayor que un segundo, entonces el segundo es menor que el primero.	$9 > 3 \rightarrow 3 < 9$ $4 < 12 \rightarrow 12 > 4$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b:$ $a > b \Leftrightarrow b < a$ $a > b \Leftrightarrow b \not< a$
4. ADITIVO 	Si a cada miembro de una desigualdad se suma un mismo número natural cualquiera, el sentido de la desigualdad no cambia.	$7 > 3 \wedge 2 = 2 \rightarrow 7 + 2 > 3 + 2$ $5 < 9 \wedge 3 = 3 \rightarrow 5 + 3 < 9 + 3$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge c = c \Rightarrow a + c > b + c$ $a < b \wedge c = c \Rightarrow a + c < b + c$
5. MULTIPLICATIVO 	Si cada miembro de una desigualdad se multiplica por un mismo número natural mayor que 0, el sentido de la desigualdad no cambia.	Natural mayor que 0 $3 < 9 \wedge 2 = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 < 9 \cdot 2$	$U = \mathbb{N}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

1.6.3. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE INECUACIONES BÁSICAS)

a. INECUACIÓN

Si una desigualdad contiene incógnitas (x, y, z) se llama inecuación. Una inecuación es una desigualdad verdadera para determinados valores de las letras que contiene, por ejemplo:

$x > 3$: Es verdadera para todos los valores mayores que 3.
Es falsa para todos los valores menores o iguales a 3.

$x < 2$: Es verdadera para todos los valores menores que 2.
Es falsa para todos los valores mayores o iguales a 2.

Para graficar el conjunto solución de una inecuación, sobre la semirrecta numérica, se encierra en una circunferencia el elemento conocido, y se remarca la semirrecta hacia la derecha si es "mayor que" y hacia la izquierda si es "menor que".



La circunferencia indica, en éste caso, que el 3 no es elemento del conjunto solución, y la flecha que el conjunto es infinito.



La circunferencia indica, en éste caso, que el 2 no es elemento del conjunto solución, y la flecha que el conjunto es finito: CS = {0,1}.

b. ELEMENTOS DE UNA INECUACIÓN

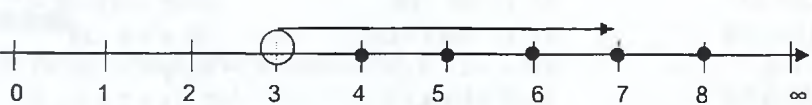
Las letras que intervienen en las inecuaciones reciben el nombre de incógnitas. Por lo general las incógnitas se indican mediante las últimas letras minúsculas del alfabeto (x, y, z). La expresión que se antepone al signo $>$ o $<$ se llama primer miembro y la que sigue segundo miembro.

Resolver una inecuación es determinar los valores de las incógnitas que hacen verdadera la desigualdad. Estos valores se llaman soluciones o raíces de la inecuación. Por ejemplo:

Ejemplo 1. Resolver la inecuación: $x + 0 > 3$

Proposiciones	Razones
1. $x + 0 > 3$	Dato
2. $x > 3$	Axioma modulativo (+)

Las soluciones o raíces de una inecuación se representan mediante una flecha, en la recta numérica, por ejemplo:



La flecha con origen abierto (circunferencia) indica que todos los números mayores que 3 son soluciones de la inecuación, menos el 3. Cs = {4,5,6,7, ...}.

Ejemplo 2. Resolver la inecuación: $4 + 2 > x$

Proposiciones

1. $4 + 2 > x$
2. $x < 4 + 2$
3. $x < 6$

Razones

Dato
 $a > b \Leftrightarrow b < a$
 Axioma clausurativo (+)



Ejemplo 3. Resolver la inecuación: $x < 4 + 2 + 5$

Proposiciones

1. $x < 4 + 2 + 5$
2. $x < (4 + 2) + 5$
3. $x < 6 + 5$
4. $x < 11$
5. $CS = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Razones

Dato
 Axioma Asociativo (+)
 Axioma clausurativo (+)
 Def. (+)
 Def. CS.



Ejemplo 4. Resolver la inecuación: $x < 14 - 5$

Proposiciones

1. $x < 14 - 5$
2. $x < 9$
3. $CS = \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

Razones

Dato
 Def. (-)
 Def. CS



Ejemplo 5. Resolver la inecuación: $3 \cdot 2 > x$

Proposiciones

1. $3 \cdot 2 > x$
2. $x < 3 \cdot 2$
3. $x < 6$
4. $CS = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Razones

Dato
 $a > b \Leftrightarrow b < a$
 Axioma clausurativo (x)
 Def. CS



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes inecuaciones, y luego represente el CS en la semirrecta numérica.

- | | | |
|----------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. $x + 0 > 6$ | 2. $x < 1 + 0$ | 3. $y < 2 + 4$ |
| 4. $5 + 4 > y$ | 5. $y < 1 + 4 + 7$ | 6. $y > 1 + 0 + 3$ |
| 7. $x + 0 > 20$ | 8. $x < 30 + 0$ | 9. $z < 5 + 9$ |
| 10. $x > 29 - 8$ | 11. $y < 10 - 3$ | 12. $z > 15 - 18$ |
| 13. $x > 123 - 49$ | 14. $y < 54 - 38$ | 15. $z < 125 - 234$ |
| 16. $x > 123 - 119$ | 17. $y < 1234 - 827$ | 18. $z > 9 - 19$ |
| 19. $x \cdot 1 < 6$ | 20. $x > 1 \cdot 3$ | 21. $y > 2 \cdot 4$ |
| 22. $5 \cdot 4 < y$ | 23. $y > 1 \cdot 4 \cdot 7$ | 24. $y < 1 \times 2 \times 3$ |
| 25. $x \cdot 1 < 12$ | 26. $x > 13 \cdot 1$ | 27. $z > 5 \times 9$ |
| 28. $x + 1 > 6$ | 29. $x < 6 \div 3$ | 30. $y < 8 \div 4$ |

CAPÍTULO 2

NÚMEROS NATURALES (PARTE 2)

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analizan las operaciones: potenciación y radicación. Además, el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, de un conjunto finito de números naturales.

2.2. POTENCIACIÓN (NATURALES CON EXPONENTES NATURALES: $\mathbb{N}^n$)

Se llama potenciación, en los números naturales, al producto formado mediante multiplicaciones sucesivas de un mismo número natural. Por ejemplo:

$$2^3 = 2.2.2 \quad \text{entonces} \quad 2^3 = 8$$

El número 2 se llama base, el 3 exponente (indica el número de veces que el número 2 se ha de multiplicar por sí mismo). Como $2^3 = 8$, el 8 es la tercera potencia de 2.

2.2.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si la base a y el exponente n , son números naturales; $N = \{0,1,2,3, \dots\}$:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. POTENCIA CERO	La potencia cero (exponente cero), de un número natural a distinto de cero, es igual a 1: $a^0 = 1; a \neq 0$	$0^0 = 1$ $(1)^0 = 1$ $(2)^0 = 1$
2. POTENCIA UNO	La potencia uno (exponente 1, primera potencia) de un número natural a , es igual al mismo número sin el exponente. $a^1 = a$	$0^1 = 0$ $1^1 = 1$ $2^1 = 2$ $3^1 = 3$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA (PEP) $N^* = \{2,3,4, \dots\}$	La PEP de un número natural a , es igual al producto de n veces a ; siendo $n > 1$: $a^n = \underbrace{a.a.a \dots a}_{n \text{ veces}}; a \in \mathbb{N} \wedge n \in N^*$	$0^2 = 0.0$ $1^2 = 1.1 = 1$ $2^3 = 2.2.2 = 8$ $3^3 = 3.3.3 = 27$

Observación: La segunda potencia de un número se llama cuadrado de dicho número. La tercera potencia, cubo de dicho número. La potencia n de un número a , se escribe a^n , y se llama potencia enésima de a (potencia que ocupa un número n en una serie). La potencia enésima de un número natural existe y es única.

EJERCICIOS

Escriba como una potencia los siguientes productos:

1. $2.2.2.$

2. $3.3.$

3. $4.4.4.4$

4. $5.5.5.5.5.$

5. $6.6.6.6.6.6.6.$

6. $7.7.7.7.7.7.7.$

7. $10.10.10.10$

8. $15.15.15.15.$

9. $20.20.20.20.20$

10. $1.1.1.1.1$

11. $0.0.0.0.0$

12. $9.9.9.9.$

2.2.2. TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Sí: a^n y b^n ; son potencias definidas en los números naturales, $N = \{0,1,2,3, \dots\}$:

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. POTENCIA ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La potencia enésima del producto de números naturales, es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores. $(a.b)^n = a^n.b^n$	$(2.3)^0 = 1$ $(2.3)^1 = 2.3 = 6$ $(2.3)^2 = 2^2.3^2$ $6^2 = 4 . 9$
2. POTENCIA ENÉSIMA DEL COCIENTE EXACTO	La potencia enésima del cociente exacto (división exacta) de números naturales, es igual al cociente de las potencias enésimas; $b \neq 0$: $(a/b)^n = a^n/b^n$; $b \neq 0$	$(6/3)^0 = 1$ $(6/3)^1 = 6/3$ $(6/3)^2 = 6^2/3^2$ $2^2 = 36/9$

Observación: $(a.b)^0 = 1$; $a.b \neq 0$, por la definición 1. Del mismo modo: $(a.b)^1 = a.b$, por la definición 2.

2.2.3. OPERACIONES DE LA POTENCIACIÓN.

Si a es un número natural, m y n naturales mayores que cero ($m,n \in N > 0$):

OPERACIÓN	TEOREMA	EJEMPLO
1. PRODUCTO DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se suman los exponentes. $a^m.a^n = a^{m+n}$	$2^0.2^3 = 2^{0+3} = 2^3$ $2^2.2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
2. COCIENTE DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se restan los exponentes. $a^m/a^n = a^{m-n}$; $m > n$ y $a \neq 0$	$2^4/2^3 = 2^{4-3} = 2$
3. POTENCIA DE POTENCIA	Se mantiene la base y se multiplican los exponentes. $(a^m)^n = a^{m.n}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

Observación: la resta de exponentes, cuando el minuendo es menor que el sustraendo, no está definida en los números naturales. Cualquier potencia de un número natural tiene un valor único o siempre es igual.

2.2.4. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

Resolver una ecuación es determinar los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad. Estos valores se llaman soluciones o raíces de la ecuación.

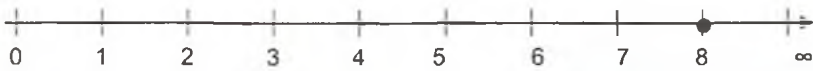
Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $2^2 \cdot 2 = x$

PROPOSICIONES

- 1. $2^2 \cdot 2 = x$
- 2. $x = 2^2 \cdot 2$
- 3. $x = 2^3$
- 4. $x = 8$

RAZONES

- Dato
- Axioma simétrico (=)
- $a^m.a^n = a^{m+n}$
- Def. (a^n)



Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $(2^3)^2-30 = x$

PROPOSICIONES

- 1. $(2^3)^2-30= x$
- 2. $x = (2^3)^2-30$
- 3. $x = 2^6-30$
- 4. $x = 64 - 30$
- 5. $x = 34$

RAZONES

- Dato
- Axioma simétrico (=)
- $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- Def (a^n)
- Def $(-)$



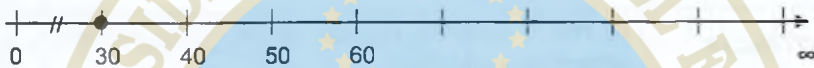
Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $x = 2^2 \cdot 3^2-6$

PROPOSICIONES

- 1. $x = 2^2 \cdot 3^2-6$
- 2. $x = (2 \cdot 3)^2-6$
- 3. $x = 6^2-6$
- 4. $x = 36 -6$
- 5. $x = 30$

RAZONES

- Dato
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- Def. (x)
- Def. (a^n)
- Def. $(-)$



Observación: el símbolo “//” significa que existen otros números naturales en la semirrecta numérica.
Por ejemplo: el 1, 2, 3, 4, sucesivamente hasta el 30.

Ejemplo 4. Resolver la ecuación: $x = 10^3/5^3+12$

PROPOSICIONES

- 1. $x = 10^3/5^3+12$
- 2. $x = (10/5)^3 + 12$
- 3. $x = 2^3+ 12$
- 4. $x = 8 +12$
- 5. $x = 20$

RAZONES

- Dato
- $a^m/b^m = (a/b)^m$
- Def. $(+)$
- Def. (a^n)
- Def. $(+)$



EJERCICIOS

- 1. Resolver las siguientes ecuaciones (inecuaciones). Represente la solución en la semirrecta numérica.
 - 1. $x \cdot 4^0 = 5$
 - 2. $x = 3 \cdot 2^1$
 - 3. $2^2 \cdot 2^3 = x$
 - 4. $(3^2)^3 - 719 = x$
 - 5. $x = 2^3 \cdot 3^3- 206$
 - 6. $x = 6^2/2^2 + 11$
 - 7. $x = 2^3/2^2 + 2^3$
 - 8. $x \cdot 2^0 < 7$
 - 9. $x > 4 \cdot 3^1$
 - 10. $3^2 \cdot 3^3 < x$
 - 11. $(2^2)^3 - 60 = x$
 - 12. $x = 4^2 \cdot 3^2 - 140$
 - 13. $x > 6^3/2^3 + 3$
 - 14. $x = 2^5/2^2 + 2^3$
 - 15. $x \cdot 5^0 > 2$
 - 16. $x < 3 \cdot 3^1$
 - 17. $4^2 \cdot 4^3 = x$
 - 18. $(2^2)^4 - 259 > x$
 - 19. $x = 5^2 \cdot 6^2-890$
 - 20. $x < 8^3/2^3 + 1$
 - 21. $x = 2^6/2 + 2^2$
- 2. Construir un mentefacto para la potenciación de números naturales.
- 3. Escriba las propiedades y teoremas de la potenciación en N, aplicando el axioma simétrico (=).

2.3. RADICACIÓN

En la potenciación se conoce la base y el exponente, y se calcula la potencia. Por ejemplo: en $2^3 = 8$, la base es 2, el exponente es 3 y la potencia es 8.

En la radicación se conoce la potencia (8) y el exponente (3), y se calcula la base (2), mediante la igualdad: $\sqrt[3]{8} = 2$. El número 8 se llama radicando o cantidad subradical, el 3 índice de la raíz, el 2 es la raíz (se llama raíz a la cantidad que se ha de multiplicar por sí misma una o más veces para obtener un número determinado, DRAE) y el símbolo $\sqrt{}$ radical. La radicación es una operación inversa de la potenciación.

2.3.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si a es un número natural, y n es natural mayor que uno (conjunto representado por N^*):

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA EXACTA $N^* = \{2,3,4,...\}$	La raíz enésima exacta de un número natural llamado radicando, es otro natural que, elevado a la potencia enésima, es igual al mismo radicando. $\exists a: \sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a; n \in N^*$	$\sqrt[3]{8} = 2 \iff 2^3 = 8$ $\sqrt{2} = \mathbb{A}$, en N
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1	La raíz enésima de 1 es igual a 1: $\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La raíz y potencia enésima de un mismo número natural, se simplifican: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$

Observación: Cuando $n = 2$; el índice no se escribe, de modo que $\sqrt{a}$ indica la raíz cuadrada de a . En la definición 1, se tiene que algunos naturales cumplen con la propiedad y otros no. Por ejemplo: $\sqrt[3]{125} = 5 \iff 125 = 5^3$, $\sqrt[4]{81} = 3 \iff 81 = 3^4$, entre otros. No cumplen: $\sqrt{2}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt[3]{12}$, entre otros. Si el radicando es cero tiene como raíz cero: $\sqrt[n]{0} = 0 \iff 0^n = 0$.

2.3.2. TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

Si: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$, son raíces definidas en los números naturales con índice, n , natural mayor que uno (N^*):

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La raíz enésima de un producto de números naturales es igual al producto de la raíz enésima de cada factor, siempre que estén definidas. $\exists a,b: \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$ $10 = 10$ $\sqrt{2 \cdot 5} = \mathbb{A}$, en N
2. RAÍZ ENÉSIMA DEL COCIENTE EXACTO	La raíz enésima del cociente exacto (división exacta), de números naturales, es igual al cociente de las potencias enésimas, dividiendo y divisor; siempre que estén definidas; $b \neq 0$: $\exists a,b: \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}; b \neq 0$	$\sqrt{16 \div 4} = \sqrt{16} \div \sqrt{4}$ $2 = 2$ $\sqrt{2/5} = \mathbb{A}$, en N

EJERCICIOS

- 1. Hallar la raíz cuadrada o cúbica de los siguientes números, según corresponda: 1, 8, 4, 27, 9, 64, 16, 125, 36, 64, 81, 100.
- 2. Construir un mentefacto para la radicación.
- 3. Escriba las propiedades de la radicación utilizando el axioma simétrico (=).

2.4. TIPOS DE NÚMEROS NATURALES

2.4.1. NÚMERO NATURAL MÚLTIPLO - SUBMÚLTIPLO

DEFINICIÓN: MÚLTIPLO

El múltiplo de un número natural (a), es otro número x , tal que $x = a \cdot n$, siendo n un número natural mayor que cero. El múltiplo de un número natural contiene a dicho número n veces y también, se dice que " x es divisible para a ".

Por ejemplo:

El 10 es múltiplo del 5 ó es divisible para 5, porque le contiene 2 veces al 5: $10 = 5 \times 2$

El 14 es múltiplo del 2 ó es divisible para 2, porque le contiene 7 veces al 2: $14 = 2 \times 7$

El 20 es múltiplo del 4 ó es divisible para 4, porque le contiene 5 veces al 4: $20 = 4 \times 5$

El conjunto de los múltiplos de un número a (módulo) se forma multiplicando este número por la serie infinita de los números naturales mayores que 0. Se representa con la letra M y un subíndice que indica el módulo. Por ejemplo:

Los múltiplos del 3 son: $M_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$.

Los múltiplos del 5 son: $M_5 = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$.

Los múltiplos del 7 son: $M_7 = \{7, 14, 21, 28, 35, \dots\}$.

Observación: el 3 se llama módulo de la serie infinita. De igual forma el 5 y el 7.

En general la serie infinita de los múltiplos de a es:

$$M_a = \{ax_1, ax_2, ax_3, ax_4, ax_5, \dots\} = \{x/x = an; n \in \mathbb{N} \wedge n > 0\}$$

EJERCICIOS

1. Escriba los 6 primeros múltiplos de los siguientes números, por extensión y comprensión:
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 0.

DEFINICIÓN: SUBMÚLTIPLO

Se llama submúltiplo (x) de un número natural (a) al número que está contenido exactamente dos o más veces. Generalmente, se usan las palabras divisor o factor para referirse a un submúltiplo: $S_k = \{x/x = a/n; n \in \mathbb{N} > 0 \wedge a \neq n\}$.

Por ejemplo:

4 es submúltiplo de 24 porque está contenido en el 24 seis veces.

8 es factor de 40 porque está contenido en el 40 cinco veces.

4 es divisor de 12 porque está contenido en el 12 tres veces.

EJERCICIOS

1. Escriba los submúltiplos de los siguientes números, por extensión y comprensión:
10, 20, 30, 40, 60, 70, 80.

2.4.2. NÚMERO NATURAL PAR - IMPAR

DEFINICIÓN:

Número natural par: si es de la forma $2n$, siendo n elemento de los naturales.

Ejemplos:

El 6 es par porque se cumple que: $6 = 2 \times 3$, donde el 3 es un número natural

El 0 es par porque se cumple que: $0 = 2 \times 0$, donde el 0 es un número natural

El 15 no es par porque ningún número natural cumple que: $15 = 2n$

El conjunto de los números naturales pares es: $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$.

La expresión general para los números pares: es:

$$P = \{2 \times 0, 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, 2 \times 5, \dots\} = \{x / x = 2n; n \in \mathbb{N}\}$$

DEFINICIÓN:

Número natural impar: si es de la forma $2n + 1$, siendo n elemento de $\mathbb{N}$.

Ejemplos:

El 7 es impar porque se cumple que: $7 = 2 \times 3 + 1$, donde el 3 es un número natural

El 8 no es impar porque no hay un número natural n que cumpla: $8 = 2n + 1$.

El conjunto de los números impares es: $I = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$.

La expresión general para los números impares es:

$$I = \{x / x = 2n + 1; n \in \mathbb{N}\}$$

2.4.3. NÚMERO NATURAL PRIMO - COMPUESTO

DEFINICIÓN: PRIMO

Número natural primo: si es mayor que 1 y es divisible solo para sí mismo y para 1.

Ejemplos:

El 2 es primo porque es divisible para 2 y para 1

El 7 es primo porque es divisible para 7 y para 1.

El 4 no es primo porque es divisible para: 4, 2 1

Para hallar los números primos desde el 1 al 25 se procede de la siguiente manera:

1. Se escribe la sucesión natural de los números desde la unidad hasta el 25.
2. Sombrear el 1 porque no es primo ni compuesto.
3. A partir del 2, se escriben en "negritas" todos los múltiplos mayores que 2.
4. De la misma manera con los múltiplos del 3 y del 5.

La parte no sombreada forma la criba de Eratóstenes o tabla de números primos:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Luego, los números primos del 1 al 25 son: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

DEFINICIÓN: COMPUESTO

Número natural compuesto: si es mayor que 1 y no es primo. Todo número compuesto se pueden expresar como producto de números primos.

Ejemplos:

4 es compuesto porque además de ser divisible por 4 y 1, es divisible por 2.

14 es compuesto porque además de ser divisible por 14 y 1, es divisible por 2 y por 7.

Los números compuestos del 4 al 25 se encuentran sombreados (negritas) en la tabla anterior:

$$C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25\}$$

EJERCICIOS

1. Hallar los números primos y compuestos, por extensión y comprensión, menores que: 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70.
2. Construir un esquema de llaves de las clases de números naturales.

2.5. CARACTERES DE DIVISIBILIDAD

Se llaman caracteres de divisibilidad a ciertos indicadores (particularidades) de los números que nos permiten conocer, por simple inspección, si un número natural es divisible para otro número natural. Un número es divisible para otro cuando la división es exacta (tiene resto 0). Los más importantes son:

2.5.1. DIVISIBILIDAD PARA 2

Un número es divisible para 2 cuando termina en cifra par. Por ejemplo:

- El 8 es divisible para 2, porque termina en cifra par: $8 \div 2 = 4$
- El 10 es divisible para 2, porque termina en cero: $10 \div 2 = 5$. (el 0 es par)
- El 18 es divisible para 2, porque termina en cifra par: $18 \div 2 = 9$
- El 13 no es divisible por 2, porque termina en cifra impar.

2.5.2. DIVISIBILIDAD PARA 3

Un número es divisible para 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

- El 9 es divisible para 3, porque la suma de sus cifras (9) es múltiplo de 3: $9 \div 3 = 3$.
- El 12 es divisible para 3, porque la suma de sus cifras ($1 + 2 = 3$) es múltiplo de 3: $12 \div 3 = 4$.
- El 18 es divisible para 3, porque la suma de sus cifras ($1 + 8 = 9$) es múltiplo de 3: $18 \div 3 = 6$.
- El 22 no es divisible para 3, porque la suma de sus cifras ($2 + 2 = 4$) no es múltiplo de 3.

2.5.3. DIVISIBILIDAD PARA 5

Un número es divisible para 5 cuando termina en 0 ó cinco.

- El 10 es divisible para 5, porque termina en cero: $10 \div 5 = 2$.
- El 15 es divisible para 5, porque termina en cinco: $15 \div 5 = 3$.
- El 18 no es divisible para 5, porque no termina en 5 ni en 0.

EJERCICIOS

1. Indique si los siguientes números son divisibles para: 2, 3 ó 5.
14, 10, 30, 24, 35, 40, 21, 27, 33, 36, 39, 35

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE NÚMEROS NATURALES EN FACTORES PRIMOS

DEFINICIÓN

Descomponer un número en sus factores primos es convertirlo en un producto de factores primos.

Observación: todo número compuesto es igual a un producto de factores primos.

Para hallar los factores primos de un número compuesto, se divide el número dado por los números primos: 2, 3, 5, ..., sucesivamente, hasta hallar un cociente primo, que se divida para sí mismo.

Ejemplo.

30	2	24	2	50	2
15	3	12	2	25	5
5	5	6	2	5	5
1		3	3	1	
		1			

Los factores primos de 30 son: 2, 3 y 5

La descomposición en factores primos es: $30 = 2 \times 3 \times 5$

Los factores primos de 24 son: 2 y 3

La descomposición en factores primos es: $24 = 2^3 \times 3$

Los factores primos de 50 son: 2 y 5

La descomposición en factores primos es: $50 = 2 \times 5^2$

EJERCICIOS

1. Hallar los factores primos y la descomposición en factores primos, de los siguientes números:

1. 10	2. 15	3. 28	4. 34	5. 46
6. 68	7. 84	8. 25	9. 64	10. 70
11. 64	12. 91	13. 96	14. 121	15. 160

2.7. MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE NÚMEROS NATURALES (mcd)

Se llama divisor de un número natural a , a cualquier otro natural b tal que la división $a \div b$ es exacta. Por ejemplo: 15 es divisor de 45 porque la división $45 \div 15 = 3$, es exacta.

Todo número natural a , tiene, al menos, dos divisores: el propio a y el 1. Si los únicos divisores de a son a y 1 se dice que es primo. Si a tiene más divisores se dice que es compuesto. Por ejemplo:

- 23 es primo porque sólo es divisible por 1 y por 23.
- 24 es compuesto porque el 2, 3, 4, 6, 8 y 12, son divisores de 24.

DEFINICIÓN

Se llama máximo común divisor, de dos o más números naturales, al mayor de sus divisores comunes. El máximo común divisor de varios números: a, b , y c , se representa por: $mcd(a, b, c)$.

Para obtener el máximo común divisor de dos o más números existen tres formas:

- 1. Por descomposición en factores primos,
- 2. Método sintético; y
- 3. Por divisiones sucesivas.

2.7.1. POR DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

DEFINICIÓN

El mcd de varios números, descompuestos en sus factores primos, es igual al producto de sus factores primos comunes, elevados al menor exponente.

Para hallar el mcd se procede de la siguiente manera:

- 1. Se halla los factores primos de los números dados
- 2. Se toman cada uno de los factores primos comunes elevados al menor exponente.

Ejemplo 1: Hallar el mcd (30, 24)

a. Se halla los factores primos de los números dados:

30	2	24	2
15	3	12	2
5	5	6	2
1		3	3
		1	

b. Luego, se toman los factores primos comunes, a las dos descomposiciones, elevados al menor exponente:

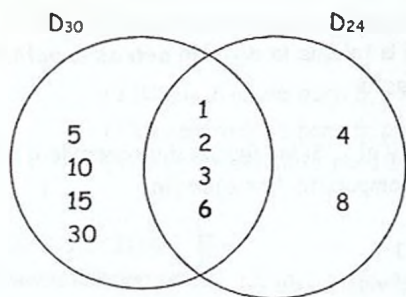
La descomposición en factores primos es:

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$24 = 2^3 \times 3$

$\therefore mcd(30, 24) = 2 \cdot 3 = 6$.

Observación: Mediante diagramas de Venn - Euler, se tiene:



Observación: los números que dividen al 30 y al 24 son: 1, 2, 3 y 6. El 6 es el mayor número que divide al 30 y al 24 exactamente, por lo tanto, es el mcd.

Ejemplo 2. Hallar el mcd (12, 18, 24)

a. Se halla los factores primos de los números dados:

12	2	18	2	24	2
6	2	9	3	12	2
3	3	3	3	6	2
	1		1	3	3
				1	

b. Luego, se toman los factores primos comunes, a las tres descomposiciones, elevados al menor exponente:

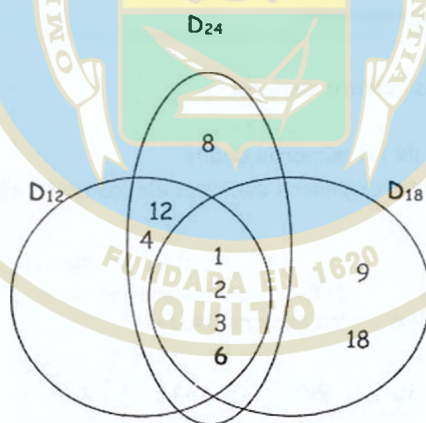
$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\therefore \text{mcd}(12, 18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$$

c. Por tanto, el mayor de los divisores comunes a 12, 18 y 24 es 6. El siguiente diagrama ilustra lo dicho anteriormente:



EJERCICIOS

1. Hallar el mcd de los siguientes números por descomposición factorial.

1. 18, 30

2. 15, 35

3. 10, 25

4. 6, 22

5. 14, 28

6. 12, 36

7. 16, 32

8. 15, 30

9. 8, 24

10. 21, 35

11. 4, 8, 12

12. 5, 15, 20

13. 7, 14, 21

14. 8, 16, 32

15. 3, 9, 27

16. 6, 18, 24

17. 9, 27, 36

18. 2, 10, 18

19. 12, 24, 36

20. 10, 15, 30

2.7.2. MÉTODO SINTÉTICO

El mcd de varios números, por descomposición en factores primos, puede hallarse rápidamente, dividiendo al mismo tiempo todos los números dados por los factores comunes, hasta que los cocientes sean primos entre sí. El mcd es el producto de los factores comunes.

Ejemplo 1. Hallar el mcd (30, 24)

a. Se divide al mismo tiempo, los dos números, para los factores comunes:

30	24	2
15	12	3
5	4	

b. Luego, se halla el producto de los factores comunes: El mcd (30, 24) = 2 • 3 = 6

Observación: el 5 y el 4 son primos entre sí.

Ejemplo 2. Hallar el mcd (12, 18, 24)

a. Se divide al mismo tiempo, los tres números, para los factores comunes:

12	18	24	2
6	9	12	3
2	3	4	

b. Luego, se halla el producto de los factores comunes: El mcd (12, 18, 24) = 2 • 3 = 6

Observación: el 2, 3 y 4 son primos entre sí.

EJERCICIOS

Hallar el mcd de los siguientes números por descomposición factorial (método sintético).

1. 18, 30
2. 15, 35
3. 10, 25
4. 6, 22
5. 14, 28
6. 12, 36
7. 16, 32
8. 15, 30
9. 8, 24
10. 21, 35
11. 4, 8, 12
12. 5, 15, 20
13. 7, 14, 21
14. 8, 16, 32
15. 3, 9, 27
16. 6, 18, 24
17. 9, 27, 36
18. 2, 10, 18
19. 12, 24, 36
20. 10, 15, 30

2.7.3. DIVISIONES SUCESIVAS

DEFINICIÓN

El mcd de dos números naturales: a y b, por divisiones sucesivas, es igual al último divisor; cuando el resto es 0.

El procedimiento para hallar el mcd de dos números, es el siguiente:

1. Si la división de a para b es exacta, entonces b es el mcd de los dos números.
2. Si la división de a para b no es exacta y deja resto $r_1 \neq 0$, se procede a dividir b para r_1 , si esta división es exacta, entonces el mcd $(a, b) = r_1$.
3. Si la división anterior no es exacta y deja resto $r_2 \neq 0$, se procede entonces a dividir r_1 para r_2 , y así sucesivamente, hasta hallar un resto igual a 0.
4. El último divisor empleado será entonces el mcd de los números dados.

Ejemplo 1: Hallar el mcd de $(5, 20)$.

Dividimos 20 para 5

$$\begin{array}{r} 20 \mid 5 \\ 0 \quad 4 \end{array}$$

Como el resto es 0:

$$\therefore \text{mcd}(5, 20) = 5$$

Ejemplo 2: Hallar el mcd de $(12, 30)$.

Dividimos 30 para 12, y luego 12 para 6

DIVISIONES SUCESIVAS

$$\begin{array}{r} 1 \\ 30 \mid 12 \\ 6 \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 12 \mid 6 \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

Como el resto es 0, en la segunda división, entonces: El mcd $(12, 30) = 6$

Ejemplo 3: Hallar el mcd de $(17, 40)$.

Dividimos 40 para 17, luego 17 para 6, 6 para 5, y 5 para 1.

DIVISIONES SUCESIVAS

$$\begin{array}{r} 1 \\ 40 \mid 17 \\ 6 \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 17 \mid 6 \\ 5 \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 6 \mid 5 \\ 1 \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 5 \mid 1 \\ 0 \quad 5 \end{array}$$

Como el resto es 0, en la cuarta división, entonces: El mcd $(17, 40) = 1$

Ejemplo 4. Hallar el mcd $(12, 18, 24)$

En este caso, se halla el mcd de los dos primeros, y luego el mcd del resultado anterior con el tercer número:

1. Dividimos 18 para 12, y luego 12 para 6.

$$\begin{array}{r} 18 \mid 12 \\ 6 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \mid 6 \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

$$\therefore \text{mcd}(12, 18) = 6$$

2. Dividimos 24 para 6

$$\begin{array}{r} 24 \mid 6 \\ 0 \quad 4 \end{array}$$

Como el resto es cero:

$$\therefore \text{mcd}(12, 18, 24) = 6$$

EJERCICIOS

1. Hallar el mcd de los siguientes números, por divisiones sucesivas:

- | | | | |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| 1. 18, 30 | 2. 15, 35 | 3. 10, 25 | 4. 6, 22 |
| 5. 14, 28 | 6. 12, 36 | 7. 16, 32 | 8. 15, 30 |
| 9. 8, 24 | 10. 21, 35 | 11. 4, 8, 12 | 12. 5, 15, 20 |
| 13. 7, 14, 21 | 14. 8, 16, 32 | 15. 3, 9, 27 | 16. 6, 18, 24 |
| 17. 9, 27, 36 | 18. 2, 10, 18 | 19. 12, 24, 36 | 20. 10, 15, 30 |

2. Construir un mentefacto para mcd de números naturales.

2.8. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE NÚMEROS NATURALES (mcm)

DEFINICIÓN

Se llama múltiplo común de dos o más números a todo número que contiene exactamente a cada uno de ellos.

Por ejemplo:

Los múltiplos del 3 son: $M_3 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \dots\}$.

Los múltiplos del 2 son: $M_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, \dots\}$.

El 6 es múltiplo común de 2 y 3, porque: el 6 contiene al dos 3 veces y al 3 dos veces.

12 es múltiplo común del 2 y 3, porque: el 12 contiene al dos 6 veces y al 3 cuatro veces.

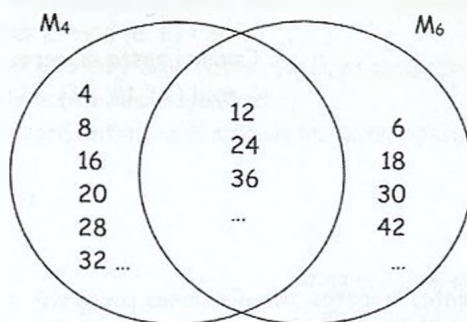
DEFINICIÓN

Se llama mínimo común múltiplo de dos o más números al número menor que contiene un número exacto de veces a cada uno de ellos. El mínimo común múltiplo de varios números: a, b, y c, se representa por: $\text{mcm}(a, b, c)$.

Por ejemplo, para hallar el mínimo común múltiplo de dos números naturales, 4 y 6, se tiene el siguiente procedimiento:

1. Hallamos los múltiplos del 4; para ello multiplicamos 4 por los números naturales mayores que 0, y se tiene: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40,
2. Hallamos los múltiplos del 6; multiplicando 6 por los números naturales mayores que 0, se tiene: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42,
3. Comparamos los múltiplos de uno y otro número, y vemos los que tienen en común: 12, 24, 36, entre otros. El menor de ellos es 12. Por lo tanto: El $\text{mcm}(4, 6) = 12$.

El siguiente diagrama de Venn - Euler ilustra lo dicho anteriormente:



El mínimo común múltiplo se puede calcular de tres maneras: 1. Por descomposición en factores primos, 2. Por el método sintético, y 3. Por la fórmula (por el mcd); los mismos que se detallan a continuación:

2.8.1 DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

DEFINICIÓN

El mcm de varios números, descompuestos en sus factores primos, es igual al producto de sus factores primos comunes y no comunes, elevados al mayor exponente.

Se procede de la siguiente manera:

1. Se halla los factores primos de los números dados.
2. Se toman cada uno de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de los factores primos, paso 2, es el mcm de los números indicados.

Ejemplo 1. Hallar el mcm (20, 5)

- a. Se halla los factores primos de los números dados:

20	2	5	5
10	2	1	
5	5		
1			

- b. Luego, se toman los factores primos comunes y no comunes, de las dos descomposiciones, elevados al mayor exponente:

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$5 = 5$$

$$\therefore \text{mcm}(20, 5) = 2^2 \cdot 5 = 20$$

Ejemplo 2. Hallar el mcm (12, 18, 24).

- a. Se halla los factores primos de los números dados:

12	2
6	2
3	3
1	

18	2
9	3
3	3
1	

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

- b. Luego, se toman los factores primos comunes y no comunes, a las tres descomposiciones, elevados al mayor exponente:

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\therefore \text{mcm}(12, 18, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

EJERCICIOS

1. Hallar el mcm de los siguientes números, por descomposición en factores primos:

- | | | | |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| 1. 18, 30 | 2. 15, 35 | 3. 10, 25 | 4. 6, 22 |
| 5. 14, 28 | 6. 12, 36 | 7. 16, 32 | 8. 15, 30 |
| 9. 8, 24 | 10. 21, 35 | 11. 4, 8, 12 | 12. 5, 15, 20 |
| 13. 7, 14, 21 | 14. 8, 16, 32 | 15. 3, 9, 27 | 16. 6, 18, 24 |
| 17. 9, 27, 36 | 18. 2, 10, 18 | 19. 12, 24, 36 | 20. 10, 15, 30 |

2.8.2. MÉTODO SINTÉTICO

Se divide, al mismo tiempo, todos los números dados para su menor divisor; lo propio se hace con los cocientes parciales hasta obtener que todos los cocientes sean 1. El mcm es el producto de todos los divisores primos.

Ejemplo 1. Hallar el mcm (20, 5)

a. Se divide cada uno de los números dados por su menor divisor, hasta obtener cociente 1:

20	5	2
10	5	2
5	5	5
1	1	

b. Luego, el mcm es el producto de los divisores primos: El mcm (20, 5) = $2^2 \cdot 5 = 20$

Ejemplo 2. Hallar el mcm (12, 18, 24)

a. Se divide cada uno de los números dados por su menor divisor, hasta obtener cociente 1:

12	18	24	2
6	9	12	2
3	9	6	
3	9	3	3
1	3	1	3
	1		

b. Luego, el mcm es el producto de los divisores primos: El mcm (12, 18, 24) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$

EJERCICIOS

1. Hallar el mcm de los siguientes números, por el método sintético:

- | | | | |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| 1. 18, 30 | 2. 15, 35 | 3. 10, 25 | 4. 6, 22 |
| 5. 14, 28 | 6. 12, 36 | 7. 16, 32 | 8. 15, 30 |
| 9. 8, 24 | 10. 21, 35 | 11. 4, 8, 12 | 12. 5, 15, 20 |
| 13. 7, 14, 21 | 14. 8, 16, 32 | 15. 3, 9, 27 | 16. 6, 18, 24 |
| 17. 9, 27, 36 | 18. 2, 10, 18 | 19. 12, 24, 36 | 20. 10, 15, 30 |

2.8.3. FÓRMULA (MEDIANTE EL mcd)

Si dos o más números no pueden descomponerse en factores fácilmente, se aplica el siguiente teorema: El mcm de dos números es igual al producto de dichos números dividido por el mcd de los mismos. Si representamos por a y b los números dados, se tiene que:

$$\text{mcm}(a, b) = a \cdot b / \text{mcd}(a, b)$$

Ejemplo 1. Hallar el mcm de: (5, 20)

- a. Hallamos el mcd de (5, 20), dividiendo 20 para 5:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ 0 & 4 \end{array} \quad \text{mcd}(5, 20) = 5$$

- b. Aplicamos la fórmula:

$$\text{mcm}(a, b) = a \cdot b / \text{mcd}(a, b) \quad \text{mcm}(5, 20) = 5 \cdot 20 / 5 \quad \therefore \text{mcm}(5, 20) = 20$$

Ejemplo 2. Hallar el mcm de: (12, 18, 24).

Hallamos el mcd y mcm de dos de ellos. Luego repetimos el procedimiento, con los resultados anteriores y el tercer número.

- a. Hallamos el mcd de (12, 18), por divisiones sucesivas:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 12 \\ 6 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 6 \\ 0 & 2 \end{array} \quad \text{mcd}(18, 12) = 6$$

- b. Aplicamos la fórmula:

$$\text{mcm}(a, b) = a \cdot b / \text{mcd}(a, b) \quad \text{mcm}(12, 18) = 12 \cdot 18 / 6 \quad \therefore \text{mcm}(18, 12) = 36$$

- c. Hallamos el mcd de (24, 36), por divisiones sucesivas:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 24 \\ 12 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 12 \\ 0 & 2 \end{array} \quad \text{mcd}(24, 36) = 12$$

- d. Aplicamos la fórmula:

$$\text{mcm}(a, b) = a \cdot b / \text{mcd}(a, b) \quad \text{mcm}(24, 36) = 24 \cdot 36 / 12 \quad \therefore \text{mcm}(24, 36) = 72$$

EJERCICIOS

1. Hallar el mcm de los siguientes números, por la fórmula:

1. 18, 30	2. 15, 35	3. 10, 25	4. 6, 22	5. 14, 28
6. 12, 36	7. 16, 32	8. 15, 30	9. 8, 24	10. 21, 35
11. 4, 8, 12	12. 5, 15, 20	13. 7, 14, 21	14. 8, 16, 32	15. 3, 9, 27
16. 6, 18, 24	17. 9, 27, 36	18. 2, 10, 18	19. 12, 24, 36	20. 10, 15, 30

2. Construir un mentefacto para mcm.

Observación: La suma y el producto de números naturales es otro número natural. La diferencia de dos números naturales no siempre es posible, solo ocurre cuando el minuendo es mayor que el sustraendo. El cociente de dos números naturales no siempre es un número natural, solo ocurre cuando la división es exacta. La raíz de un número natural no siempre es posible solo ocurre cuando la raíz es exacta.

CAPÍTULO 3

NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

3.1. INTRODUCCIÓN

Las diferencias (restas) en las cuales el minuendo es menor que el sustraendo no tienen respuesta en el conjunto de los números naturales, por lo que se dice que no están definidas, por ejemplo: $2 - 4 = ?$.

Por esta razón, fue necesario extender el conjunto de los números naturales, incluyendo los números negativos. Los números negativos permiten contar nuevos tipos de cantidades (salos de deudores) y ordenar por encima o por debajo de un cierto elemento de referencia (las temperaturas superiores o inferiores a 0 grados, los pisos de un edificio por encima o por debajo de la entrada principal).

3.2. NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

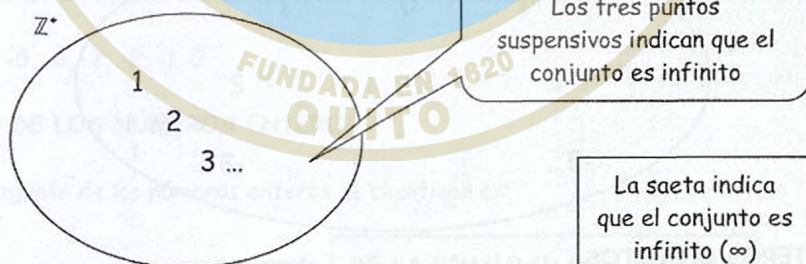
El conjunto de los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}$, mayúscula (negritas), y está formado por los enteros positivos, el cero y los enteros negativos.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

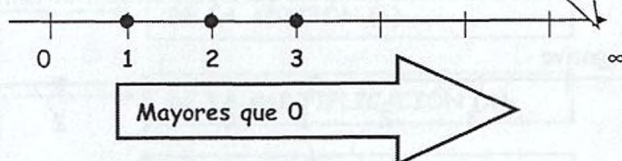
3.2.1. ENTEROS POSITIVOS ($\mathbb{Z}^+$)

El conjunto formado por los enteros mayores que cero se llama conjunto de los números enteros positivos, se representa con $\mathbb{Z}^+$. Este conjunto se puede determinar de varias maneras, las más importantes son: diagrama de Venn - Euler, forma geométrica, extensión y comprensión:

a. Diagrama de Venn - Euler.



b. Forma geométrica.



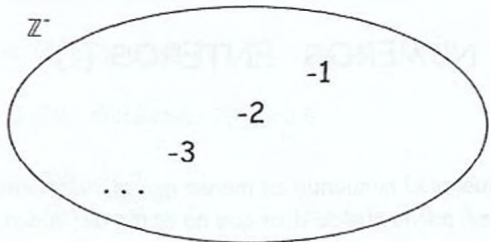
c. Extensión $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

d. Comprensión $\mathbb{Z}^+ = \{x / x > 0; x \in \mathbb{Z}\}$

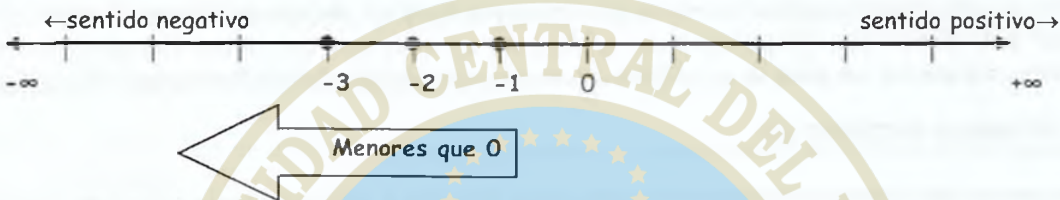
3.2.2. ENTEROS NEGATIVOS ($\mathbb{Z}^-$)

El conjunto formado por los enteros menores que cero se llama conjunto de los números enteros negativos. Se representa con $\mathbb{Z}^-$. Este conjunto se puede determinar de varias maneras, las más importantes son: diagrama de Venn - Euler, forma geométrica, extensión y comprensión:

a. Diagrama de Venn - Euler.



b. Forma geométrica.



c. Extensión $\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1 \}$

d. Comprensión $\mathbb{Z} = \{ x / x < 0; x \in \mathbb{Z} \}$

Por lo tanto, el conjunto de los números enteros está formado por los enteros negativos, el cero y los enteros positivos.

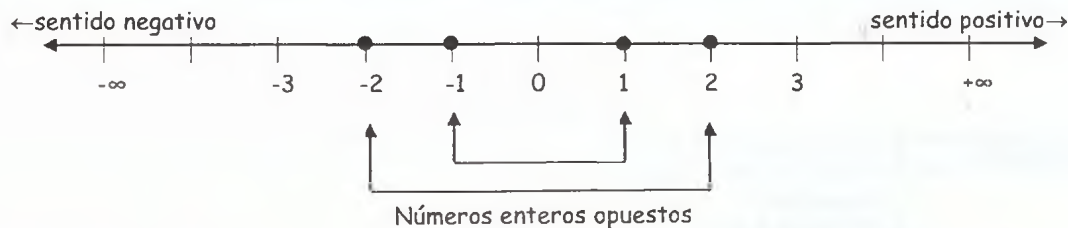
$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

Mediante diagrama de Venn - Euler se representa por:



3.2.3. ENTEROS OPUESTOS

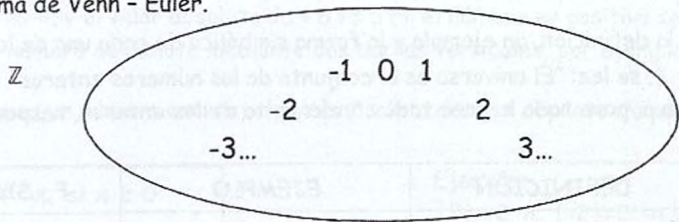
Los números situados a la misma distancia del 0 pero en sentido contrario, se llaman enteros opuestos.



Considerando esta última definición: el conjunto formado por los números naturales y sus opuestos se llama conjunto de los números enteros y se representa con la letra $\mathbb{Z}$, mayúscula.

Este conjunto se puede determinar mediante: diagrama de Venn - Euler, forma geométrica, extensión y comprensión, de la siguiente manera:

a. Diagrama de Venn - Euler.



b. Forma geométrica.



c. Extensión: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

d. Comprensión: $\mathbb{Z} = \{x / x \text{ es número entero}\}$

Finalmente, el conjunto de los números enteros permite resolver el problema de la sustracción de los números naturales en todos los casos y también el de las magnitudes que dan lugar a dos sentidos.

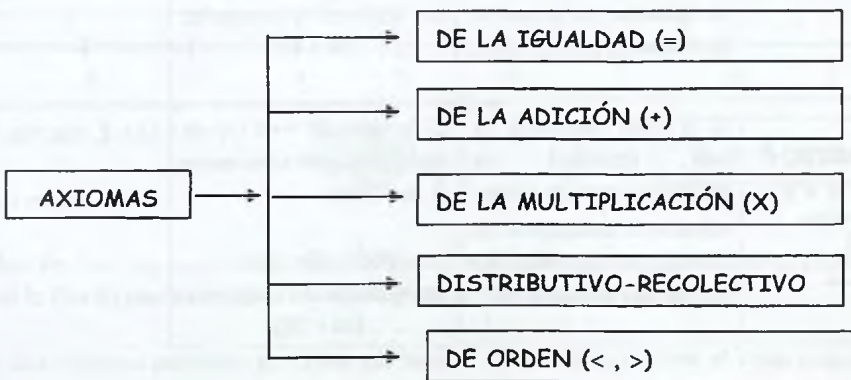
EJERCICIOS

1. Grafique en la recta numérica los opuestos de los siguientes números:

1, 2, 3, -4, -5, -6, -7, -2, -1, 0

3.2.4. AXIOMAS DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Los axiomas del conjunto de los números enteros se clasifican en:

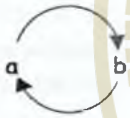
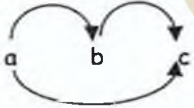


3.3. IGUALDAD DE NÚMEROS ENTEROS

Se denomina igualdad a dos expresiones separadas por el signo "=", que tienen el mismo valor numérico. Por ejemplo: $6 = 4 + 2$ ó $15 = 3 \times 5$. En una igualdad, la expresión que se antepone al signo = se llama primer miembro; la expresión que sigue al signo = se llama segundo miembro.

3.3.1. AXIOMAS DE LA IGUALDAD

A continuación, se indican: la definición, un ejemplo y la forma simbólica de cada una de los axiomas de la igualdad: La expresión: $U = \mathbb{Z}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números enteros". De igual forma: $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c", elemento de los enteros, respectivamente.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. DICOTOMÍA	Entre dos números enteros cualesquiera se cumple una sola de las siguientes relaciones: - Son iguales - Son diferentes	4 y 3 son diferentes $4 \neq 3$ - 2 y -2 son iguales $-2 = -2$	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b:$ $a = b \vee a \neq b$
2. REFLEXIVO 	Todo número entero es igual a sí mismo.	Si el número entero es el 3, entonces $3 = 3$. Si es -9 entonces $-9 = -9$	$U = \mathbb{Z}, \forall a:$ $a = a$
3. SIMÉTRICO 	Si un 1º número entero cualquiera es igual a un 2º, equivale a decir que el segundo es igual al primero.	$-2^2 \in \mathbb{Z}$ y $-4 \in \mathbb{Z}:$ $-2^2 = -4 \leftrightarrow -4 = -2^2$	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b:$ $a = b \Leftrightarrow b = a$
4. TRANSITIVO 	Si un 1º número entero es igual a un 2º y este igual a un 3º, implica que el 1º es igual al 3º.	$4 = 2^2 \wedge 2^2 = 8/2 \rightarrow 4 = 8/2$	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$
5. ADITIVO $a + c = b + c$ 	Si a cada miembro de una igualdad se suma un mismo número entero cualquiera, la relación de igualdad se conserva (permanece).	Si a la igualdad $3 + 5 = 8$ se suma el número -4, se tiene: $(3 + 5) + (-4) = 8 + (-4)$. La igualdad se conserva $(4 = 4)$.	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge c = c \Rightarrow a + c = b + c$
6. MULTIPLICATIVO $a \times c = b \times c$ 	Si a cada miembro de una igualdad se multiplica por un mismo número $\mathbb{Z}$ cualquiera, la relación de igualdad se conserva (permanece).	Si la igualdad $4 + 2 = 6$ se multiplica por el número 3, se tiene: $(4 + 2) \times 3 = 6 \times 3$. La igualdad se conserva $(18 = 18)$.	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

3.4. ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Iniciaremos éste capítulo con la revisión de valor absoluto y ley de los signos para la suma.

3.4.1. VALOR ABSOLUTO

Se llama valor absoluto de un número entero al mismo número con signo positivo. Por ejemplo: el valor absoluto de -4 es 4 , y el valor absoluto de $+6$ es 6 (si el número es positivo se omite el signo "+"). El valor absoluto de un número se denota mediante dos barras verticales, por ejemplo: $|-4| = 4$ y $|6| = 6$.

En general, si x es un número entero, el valor absoluto de x se representa por $|x|$ y se define:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} |2| &= 2 \quad \wedge \quad |-2| = 2 \rightarrow |2| = |-2| \\ |3| &= 3 \quad \wedge \quad |-3| = 3 \rightarrow |3| = |-3| \end{aligned}$$

Completaremos los ejemplos anteriores agregando que el valor absoluto de 0 es 0 , es decir, $|0| = 0$

EJERCICIOS

1. Hallar el valor absoluto de los siguientes números:

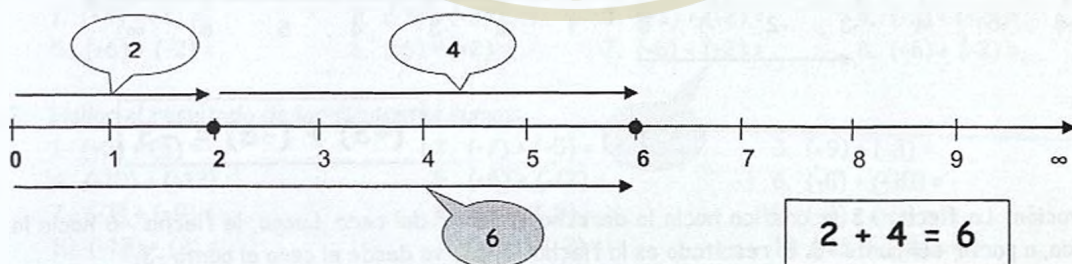
5 -6 -7 9 -2 -15 -13 -20

3.4.2. LEY DE LOS SIGNOS

Generalmente, los movimientos de un punto sobre la recta numérica se representan mediante flechas: los movimientos hacia la derecha o izquierda son en sentido positivo o negativo, respectivamente.

a. SUMA DE DOS NÚMEROS POSITIVOS

En la siguiente figura se representa la suma $2 + 4 = 6$, de la siguiente manera: graficamos el origen de la flecha 2 en el 0 y su punto final en el 2 , luego el origen de la flecha 4 en el 2 y su extremo en el punto 6 . La suma se representa mediante la flecha 6 , cuyo origen se encuentra en el 0 y el punto final en el 6 .



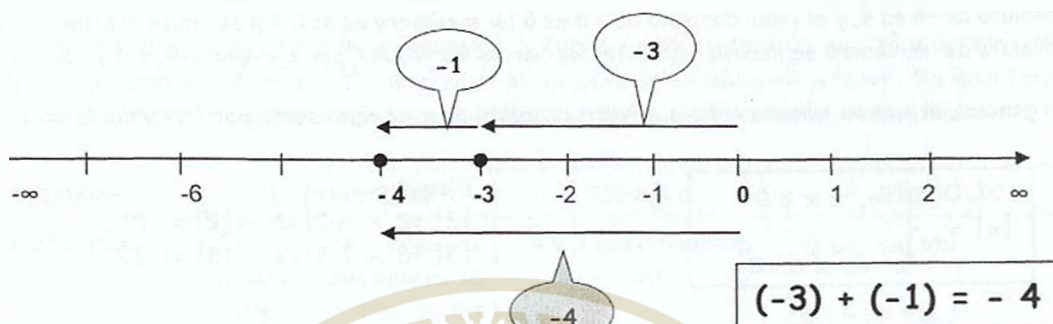
Observación: las flechas se grafican hacia la derecha porque representan números positivos (2 y 4). El resultado es la flecha que va del 0 al 6 y representa al número positivo 6 .

Para sumar dos números positivos se suman sus valores absolutos y se pone el signo más al resultado.

b. SUMA DE DOS NÚMEROS NEGATIVOS

En la siguiente figura se representa la suma $(-3) + (-1) = -4$, de la siguiente manera: graficamos el origen de la flecha -3 en el 0 y su punto final en el -3 , luego el origen de la flecha -1 en el -3 y su extremo en el punto -4 .

La suma se representa mediante la flecha -4 , cuyo origen se encuentra en el 0 y su punto final en el -4 .



Observación: las flechas se grafican hacia la izquierda porque representan números negativos (-3 y -1). El resultado es la flecha que va del 0 al -4 y representa al número negativo -4 .

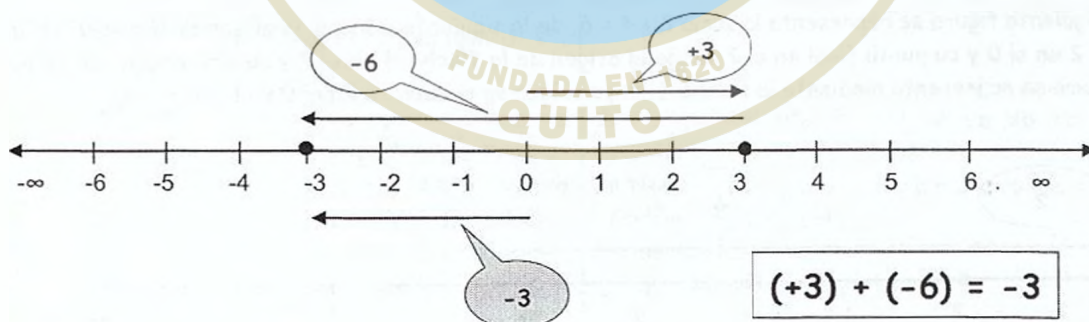
Para sumar dos números negativos se suman sus valores absolutos y se pone el signo "-" al resultado:

$$(-3) + (-1) = -4$$

c. SUMA DE UN NÚMERO POSITIVO Y OTRO NEGATIVO

En la siguiente figura se representa la suma $(+3) + (-6) = -3$ de la siguiente manera: graficamos el origen de la flecha 3 en el 0 y su punto final en el 3, luego el origen de la flecha -6 en el 3 y su extremo en el punto -3 .

La suma se representa mediante la flecha -3 , cuyo origen se encuentra en el 0 y su punto final en el -3 .



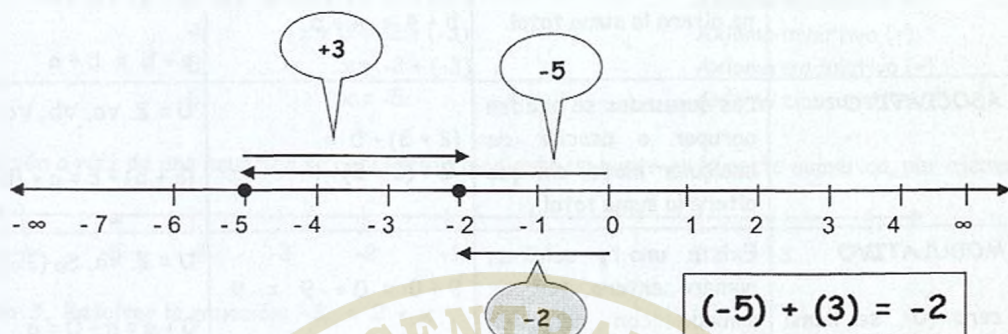
Observación: La flecha $+3$ se grafica hacia la derecha, a partir del cero. Luego, la flecha -6 hacia la izquierda, a partir del punto $+3$. El resultado es la flecha -3 , que va desde el cero al punto -3 .

Para sumar un número positivo y otro negativo se halla la diferencia de sus valores absolutos y se antepone al resultado el signo del número que tiene mayor valor absoluto. Por ejemplo:

$$(+3) + (-6) = -3$$

d. SUMA DE UN NÚMERO NEGATIVO Y POSITIVO

En la siguiente figura se representa la suma $(-5) + (3) = -2$ de la siguiente manera: graficamos el origen de la flecha -5 en el 0 y su punto final en el -5 , luego el origen de la flecha 3 en el -5 y su extremo en el punto -2 . La suma se representa mediante la flecha -2 , cuyo origen se encuentra en el 0 y su punto final en el -2 .



Para sumar un número negativo y otro positivo, se halla la diferencia de los valores absolutos y se antepone al resultado el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

$$(-3) + (-1) = -4$$

RESUMEN:

- | | | |
|-------------------------|-----------------------|----------|
| 1. Positivo + positivo. | $(+7) + (+4) = (+11)$ | positivo |
| 2. Negativo + negativo | $(-7) + (-4) = (-11)$ | negativo |
| 3. Positivo - negativo | $(+7) + (-4) = (+3)$ | |
| 4. Negativo - Positivo | $(-7) + (+4) = (-3)$ | |

Observación: en el caso 3 y 4: se halla la diferencia de sus valores absolutos y se antepone al resultado el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

EJERCICIOS

1. Hallar el resultado de las siguientes sumas utilizando la representación geométrica:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $(+3) + (2) =$ | 2. $(-3) + (-2) =$ | 3. $(+3) + (-2) =$ | 4. $(-3) + (+2) =$ |
| 5. $(+6) + (-2) =$ | 6. $(-6) + (+2) =$ | 7. $(-6) + (+2) =$ | 8. $(+6) + (-2) =$ |

2. Hallar el resultado de las siguientes sumas:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $(+5) + (6) =$ | 2. $(-7) + (-5) =$ | 3. $(+9) + (-8) =$ |
| 4. $(-10) + (+12) =$ | 5. $(+6) + (-12) =$ | 6. $(-8) + (+10) =$ |
| 7. $(-7) + (+9) =$ | 8. $(+4) + (-9) =$ | 9. $(-9) + (+9) =$ |
| 10. $(+13) + (2) =$ | 11. $(-13) + (-2) =$ | 12. $(+15) + (-8) =$ |
| 13. $(-30) + (+20) =$ | 14. $(+60) + (-25) =$ | 15. $(-26) + (+22) =$ |

3.4.3. AXIOMAS DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

En los siguientes axiomas: $U = \mathbb{Z}$, se lee "El universo es el conjunto de los números enteros". $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "existe un único elemento y solo uno", y se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	La suma de dos números enteros cualesquiera es un número entero único.	$2 \vee 4 \in \mathbb{Z} \wedge 2 + 4 = 6$ $\rightarrow 6 \in \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b, \exists c (\exists! c):$ $a + b = c \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los sumandos no altera la suma total.	$5 + 4 = 4 + 5$	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b:$ $a + b = b + a$
3. ASOCIATIVO	Los sumandos se pueden agrupar o asociar de cualquier modo, sin que altere la suma total.	$(2 + 3) + 5 =$ $2 + (3 + 5)$	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. MODULATIVO	Existe uno y solo un número entero, tal que sumado con cualquier número entero, el resultado es siempre ese mismo número entero.	$9 + 0 = 0 + 9 = 9$ $(-3) + 0 = 0 + (-3) = -3$	$U = \mathbb{Z}, \forall a, S_0 (\exists! 0):$ $0 + a = a + 0 = a$
5. INVERTIVO	Para cada número entero a existe un número entero $(-a)$ tal que: $a + (-a) = 0$. Siendo a diferente de cero.	$+5 + (-5) = 0$ $3 + (-3) = 0$	$U = \mathbb{Z}, \forall a, \exists (-a):$ $a + (-a) = 0; a \neq 0$

3.4.4. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BASICAS)

a. ECUACIÓN

Se llama ecuación a la igualdad que es cierta (verdadera) para determinados valores de las variables que contiene, por ejemplo: $x + 3 = 10$, es verdadera para $x = 7$

b. RESOLUCIÓN

Resolver una ecuación es determinar los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad. Estos valores se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $8 = x + 1$

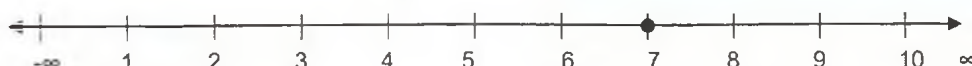
Proposiciones

- $8 = x + 1$
- $x + 1 = 8$
- $x + 1 + (-1) = 8 + (-1)$
- $x + [1 + (-1)] = 8 + (-1)$
- $x + 0 = 8 + (-1)$
- $x = 8 + (-1)$
- $x = 7$

Razones

- Dato
- Axioma simétrico (=)
- Axioma aditivo (=)
- Axioma asociativo (+)
- Axioma invertivo (+)
- Axioma modulativo (+)
- Axioma clausurativo (+)

La solución o raíz de una ecuación se representa mediante un punto en la recta numérica, por ejemplo:



Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $3 + x = -2$

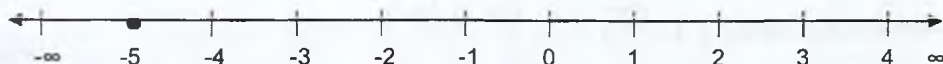
Proposiciones

1. $3 + x = -2$
2. $x + 3 = -2$
2. $x + 3 + (-3) = -2 + (-3)$
3. $x + [3 + (-3)] = -2 + (-3)$
4. $x + 0 = -2 + (-3)$
5. $x = -2 + (-3)$
6. $x = -5$

Razones

- Dato
- Axioma conmutativo (+)
- Axioma aditivo (=)
- Axioma asociativo (+)
- Axioma invertivo (+)
- Axioma modulativo (+)
- Axioma clausurativo (+)

La solución o raíz de una ecuación se representa mediante un punto en la recta numérica, por ejemplo:



Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $-3 = 2 + x$

Proposiciones

1. $-3 = 2 + x$
2. $-3 = x + 2$
3. $-3 + (-2) = x + 2 + (-2)$
4. $-3 + (-2) = x + [2 + (-2)]$
5. $-3 + (-2) = x + 0$
6. $-3 + (-2) = x$
7. $-5 = x$
8. $x = -5$

Razones

- Dato
- Axioma conmutativo (+)
- Axioma aditivo (=)
- Axioma asociativo (+)
- Axioma invertivo (+)
- Axioma modulativo (+)
- Axioma clausurativo (+)
- Axioma simétrico (=)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando los axiomas de la igualdad y de la adición de los números enteros. Represente la solución en la recta numérica.

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 1. $x + 1 = 4$ | 2. $x + 2 = 7$ | 3. $y + 3 = 4$ | 4. $y + 4 = 3$ |
| 5. $x + 5 = 2$ | 6. $z + 8 = 5$ | 7. $y + 2 = -5$ | 8. $y + 3 = -1$ |
| 9. $5 = x + 7$ | 10. $2 = x + 3$ | 11. $4 = y + 2$ | 12. $-1 = y + 3$ |
| 13. $-3 = x + 5$ | 14. $-2 = y + 5$ | 15. $9 = z + 7$ | 16. $-5 = y + 2$ |
| 17. $4 + y = 9$ | 18. $5 + x = -2$ | 19. $2 + x = -4$ | 20. $2 + x = 2$ |

3.4.5. DEFINICIÓN DE RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

Restar un número entero de otro equivale a sumar al **minuendo** el opuesto del **sustraendo**. Simbólicamente se denota de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{Z}, \forall a, \forall b; a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - b = a + (-b)$$

Ejemplo: $7 - 4 = 7 + (-4)$. En el segundo miembro, el 7 es el minuendo y el -4 el opuesto del sustraendo.

La definición de resta permite resolver ecuaciones de la forma: $x - a = b$, utilizando el proceso anterior:

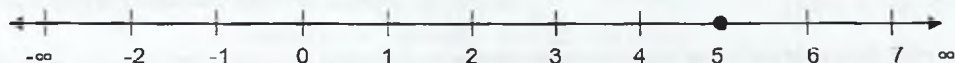
Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x - 2 = 3$

Proposiciones

1. $x - 2 = 3$
2. $x + (-2) = 3$
3. $x + (-2) + 2 = 3 + 2$
4. $x + [(-2) + 2] = 3 + 2$
5. $x + 0 = 3 + 2$
6. $x = 3 + 2$
7. $x = 5$

Razones

- Dato
Def. (-)
Axioma aditivo (=)
Axioma asociativo (+)
Axioma invertivo (+)
Axioma modulativo (+)
Axioma clausurativo (+)



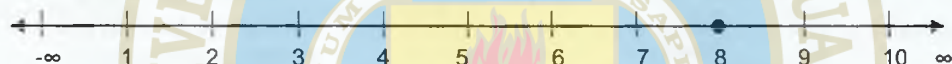
Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $7 = x - 1$

Proposiciones

1. $7 = x - 1$
2. $x - 1 = 7$
3. $x + (-1) = 7$
4. $x + (-1) + 1 = 7 + 1$
5. $x + [(-1) + 1] = 7 + 1$
6. $x + 0 = 7 + 1$
7. $x = 7 + 1$
8. $x = 8$

Razones

- Dato
Axioma simétrico (=)
Def. (-)
Axioma aditivo (=)
Axioma asociativo (+)
Axioma invertivo (+)
Axioma modulativo (+)
Axioma clausurativo (+)



Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $-3 + x = -2$

Proposiciones

1. $-3 + x = -2$
2. $x + (-3) = -2$
3. $x + (-3) + 3 = -2 + 3$
4. $x + [(-3) + 3] = -2 + 3$
5. $x + 0 = -2 + 3$
6. $x = -2 + 3$
7. $x = 1$

Razones

- Dato
Axioma conmutativo (+)
Axioma aditivo (=)
Axioma asociativo (+)
Axioma invertivo (+)
Axioma modulativo (+)
Axioma clausurativo (+)

EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando los axiomas de la igualdad, adición y definición de resta. Represente la solución en la recta numérica.

1. $x - 1 = 4$

2. $x - 2 = 7$

3. $y - 3 = 4$

4. $z - 4 = 3$

5. $x - 5 = 2$

6. $z - 8 = 5$

7. $z - 2 = -5$

8. $z - 3 = -1$

9. $5 = x - 7$

10. $2 = z - 3$

11. $4 = y - 2$

12. $-1 = y - 3$

13. $-3 = x - 5$

14. $-2 = y - 5$

15. $9 = z - 7$

16. $-5 = y - 2$

17. $-4 + y = 2$

18. $-5 + z = -2$

19. $-2 + x = -4$

20. $-2 + x = 2$

21. $-6 + z = 1$

22. $-5 + y = 2$

23. $-3 + y = -2$

24. $-4 + x = 5$

25. $4 = -5 + z$

26. $-2 = -3 + x$

27. $5 = -7 + z$

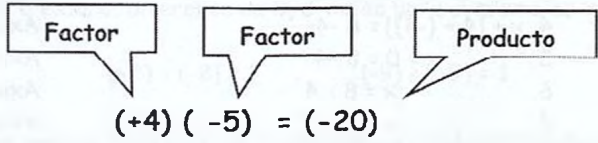
28. $-3 = -2 + z$

3.5. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Iniciaremos este capítulo con la revisión de la ley de los signos para la multiplicación.

3.5.1. LEY DE LOS SIGNOS

Para multiplicar dos números enteros (llamados factores) se halla el producto de sus valores absolutos: Si los dos factores tienen el mismo signo se antepone al producto el signo +, si los factores tienen signos diferentes se antepone el signo menos "-". Por ejemplo:



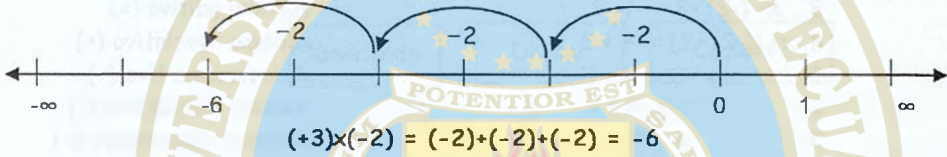
Ejemplo:

$(+4) (+3) = (+12)$
 $(+4) (-3) = (-12)$
 $(-4) (+3) = (-12)$
 $(-4) (-3) = (+12)$

Si a y b son números enteros y $a.b = c$, la ley de los signos se resume de la siguiente forma:

$(+a) (+b) = (+c)$
 $(+a) (-b) = (-c)$
 $(-a) (+b) = (-c)$
 $(-a) (-b) = (+c)$

Observación: $(+3) \times (-2) = -6$



3.5.2. AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN

En los siguientes Axiomas: $U = \mathbb{Z}$, se lee "El universo es el conjunto de los números enteros". $\forall, \forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno", y se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	El producto de dos enteros cualesquiera es un número entero único.	$2 \text{ y } 4 \in \mathbb{Z} \wedge 2 \times 4 = 8$ $\rightarrow 8 \in \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b, \exists c (\exists! c):$ $a \times b = c \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los factores no altera el producto.	$5 \times 4 = 4 \times 5$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b:$ $a \times b = b \times a$ $a.b = b.a$
3. ASOCIATIVO	Los factores enteros se pueden agrupar o asociar de cualquier modo, sin que altere el producto.	$[(-3) \times (-2)] \times 6 =$ $(-3) \times [(-2) \times 6]$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $(ab)c = a(bc)$
4. MODULATIVO	Existe uno y solo un entero, que multiplicado por cualquier número entero el resultado es siempre ese mismo número entero.	$9 \times 1 = 1 \times 9 = 9$ $(-3) \times 1 = 1 \times (-3) = -3$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, S_1 (\exists! 1):$ $1 \times a = a \times 1 = a$ $1a = a1 = a$

3.5.3. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

A continuación se sugieren algunos ejemplos, que pueden ser muy útiles para resolver una ecuación:

Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $1x + 4 = 8$

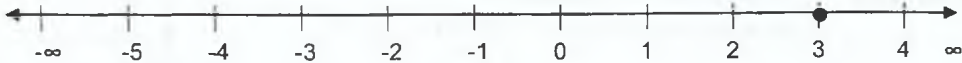
Proposiciones	Razones
1. $1x + 4 = 8$	Dato
2. $x + 4 = 8$	Axioma modulativo (x)
3. $x + 4 + (-4) = 8 - 4$	Axioma aditivo (=)
4. $x + [4 + (-4)] = 8 - 4$	Axioma asociativo (+)
5. $x + 0 = 8 - 4$	Axioma invertivo (+)
6. $x = 8 - 4$	Axioma modulativo (+)
7. $x = 4$	Axioma clausurativo (+)

Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $1x - 2 = -4$

Proposiciones	Razones
1. $1x - 2 = -4$	Dato
2. $x - 2 = -4$	Axioma modulativo (x)
3. $x + (-2) = -4$	Def. (-)
3. $x + (-2) + 2 = -4 + 2$	Axioma aditivo (=)
4. $x + [(-2) + 2] = -4 + 2$	Axioma asociativo (+)
5. $x + 0 = -4 + 2$	Axioma invertivo (+)
6. $x = -4 + 2$	Axioma modulativo (+)
7. $x = -2$	Axioma clausurativo (+)

Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $0 = 1x - 3$

Proposiciones	Razones
1. $0 = 1x - 3$	dato
2. $1x - 3 = 0$	Axioma simétrico (=)
3. $x - 3 = 0$	Axioma modulativo (x)
4. $x + (-3) = 0$	Def. (-)
5. $x + (-3) + 3 = 0 + 3$	Axioma aditivo (=)
6. $x + [(-3) + 3] = 0 + 3$	Axioma asociativo (+)
7. $x + 0 = 0 + 3$	Axioma invertivo (+)
8. $x = 3$	Axioma modulativo (+)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando axiomas.

- | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1. $1x + 2 = 5$ | 2. $1x + 3 = 3$ | 3. $1x + 2 = 3$ | 4. $1x + 4 = -5$ |
| 5. $1x + 5 = -1$ | 6. $1x + 4 = 1$ | 7. $1x + 2 = -4$ | 8. $1x + 3 = -2$ |
| 9. $1x - 3 = -5$ | 10. $1x - 2 = -7$ | 11. $1x - 2 = 3$ | 12. $1x - 4 = -6$ |
| 13. $1x - 5 = 2$ | 14. $1x - 5 = 5$ | 15. $1x - 4 = -1$ | 16. $1x - 7 = -2$ |
| 17. $3 = 1x - 2$ | 18. $2 = 1x - 4$ | 19. $5 = 1x + 2$ | 20. $5 = 1x + 3$ |

3.5.4. DEFINICIÓN DE DIVISIÓN

En general, la división en el conjunto de los números enteros está definida cuando el dividendo es múltiplo del divisor (división exacta).

Definición: Todo número entero dividido para la unidad es igual al mismo número:

$$a \div 1 = a \quad (-2) \div 1 = -2 \quad (-9) \div 1 = -9 \quad x \div 1 = x$$

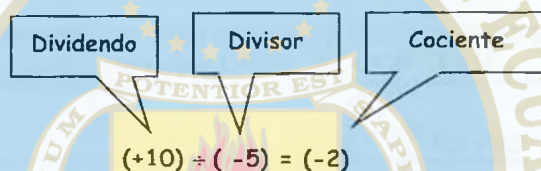
Definición: Todo número entero, diferente de 0, dividido para sí mismo es igual a 1.

$$a \div a = 1; a \neq 0 \quad (-2) \div (-2) = 1 \quad (-9) \div (-9) = 1$$

Observación: La división de un entero, diferente de 0, dividido para 0 no está definida. $\forall a \in \mathbb{Z}: a \div 0; a \neq 0$, no está definida. Ejemplo: $4 \div 0$, no definido. Cero dividido para cero ($0 \div 0$) es una indeterminación (Ind).

a. LEY DE LOS SIGNOS

Si los dos números enteros (llamados dividendo y divisor, respectivamente) tienen el mismo signo el resultado (llamado cociente) es positivo, caso contrario es negativo.



Observación: el signo "+" se omite; tanto en el dividendo, divisor o cociente (se sobreentiende).

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (+14) \div (+7) &= 2 \\ (+14) \div (-7) &= -2 \\ (-14) \div (+7) &= -2 \\ (-14) \div (-7) &= 2 \end{aligned}$$

Si a y b son números enteros y $a \div b = c$, siendo $b \neq 0$, la ley de los signos se resume de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (+a) \div (+b) &= (+c) \\ (+a) \div (-b) &= (-c) \\ (-a) \div (+b) &= (-c) \\ (-a) \div (-b) &= (+c) \end{aligned}$$

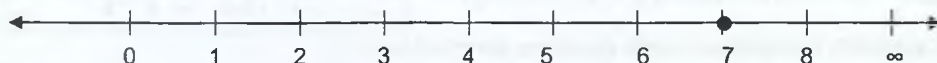
Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x \div 1 = 7$

Proposiciones

1. $x \div 1 = 7$
2. $x = 7$

Razones

Dato
 $a/1 = a$



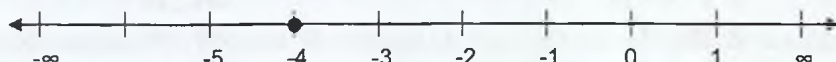
Ejemplo 2: Resolver la ecuación $x = -4 \div 1$

Proposiciones

1. $x = -4 \div 1$
2. $x = -4$

Razones

Dato
 $a/1 = a$



Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $3 \div 0 = x$

Proposiciones

1. $3 \div 0 = x$
2. $x = 3 \div 0$
3. $x = \frac{3}{0}$

Razones

Dato
Axioma simétrico ($=$)
No está definido

EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando los axiomas de la igualdad, de la multiplicación, y definición de división. Represente la solución en la recta numérica.

1. $x \div 1 = 6$

5. $x \div 1 = 3$

9. $y = 1 \div 0$

2. $x = -6 \div 3$

6. $x = -16 \div -4$

10. $z \div 1 = 5$

3. $y = 8 \div -4$

7. $z = -9 \div 3$

11. $z = 5 \div 0$

4. $-15 \div -5 = y$

8. $5 \div 4 = y$

12. $z = 5 \div 3$

3.6. AXIOMAS DISTRIBUTIVO-RECOLECTIVO

El producto de un número entero cualquiera por la suma de dos números enteros cualesquiera, es igual a la suma de los productos de ese número entero por cada uno de los sumandos.

El Axioma distributivo se escribe en forma simbólica de la siguiente manera:

$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b, \forall c; a.(b+c) = a.b + a.c$

DISTRIBUTIVO

Ejemplo 1: $2 \times (5 + 3) = 2.5 + 2.3$

Si en la definición simbólica, del axioma distributivo, se aplica el axioma simétrico de la igualdad, se tiene:

$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b, \forall c; a.b+a.c = a.(b+c)$

RECOLECTIVO

Ejemplo 2: $2.5 + 2.3 = 2.(5 + 3)$

La operación realizada en el ejemplo anterior se conoce, generalmente, como axioma recolectivo o factor común. Si consideramos lo anotado anteriormente, el axioma distributivo-recolectivo se escribe en forma simbólica de la siguiente manera:

$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b, \forall c; a.(b+c) = a.b + a.c \wedge a.b+a.c = a.(b+c)$

3.6.1. APLICACIONES

- a. Verifique la siguiente igualdad aplicando el axioma distributivo.

Ejemplo 1. $2(4 + 3) = 14$

Proposiciones

1. $2.(4 + 3) = 14$
2. $2.4 + 2.3 = 14$
3. $8 + 6 = 14$
4. $14 = 14$

Razones

Dato
Axioma distributivo
Def. ($\times$)
Def. ($+$)

b. Verifique la siguiente igualdad aplicando el axioma recolectivo (factor común).

Ejemplo $2 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 32$

Proposiciones

1. $3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 32$
2. $4 \cdot (3 + 5) = 32$
3. $4 \cdot 8 = 32$
4. $32 = 32$

Razones

- Dato
Axioma recolectivo
Def. (+)
Def. (x).

EJERCICIOS

1. Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo o recolectivo según corresponda:

1. $3 \cdot (4 + 2) = 18$

2. $7(4 + 5) = 63$

3. $2(3 + 2) = 10$

4. $3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 16$

5. $4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 32$

6. $2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21$

3.7. DESIGUALDAD EN LOS NÚMEROS ENTEROS

3.7.1. DEFINICIÓN

La desigualdad, es una relación matemática entre dos expresiones que no son iguales. Los símbolos utilizados para denotar una desigualdad son: $<$ (menor que) o $>$ (mayor que).

1. Un número entero a es menor que un número entero b , si en la recta numérica el punto a está a la izquierda del punto b , por ejemplo:



Como puede verse en el gráfico $a < b$ y en particular $-3 < 1$, por la razón indicada anteriormente.

2. Un número entero b es mayor que un número entero a , si en la recta numérica el punto b está a la derecha del punto a , por ejemplo:



Como puede verse en el gráfico $b > a$, y en particular $1 > -3$, por la razón indicada anteriormente.

Definición 1: a es menor que b es equivalente a decir que: la diferencia $(a - b)$ es un número negativo: En forma simbólica se escribe:

$$a < b \Leftrightarrow (a - b) < 0$$

Ejemplo: $-3 < 1$ porque $-3 - 1 = -4$; -4 es negativo.

Definición 2: a es mayor que b es equivalente a decir que: la diferencia $(a - b)$ es un número positivo. En forma simbólica se tiene:

$$a > b \Leftrightarrow (a - b) > 0$$

Ejemplo: $1 > -3$ porque $1 - (-3) = 4$; 4 es positivo.

3.7.2. AXIOMAS DE LA DESIGUALDAD (ORDEN)

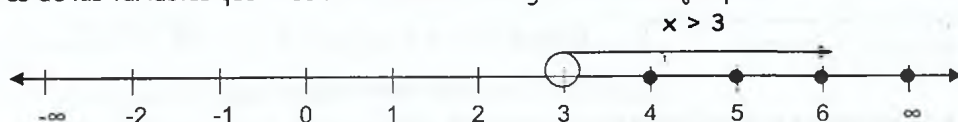
En los siguientes axiomas: $U = \mathbb{Z}$, se lee "El universo es el conjunto de los números enteros". $\forall, \forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a , para todo b , para todo c ". $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno" ($\exists!c$).

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. TRICOTOMÍA	Entre dos números enteros cualesquiera se cumple una y solo una de las siguientes relaciones: son iguales, el 1º es mayor que el 2º, o el 1º es menor que el 2º.	2 y 2, se cumple que: $2 = 2$ 5 y 2, se cumple que: $5 > 2$ 1 y 3, se cumple que: $1 < 3$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b:$ $a \neq b \Leftrightarrow a > b \vee a < b$
2. TRANSITIVO 	Si un 1º. número entero es mayor (menor) que un 2º y éste mayor (menor) que un 3º, entonces el 1º es mayor (menor) que el 3º.	$5 > 2 \wedge 2 > 0 \rightarrow 5 > 0$ $1 < 2 \wedge 2 < 3 \rightarrow 1 < 3$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$ $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
3. ANTISIMÉTRICO	Si un número entero es mayor que un segundo, entonces el segundo es menor que el primero.	$9 > 3 \Leftrightarrow 3 < 9$ $4 < 12 \Leftrightarrow 12 > 4$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b:$ $a > b \Leftrightarrow b < a$ $a > b \Leftrightarrow b \nless a$
4. ADITIVO  (El signo no cambia)	Si a cada miembro de una desigualdad se suma un mismo número entero cualquiera, el sentido de la desigualdad no cambia.	$7 > 3 \wedge 2 = 2 \rightarrow 7 + 2 > 3 + 2$ $5 < 9 \wedge 3 = 3 \rightarrow 5 + 3 < 9 + 3$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge c = c \Rightarrow a + c > b + c$ $a < b \wedge c = c \Rightarrow a + c < b + c$
5. MULTIPLICATIVO  (El signo cambia si el factor es negativo) 	Si cada miembro de una desigualdad se multiplica por un mismo entero positivo, el sentido de la desigualdad no cambia, pero si se multiplica por un entero negativo el signo de la desigualdad cambia.	Número positivo $3 < 9 \wedge +2 = +2 \rightarrow 3 \cdot 2 < 9 \cdot 2$ Número negativo $3 < 9 \wedge -2 = -2 \rightarrow 3 \cdot (-2) > 9 \cdot (-2)$	$U = \mathbb{Z}. \forall a, \forall b, \forall c:$ Número positivo ($c > 0$) $a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ Número negativo ($c < 0$) $a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

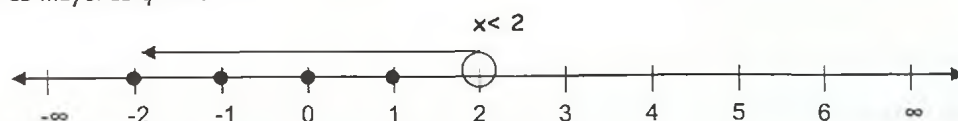
3.7.3. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE INECUACIONES BASICAS)

a. INECUACIÓN

Si una desigualdad contiene variables se llama inecuación. Resolver una inecuación es determinar los valores de las variables que hacen verdadera la desigualdad. Por ejemplo:



La circunferencia indica que el 3 no es elemento del conjunto, y la flecha que el conjunto es infinito. Del mismo modo, $x < 2$; es verdadera para todos los valores menores que 2, y es falsa para todos los valores mayores que 2.



b. RESOLUCIÓN

Resolver una inecuación es hallar los valores enteros para los cuales la desigualdad es verdadera.

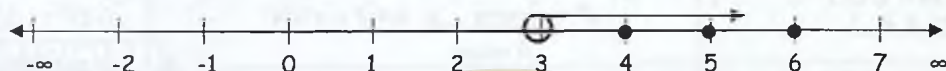
Ejemplo 1. Resuelva la inecuación: $x + 2 > 5$

Proposiciones

1. $x + 2 > 5$
2. $x + 2 + (-2) > 5 + (-2)$
3. $x + [2 + (-2)] > 5 + (-2)$
4. $x + 0 > 5 + (-2)$
5. $x > 5 + (-2)$
6. $x > 3$

Razones

- Dato
- Axioma aditivo ($\langle, \rangle$)
- Axioma asociativo (+)
- Axioma invertivo (+)
- Axioma modulatorio (+)
- Axioma clausurativo (+)



La flecha con origen abierto (circunferencia) indica que todos los números mayores que 3 son soluciones de la inecuación, menos el 3.

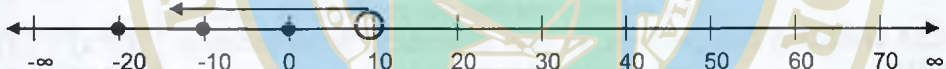
Ejemplo 2. Resuelva la inecuación: $x - 2 < 8$

Proposiciones

1. $x - 2 < 8$
2. $x + (-2) < 8$
3. $x + (-2) + 2 < 8 + 2$
4. $x + [(-2) + 2] < 8 + 2$
5. $x + 0 < 8 + 2$
6. $x < 8 + 2$
7. $x < 10$

Razones

- Dato
- Definición de resta
- Axioma aditivo ($\langle, \rangle$)
- Axioma asociativo (+)
- Axioma invertivo (+)
- Axioma modulatorio (+)
- Axioma clausurativo (+)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes inecuaciones y represente el conjunto solución en la recta numérica.

- | | | | |
|------------------|------------------|-----------------|-----------------|
| 1. $x + 3 > 1$ | 2. $z + 8 > 5$ | 3. $x + 2 > -1$ | 4. $y + 6 > -2$ |
| 5. $z + 5 > 10$ | 6. $y + 7 > -2$ | 7. $x + 2 > 3$ | 8. $y + 3 > 5$ |
| 9. $x - 5 < 2$ | 10. $z - 4 < -8$ | 11. $x - 5 < 4$ | 12. $x - 3 < 7$ |
| 13. $y - 6 < -3$ | 14. $x - 4 < -2$ | 15. $y - 1 < 1$ | 16. $y - 2 < 5$ |

3.8. POTENCIACIÓN (ENTEROS CON EXPONENTES NATURALES: $\mathbb{Z}^N$)

Se ha estudiado la potenciación cuando la base y el exponente son números naturales. Se estudia ahora el caso en el que la base es un número entero y el exponente un número natural.

Se llama potenciación al producto formado mediante multiplicaciones sucesivas de un mismo número o letra. Por ejemplo:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \quad \text{entonces} \quad (-2)^3 = -8$$

Observación: El -2 se llama base, el 3 exponente (indica el número de veces que el número o letra se ha de multiplicar por sí misma). Como $(-2)^3 = -8$, el -8 es la tercera potencia de -2.

3.8.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si la base a es un número entero, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, y el exponente n un natural, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. POTENCIA CERO	La potencia cero, exponente 0, de un número entero a , distinto de cero, es igual a 1: $a^0 = 1; a \neq 0$	$0^0 = \cancel{0}$ $(2)^0 = 1$ $(-2)^0 = 1$
2. POTENCIA UNO	La potencia uno (exponente 1) de un número entero a , es igual al mismo número sin el exponente. $a^1 = a$	$0^1 = 0$ $2^1 = 2$ $(-2)^1 = -2$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA (PEP) $\mathbb{N}^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La PEP, de un número entero a , es igual al producto de n veces a ; siendo $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}}; a \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}^*$	$(0)^2 = 0 \cdot 0$ $(2)^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $(-2)^2 = (-2)(-2)$ $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3)$

3.8.2. TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^n y b^n , son potencias definidas en los números enteros con exponentes naturales, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$:

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA PAR	La PEP par de base positiva (+) o negativa (-) es positiva: $(a)^n = x; n \in \mathbb{N}^* \text{ par}$ $(-a)^n = x; n \in \mathbb{N}^* \text{ par}$	$(2)^2 = 4$ $(3)^2 = 9$ $(-2)^2 = 4$ $(-3)^2 = 9$
2. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA IMPAR	La PEP impar de base positiva (+) es positiva y de base negativa (-) es negativa: $(a)^n = x; n \in \mathbb{N}^* \text{ impar}$ $(-a)^n = -x; n \in \mathbb{N}^* \text{ impar}$	$(2)^3 = 8$ $(3)^3 = 27$ $(-2)^3 = -8$ $(-3)^3 = -27$
3. POTENCIA ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La potencia enésima del producto de números enteros, es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-2 \cdot 3)^2 = (-2)^2 \cdot 3^2$ $(-2 \cdot 3)^2 = (-2)^2 \cdot 3^2$ $36 = 36$
4. POTENCIA ENÉSIMA DEL COCIENTE EXACTO	La potencia enésima de cociente exacto (división exacta) de números enteros, es igual al cociente de las potencias enésimas; $b \neq 0$. $(a/b)^n = a^n/b^n; b \neq 0$	$(-6/3)^2 = (-6)^2/3^2$ $(-2)^2 = 36/9$ $4 = 4$

Observación: $(-2)^2 \neq -2^2$. En el primer caso se tiene que $(-2)^2 = 4$, y en el segundo $-2^2 = -4$.

3.8.3. OPERACIONES DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^m y a^n , son potencias definidas en los números enteros con exponentes naturales:

OPERACIÓN	TEOREMA	EJEMPLO
1. PRODUCTO DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se suman los exponentes. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-2)^2 \cdot (-2)^3 =$ $(-2)^{2+3} = (-2)^5$
2. COCIENTE DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se restan los exponentes. $a^m/a^n = a^{m-n}; m \geq n \text{ y } a \neq 0$	$(-2)^5/(-2)^3 =$ $(-2)^{5-3} = (-2)^2 = 4$
3. POTENCIA DE POTENCIA	Se mantiene la base y se multiplican los exponentes $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$[(-2)^3]^2 = (-2)^{3 \cdot 2}$ $[(-2)^3]^2 = 2^6$

Observación: la resta (exponentes) no está definida en $\mathbb{N}$ cuando el minuendo menor que el sustraendo.

3.8.4. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

Resolver una ecuación es determinar los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad. Estos valores se llaman soluciones o raíces de la ecuación.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $x \cdot (-2)^0 = 4$

Proposiciones

1. $x \cdot (-2)^0 = 4$
2. $x \cdot 1 = 4$
3. $x = 4$

Razones

- Dato
 $a^0 = 1; a \neq 0$
 Axioma modulatorio (x)



EJERCICIOS

1. Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones aplicando la definición y teoremas de la potenciación para los números enteros con exponente natural.
 1. $(-4)^2(-4)^4$
 2. $(-5)^2(-5)^3$
 3. $(-3)^3(-3)^2$
 4. $[(-2)^2]^3$
 5. $[(-4)^3]^2$
 6. $[(-2)^4]^2$
 7. $(2 \cdot 3)^2$
 8. $(4 \cdot 5)^3$
 9. $(2 \cdot 5)^2$
 10. $4^5/4^3$
 11. $2^5/2$
 12. $3^5/3^2$
 13. $(4/2)^2$
 14. $(8/2)^3$
 15. $(6/3)^2$
 16. $(-2)^4/(-2)^3$
2. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.
 1. $x \cdot (-4)^0 = 5$
 2. $x = 3 \cdot (-2)^1$
 3. $(-2)^2(-2)^3 = x$
 4. $(3^2)^3 - 719 = x$
 5. $x = 2^3 \cdot 3^3 - 206$
 6. $x = 6^2/2^2 + 11$
 7. $x = (-2)^3/(-2)^2 + 2^3$
 8. $x \cdot (-2)^0 = 7$
 9. $x = 4 \cdot (-3)^1$
 10. $(-3)^2(-3)^3 = x$
 11. $(2^2)^3 - 60 = x$
 12. $x = 4^2 \cdot 3^2 - 140$
3. Construir un mentefacto para la potenciación.
4. Escriba las propiedades y teoremas de la potenciación en $\mathbb{Z}$, aplicando el axioma simétrico (=).

3.9. RADICACIÓN

3.9.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si a es un número entero, y n es natural mayor que uno (conjunto representado por $\mathbb{N}^*$), se tiene:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA EXACTA $\mathbb{N}^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La raíz enésima exacta de un número entero llamado radicando, es otro entero que, elevado a la potencia enésima, es igual al mismo radicando. $\exists a: \sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a; n \in \mathbb{N}^*$	Exacta $\sqrt[3]{8} = 2 \because 2^3 = 8$ Inexacta $\sqrt{2} = \beta$, en $\mathbb{Z}$
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1	La raíz enésima de 1 es igual a 1: $\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La raíz y potencia enésima, de un mismo número entero, se simplifican: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; n \in \mathbb{N}^* \text{ impar}$ $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; a \geq 0 \wedge n \in \mathbb{N}^* \text{ par}$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$ $\sqrt[3]{-2^3} = -2$ $\sqrt[2]{2^2} = 2$ $\sqrt[2]{-2^2} = \beta$

3.9.2. TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

Si: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$, son raíces definidas en los números enteros con índice, n , natural mayor que uno (N^*):

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA PAR EXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$ Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): tiene dos raíces opuestas. $\exists a: \sqrt[n]{a} = \pm x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$ Inexacta: $\sqrt{3} = \#$, en $\mathbb{Z}$	Exacta $\sqrt{25} = \pm 5 \rightarrow$ $(\pm 5)^2 = 25$
	2. Radicando igual a 0: tiene una raíz, el 0. $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt{0} = 0 \rightarrow$ $(0)^2 = 0$
	3. Radicando negativo (-): no tiene raíces en $\mathbb{Z}$. $\sqrt[n]{-a} = \#; n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt{-4} = \#, \text{ en } \mathbb{Z}$
2. RAÍZ ENÉSIMA IMPAR EXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$ Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): tiene una raíz positiva $\exists a: \sqrt[n]{a} = +x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$ Inexacta: $\sqrt[3]{7} = \#, \text{ en } \mathbb{Z}$	$\sqrt[3]{8} = 2 \rightarrow 2^3 = 8$
	2. Radicando igual a 0: tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ impar}$	$\sqrt[3]{0} = 0$
	3. Radicando negativo (-): tiene una raíz negativa, $\exists -a: \sqrt[n]{-a} = -x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$ Inexacta: $\sqrt[3]{-5} = \#, \text{ en } \mathbb{Z}$	$\sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow (-2)^3 = -8$
3. RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La raíz enésima de un producto es igual al producto de la raíz enésima de cada factor (definidas en $\mathbb{Z}$): $\exists a, b: \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$ $\sqrt{2 \cdot 5} = \#, \text{ en } \mathbb{Z}$
4. RAÍZ ENÉSIMA DEL COCIENTE EXACTO	La raíz enésima de la división exacta es igual al cociente de las raíces enésimas (definidas en $\mathbb{Z}$), dividendo y divisor; $b \neq 0$. $\exists a, b: \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} : b \neq 0$	$\sqrt{16/4} = \sqrt{16} / \sqrt{4}$ $\sqrt{3/7} = \#, \text{ en } \mathbb{Z}$

EJERCICIOS

1. Hallar la raíz indicada, si es posible:

1. $\sqrt[5]{125}$

2. $\sqrt[3]{-216}$

3. $\sqrt[4]{81}$

4. $\sqrt[4]{-9}$

5. $\sqrt{21}$

6. $\sqrt[3]{-1}$

7. $\sqrt{0}$

8. $\sqrt{169}$

9. $\sqrt[3]{-128}$

10. $\sqrt[4]{2401}$

2. Escriba las propiedades de la radicación aplicando el axioma simétrico (=).

Observación: La suma, resta y el producto de dos números enteros es otro número entero. El cociente en $\mathbb{Z}$ no siempre es posible, sólo ocurre cuando la división es exacta. La potencia es posible cuando el exponente es un número natural. Si la base es negativa con exponente par la potencia es positiva y si el exponente es impar es negativa. La raíz de un número entero no siempre es posible, sólo ocurre cuando la raíz es exacta. Si el índice es impar la raíz tiene el mismo signo que el radicando. Si el índice es par y el radicando (+) tiene dos raíces ($\pm$). Si el índice es par y el radicando (-) no existe raíz en $\mathbb{Z}$.

CAPÍTULO 4

NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

4.1. INTRODUCCIÓN

Los números naturales, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, se usan para contar los elementos de los conjuntos. En $\mathbb{N}$ se puede sumar y multiplicar; y con ambas operaciones el resultado es, en todos los casos, un número natural. Sin embargo, no siempre pueden restarse ni dividirse (ni $2 - 5$ ni $7 \div 4$ son números naturales).

El conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, está compuesto por los naturales y los correspondientes negativos (el 0 no es positivo ni negativo). El conjunto de los números enteros permite resolver el problema de la sustracción de números naturales, por lo tanto, en $\mathbb{Z}$ se puede sumar, multiplicar y restar, en todos los casos. Sin embargo, en general, dos números enteros no se pueden dividir, por ejemplo: $3/4$. Por esta razón se crea el conjunto de los números racionales.

4.2. NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

El conjunto formado por las expresiones: a/b , donde a y b son números enteros, con b diferente de cero, se llama conjunto de los números racionales. Se representa con la letra $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Q}$, mayúscula (negritas). La letra inicial $\mathbb{Q}$ se deriva de "quotient" del inglés, resultado de la división.

$$\mathbb{Q} = \{x/x = \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Si consideramos el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, entonces, se pueden escribir algunas fracciones dividiendo, por ejemplo, el 1 para cualquier número entero, excepto el cero:

$$1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, \dots \quad \text{ó} \quad 1/-2, 1/-3, 1/-4, 1/-5, \dots$$

Del mismo modo, con el número 2:

$$2/3, 2/4, 2/5, 2/6, 2/7, 2/8, \dots \quad \text{ó} \quad 2/-1, 2/-2, 2/-3, 2/-4, 2/-5, \dots$$

Y así sucesivamente:

$$3/2, 3/3, 3/4, 3/5, 3/6, 3/7, 3/8, \dots \quad \text{ó} \quad 3/-2, 3/-3, 3/-4, 3/-5, \dots$$

$$4/1, 4/2, 4/3, 4/5, 4/6, 4/7, 4/8, \dots \quad \text{ó} \quad 4/-1, 4/-2, 4/-3, 4/-4, \dots$$

$$0/1, 0/2, 0/3, 0/4, 0/5, \dots \quad \text{ó} \quad -0/2, -0/3, -0/4, -0/5, \dots$$

Los números naturales y enteros son subconjuntos de los números racionales, ya que se obtienen mediante el cociente de sí mismos para la unidad ($a = a/1$) o cuando el numerador es múltiplo del denominador:

$$3/1 = 3, 4/2 = 2 \text{ (número natural, entero)} \quad \text{ó} \quad -3/1 = -3, 4/-2 = -2 \text{ (número entero)}$$

Observación: los números racionales no enteros se llaman **fraccionarios**. Se representa con la letra F . En el conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) cada número tiene un siguiente, por ejemplo: el siguiente al 3 es el 4, el siguiente al -3 es el -2. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no pasa lo mismo, pues entre cada dos números racionales existen infinitos números racionales.

Las fracciones, a/b , constan de dos términos: a llamado numerador y b denominador. Por ejemplo: en $7/8$, el 7 se llama numerador y el 8 el denominador. La fracción: $7/8$, se pueden escribir, además, de la forma: $\frac{7}{8}$ o $7 \div 8$. En la expresión: $7 \div 8$, el numerador es el dividendo y el denominador el divisor.

Para leer una fracción se enuncia primero el numerador y después el denominador. Por ejemplo: $3/2$ se lee "tres medios". Si el denominador es mayor que 10, se añade al denominador la terminación "avo". Por ejemplo: $4/12$ se lee "cuatro doceavos", $7/15$ "siete quinceavos", entre otros.

4.2.1. CLASES DE NÚMEROS FRACCIONARIOS

Los números fraccionarios se clasifican en: propios e impropios.

1. **FRACCIÓN PROPIA:** cuando el numerador es menor que el denominador. Toda fracción propia es menor que la unidad. Por ejemplo: $2/3$, $7/8$, $9/13$, entre otros.

2. **FRACCIÓN IMPROPIA:** cuando el numerador es mayor que el denominador. Toda fracción impropia es mayor que la unidad. Por ejemplo: $3/2$, $4/3$, $7/5$, entre otros.

Se llama **número mixto** aquel que consta de un entero y una fracción. Para convertir un número mixto en fracción, se multiplica el entero por el denominador, al producto se suma el numerador, y esta suma se divide por el denominador. Por ejemplo:

$$1\frac{2}{3} = \frac{1(3) + 2}{3} = \frac{5}{3}$$

Para convertir una fracción impropia en un número mixto, se divide el numerador para el denominador. Si el cociente es exacto, éste representa un número entero; si no es exacto, se añade al entero un quebrado que tenga por numerador el resto y por denominador el divisor. Por ejemplo: $11/8 = 1\frac{3}{8}$.

EJERCICIOS

1. Halle la fracción correspondiente a los siguientes números mixtos:

1. $2\frac{2}{3}$

2. $4\frac{3}{5}$

3. $3\frac{4}{7}$

4. $9\frac{1}{3}$

5. $1\frac{4}{5}$

6. $6\frac{1}{2}$

7. $5\frac{1}{3}$

8. $5\frac{3}{4}$

9. $7\frac{4}{8}$

10. $3\frac{4}{3}$

2. Halle el número mixto correspondiente a las siguientes fracciones:

1. $7/3$

2. $-8/5$

3. $1/5$

4. $-7/2$

5. $6/5$

6. $-7/2$

7. $7/4$

8. $-9/4$

9. $2/5$

10. $-6/3$

4.2.2. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

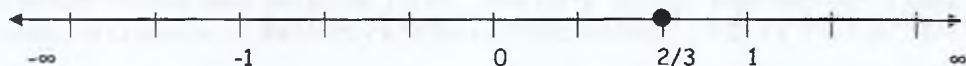
Consideremos la recta r y señalemos en ella un punto O . El punto O determina en r dos semirrectas, una a la derecha y otra a la izquierda, del mismo punto. En la misma recta r señalamos otro punto 1 . Llamaremos **segmento unidad** a la parte de la recta r , limitada por los puntos O y 1 (origen y extremo).



La representación geométrica de los números racionales se obtiene mediante subdivisiones adecuadas del segmento unidad. Se presentan dos casos.

1. Fracciones propias. Grafique, en la recta numérica el número $2/3$.

Se divide el **segmento unidad** en 3 partes (denominador = 3), luego se señala en la segunda parte (numerador = 2).



2. Fracciones impropias. Grafique en la recta numérica el número $5/4$

Se escribe la fracción en su forma "mixta" ($1\frac{1}{4}$): a partir de la parte entera (1), se divide el segmento unidad en 4 partes (denominador=4), luego se señala en la 1ª parte (numerador = 1).



EJERCICIOS

1. Grafique, en la recta numérica, los siguientes números racionales:

- | | | | | |
|------------|-------------|------------|------------|------------|
| 1. $2/3$ | 2. $-4/5$ | 3. $2/7$ | 4. $-3/2$ | 5. $6/5$ |
| 6. $-7/2$ | 7. $7/3$ | 8. $-9/4$ | 9. $12/5$ | 10. $-6/3$ |
| 11. $4/3$ | 12. $-9/5$ | 13. $10/3$ | 14. $-8/3$ | 15. $15/4$ |
| 16. $11/3$ | 17. $-15/4$ | 18. $13/5$ | 19. $-8/3$ | 20. $6/3$ |

4.2.3. FRACCIONES IGUALES

Dos fracciones a/b y c/d son iguales, se escribe $a/b = c/d$, si se cumple que $ad = bc$. En forma simbólica se indica de la siguiente manera:

$$a/b = c/d \equiv ad = bc$$

Ejemplo: $2/3 = 6/9$, porque: $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$ y $2/2 \neq -2/5$, porque: $2 \cdot 5 \neq 2 \cdot (-2)$

EJERCICIOS

1. Verificar si las siguientes fracciones son iguales:

- | | | | |
|----------------------|---------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $1/3$ y $2/6$ | 2. $1/5$ y $-2/10$ | 3. $2/8$ y $6/24$ | 4. $6/7$ y $12/14$ |
| 5. $-7/14$ y $21/42$ | 6. $-3/4$ y $-9/36$ | 7. $14/21$ y $2/3$ | 8. $9/27$ y $3/9$ |

4.2.4. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Simplificar una fracción es convertirla en otra fracción igual a la primera, mediante la eliminación de los factores comunes al numerador y denominador. Para simplificar una fracción se divide el numerador y denominador por su mcd. Los términos obtenidos, en la fracción simplificada, son respectivamente, menores que los términos de la fracción original: $ac/bc = a/b$.

Ejemplo 1. Simplificar la fracción: 6/10.

- a. Se halla el mcd dividiendo al mismo tiempo el numerador y denominador por los factores comunes, hasta que los cocientes sean primos entre sí. El mcd es el producto de los factores comunes.

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 10 & 2 \\ \hline 3 & 5 & \end{array}$$

- b. Se halla el producto de los factores comunes: El mcd (6, 10) = 2

- c. Se divide el numerador y denominador por el mcd: $\frac{6}{10} = \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}$ ó $\frac{6}{10} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5}$

Observación: Se denomina fracción irreducible cuando el numerador y denominador son primos entre sí.

Ejemplo 2. Simplificar la fracción: 6/24.

- a. Se halla el mcd dividiendo al mismo tiempo el numerador y denominador por los factores comunes, hasta que los cocientes sean primos entre sí. El mcd es el producto de los factores comunes.

$$\begin{array}{cc|c} 6 & 24 & 2 \\ \hline 3 & 12 & 3 \\ \hline 1 & 4 & \end{array}$$

- b. Se halla el producto de los factores comunes: El mcd (6, 24) = 2x3 = 6

- c. Se divide el numerador y denominador por el mcd: $\frac{6}{24} = \frac{6 \div 6}{24 \div 6} = \frac{1}{4}$ ó $\frac{6}{24} = \frac{1 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{1}{4}$

Ejemplo 3. Simplificar la fracción: 28/36.

$$\begin{array}{cc|c} 28 & 36 & 2 \\ \hline 14 & 18 & 2 \\ \hline 7 & 9 & \end{array}$$

$$\text{mcd}(28, 36) = 2 \times 2 = 4$$

$$\frac{28}{36} = \frac{28 \div 4}{36 \div 4} = \frac{7}{9} \quad \text{ó} \quad \frac{28}{36} = \frac{7 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{7}{9}$$

Observación: el proceso anterior equivale a dividir los dos términos de la fracción, sucesivamente, por los factores comunes a dichos términos.

EJERCICIOS

1. Simplificar las siguientes fracciones:

1. 18/30

2. -15/35

3. 10/25

4. -6/22

5. 14/28

6. 12/36

7. 16/32

8. 15/30

9. -8/24

10. 21/35

11. -8/12

12. 15/20

4.2.5. EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Si el número racional no es entero, al dividir el numerador para el denominador, se obtiene la expresión decimal del número racional dado. Por ejemplo: $1/2 = 0,5$. Para distinguir la primera notación de la segunda, se conviene en llamar **número decimal** a la segunda.

Hallar la expresión decimal de: $\frac{3}{4}$ y $\frac{24}{5}$.

3/4

30

20

0

4

0,75

3/4 = 0,75

24/5

24

40

0

5

4,8

24/5 = 4,8

Un número decimal tiene una **parte entera** y una **parte decimal**, separadas por la **coma decimal**. Por ejemplo: en el número **12,243**; el 1 y el 2 son sus cifras enteras, y el 2, 4 y 3 son sus cifras decimales.

La **parte entera** está formada por: unidades (U), decenas (D), centenas (C), millares (M), decenas de millar (DM), entre otras. La **parte decimal** por: decimas (d), centésimas (c), milésimas (m), diez milésimas (dm), cien milésimas (cm), entre otras. Por ejemplo, el número 234,125 tiene:

Parte entera: 2 centenas, 3 decenas, 4 unidades.
Parte decimal: 1 decima, 2 centésimas, 5 milésimas.

	centenas	decenas	unidades	coma	decimas	centésimas	milésimas	
	C	D	U	,	d	c	m	
	2	3	4		1	2	5	

Observación: Una decena es igual a diez unidades (1D = 10U), una centena es igual a diez decenas ó a 100 unidades (1C = 10D = 100U). La **décima parte** de la unidad, o sea 1/10, se llaman **décimas**, la **centésima parte** de la unidad, o sea 1/100, se llaman **centésimas**, y así sucesivamente.

Un número decimal se puede leer de dos maneras:

1. Por separado la parte entera y decimal: 15,134 se lee "15 unidades y 134 milésimas"
2. La parte entera y decimal separadas por la palabra "coma": 15,134 se lee "15 coma 134"

EJERCICIOS

1. Hallar la expresión decimal de los siguientes números racionales:
1. 18 /30

2. 15/35

3. 10/25

4. 6/22

5. 14/28

6. -12/36

7. 16/32

8. 15/30

9. 8/24

10. 21/35

11. -8/12

12. 15/20

Observación: Si los números decimales tienen muchas cifras, en la parte decimal, es conveniente tomar aproximaciones de dichos números. Para aproximar un número por redondeo, hasta una determinada cifra decimal, se tiene:

1. Si la primera cifra que se va a suprimir es menor que 5, entonces la última cifra retenida se conserva. Por ejemplo: 0,434 a centésimas 0,43.
2. Si la primera cifra que se va a suprimir es mayor o igual a 5, entonces la última cifra retenida aumenta en una unidad. Por ejemplo: 1,2367 a milésimas 1,237.

EJERCICIOS

1. Hallar, efectuando la división, la expresión decimal de los siguientes números racionales y luego aproxime el resultado, por redondeo, a centésimas.
1. 2/3

2. -4/5

3. 2/5

4. -3/2

5. 11/2

6. 6/5

7. -7/2

8. 7/5

9. -9/4

10. 25/3

11. 3/7

12. -15/4

13. 30/7

14. 14/3

15. -11/4

16. 56/5

17. 49/2

18. 75/4

19. 11/9

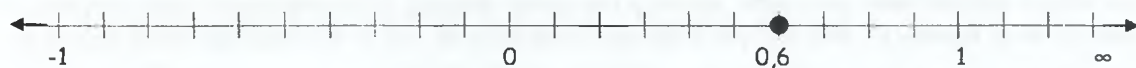
20. -13/3

4.2.5.1. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS DECIMALES

La representación geométrica de los números racionales, expresados por números decimales, se obtiene mediante subdivisiones adecuadas del segmento unidad. Se presentan dos casos.

1. Cuando la parte entera es 0.

Se divide el segmento unidad en 10 partes iguales, luego se señala en la división correspondiente. Ejemplo: Grafique, en la recta numérica el número 0,6 (se grafica en la sexta división).



2. Cuando el número decimal tiene parte entera.

A partir de la parte entera se grafica la parte decimal, siguiendo el proceso anterior. Ejemplo: Grafique en la recta numérica el número 1,3.



EJERCICIOS

1. Grafique, en la recta numérica, los siguientes números racionales:

- | | | | | | |
|--------|----------|--------|-----------|---------|-----------|
| 1. 1,3 | 2. - 1,7 | 3. 1,5 | 4. - 2,4 | 5. 3,2 | 6. - 3,2 |
| 7. 1,7 | 8. - 2,7 | 9. 2,5 | 10. - 6,3 | 11. 4,3 | 12. - 9,5 |

4.2.5.2. TIPOS DE NÚMEROS DECIMALES

Cuando dividimos el numerador para el denominador, de una fracción, el cociente puede ser:

1. Un número entero.

La división es exacta porque el resto es 0, en este caso se trata de números enteros.

Ejemplo: $20/4 = 5$

El 20 se llama dividendo, el 4 divisor, el 5 cociente y 0 resto.

2. Número decimal exacto, es decir con un número finito de cifras decimales.

La división es exacta porque el resto es 0.

Ejemplo: $1/4 = 0,25$.

El 0,25 se llama decimal exacto.

3. Número decimal infinito periódico puro, es decir con infinitas cifras decimales que, a partir de la coma, se repiten.

Las cifras que se repiten se llaman período.

Ejemplo: $10/3 = 3,33333 \dots = 3,\overline{3}$

En este caso la fracción $10/3$ se denomina periódica pura (el período es 3).

Observación: Se usa el símbolo " $\overline{}$ ", sobre el período, para evitar la repetición del mismo.

4. Número decimal infinito periódico mixto, es decir con infinitas cifras decimales que, a partir de la coma, algunas no se repiten y otras sí.

El "no período" está formado por las cifras comprendidas entre la coma y el período.

Ejemplo: $7/18 = 0,38888 \dots = 0,3\overline{8}$

En este caso la fracción $7/18$ se denomina periódica mixta: El período es 8 y el "no período" el 3.

Por lo tanto, un número decimal puede ser **exacto** e **inexacto** periódico: puro o mixto.

4.2.6. FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL

Un número decimal exacto o inexacto (periódico puro o mixto) puede expresarse en forma de fracción, llamada fracción generatriz. La fracción generatriz es una fracción irreducible igual a dicho número decimal. Para hallar la fracción generatriz se procede de la siguiente forma:

1. Número decimal exacto.

- Represente con "x" el número dado
 - Multiplique los dos miembros de la ecuación por la potencia de diez correspondiente, para eliminar la coma.
 - Despeje la variable x.
 - Simplifique la fracción (fracción irreducible).

Ejemplo: 0,5.

$x = 0,5$

$10x = 5$

$x = 5/10$

$x = 1/2$
2. Número decimal infinito periódico puro.

- Represente con la x el número decimal.
 - Multiplique los dos miembros de la ecuación por la potencia de diez correspondiente, para que la coma quede después del primer período.
 - Reste la expresión 1 de la 2, miembro a miembro.
 - Despeje la variable x.
 - Simplifique la fracción.

Ejemplo: $0,33... = 0,\overline{3}$

$x = 0,\overline{3}$ (1)

$10x = 3,\overline{3}$ (2)

$10x = 3,\overline{3}$

$-x = -0,\overline{3}$

$9x = 3$

$x = 3/9$

$x = 1/3$
3. Número decimal infinito periódico mixto

- Represente con la x el número decimal.
 - Multiplique los dos miembros de la ecuación por la potencia de diez correspondiente, para que la coma quede después del primer período (1).
 - Multiplique los dos miembros de la ecuación por la potencia de diez correspondiente, para que la coma quede antes del primer período (2).
 - Reste la expresión 2 de la 1.
 - Despeje la variable y simplifique la fracción.

Ejemplo: $1,255... = 1,2\overline{5}$

$x = 1,2\overline{5}$

$100x = 125,\overline{5}$ (1)

$-10x = -12,\overline{5}$ (2)

$90x = 113$

$x = 113/90$

EJERCICIOS

1. Hallar, efectuando la división, la expresión decimal de los siguientes números racionales. Grafique el resultado en la recta numérica, y luego aproxime el resultado, por redondeo, a centésimas.

1. 2/3

2. -4/5

3. 2/5

4. -3/2

5. 11/2

6. 6/5

7. -7/2

8. 7/5

9. -9/4

10. 25/3

11. 3/7

12. -15/4

13. 30/7

14. 14/3

15. -11/4
2. Hallar la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

1. 0,4

2. 0,555...

3. 0,2444...

4. 0,8

5. 1,222...

6. 1,4666...

7. 0,25

8. 2,555...

9. 2,4777...

10. 0,55...

11. 2,4545...

12. 4,55222...

13. 3,125

14. 5,777...

15. 0,455...

4.2.7. AXIOMAS DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Los axiomas del conjunto de los números racionales son: de la igualdad (=), de la adición (+), de la multiplicación (x), distributivo - recolectivo, y de orden (<, >).

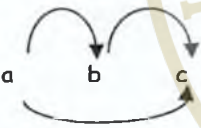
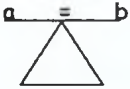
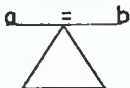
4.3. IGUALDAD DE NÚMEROS RACIONALES

Se denomina igualdad a dos expresiones separadas por el signo =, que tienen el mismo valor numérico. Por ejemplo: $2/3 = 4/6$.

4.3.1. AXIOMAS DE LA IGUALDAD

Los axiomas de la igualdad son: dicotomía, reflexivo, simétrico, transitivo, aditivo y multiplicativo. A continuación, se indican: la definición, un ejemplo y la forma simbólica de cada uno de los axiomas:

En los siguientes axiomas, $U = \mathbb{Q}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números racionales". De igual forma: $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c", elementos de los números $\mathbb{Q}$, respectivamente. Luego, las letras: a, b y c; representan fracciones de la forma: $\frac{p}{q}$; $p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. DICOTOMÍA	Entre dos números racionales cualesquiera se cumple una y solo una de las siguientes relaciones: son iguales o son diferentes.	3/4 y 3/2 son diferentes $3/4 \neq 3/2$ 1/2 y 3/6 son iguales $1/2 = 3/6$	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b:$ $a = b \vee a \neq b$
2. REFLEXIVO 	Todo número racional es igual a sí mismo.	Sea el número $\mathbb{Q}: -3$, luego $-3 = -3$. Si es $-2/5$, $-2/5 = -2/5$	$U = \mathbb{Q}, \forall a:$ $a = a$
3. SIMÉTRICO 	Si un 1º número racional cualquiera es igual a un 2º, equivale a decir que el 2º es igual al 1º.	$2/3 \in \mathbb{Q}$ y $4/6 \in \mathbb{Q}:$ $2/3 = 4/6 \Leftrightarrow 4/6 = 2/3$	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b:$ $a = b \Leftrightarrow b = a$
4. TRANSITIVO 	Si un 1º número racional es igual a un 2º y este igual a un 3º, implica que el 1º es igual al 3º.	$3/6 = 1/2 \wedge 1/2 = 5/10$ $\rightarrow 3/6 = 5/10$	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$
5. ADITIVO  $a + c = b + c$	Si a cada miembro de una igualdad se suma un mismo número racional cualquiera, la relación de igualdad se conserva (subsiste, permanece).	Si a ambos miembros de la igualdad: $3+5 = 8$, se suma el número $3/2$ se tiene: $3 + 5 + 3/2 = 8 + 3/2$ Entonces la igualdad se conserva ($19/2 = 19/2$).	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a=b \wedge c=c \Rightarrow a+c=b+c$
6. MULTIPLICATIVO  $a \times c = b \times c$	Si cada miembro de una igualdad se multiplica por un mismo número racional cualquiera, la relación de igualdad subsiste (permanece).	Si la igualdad $4+2 = 6$ si se multiplica por $1/3$, se tiene: $(4/5+2/5) \times 1/3 = 6/5 \times 1/3$. Por tanto la igualdad se conserva ($6/15 = 6/15$).	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a=b \wedge c=c \Rightarrow a.c = b.c$

4.4. SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

Iniciaremos este capítulo con la revisión de valor absoluto.

4.4.1. VALOR ABSOLUTO

Se llama valor absoluto de un número racional al mismo número con signo positivo. Por ejemplo: el valor absoluto de $-4/3$ es $4/3$, y el valor absoluto de $+1/2$ es $1/2$ (si el número es positivo se omite el signo "+"). El valor absoluto de un número se denota mediante dos barras verticales, por ejemplo: $|-4/3| = 4/3$.

En general, si x es un número racional, el valor absoluto de x se representa por $|x|$ y se define:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} |2| &= 2 \wedge |-2| = 2 \rightarrow |2| = |-2| \\ |3/7| &= 3/7 \wedge |-3/7| = 3/7 \rightarrow |3/7| = |-3/7| \end{aligned}$$

Completaremos los ejemplos anteriores agregando que el valor absoluto de 0 es 0, es decir, $|0| = 0$

4.4.2. CASOS DE LA SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

En la suma de números racionales se presentan los siguientes casos:

- a. Fracciones con igual denominador
- b. Fracciones con distinto denominador
- c. Suma de números mixtos
- d. Suma de números enteros y mixtos.

a. SUMA DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

Para sumar fracciones con igual denominador se procede de la siguiente manera:

- 1. Se suman los numeradores;
- 2. El resultado anterior se divide para el denominador común;
- 3. Se simplifica el resultado, y;
- 4. Se hallan los enteros si los hay.

Ejemplo 1. Sumar: $2/3 + 7/3$.

Proposiciones	Razones
1. $\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$	Dato
2. $\frac{2+7}{3}$	Suma de fracciones.
3. $\frac{9}{3}$	Def. (+)
4. 3	Simplificación.

EJERCICIOS

1. Sumar las siguientes fracciones:

- | | | | |
|---------------------|------------------|----------------------|-------------------|
| 1. $1/3$ y $5/3$ | 2. $1/5$ y $2/5$ | 3. $3/8$ y $6/8$ | 4. $6/7$ y $12/7$ |
| 5. $7/14$ y $21/14$ | 6. $3/4$ y $9/4$ | 7. $14/21$ y $12/21$ | 8. $7/8$ y $3/8$ |

b. SUMA DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR

Para sumar fracciones con distinto denominador se procede de la siguiente manera:

- 1. Se simplifican las fracciones, si es posible,
- 2. Se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores,
- 3. Se divide el mcm para cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo,
- 4. Se suman los productos,
- 5. Se simplifica el resultado, y;
- 6. Se hallan los números mixtos, si es posible.

Ejemplo 1. Sumar $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Proposiciones	Razones
1. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$	Dato
2. $\frac{8+9}{12}$	Suma de fracciones.
3. $\frac{17}{12}$	Def. (+)
4. $1\frac{5}{12}$	Def. # mixto.

EJERCICIOS

1. Sumar las siguientes fracciones:
1. $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{4}$

2. $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$

3. $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$

4. $\frac{5}{3}$ y $\frac{2}{5}$

5. $\frac{7}{4}$ y $\frac{2}{5}$

6. $\frac{3}{4}$ y $\frac{8}{6}$

7. $\frac{4}{5}$ y $\frac{13}{6}$

8. $\frac{7}{8}$ y $\frac{3}{4}$

9. $\frac{9}{7}$ y $\frac{3}{5}$

c. SUMA DE NÚMEROS MIXTOS

Se reducen los números mixtos a fracciones y se suman siguiendo los procedimientos estudiados anteriormente. Por ejemplo, sumar:

$2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$

Proposiciones	Razones
1. $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$	Dato.
2. $\frac{8}{3} + \frac{7}{2}$	Reducción
3. $\frac{16+21}{6}$	Suma de fracciones
4. $\frac{37}{6}$	Def (+)
5. $6\frac{1}{6}$	Def. # mixto.

EJERCICIOS

1. Sumar los siguientes números mixtos:
1. $1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2}$

2. $1\frac{3}{2} + 2\frac{1}{2}$

3. $4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}$

4. $8\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}$

5. $1\frac{7}{6} + 2\frac{1}{3}$

6. $3\frac{5}{2} + 4\frac{1}{4}$

7. $1\frac{3}{7} + 2\frac{5}{2}$

8. $4\frac{2}{3} + 2\frac{5}{3}$

d. SUMA DE NÚMEROS ENTEROS Y MIXTOS

Se transforman los números enteros a fracciones, escribiendo la unidad como denominador, y luego se suman las fracciones siguiendo los procedimientos indicados anteriormente. Por ejemplo:

Sumar: $2 + 3\frac{1}{2}$

Proposiciones

Razones

1. $2 + 3\frac{1}{2}$

Dato.

2. $\frac{2}{1} + \frac{7}{2}$

$a = a/1$, Reducción

3. $\frac{4+7}{2}$

Suma de fracciones

4. $11/2$

Def. (+)

5. $5\frac{1}{2}$

Def. # mixto

EJERCICIOS

1. Sumar los siguientes números enteros y mixtos:

1. $1 + \frac{1}{3}$

2. $\frac{3}{2} + 2$

3. $4\frac{1}{2} + 1$

4. $\frac{2}{3} + 7$

5. $\frac{7}{6} + 2$

6. $3 + 4\frac{1}{4}$

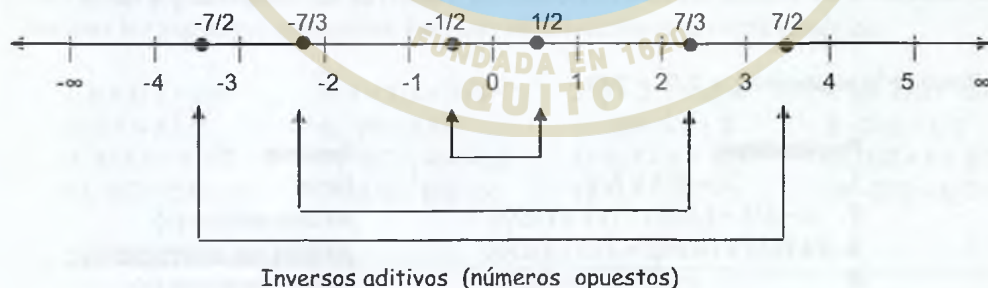
7. $1\frac{3}{7} + 5$

8. $1\frac{1}{5} + 8$

4.4.3. AXIOMAS DE LA ADICIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Son los mismos que para los números enteros y son: **clausurativo**, **conmutativo**, **asociativo**, **modulativo** e **invertivo**. A continuación se indican la definición, un ejemplo y la forma simbólica de cada uno de los axiomas:

Observación: el siguiente esquema presenta algunos números racionales y sus respectivos opuestos. El opuesto de un número racional a es otro número racional $-a$. Por ejemplo:



EJERCICIOS

1. Grafique el opuesto de los siguientes números racionales, en la recta numérica:

1. $1\frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $-\frac{3}{2}$

4. $-\frac{5}{3}$

5. $-\frac{7}{4}$

6. $-\frac{3}{4}$

7. $-\frac{4}{5}$

8. $-\frac{7}{8}$

9. $-\frac{9}{7}$

10. $-0,4$

11. $-0,6$

12. $0,5$

En los siguientes axiomas, $U = \mathbb{Q}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números racionales". Y, $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno", y se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	La suma de dos números racionales cualesquiera es un número racional único.	$1/3 \text{ y } 1/2 \in \mathbb{Q} \wedge$ $1/3 + 1/2 = 5/6$ $\rightarrow 5/6 \in \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b, \exists c:$ $a + b = c \Rightarrow c \in \mathbb{Q}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los sumandos no altera la suma total.	$3/5 + 3/4 = 3/4 + 3/5$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b:$ $a + b = b + a$
3. ASOCIATIVO	Los sumandos racionales se pueden agrupar o asociar de cualquier modo, sin que altere la suma total.	$(1/2 + 3/4) + 2/5 =$ $1/2 + (3/4 + 2/5)$ $33/20 = 33/20$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. MODULATIVO	Existe uno y solo un número racional, tal que sumado con cualquier número racional, el resultado es siempre ese mismo número racional.	$2/3 + 0 = 0 + 2/3 = 2/3$ $(-1/3) + 0 = 0 + (-1/3) = -1/3$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \exists 0:$ $0 + a = a + 0 = a$
5. INVERTIVO	Para cada número racional a existe un número racional (-a) tal que: $a + (-a) = 0$. Siendo a diferente de cero.	$+3/5 + (-3/5) = 0$ $3/4 + (-3/4) = 0$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \exists (-a):$ $a + (-a) = 0; a \neq 0$

4.4.4. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

Resolver una ecuación es determinar los valores (soluciones, raíces) de las incógnitas que hacen cierta la igualdad.

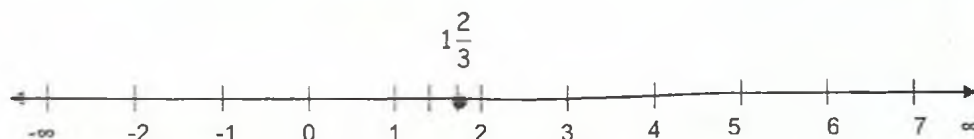
Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x + 2/3 = 7/3$

Proposiciones

- $x + 2/3 = 7/3$
- $x + 2/3 + (-2/3) = 7/3 + (-2/3)$
- $x + [2/3 + (-2/3)] = 7/3 + (-2/3)$
- $x + 0 = 7/3 + (-2/3)$
- $x = 7/3 + (-2/3)$
- $x = 5/3$

Razones

Dato
Axioma aditivo (=)
Axioma asociativo (+)
Axioma invertivo (+)
Axioma modulativo (+)
Axioma clausurativo (+)



Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $8 = x + 1/5$

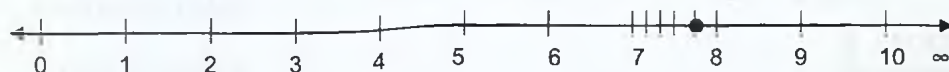
Proposiciones

1. $8 = x + 1/5$
2. $x + 1/5 = 8$
3. $x + 1/5 + (-1/5) = 8 + (-1/5)$
4. $x + [1/5 + (-1/5)] = 8 + (-1/5)$
5. $x + 0 = 8 + (-1/5)$
6. $x = 8 + (-1/5)$
7. $x = 39/5$

Razones

- Dato
 Axioma simétrico (=)
 Axioma aditivo (=)
 Axioma asociativo (+)
 Axioma invertivo (+)
 Axioma modulativo (+)
 Axioma clausurativo (+)

$$7\frac{4}{5}$$



Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $3/4 + x = -2$

Proposiciones

1. $3/4 + x = -2$
2. $x + 3/4 = -2$
3. $x + 3/4 + (-3/4) = -2 + (-3/4)$
4. $x + [3/4 + (-3/4)] = -2 + (-3/4)$
5. $x + 0 = -2 + (-3/4)$
6. $x = -2 + (-3/4)$
7. $x = -11/4$

Razones

- Dato
 Axioma conmutativo (+)
 Axioma aditivo (=)
 Axioma asociativo (+)
 Axioma invertivo (+)
 Axioma modulativo (+)
 Axioma clausurativo (+)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

1. $x + 1/3 = 2/5$

2. $x + 1/2 = 7/3$

3. $y + 0,3 = -2,4$

4. $y + 4/3 = -3/2$

5. $5 = x + 1/2$

6. $1/2 = x + 3$

7. $-3/4 = y + 2$

8. $-1 = y + 1/3$

9. $4/3 + y = 1/2$

10. $5/2 + x = -0,9$

11. $0,2 + x = -0,7$

12. $1/2 + x = 2/7$

13. $4/3 = 5/3 + y$

14. $1/2 = 1/3 + x$

15. $0,5 = 2,7 + x$

16. $-7/2 = 6/2 + z$

4.4.5. DEFINICIÓN DE RESTA

Restar un número racional de otro equivale a sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. Simbólicamente se denota de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b; a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a - b = a + (-b)$$

Ejemplo: $7/2 - 4/5 = 7/2 + (-4/5)$.

La definición anterior permite resolver ecuaciones de la forma: $x - a = b$:

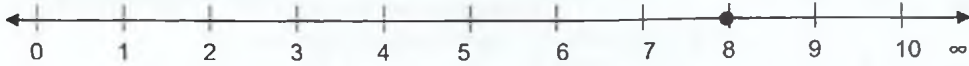
Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x - 2/3 = 22/3$

Proposiciones

1. $x - 2/3 = 22/3$
2. $x + (-2/3) = 22/3$
3. $x + (-2/3) + 2/3 = 22/3 + 2/3$
4. $x + [(-2/3) + 2/3] = 22/3 + 2/3$
5. $x + 0 = 22/3 + 2/3$
6. $x = 22/3 + 2/3$
7. $x = 8$

Razones

- Dato
Definición de resta
Axioma aditivo (=)
Axioma asociativo (+)
Axioma invertivo (+)
Axioma modulativo (+)
Axioma clausurativo (+)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

- | | | | |
|--------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $x - 1/2 = 3/4$ | 2. $2 = x - 3$ | 3. $x - 0,7 = -1,6$ | 4. $x - 2/3 = -3/4$ |
| 5. $-3 = x - 7$ | 6. $x - 3/4 = -1/3$ | 7. $x - 0,5 = 1,8$ | 8. $-3 + x = 9$ |
| 9. $x - 4 = 8$ | 10. $x - 0,3 = -1,2$ | 11. $-2 + y = -3/2$ | 12. $y - 4 = -6$ |

4.5. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La multiplicación se indica con el signo por ($\times$). Algunas veces se utiliza un punto para indicar la multiplicación de dos o más números, y otras se utilizan paréntesis. Por ejemplo: el producto de $3/4$ por $4/3$ se puede representar de las siguientes maneras: $3/4 \times 4/3$, $3/4 \cdot 4/3$ ó $(3/4)(4/3)$

4.5.1. CASOS DE LA MULTIPLICACIÓN

En la multiplicación de números racionales se presentan los siguientes casos:

- a. **Multiplicación de números enteros.** Se aplica los procedimientos estudiados para la multiplicación de números enteros. Por ejemplo: $(-2)(-5) = 10$

- b. **Multiplicación de fracciones:** El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus numeradores y cuyo denominador es el producto de sus denominadores. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{4 \times 2} = \frac{15}{8}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

- c. **Multiplicación de enteros con fracciones:** Los enteros se expresan como fracción, escribiendo la unidad como denominador de los mismos, y se aplica la regla anterior. Por ejemplo:

$$2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$$

- d. **Multiplicación de números mixtos:** se reducen los números mixtos a fracciones, y se procede como en el punto b. Por ejemplo:

$$2\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{11}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{11 \times 5}{4 \times 2} = \frac{55}{8}$$

4.5.2. LEY DE LOS SIGNOS

Para multiplicar dos números racionales (llamados factores) se halla el producto de sus valores absolutos. Si los dos factores tienen el mismo signo se antepone al producto el signo +, si los factores tienen signos diferentes se antepone el signo menos (-).

Ejemplo:

$(+4/3) (+3/2) = (+2)$		$(+a) (+b) = (+c)$
$(+4/3) (-3/2) = (-2)$	Si a y b son números racionales y $a.b = c$, la ley de los signos se resume de la siguiente forma:	$(+a) (-b) = (-c)$
$(-4/3) (+3/2) = (-2)$		$(-a) (+b) = (-c)$
$(-4/3) (-3/2) = (+2)$		$(-a) (-b) = (+c)$

EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes multiplicaciones.

1. $7/3 \cdot 2/5$	2. $-1/5 \cdot -2/3$	3. $1/2 \cdot -2/3$	4. $-3/4 \cdot -5/3$
5. $-1/3 \cdot -4/7$	6. $4/9 \cdot 1/5$	7. $-2/9 \cdot -10/3$	8. $1/2 \cdot -2/13$
9. $-5/2 \cdot 1/3$	10. $3 \cdot 4/9$	11. $-4 \times 2/3$	12. $-5 \times 4/7$
13. $4 \cdot 2/5$	14. $-5 \times 2/7$	15. $-5 \times 3/7$	16. $-2 \times 7/8$

4.5.3. AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Los Axiomas de la multiplicación son los mismos que de los números enteros y son: **clausurativo, conmutativo, asociativo, modulativo e invertivo**. A continuación se indican la definición, un ejemplo y la forma simbólica de cada uno de los Axiomas:

Observación: el recíproco o inverso multiplicativo de un número, diferente de cero, es el número 1 dividido por dicho número. Es decir el inverso multiplicativo se obtiene intercambiando el numerador con el denominador. Por ejemplo:

El recíproco de 2 es $1/2$	El recíproco de -4 es $-1/4$
El recíproco de $2/3$ es $3/2$	El recíproco de $-3/5$ es $-5/3$
El recíproco de 0,5 es $1/0,5$	El recíproco de -0,2 es $-1/0,2$

Observación: $2 = \frac{2}{1}$	$-4 = -\frac{4}{1}$	$0,5 = \frac{0,5}{1}$	$-0,2 = -\frac{0,2}{1}$
---------------------------------------	---------------------	-----------------------	-------------------------

El producto de un número por su inverso multiplicativo (recíproco) es siempre igual a 1. Por ejemplo:

$3 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$7 \cdot \frac{1}{7} = 1$

$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$

En los siguientes Axiomas, $U = \mathbb{Q}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números racionales". Y, $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c", elementos de los racionales. Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno". El cuantificador particular $\exists c$ se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	El producto de dos números racionales cualesquiera es un número racional único.	$2/3 \text{ y } 4/5 \in \mathbb{Q}$ $2/3 \times 4/5 = 8/15$ $\rightarrow 8/15 \in \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b, \exists c:$ $a \times b = c \Rightarrow c \in \mathbb{Q}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los factores no altera el producto.	$5/2 \times 4/3 = 4/3 \times 5/2$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b:$ $a \times b = b \times a$ $a.b = b.a$
3. ASOCIATIVO	Los factores racionales se pueden agrupar o asociar de cualquier modo, sin que altere el producto.	$[(-1/3) \times (-1/2)] \times 1/6$ $= (-1/3) \times [(-1/2) \times 1/6]$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $(ab)c = a(bc)$
4. MODULATIVO	Existe uno y solo un número racional, el 1, tal que multiplicado por cualquier número racional el resultado es siempre ese mismo número racional.	$9/2 \times 1 = 1 \times 9/2 = 9/2$ $(-3/4) \times 1 = 1 \times (-3/4) = -3/4$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \exists 1:$ $1 \times a = a \times 1 = a$ $1a = a1 = a$
5. INVERTIVO	Para cada número racional a, diferente de cero, existe un número racional (1/a) tal que: $a \cdot (1/a) = 1$.	$5 \times 1/5 = 1$ $(-3/4) \times (-4/3) = 1$	$U = \mathbb{Q}. \forall a, \exists (1/a):$ $a \cdot (1/a) = 1; a \neq 0$ $a(1/a) = 1$

4.5.4. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

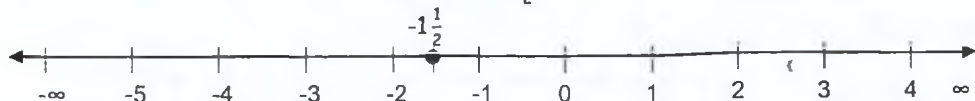
Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $-2x = 3$

Proposiciones

- $-2x = 3$
- $x \cdot (-2) = 3$
- $x \cdot (-2) \cdot (-1/2) = 3 \cdot (-1/2)$
- $x \cdot [(-2) \cdot (-1/2)] = 3 \cdot (-1/2)$
- $x \cdot 1 = 3 \cdot (-1/2)$
- $x = 3 \cdot (-1/2)$
- $x = -3/2 = -1\frac{1}{2}$

Razones

- Dato
- Axioma conmutativo (x)
- Axioma multiplicativo(=)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulativo (x)
- Axioma clausurativo (x)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

- | | | | |
|-----------------|---------------------|----------------|-------------------|
| 1. $3x = 5$ | 2. $0,5x = 3$ | 3. $1/2x = 3$ | 4. $0,25x = -0,5$ |
| 5. $1/3x = -4$ | 6. $4x = 1/5$ | 7. $2x = -10$ | 8. $1/2x = -2$ |
| 9. $-4x = -5$ | 10. $-1/5x = -7$ | 11. $-7x = 3$ | 12. $-0,3x = -6$ |
| 13. $-1/4x = 2$ | 14. $-0,75x = 0,25$ | 15. $-2x = -1$ | 16. $-1/3x = -2$ |

4.5.5. DEFINICIÓN DE DIVISIÓN

Dividir un número racional por otro equivale a multiplicar el **dividendo** por el inverso multiplicativo (recíproco) del divisor. Simbólicamente se denota de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b: a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a/b = a \cdot 1/b; b \neq 0$$

Ejemplo: $-2/3 = 2 \cdot (-1/3)$

$$-2/3 \div 4/5 = (-2/3)(5/4) = -5/6$$

Observación: Todo número $\mathbb{Q}$ dividido para la unidad es igual al mismo número ($\forall a \in \mathbb{Q}: a \div 1 = a$): $2/3 \div 1 = 2/3$.
 Todo número $\mathbb{Q}$, diferente de 0, dividido para sí mismo es igual a 1 ($\forall a \in \mathbb{Q}: a \div a = 1; a \neq 0$): $3/2 \div 3/2 = 1$.
 Todo número $\mathbb{Q}$, diferente de 0, dividido para 0 no está definido ($a \div 0; a \neq 0$ no está definido): $4/7 \div 0$, no está definido. Cero dividido para cero ($0 \div 0$) es una indeterminación (Ind).

4.5.5.1. LEY DE LOS SIGNOS

Si los dos números racionales (llamados dividendo y divisor, respectivamente) tienen el mismo signo el resultado (llamado cociente) es positivo, caso contrario es negativo.

Por ejemplo: $(+1/2) \div (-3/5) = (-5/6)$.

Expresión que se escribe, generalmente, de la siguiente forma: $\frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$

Observación: el signo + se omite; en el dividendo, en el divisor, o en el cociente (se sobrentiende).

4.5.5.2. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

La definición: $a/b = a \cdot 1/b; b \neq 0$, nos permite resolver ecuaciones de la forma $x/a = b$, con $a \neq 0$, utilizando el proceso general para resolver ecuaciones:

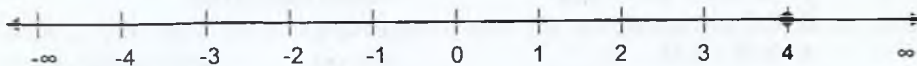
Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x/-2 = -2$

Proposiciones

1. $x/-2 = -2$
2. $x \cdot (-1/2) = -2$
3. $x \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-2) = (-2) \cdot (-2)$
4. $x \cdot [(-1/2) \cdot (-2)] = (-2) \cdot (-2)$
5. $x \cdot 1 = (-2) \cdot (-2)$
6. $x = (-2) \cdot (-2)$
7. $x = 4$

Razones

- Dato
 definición de división
 Axioma multiplicativo (=)
 Axioma asociativo (x)
 Axioma invertivo (x)
 Axioma modulativo (x)
 Axioma clausurativo (x)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

1. $x/3 = 0,5$

2. $x/4 = -0,5$

3. $x/2 = 2$

4. $x/2 = -0,25$

5. $x/6 = 1$

6. $x/6 = -1$

7. $x/0,5 = 3$

8. $x/0,5 = 4$

9. $x/-3 = 0,5$

10. $x/-4 = -0,5$

11. $x/-2 = 2$

12. $x/-2 = -0,25$

13. $x/-6 = 1$

14. $x/-6 = -1$

15. $x/-0,5 = 3$

16. $x/-0,5 = 4$

17. $-y/4 = 3$

18. $-y/0,25 = 6$

19. $-z/5 = -3$

20. $-x/7 = -3$

21. $-x/3 = 3/4$

22. $-y/5 = -\frac{1}{4}$

23. $-z/2 = -3$

24. $-z/3 = 1/6$

4.6. AXIOMAS DISTRIBUTIVO-RECOLECTIVO

El producto de un número racional cualquiera por la suma de dos números racionales cualesquiera, es igual a la suma de los productos de ese número racional por cada uno de los sumandos. El Axioma distributivo se escribe en forma simbólica de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b, \forall c; a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$\text{Ejemplo: } (3/2) \times (1/5 + 3/4) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{4}$$

Si en la definición simbólica, del axioma distributivo, se aplica el axioma simétrico de la igualdad, se tiene:

$$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b, \forall c; a.b + a.c = a.(b+c)$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} = (3/2) \times (1/5 + 3/4)$$

La operación realizada en el ejemplo anterior se conoce, generalmente, como axioma recolectivo o factor común.

El axioma distributivo-recolectivo se escribe en forma simbólica de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{Q}. \forall a, \forall b, \forall c; a.(b+c) = a.b + a.c \wedge a.b + a.c = a.(b+c)$$

4.6.1. APLICACIONES

Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo o recolectivo, según corresponda.

Ejemplo 1. Resolver: $5.(1/4 + 1/3) = 35/12$

Proposiciones

1. $5.(1/4 + 1/3) = 35/12$

2. $5.1/4 + 5.1/3 = 35/12$

3. $5/4 + 5/3 = 35/12$

4. $35/12 = 35/12$

Razones

Dato

Axioma distributivo

Def. (x)

Def. (+)

Ejemplo 2. Resolver: $0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,4 = 0,35$

Proposiciones

1. $0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,4 = 0,35$

2. $0,5.(0,3 + 0,4) = 0,35$

3. $0,5 \times 0,7 = 0,35$

4. $0,35 = 0,35$

Razones

Dato

Axioma recolectivo

Def. (+)

Def. (x).

Observación: en anexos se presenta un resumen de las operaciones básicas con números decimales.

EJERCICIOS

1. Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo o recolectivo, según corresponda:

1. $3.(4 + 2) = 18$

2. $0,7.(0,4 + 0,5) = 0,63$

3. $2/5.(3/4 + 2/5) = 23/50$

4. $3.2 + 5.2 = 16$

5. $4.3 + 5.4 = 32$

6. $2.3 + 3.5 = 21$

7. $5.(1 + 2) = 15$

8. $0,1.(0,4 + 0,3) = 0,07$

9. $1/3.(3/2 + 2/3) = 13/18$

10. $3.1/2 + 5.1/2 = 4$

11. $3.0,4 + 5.0,4 = 3,2$

12. $1/3.4 + 5.1/3 = 3$

4.7. DESIGUALDAD DE NÚMEROS RACIONALES

4.7.1. DESIGUALDAD

La desigualdad, es una relación matemática entre dos expresiones separadas por los signos: < (menor que) o > (mayor que), que tienen diferente valor numérico (no son iguales). Por ejemplo: $2 < 7$ ó $9 > 1$.

En general:

- 1. Un número racional *a* es **menor** que un número racional *b*, si en la recta numérica el punto *a* esta a la izquierda del punto *b*, por ejemplo:



Como puede verse en el gráfico $a < b$ y en particular $-5/2 < 1/2$, por la razón indicada anteriormente.

- 2. Un número real *b* es **mayor** que un número real *a*, si en la recta numérica el punto *b* está a la derecha del punto *a*, por ejemplo:



Como puede verse en el gráfico $b > a$ y en particular $1/2 > -5/2$, por la razón indicada anteriormente.

Definición 1: *a* es menor que *b* es equivalente a decir que: la diferencia (*a* - *b*) es un número negativo: En forma simbólica se escribe:

$$a < b \Leftrightarrow (a-b) < 0$$

Ejemplo: $-5/2 < 1/2$ porque $-5/2 - 1/2 = -6/2$; es negativo.

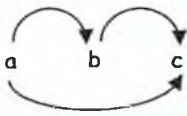
Definición 2: *a* es mayor que *b* es equivalente a decir que: la diferencia (*a* - *b*) es un número positivo. En forma simbólica se tiene:

$$a > b \Leftrightarrow (a-b) > 0$$

Ejemplos: $1/2 > -3$ porque $1/2 - (-3) = 7/2$; es positivo

4.7.2. AXIOMAS DE LA DESIGUALDAD (ORDEN)

En los siguientes axiomas, $U = \mathbb{Q}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números racionales". $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo *a*, *b* y *c*". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno". El cuantificador particular $\exists c$ se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

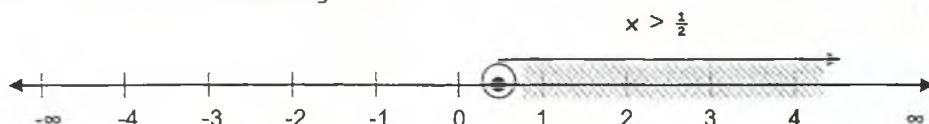
NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. TRICOTOMÍA	Entre dos números racionales cualesquiera se cumple una sola de las siguientes relaciones: - el 1º es igual al 2º - el 1º mayor que el 2º, o - el 1º menor que el 2º.	1/2 y 1/2, se cumple: $1/2 = 1/2$ 5/2 y 1/2, se cumple: $5/2 > 1/2$ 1/3 y 8/3, se cumple: $1/3 < 8/3$	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b:$ $a = b, a > b, a < b$ $a \neq b \Leftrightarrow a > b \vee a < b$
2. TRANSITIVO 	Si un 1º número racional es mayor (menor) que un 2º y éste mayor (menor) que un 3º, entonces el 1º es mayor (menor) que el 3º.	$5/2 > 3/2 \wedge 3/2 > 0 \rightarrow 5/2 > 0$ $1 < 3/2 \wedge 3/2 < 7/2 \rightarrow 1 < 7/2$	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$ $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
3. ANTISIMÉTRICO	Si un número racional es mayor que un segundo, entonces el segundo es menor que el primero.	$5/3 > 2/3 \Leftrightarrow 2/3 < 5/3$ $4/3 < 7/3 \Leftrightarrow 7/3 > 4/3$	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b:$ $a > b \Leftrightarrow b < a$ $a < b \Leftrightarrow b > a$ $a > b \Leftrightarrow b \not> a$
5. ADITIVO  (El signo no cambia)	Si a cada miembro de una desigualdad se suma un mismo número racional cualquiera, el sentido de la desigualdad no cambia.	$7/2 > 3/5 \wedge 2 = 2 \rightarrow 7/2 + 2 > 3/5 + 2$ $5/7 < 9/2 \wedge 3 = 3 \rightarrow 5/7 + 3 < 9/2 + 3$	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge c = c \Rightarrow a + c > b + c$ $a < b \wedge c = c \Rightarrow a + c < b + c$
6. MULTIPLICATIVO  (El signo cambia si el factor es negativo) 	Si cada miembro de una desigualdad se multiplica por un mismo número racional positivo, el sentido de la desigualdad no cambia, pero si se multiplica por un número racional negativo el signo de la desigualdad cambia.	Número positivo $3/5 < 9/2 \wedge 2 = 2 \rightarrow 3/5 \cdot 2 < 9/2 \cdot 2$ Número negativo $3/5 < 9/2 \wedge -2 = -2 \rightarrow 3/5 (-2) > 9/2 (-2)$	$U = \mathbb{Q}, \forall a, \forall b, \forall c:$ Número positivo ($c > 0$) $a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ Número negativo ($c < 0$) $a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

4.7.3. APLICACIONES

a. INECUACIÓN

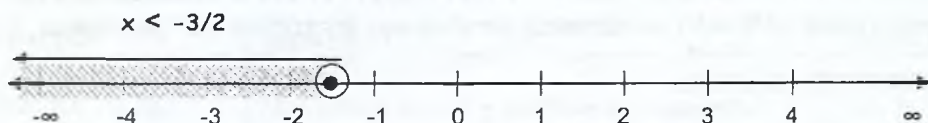
Si una desigualdad contiene variables (x, y, z) se llama inecuación. Una inecuación es verdadera para determinados valores de las variables que contiene. Para graficar el conjunto solución de la inecuación, sobre la recta numérica, se encierra en una circunferencia el elemento "extremo", y se remarca la recta hacia la derecha si es "mayor que" y hacia la izquierda si es "menor que".

Ejemplo 1. Resolver: $x > \frac{1}{2}$. La inecuación es verdadera para todos los valores mayores que $\frac{1}{2}$ y es falsa para todos los valores menores o igual a $1/2$.



La circunferencia, indica que el $1/2$ no es elemento del conjunto, y la flecha que el conjunto es infinito.

Ejemplo 2. Resolver: $x < -3/2$. La inecuación es verdadera para todos los valores menores que $-3/2$ y es falsa para todos los valores mayores o igual a $-3/2$.



La circunferencia indica que el $-3/2$ no es elemento del conjunto, y la flecha que el conjunto es infinito.

b. RESOLUCIÓN DE INECUACIONES BÁSICAS

Ejemplo 1. Resolver la inecuación: $x + 1/2 > 5$

Proposiciones

1. $x + 1/2 > 5$
2. $x + 1/2 + (-1/2) > 5 + (-1/2)$
3. $x + [1/2 + (-1/2)] > 5 + (-1/2)$
4. $x + 0 > 5 + (-1/2)$
5. $x > 5 + (-1/2)$
6. $x > 9/2$

Razones

- Dato
- Axioma aditivo ($<, >$)
- Axioma asociativo (+)
- Axioma invertivo (+)
- Axioma modulatorio (+)
- Axioma clausurativo (+)



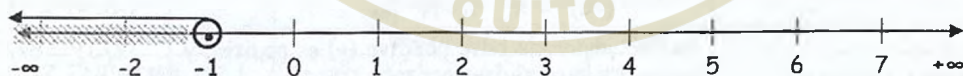
Ejemplo 2. Resolver la inecuación: $2 < -2x$

Proposiciones

1. $2 < -2x$
2. $-2x > 2$
3. $x \cdot (-2) > 2$
4. $x \cdot (-2) \cdot (-1/2) < 2 \cdot (-1/2)$
5. $x \cdot [(-2) \cdot (-1/2)] < 2 \cdot (-1/2)$
6. $x \cdot 1 < 2 \cdot (-1/2)$
7. $x < 2 \cdot (-1/2)$
8. $x < -1$

Razones

- Dato
- $a < b \Leftrightarrow b > a$
- Axioma conmutativo (x)
- Axioma multiplicativo ($<, >$)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulatorio (x)
- Axioma clausurativo (x)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes inecuaciones. Represente las soluciones en la recta numérica.

- | | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------|----------------------|
| 1. $x + 3/2 > 1$ | 2. $z + 8 > 5/3$ | 3. $x + 2/5 > -1$ | 4. $y + 6/7 > -2/3$ |
| 5. $z + 0,5 > 0,25$ | 6. $y + 7/4 > -2/5$ | 7. $x - 5/3 < 2/3$ | 8. $z - 4 < -8/3$ |
| 9. $x - 1/5 < 4$ | 10. $x - 3/2 < 7/2$ | 11. $y - 6 < -1/3$ | 12. $x - 1/4 < -1/2$ |
| 13. $x/3 > 2$ | 14. $z/5 > -3$ | 15. $x/5 < 3$ | 16. $y/4 > 1$ |
| 17. $z/3 > 1/2$ | 18. $x/4 < -5$ | 19. $-2x < 5$ | 20. $-6y > 7$ |
| 21. $-2x < -1/3$ | 22. $-3y < -2$ | 23. $-4y > -5$ | 24. $-3y < 7$ |
| 25. $3 < 5x$ | 26. $5 < -3y$ | 27. $-5 < 1/2x$ | 28. $-5 < 2y$ |

4.8. POTENCIACIÓN (RACIONALES CON EXPONENTES ENTEROS: $\mathbb{Q}^Z$)

Se llama potenciación al producto formado mediante multiplicaciones sucesivas de un mismo número o letra. Por ejemplo: $(-2/3)^3 = (-2/3)(-2/3)(-2/3) \rightarrow (-2/3)^3 = -8/27$. El $-2/3$ se llama base, el 3 exponente (número de veces que el $-2/3$ se ha de multiplicar por sí mismo), el $-8/27$ es la 3ª potencia de $-2/3$.

4.8.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si la base a es un número racional, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F}$, y el exponente n un entero, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. POTENCIA CERO	La potencia cero (exponente 0) de un número racional a , distinto de cero, es igual a 1: $a^0 = 1; a \neq 0$	$(0/5)^0 = 1$ $(-3/4)^0 = 1$ $(-2/5)^0 = 1$
2. POTENCIA UNO	La potencia uno (primera potencia) de un número racional a , es igual al mismo número sin el exponente: $a^1 = a$	$0^1 = 0$ $3^1 = 3$ $(-2/3)^1 = -2/3$ $(-5)^1 = -5$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA (PEP) $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La PEP, de un número racional a , es igual al producto de n veces a ; siendo $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}; a \in \mathbb{Q} \wedge n \in N^*$	$(1/2)^2 = (1/2)(1/2)$ $(-3/2)^2 = (-3/2)(-3/2)$
4. POTENCIA ENÉSIMA NEGATIVA (PEN)	La PEN, de un número racional a distinto de cero, es igual al inverso de la potencia con exponente positivo; $n > 0$: $a^{-n} = 1/a^n; a \neq 0 \wedge n > 0 \in \mathbb{N}$	$0^{-2} = 1/0^2$ $2^{-1} = 1/2$ $2^{-3} = 1/2^3$ $(3/4)^{-2} = 1/(3/4)^2$

Observación: cuando el exponente es negativo no tiene sentido hablar de $-n$ factores, por lo que se utiliza la definición: $a^{-n} = 1/a^n; a \neq 0 \wedge n > 0 \in \mathbb{N}$.

4.8.2. TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^n y b^n , son potencias definidas en los números racionales con exponentes enteros:

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA PAR	La PEP par de base positiva (+) o negativa (-) es positiva: $(a)^n = x; n \in N^* \text{ par}$ $(-a)^n = x; n \in N^* \text{ par}$	$(1/2)^2 = 1/4$ $(2/3)^2 = 4/9$ $(-2/3)^2 = 4/9$ $(-3/4)^2 = 9/16$
2. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA IMPAR	La PEP impar de base positiva (+) es positiva y de base negativa (-) es negativa: $(a)^n = x; n \in N^* \text{ impar}$ $(-a)^n = -x; n \in N^* \text{ impar}$	$(2/3)^3 = 8/27$ $(3/2)^3 = 27/8$ $(-2/3)^3 = -8/27$ $(-3/2)^3 = -27/8$
3. POTENCIA ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La potencia enésima del producto de números racionales es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$[(2/5)(3/6)]^2 = (2/5)^2 \cdot (3/6)^2$
4. POTENCIA ENÉSIMA DEL COCIENTE	La potencia enésima del cociente de números racionales (división), es igual al cociente de las potencias enésimas; $b \neq 0$. $(a/b)^n = a^n/b^n; b \neq 0$	$[(6/5) \div (3/2)]^2 = (6/5)^2 \div (3/2)^2$

Observación: $(-2/3)^2 \neq -(2/3)^2$.

4.8.3. OPERACIONES DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^m y a^n , son potencias definidas en los números racionales con exponentes enteros:

OPERACIÓN	TEOREMA	EJEMPLO
1. PRODUCTO DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se suman los exponentes. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-1/2)^2 \cdot (-1/2)^3 = (-1/2)^{2+3} = (-1/2)^5$
2. COCIENTE DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se restan los exponentes. $a^m / a^n = a^{m-n}$; $a \neq 0$:	$(-1/3)^4 / (-1/3)^6 = (-1/3)^{4-6} = (-1/3)^{-2}$
3. POTENCIA DE POTENCIA	Se mantiene la base y se multiplican los exponentes. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$[(-2/5)^3]^2 = (-2/5)^{3 \cdot 2} = (-2/5)^6$

Observación: Para todo a racional y n entero se tiene: $-a^n = -(a^n)$, por ejemplo: $-2^4 = -(2^4)$.

EJERCICIOS

1. Hallar los siguientes productos (cocientes), aplicando las definiciones y propiedades de los exponentes enteros.

- | | | | |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|
| 1. $(4^3)(-4^4)$ | 2. $(-0,5^2)(-0,5^3)$ | 3. $(-1/3^5)(-1/3^5)$ | 4. $(2^2)^3$ |
| 5. $(0,4^3)^2$ | 6. $(1/2^4)^2$ | 7. $(2 \cdot 3)^2$ | 8. $(0,4 \cdot 0,5)^3$ |
| 9. $(1/2 \cdot 1/5)^2$ | 10. $4^5 / -4^6$ | 11. $0,2^5 / -0,2^4$ | 12. $(1/3)^5 / -(1/3)^2$ |
| 13. $(2/3)^2$ | 14. $(0,4/0,5)^3$ | 15. $(3/2)^2$ | 16. $2^4/2^3$ |

2. Construir un mentefacto para la potenciación.

4.9. RADICACIÓN

Si a es un número racional, y n es natural mayor que uno (conjunto representado por N^*), se tiene:

4.9.1. DEFINICIONES BÁSICAS

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA EXACTA. $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La raíz n -ésima exacta de un número racional a , llamado radicando es otro racional " x ", que, elevado a la potencia n -ésima, es igual al mismo radicando. $\exists a: \sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a; n \in N^*$ Inexacta: $\sqrt[3]{2/5} = \frac{a}{b}$, en Q	Exacta $\sqrt[3]{8/27} = 2/3 \rightarrow (2/3)^3 = 8/27$
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1	La raíz n -ésima de 1 es igual a 1: $\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La raíz n -ésima y potencia n -ésima, de un mismo número racional a , se simplifican: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; n \in N^* \text{ impar}$ $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; a \geq 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt[3]{(\frac{2}{5})^3} = 2/5$ $\sqrt[3]{(-\frac{2}{5})^3} = -2/5$ $\sqrt[2]{(\frac{2}{5})^2} = 2/5$ $\sqrt[2]{-\frac{2^2}{5}} = \frac{a}{b}$

Observación: la raíz de un número racional no siempre es posible, sólo ocurre cuando la raíz n -ésima es exacta (definición 1). Por ejemplo: $\sqrt{4/25} = \pm 2/5 \Leftrightarrow (\pm 2/5)^2 = 4/25$. La raíz $\sqrt{2/25}$ no es posible en los números racionales porque no existe ningún número que elevado a la potencia 2 de $2/25$. Del mismo modo, la raíz de $\sqrt{4/3}$; no es posible porque no existe ningún número racional que elevado al cuadrado de $4/3$.

4.9.2. TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

Si: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$, son raíces definidas en los números racionales con índice n , natural mayor que uno (N^*):

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA PAR EXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$ Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): tiene dos raíces opuestas. $\exists a: \sqrt[n]{a} = \pm x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$ Inexacta: $\sqrt{3/5} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt{4/25} = \pm 2/5 \rightarrow$ $(\pm 2/5)^2 = 4/25$
	2. Radicando igual a 0: tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt{0} = 0 \rightarrow$ $(0)^2 = 0$
	3. Radicando negativo (-): no tiene raíces en Q . $\sqrt[n]{-a} = \pm$; $n \in N^* \text{ par}$ (no tiene solución en Q)	$\sqrt{-4/25} = \pm$, en Q
2. RAÍZ ENÉSIMA IMPAR EXACTA Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): tiene una raíz positiva $\exists a: \sqrt[n]{a} = +x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$ Inexacta: $\sqrt[3]{5/27} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt[3]{8/27} = 2/3 \rightarrow$ $(2/3)^3 = 8/27$
	2. Radicando igual a 0: tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ impar}$	$\sqrt[3]{0} = 0$
	3. Radicando negativo (-): tiene una raíz negativa. $\exists -a: \sqrt[n]{-a} = -x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$ Inexacta: $\sqrt[3]{-5/27} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt[3]{-8/125} = -2/5 \rightarrow$ $(-2/5)^3 = -8/125$
3. RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La raíz enésima del producto es igual al producto de la raíz enésima de cada factor (definidas en Q): $\exists a, b: \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ Inexacta: $\sqrt{(2/9)(5/6)} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt{(4/9)(25/36)} =$ $\sqrt{4/9} \cdot \sqrt{25/36} =$ $(2/3) \cdot (5/6)$
4. RAÍZ ENÉSIMA DEL COCIENTE.	La raíz enésima del cociente, de números racionales, es igual al cociente de las raíces enésimas (definidas en Q), dividiendo y divisor; $b \neq 0$. $\exists a, b: \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}; b \neq 0$ Inexacta: $\sqrt{(2/9)/(5/6)} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt{9/4 \div 16/25} =$ $\sqrt{9/4} / \sqrt{16/25} =$ $3/2 \div 4/5$

EJERCICIOS

- Hallar la raíz cuadrada o cúbica de los siguientes números, según corresponda:

1. 1/4	2. 8/27	3. -8/64	4. 4/25	5. -4/49
6. 27/64	7. -27/125	8. 9/25	9. -9/36	10. 64/81
- Hallar el valor de la variable:

1. $\sqrt{x} = 9/10$	2. $\sqrt{x} = -3/4$	3. $\sqrt[3]{y} = -2/5$	4. $\sqrt[3]{z} = 3/4$
5. $\sqrt[5]{x} = -1/2$	6. $\sqrt[4]{y} = -2/3$	7. $\sqrt[3]{y} = -5/4$	8. $\sqrt[4]{y} = 3/5$
- Escriba las propiedades y teoremas de la radicación aplicando el axioma simétrico (=).
- Realizar las operaciones y expresar la respuesta con exponentes positivos:

$$1. \left[\sqrt{\frac{5}{3}} \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right]^2 \div 5^{-3}$$

$$2. \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{3}{5} \right)^{-1} - \frac{1}{6}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}} - 1 + \frac{1}{8}}} \cdot \frac{10}{\left(\frac{3}{2} \right)^{-2} + \frac{2}{3}}$$

Observación: La suma, la resta, el producto y el cociente de dos números racionales es otro número racional. La potenciación es posible cuando el exponente es un número entero. Si la base es negativa con exponente par la potencia es positiva y si el exponente es impar es negativa. La raíz de un número Q no siempre es posible, sólo es posible cuando la raíz es exacta (Definición 1: $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$). Con índice par se tiene: si el radicando es positivo dos raíces ($\pm$) y si el radicando es negativo no tiene solución. Para índice impar: si el radicando es positivo tiene una sola raíz (+) y si el radicando es negativo tiene una sola raíz (-).

CAPÍTULO 5

NÚMEROS REALES ($\mathbb{R}$)

5.1. INTRODUCCIÓN

En el conjunto de los números $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, usados para contar los elementos de un conjunto, las diferencias (restas) en las cuales el minuendo es menor que el sustraendo no tiene respuesta, por lo que se dice que no están definidas, por ejemplo: $1 - 2$, $2 - 3$, entre otros.

Por otro lado, el conjunto de los números naturales no permite la consideración de magnitudes que dan lugar a dos sentidos, como la temperatura (sobre cero o bajo cero). Por estas razones, entre otras, fue necesario ampliar el conjunto de los números naturales, incluyendo números negativos.

El conjunto formado por los números naturales y sus opuestos se llama conjunto de los números enteros y se representa con la letra $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Este conjunto permite resolver el problema de la sustracción de los números naturales en todos los casos y también el de las magnitudes que dan lugar a dos sentidos. En el Conjunto $\mathbb{Z}$, las divisiones: $4/7$, $-3/8$, entre otras; no están definidas, por esta razón fue necesario ampliar el conjunto de los números enteros.

El conjunto formado por las expresiones: a/b , donde a y b son números enteros, con b diferente de cero, se llama conjunto de los números racionales: $\mathbb{Q} = \{x/x = \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Los naturales y los enteros son subconjuntos de los números racionales.

Si dividimos el numerador para el denominador, de una fracción, el cociente puede ser:

- | | |
|--|--|
| 1. Un número entero.
La división es exacta porque el resto es 0, en este caso se trata de números enteros. | Ejemplo: $20/4 = 5$
El 20 se llama dividendo, el 4 divisor, el 5 cociente y 0 resto. |
| 2. Numero decimal exacto , es decir con un número finito de cifras decimales.
La división es exacta porque el resto es 0. | Ejemplo: $1/4 = 0,25$.
El 0,25 se llama decimal exacto. |
| 3. Numero decimal infinito periódico puro , es decir con infinitas cifras decimales que, a partir de la coma, se repiten.
Las cifras que se repiten se llaman período . | Ejemplo: $10/3 = 3,33333 \dots = 3,\bar{3}$
En este caso la fracción $10/3$ se denomina periódica pura (el período es 3). |

Observación: Se usa el símbolo " $\bar{}$ ", sobre el período, para evitar la repetición del mismo.

- | | |
|---|---|
| 4. Número decimal infinito periódico mixto , es decir con infinitas cifras decimales que, a partir de la coma, algunas no se repiten y otras sí.
El "no período" está formado por las cifras comprendidas entre la coma y el período. | Ejemplo: $7/18 = 0,38888\dots = 0,3\bar{8}$
En este caso la fracción $7/18$ se denomina periódica mixta: El período es 8 y el "no período" el 3. |
|---|---|

Por lo tanto, un número decimal puede ser **exacto** e **inexacto** periódico: puro o mixto. Toda expresión decimal, obtenida de esta manera, se puede transformar en una fracción, llamada fracción generatriz de la expresión decimal. Para hallar la fracción generatriz de una expresión decimal exacta o periódica, se procede de la siguiente manera:

1. Número decimal exacto.

- Represente con una variable, por ejemplo, la x , el número dado
- Multiplique los dos miembros de la ecuación por la potencia de diez correspondiente, para eliminar la coma.
- Despeje la variable x .
- Simplifique la fracción (fracción irreducible).

Ejemplo: 0,5.

$$x = 0,5$$

$$10x = 5$$

$$x = 5/10$$

$$x = 1/2$$

2. Número decimal infinito periódico puro.

- Represente con x la expresión decimal
- Multiplique los dos miembros de la ecuación por la potencia de diez correspondiente, para que la coma quede después del primer período.
- Reste la expresión 1 de la 2, miembro a miembro.
- Despeje la variable x .
- Simplifique la fracción.

Ejemplo: $0,33... = 0,\overline{3}$

$$x = 0,\overline{3} \quad (1)$$

$$10x = 3,\overline{3} \quad (2)$$

$$10x = 3,\overline{3}$$

$$-x = -0,\overline{3}$$

$$9x = 3$$

$$x = 3/9$$

$$x = 1/3$$

3. Número decimal infinito periódico mixto

- Represente con x la expresión decimal.
- Multiplique los dos miembros de la ecuación por la potencia de diez correspondiente, para que la coma quede después del primer período (1).
- Multiplique los dos miembros de la ecuación por la potencia de diez correspondiente, para que la coma quede antes del primer período (2).
- Reste la expresión 2 de la 1.
- Despeje la variable y simplifique la fracción.

Ejemplo: $1,255... = 1,2\overline{5}$

$$x = 1,2\overline{5}$$

$$100x = 125,\overline{5} \quad (1)$$

$$-10x = -12,\overline{5} \quad (2)$$

$$90x = 113$$

$$x = 113/90$$

La expresión periódica pura $0,999...$ y las expresiones periódicas mixtas de período 9, tales como: $0,0999...$, $0,1999...$, $0,2999...$, $0,01999...$, $0,02999...$, entre otras, no son originadas por fracciones comunes, es decir; no existe ninguna fracción común tal que, dividiendo su numerador entre su denominador, se obtengan dichas fracciones. Por eso, si se halla la fracción generatriz de $0,999...$ se encuentra que $9/9 = 1$. Lo dicho anteriormente supone la existencia de otro tipo de números los mismos que se estudian a continuación:

EJERCICIOS

- Hallar, efectuando la división, la expresión decimal de los siguientes números racionales. Grafique el resultado en la recta numérica, y luego aproxime el resultado, por redondeo, a centésimas.

1. $3/4$

2. $-5/6$

3. $3/6$

4. $-4/3$

5. $2/3$

6. $7/6$

7. $-6/5$

8. $8/6$

9. $-10/3$

10. $5/3$

11. $2/7$

12. $-15/7$

13. $30/9$

14. $14/5$

15. $-1/4$

16. $56/6$

17. $49/3$

18. $75/16$

19. $11/13$

20. $-1/3$

- Hallar la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

1. 0,4

2. $0,555...$

3. $0,2444...$

4. 0,8

5. $1,222...$

6. $1,4666...$

7. 0,25

8. $2,555...$

9. $2,4777...$

10. $0,55...$

11. $2,4545...$

12. $4,55222...$

13. $3,125$

14. $5,777...$

15. $-0,455...$

16. 0,22

17. $0,4242...$

18. $3,25444...$

19. $2,312555...$

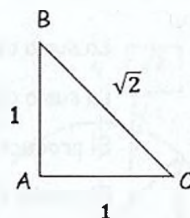
20. $0,12...$

5.2. NÚMEROS IRRACIONALES ($\mathbb{Q}'$)

Si consideramos un triángulo rectángulo isósceles tal que cada uno de sus catetos mide 1, se tiene que la hipotenusa es igual a $\sqrt{2}$, aplicando el teorema de Pitágoras.

Luego, si se calcula la raíz cuadrada de este número se pueden obtener las sucesivas cifras decimales, sin llegar nunca a un resto 0. Se obtiene así, un número de infinitas cifras decimales no periódicas, algunas de las cuales se escriben a continuación:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097...$$



El número $\sqrt{2}$ no es un número racional porque no es posible hallar la fracción generatriz del mismo. Se denomina irracional al número cuya expresión decimal, de infinitas cifras, no termina ni es periódica.

Definición: Se llama números irracionales al conjunto de números que no pueden expresarse mediante el cociente de dos números enteros. Se representa por: $\mathbb{Q}'$, $\mathbb{Q}'$ o $\mathbb{I}$.

El conjunto de los números irracionales está formado, entre otros, por las raíces cuadradas o cúbicas de los números que no son cuadrados o cubos perfectos, respectivamente. En general, todas las raíces no exactas de cualquier orden son irracionales.

Existen, además, otros números irracionales que son de uso frecuente en matemática, por ejemplo:

$$\pi \text{ (pi: } 3,1415\dots), \quad \phi \text{ (omega: } 1,61803\dots), \quad e = 2,7182\dots, \quad \text{entre otros.}$$

Conviene destacar que hay más números irracionales que racionales. No sólo son infinitos, sino que su nivel de infinitud es superior a la infinitud de los números racionales. Tampoco tienen un sucesor. Para ilustrar lo dicho anteriormente, basta ver que el número racional 2 da lugar a los siguientes números irracionales:

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \sqrt[6]{2}, \text{ etc.}$$

5.2.1. EXPRESIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO IRRACIONAL

Las expresiones decimales se pueden obtener de dos formas distintas: como resultado de una división inexacta o al resolver una raíz inexacta. Estas dos expresiones, diferentes, se pueden distinguir fácilmente observando la parte decimal del número:

1. En la división inexacta ($\mathbb{Q}$), lo que encontramos, luego de la coma, puede ser una cantidad infinita y periódica (pura o mixta) que se repite o una expresión decimal que termina. Por ejemplo: $8,3333333333\dots$ ó $4/5 = 0,8$.
2. En la raíz inexacta ($\mathbb{Q}'$), luego de la coma, se tiene una cantidad infinita de cifras que no terminan o ni son periódicas. Por ejemplo: $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097\dots$
3. Cuando se opera con números irracionales se considera un valor aproximado del mismo, en general con una o dos cifras decimales. Por ejemplo: para $\sqrt{2}$ se considera 1,4 ó 1,41. Se escribe $\sqrt{2} \approx 1,4$ ó $\sqrt{2} \approx 1,41$ (se lee aproximadamente igual).
4. Las raíces indicadas que no pueden expresarse exactamente por ningún número entero ni fraccionario, reciben el nombre de radicales ($\mathbb{Q}'$). Por ejemplo: $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$, entre otros. El índice de la raíz indica el grado de un radical. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ es un radical de segundo grado; $\sqrt[3]{5}$ es un radical de tercer grado.

5.2.2. OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

En lo referente a las operaciones: suma, resta, multiplicación y división; no siempre cumplen con el axioma clausurativo, en el conjunto de los números irracionales. Esta afirmación quiere decir que dados dos números irracionales no siempre: la suma, resta, multiplicación o división; de dichos números, resulta un número irracional. Por ejemplo:

La suma de dos irracionales es irracional: $\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

La suma de dos irracionales es un racional: $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$.

El producto de dos irracionales es irracional: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

El producto de dos irracionales es racional: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

La división de dos irracionales es racional: $\sqrt{18} \div \sqrt{2} = \sqrt{9} = 3$.

Los ejemplos anteriores nos advierten que los números irracionales no se comportan, con respecto a las operaciones, de manera similar a los números racionales. Sin embargo y a pesar de su extraño comportamiento tenemos dos afirmaciones que siempre son válidas:

1. Si a es racional y b es irracional entonces la suma $a + b$ siempre es irracional. Por ejemplo:

$$2 + \sqrt{3} \quad \text{es irracional}$$

2. Si $a \neq 0$ es racional y b es irracional entonces el producto $a \cdot b$ siempre es irracional. Por ejemplo:

$$2 \cdot \sqrt{5} \quad \text{es irracional}$$

Los números irracionales se clasifican en: Algebraicos y trascendentes.

1. **Algebraicos.** Son aquellos que provienen de la solución de alguna ecuación algebraica y se representan por un número finito de radicales libres o anidados. Por ejemplo:

$$\sqrt{2}, \quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{4}$$

Observación: Existen números racionales que parecen irracionales, a simple vista. Pero, al observarlos con más detenimiento notamos que las raíces son exactas y al calcularlos obtenemos un número racional. Por ejemplo:

$$\frac{1+\sqrt{4}}{2} = 3/2 \qquad \frac{\sqrt{9}}{3} = 1$$

2. **Trascendentes.** Son aquellos que no pueden representarse mediante un número finito de raíces libres o anidados; provienen de las llamadas funciones trascendentes: trigonométricas, logarítmicas, exponenciales e hiperbólicas. El número π (pi: 3,1415...) y $e = 2,7182...$, son irracionales trascendentes, puesto que no pueden expresarse mediante radicales.

Los irracionales trascendentes también surgen al escribir números decimales no periódicos al azar o con un patrón que no lleva un periodo definido. Por ejemplo:

0,1234567891011121314151617181920212223... ó

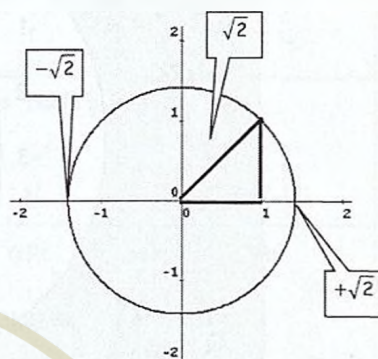
1,01001000100001000001000000100000001...

5.2.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE NÚMEROS IRRACIONALES

Los números irracionales pueden representarse en la recta numérica usando aproximaciones de su expresión decimal. En el caso de algunos números irracionales como $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$,... pueden representarse más "exactamente" mediante el uso de una regla y un compás.

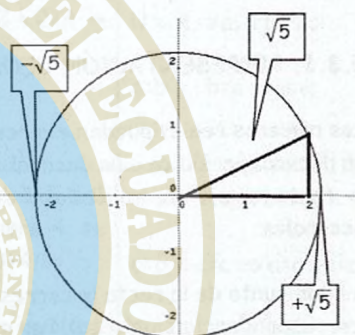
EJEMPLO 1. Representar: $\pm\sqrt{2}$

- En la recta real trazamos un triángulo rectángulo equilátero de catetos igual a 1, con uno de sus vértices en el origen de la recta (ver figura).
- Luego, con un compás trazamos una circunferencia de radio la hipotenusa de dicho triángulo, que es $\sqrt{2}$.
- La intersección de esta circunferencia con la recta real es el número $\sqrt{2}$ a la derecha, y $-\sqrt{2}$ a la izquierda (ver figura).



EJEMPLO 2. Representar: $\pm\sqrt{5}$

- En la recta real trazamos un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1, con uno de sus vértices en el origen de la recta (ver figura).
- Luego, con un compás trazamos una circunferencia de radio la hipotenusa de dicho triángulo, que es $\sqrt{5}$.
- La intersección de esta circunferencia con la recta real es el número $\sqrt{5}$ a la derecha, y $-\sqrt{5}$ a la izquierda (ver figura).



En general, los números irracionales de la forma $\sqrt{a}$, siendo a un número natural, pueden representarse sobre la recta real descomponiendo previamente el número a en una suma de cuadrados. Por ejemplo:

1. Para $\sqrt{2}$ se tiene: $2 = 1^2 + 1^2$

2. Para $\sqrt{5}$ se tiene: $5 = 2^2 + 1^2$

3. Para $\sqrt{3}$ se tiene: $3 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$

4. Para $\sqrt{7}$ se tiene: $7 = 2^2 + (\sqrt{3})^2$

EJERCICIOS

1. Grafique los siguientes números irracionales:

1. $\sqrt{3}$

2. $\sqrt{6}$

3. $\sqrt{8}$

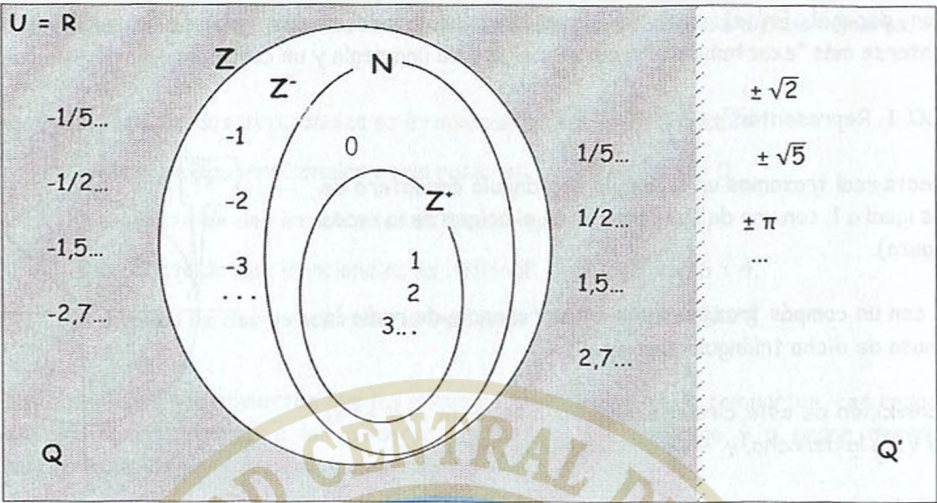
4. $5 + \sqrt{2}$

5. $-3 + \sqrt{3}$

5.3. NÚMEROS REALES

El conjunto formado por la unión de los números racionales y los números irracionales forman el conjunto de los números reales. Se representa con la letra $\mathbb{R}$ o $\mathbf{R}$, mayúscula (**negritas**).

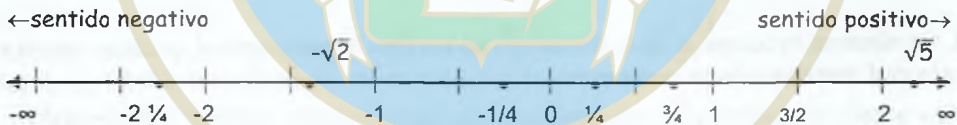
A continuación, se representan (diagrama de Venn - Euler) los siguientes conjuntos numéricos: Reales (R), Racionales (Q), Irracionales (Q'), Enteros (Z), Naturales (N), enteros positivos (Z⁺), Enteros negativos (Z⁻).



5.3.1. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Los números reales pueden expresarse en forma decimal mediante un número entero, un decimal exacto, un decimal periódico o un decimal con infinitas cifras no periódicas. Los mismos que se representan sobre la recta numérica, valiéndose de construcciones geométricas exactas, o mediante aproximaciones decimales.

A cada punto de la recta le corresponde un número real y que cada número real tiene su lugar en la recta (correspondencia biunívoca). Por eso a la recta graduada de tal manera se la denomina **recta real**.



5.4 AXIOMAS DE LOS NÚMEROS REALES

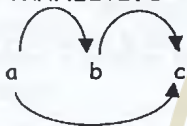
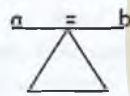
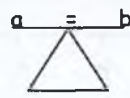
Se llama **axioma** a la proposición que se acepta como verdadera. Algunos de los axiomas del conjunto de los números reales son: de la igualdad (=), de la adición (+), de la multiplicación (x), distributivo - recolectivo, y de orden (< , >).

5.5 IGUALDAD DE NÚMEROS REALES

Se denomina igualdad a dos expresiones separadas por el signo =, que tienen el mismo valor numérico. Por ejemplo: $1/2 = 0,5$.

5.5.1. AXIOMAS DE LA IGUALDAD

En los siguientes axiomas, $U = R$, se lee: "El universo es el conjunto de los números reales". De igual forma; $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee: "Para todo a, para todo b, para todo c", respectivamente.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. DICOTOMÍA	Entre dos números reales cualesquiera se cumple una y solo una de las siguientes relaciones: son iguales o son diferentes.	4 y 3 son diferentes $4 \neq 3$ $1/2$ y $0,5$ son iguales $1/2 = 0,5$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b:$ $a = b \vee a \neq b$
2. REFLEXIVO 	Todo número real es igual a sí mismo.	Sea el número real 3, luego $3 = 3$. Si es -2 , $-2 = -2$	$U = \mathbb{R}, \forall a:$ $a = a$
3. SIMÉTRICO 	Si un primer número real cualquiera es igual a un segundo, equivale a decir que el segundo es igual al primero.	$1/4 \in \mathbb{R}$ y $0,25 \in \mathbb{R}:$ $1/4 = 0,25 \leftrightarrow 0,25 = 1/4$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b:$ $a = b \leftrightarrow b = a$
4. TRANSITIVO 	Si un primer número real es igual a un segundo y este igual a un tercero, implica que el primero es igual al tercero.	$0,5 = 1/2 \wedge 1/2 = 2/4 \rightarrow$ $0,5 = 2/4$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$
5. ADITIVO  $a + c = b + c$	Si a cada miembro de una igualdad se suma un mismo número real cualquiera, la relación de igualdad se conserva (subsiste, permanece).	Si a la igualdad $3+5 = 8$ se suma el número 4, se tiene $3+5+4 = 8+4$. Por lo tanto, la igualdad se conserva ($12 = 12$).	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge c = c \Rightarrow a + c = b + c$
6. MULTIPLICATIVO  $a \times c = b \times c$	Si a cada miembro de una igualdad se multiplica por un mismo número real cualquiera, la relación de igualdad subsiste (se conserva).	Si la igualdad $4+2 = 6$ se multiplica por 3, se tiene $(4+2) \times 3 = 6 \times 3$. Por tanto, la igualdad se conserva ($18 = 18$).	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a = b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

5.6. ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

5.6.1. VALOR ABSOLUTO

Se llama valor absoluto de un número real al mismo número con signo positivo. Por ejemplo: el valor absoluto de $-1/2$ es $1/2$, y el valor absoluto de $+\pi$ es π (si el número es positivo se omite el signo "+"). El valor absoluto de un número se denota mediante dos barras verticales, por ejemplo: $|\pi| = \pi$ y $|\pi| = \pi$.

En general, si x es un número real, el valor absoluto de x se representa por $|x|$ y se define:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$|3/7| = 3/7 \text{ y } |-3/7| = 3/7 \rightarrow |3/7| = |-3/7|$$

$$|\sqrt{2}| = \sqrt{2} \text{ y } |-\sqrt{2}| = \sqrt{2} \rightarrow |\sqrt{2}| = |-\sqrt{2}|$$

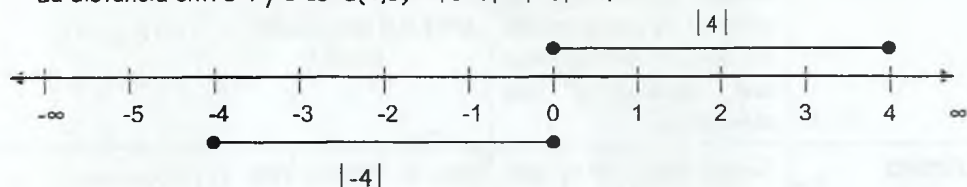
$$|\pi| = \pi \text{ y } |-\pi| = \pi \rightarrow |\pi| = |-\pi|$$

Completaremos los ejemplos anteriores agregando que el valor absoluto de 0 es 0, es decir, $|0| = 0$.

Geométricamente, el valor absoluto de un número representa una distancia. Si a y b son dos puntos en la recta numérica, la distancia entre a y b es: $d(a,b) = |b-a|$. Por ejemplo:

La distancia entre 0 y 4 es: $d(0,4) = |4-0| = |4| = 4$.

La distancia entre 4 y 0 es: $d(4,0) = |0-4| = |-4| = 4$.



5.6.1.1. TEOREMAS BÁSICOS DE VALOR ABSOLUTO

Los siguientes teoremas se cumplen para el valor absoluto:

$U = \mathbb{R}, \forall x:$

1. $|x| \geq 0$. El valor absoluto de cualquier número real es mayor o igual a cero.
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. El valor absoluto de cero es cero.
3. $|x|^2 = x^2$. El cuadrado del valor absoluto de un número es igual al cuadrado del número.
4. $|x| = \sqrt{x^2}$. El valor absoluto es igual a la raíz cuadrada del número al cuadrado.
5. $-|x| \leq x \leq |x|$. El valor absoluto negativo de un número es menor o igual que el número, y éste menor o igual que el valor absoluto positivo del número.

$U = \mathbb{R}, \forall x, a, b;$ siendo $b > 0$.

6. $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$
7. $|x-a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x-a \leq b$
8. $|x| \geq b \Leftrightarrow x \leq -b \vee x \geq b$
9. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
10. $|a/b| = |a|/|b|$; siendo $b \neq 0$.

Observación: La demostración de los teoremas se realiza en capítulos posteriores.

EJERCICIOS

1. Hallar la distancia entre los siguientes pares de números. Represente la solución en la recta numérica.

1. -2 y 6

2. 2 y -4

3. -3 y -2

4. 7 y 0

2. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

1. $x + |-3| = 6$

2. $x + |1/2|^2 = \sqrt{2}$

3. $y + |4(-8)| = -2,4$

4. $y + |5/-2| = -3$

3. Escriba las siguientes expresiones en notación conjuntista (teoremas 6,7 y 8)..

1. $|x| \leq 4$

2. $|x-3| \leq 9$

3. $|x| \geq 5$

4. $|x| \geq 2$

4. Escriba un ejemplo para cada uno de los teoremas de valor absoluto.

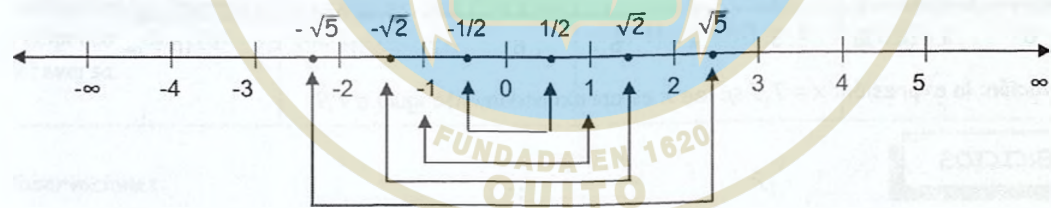
5.6.2. AXIOMAS DE LA ADICIÓN DE NÚMEROS REALES

Los axiomas de la adición son: clausurativo, conmutativo, asociativo, modulativo e invertivo.

En los siguientes axiomas, $U = \mathbb{R}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números reales". $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee: "Para todo a, b, c ". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno", y se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	La suma de dos números reales cualesquiera es un número real único.	$2 \text{ y } 4 \in \mathbb{R} \wedge 2 + 4 = 6 \rightarrow 6 \in \mathbb{R}$	$U = \mathbb{R} . \forall a, \forall b, \exists c:$ $a + b = c \Rightarrow c \in \mathbb{R}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los sumandos no altera la suma total.	$\sqrt{5} + 4 = 4 + \sqrt{5}$	$U = \mathbb{R} . \forall a, \forall b$ $a + b = b + a$
3. ASOCIATIVO	Los sumandos reales se pueden agrupar o asociar de cualquier modo, sin que altere la suma total.	$(\sqrt{2} + 3/4) + 2/5 = \sqrt{2} + (3/4 + 2/5)$	$U = \mathbb{R} . \forall a, \forall b, \forall c:$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. MODULATIVO	Existe uno y solo un número real, tal que sumado con cualquier número real, el resultado es siempre ese mismo número real. El cero (0), se llama elemento idéntico, neutro o módulo de la adición.	$9 + 0 = 0 + 9 = 9$ $(-3) + 0 = 0 + (-3) = -3$	$U = \mathbb{R} . \forall a, \exists 0:$ $0 + a = a + 0 = a$
5. INVERTIVO	Para cada número real a existe un número real $(-a)$ tal que: $a + (-a) = 0$. Siendo a diferente de cero.	$+5 + (-5) = 0$ $3/4 + (-3/4) = 0$ $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$	$U = \mathbb{R} . \forall a, \exists (-a):$ $a + (-a) = 0; a \neq 0$

El siguiente esquema presenta algunos números reales y sus respectivos opuestos:



5.6.3. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

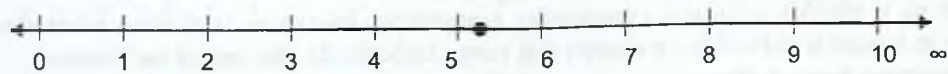
Ejemplo 1: Resolver la ecuación: $x + \sqrt{3} = 7$

Proposiciones

- $x + \sqrt{3} = 7$
- $x + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 7 + (-\sqrt{3})$
- $x + [\sqrt{3} + (-\sqrt{3})] = 7 + (-\sqrt{3})$
- $x + 0 = 7 + (-\sqrt{3})$
- $x = 7 + (-\sqrt{3})$
- $x = 5,2679... \approx 5,27$

Razones

- Dato
- Axioma aditivo (=)
- Axioma asociativo (+)
- Axioma invertivo (+)
- Axioma modulativo (+)
- Axioma clausurativo (+)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| 1. $x + \sqrt{3} = 6$ | 2. $x + 1/2 = \sqrt{2}$ | 3. $y + 0,3 = -2,4$ | 4. $y + \sqrt{5} = -3$ |
| 5. $-2,5 = z + \sqrt{11}$ | 6. $1/2 = z + \sqrt{6}$ | 7. $-3/4 = y + \sqrt[3]{7}$ | 8. $-1,8 = y + \sqrt[3]{7}$ |
| 9. $\sqrt[3]{8} + y = 2,75$ | 10. $\sqrt[3]{9} + x = -0,9$ | 11. $0,2 + z = -\sqrt[3]{4}$ | 12. $1/2 - z = \sqrt{2/7}$ |
| 13. $4/7 = \sqrt[3]{6} + y$ | 14. $1/2 = 1/3 + x$ | 15. $0,5 = 2,7 + z$ | 16. $-\sqrt{2} = \sqrt{3} + z$ |

5.6.4. DEFINICIÓN DE RESTA

Restar un número real de otro equivale a sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. Es decir:

$$U = R. \forall a, \forall b; a, b \in R \Rightarrow a - b = a + (-b)$$

Ejemplo: $7 - 4 = 7 + (-4)$

La definición anterior nos permite resolver ecuaciones de la forma: $x - a = b$.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación: $x - \sqrt[3]{7} = 6$

Proposiciones	Razones
1. $x - \sqrt[3]{7} = 6$	Dato
2. $x + (-\sqrt[3]{7}) = 6$	definición de resta
3. $x + (-\sqrt[3]{7}) + \sqrt[3]{7} = 6 + \sqrt[3]{7}$	Axioma aditivo (=)
4. $x + [(-\sqrt[3]{7}) + \sqrt[3]{7}] = 6 + \sqrt[3]{7}$	Axioma asociativo (+)
5. $x + 0 = 6 + \sqrt[3]{7}$	Axioma invertivo (+)
6. $x = 6 + \sqrt[3]{7}$	Axioma modulativo (+)
7. $x = 7,9129...$	Axioma clausurativo (+)
8. $x \approx 7,9$	Aproximación



Observación: la expresión: $x \approx 7,9$ se lee x es aproximadamente igual a 7,9.

EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

- | | | | |
|---------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|--|
| 1. $x - 1/2 = 3/4$ | 2. $3 = x - \sqrt[3]{2}$ | 3. $x - 0,7 = -1,6$ | 4. $x - 2/3 = -3/4$ |
| 5. $-3 = x - \sqrt{3}$ | 6. $x - 3/4 = -1/3$ | 7. $x - 0,5 = \sqrt{1,8}$ | 8. $-3 + x = \sqrt{1,91}$ |
| 9. $x - \sqrt[3]{4} = \sqrt{8}$ | 10. $x - 0,3 = \sqrt[3]{-1,2}$ | 11. $-2 + y = \sqrt[3]{-3/2}$ | 12. $y - \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{-7}$ |

5.7. MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS REALES

La operación aritmética multiplicación se indica con el signo por ($\times$). Algunas veces se utiliza un punto para indicar la multiplicación de dos o más números, y otras se utilizan paréntesis.

5.7.1. AXIOMAS DE LA MULTIPLICACIÓN

Los Axiomas de la multiplicación son: clausurativo, conmutativo, asociativo, modulativo e invertivo. A continuación se indican la definición, un ejemplo y la forma simbólica de cada uno de los Axiomas:

En los siguientes axiomas, $U = \mathbb{R}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números reales". $\forall, \forall a, \forall b, \forall c$, se lee "Para todo a, para todo b, para todo c". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno", y se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1.CLAUSURATIVO	El producto de dos números reales cualesquiera es un número real único.	$2 \text{ y } 4 \in \mathbb{R} \wedge 2 \times 4 = 8 \rightarrow 8 \in \mathbb{R}$	$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b, \exists c:$ $a \times b = c \Rightarrow c \in \mathbb{R}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los factores no altera el producto.	$5 \times 4 = 4 \times 5$	$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b:$ $a \times b = b \times a$ $a.b = b.a$
3. ASOCIATIVO	Los factores reales se pueden agrupar o asociar de cualquier modo, sin que altere el producto.	$[(-3) \times (-2)] \times 6 = (-3) \times [(-2) \times 6]$	$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b, \forall c:$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $(ab)c = a(bc)$
4. MODULATIVO	Existe uno y solo un número real, tal que multiplicado por cualquier número real el resultado es siempre ese mismo número real. El uno (1), se llama elemento idéntico, neutro o módulo de la multiplicación.	$9 \times 1 = 1 \times 9 = 9$ $(-3) \times 1 = 1 \times (-3) = -3$	$U = \mathbb{R}. \forall a, \exists 1:$ $1 \times a = a \times 1 = a$ $1a = a1 = a$
5. INVERTIVO	Para cada número real a, diferente de cero, existe un número real (1/a) tal que: $a \cdot (1/a) = 1$.	$5 \times 1/5 = 1$ $(-3/4) \times (-4/3) = 1$	$U = \mathbb{R}. \forall a, \exists (1/a):$ $a \cdot (1/a) = 1; a \neq 0$ $a(1/a) = 1$

Observaciones:

- El recíproco o inverso de un número, es el número 1 dividido por dicho número. Si consideramos que todo número dividido para la unidad es igual al mismo número, entonces el recíproco se obtiene intercambiando el numerador con el denominador. Ejemplos:

El recíproco de 2 es $\frac{1}{2}$
El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$
El recíproco de 0,5 es $\frac{1}{0,5}$

El recíproco de -4 es $-\frac{1}{4}$
El recíproco de $-\frac{3}{5}$ es $-\frac{5}{3}$
El recíproco de -0,2 es $-\frac{1}{0,2}$

- El producto de un número por su inverso (recíproco) es siempre igual a 1.

$3 \cdot \frac{1}{3} = 1$
 $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$
 $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$

5.7.2. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE ECUACIONES BÁSICAS)

Resolver una ecuación es determinar los valores de las incógnitas que hacen cierta la igualdad.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $2x = -\sqrt[3]{8}$

Proposiciones

1. $2x = -\sqrt[3]{8}$
2. $x \cdot 2 = -\sqrt[3]{8}$
3. $x \cdot 2 \cdot 1/2 = -\sqrt[3]{8} \cdot 1/2$
4. $x \cdot [2 \cdot 1/2] = -\sqrt[3]{8} \cdot 1/2$
5. $x \cdot 1 = -\sqrt[3]{8} \cdot 1/2$
6. $x = -2 \cdot 1/2$
7. $x = -1$

Razones

- Dato
- Axioma conmutativo (x)
- Axioma multiplicativo (=)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulatorio (x). Def $\sqrt[n]{a}$.
- Axioma clausurativo (x)



Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $-2x = 3$

Proposiciones

1. $-2x = 3$
2. $x \cdot (-2) = 3$
3. $x \cdot (-2) \cdot (-1/2) = 3 \cdot (-1/2)$
4. $x \cdot [(-2) \cdot (-1/2)] = 3 \cdot (-1/2)$
5. $x \cdot 1 = 3 \cdot (-1/2)$
6. $x = 3 \cdot (-1/2)$
7. $x = -3/2$

Razones

- Dato
- Axioma conmutativo (x)
- Axioma multiplicativo (=)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulatorio (x)
- Axioma clausurativo (x)



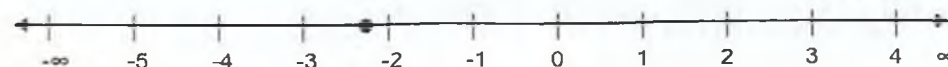
Ejemplo 3. Resolver la ecuación: $\sqrt{2} = -\frac{3}{5}x$

Proposiciones

1. $\sqrt{2} = -\frac{3}{5}x$
2. $-\frac{3}{5}x = \sqrt{2}$
3. $x \cdot (-3/5) = \sqrt{2}$
4. $x \cdot (-3/5) \cdot (-5/3) = \sqrt{2} \cdot (-5/3)$
5. $x \cdot [(-3/5) \cdot (-5/3)] = \sqrt{2} \cdot (-5/3)$
6. $x \cdot 1 = \sqrt{2} \cdot (-5/3)$
7. $x = \sqrt{2} \cdot (-5/3)$
8. $x = -2,3570... \approx -2,36$

Razones

- Dato
- Axioma simétrico (=)
- Axioma conmutativo (x)
- Axioma multiplicativo (=)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulatorio (x)
- Axioma clausurativo (x). Def $\sqrt[n]{a}$.



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

1. $3x = \sqrt[3]{7}$

2. $0,5x = \sqrt{3}$

3. $-1/2x = 3$

4. $-0,25x = -0,5$

5. $(1/\sqrt{2})x = -4$

6. $\sqrt[3]{2}x = 1/5$

7. $-\sqrt{10}x = -5$

8. $(-1/\sqrt{5})x = -7$

9. $-\sqrt{7}x = 3$

10. $-0,3x = -\sqrt[3]{27}$

11. $(-1/\sqrt[3]{5})x = 2$

12. $-0,75x = \sqrt{0,25}$

5.7.3. DEFINICIÓN DE DIVISIÓN

Dividir un número real por otro equivale a multiplicar el dividendo por el inverso (recíproco) del divisor. Simbólicamente se denota de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a/b = a \cdot 1/b; b \neq 0$$

Ejemplo: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$

Observación: Todo número $\mathbb{R}$ dividido para la unidad es igual al mismo número ($\forall a \in \mathbb{R}: a \div 1 = a$): $\sqrt{7} \div 1 = \sqrt{7}$.
 Todo número $\mathbb{R}$, diferente de 0, dividido para sí mismo es igual a 1 ($\forall a \in \mathbb{R}: a \div a = 1; a \neq 0$): $\pi \div \pi = 1$.
 Todo número $\mathbb{R}$, diferente de 0, dividido para 0 no está definido ($\forall a \in \mathbb{R}: a \div 0; a \neq 0$ no está definido): $4/7 \div 0$, no está definido. Cero dividido para cero ($0 \div 0$) es una indeterminación (Ind).

Si los dos números reales (llamados dividendo y divisor, respectivamente) tienen el mismo signo el resultado (llamado cociente) es positivo, caso contrario es negativo.

La definición: $a/b = a \cdot 1/b; b \neq 0$, nos permite resolver ecuaciones de la forma: $x/b = c$, con $b \neq 0$.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación: $x/2 = -\sqrt{2}$

Proposiciones

1. $x/2 = -\sqrt{2}$
2. $x \cdot 1/2 = -\sqrt{2}$
3. $x \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = (-\sqrt{2}) \cdot 2$
4. $x [1/2 \cdot 2] = (-\sqrt{2}) \cdot 2$
5. $x \cdot 1 = (-\sqrt{2}) \cdot 2$
6. $x = (-\sqrt{2}) \cdot 2$
7. $x = -2,8284... \approx -2,83$

Razones

- Dato
 definición de división
 Axioma multiplicativo ($=$)
 Axioma asociativo (x)
 Axioma invertivo (x)
 Axioma modulativo (x)
 Axioma clausurativo (x)



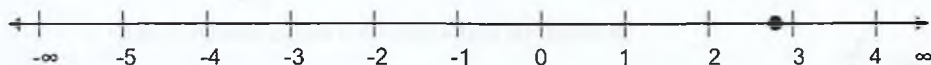
Ejemplo 2. Resolver la ecuación: $x/-2 = -\sqrt{2}$

Proposiciones

1. $x/-2 = -\sqrt{2}$
2. $x \cdot (-1/2) = -\sqrt{2}$
3. $x \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-2) = (-\sqrt{2}) \cdot (-2)$
4. $x [(-1/2) \cdot (-2)] = (-\sqrt{2}) \cdot (-2)$
5. $x \cdot 1 = (-\sqrt{2}) \cdot (-2)$
6. $x = (-\sqrt{2}) \cdot (-2)$
7. $x = 2,8284... \approx 2,8$

Razones

- Dato
 definición de división
 Axioma multiplicativo ($=$)
 Axioma asociativo (x)
 Axioma invertivo (x)
 Axioma modulativo (x)
 Axioma clausurativo (x)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones. Represente la solución en la recta numérica.

- | | | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1. $x/3 = 0,5$ | 2. $x/4 = -0,5$ | 3. $x/2 = 2$ | 4. $x/2 = -0,25$ |
| 5. $x/-3 = 0,5$ | 6. $x/-4 = -0,5$ | 7. $x/-2 = 2$ | 8. $x/-2 = -0,25$ |
| 9. $x/-6 = 1$ | 10. $x/-6 = -1$ | 11. $x/-0,5 = 3$ | 12. $x/-0,5 = 4$ |
| 13. $-y/4 = 3$ | 14. $-y/0,25 = 6$ | 15. $-z/5 = -3$ | 16. $-x/7 = -3$ |
| 17. $3 = x/2$ | 18. $-5 = x/3$ | 19. $-3/2 = -z/5$ | 20. $1/2 = y/5$ |

5.8. AXIOMA DISTRIBUTIVO-RECOLECTIVO

El producto de un número real cualquiera por la suma de dos números reales cualesquiera, es igual a la suma de los productos de ese número real por cada uno de los sumandos.

El Axioma distributivo, a la izquierda, se escribe en forma simbólica de la siguiente manera:

$$U=R. \forall a, \forall b, \forall c; \quad a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt{2} (1/5 + 0,3) = \sqrt{2} . 1/5 + \sqrt{2} . 0,3$$

Si en la definición (ejemplo) anterior se aplica el axioma simétrico de la igualdad, se tiene:

$$U=R. \forall a, \forall b, \forall c; \quad a.b+a.c = a.(b+c)$$

$$\text{Ejemplo: } \sqrt{2} . 1/5 + \sqrt{2} . 0,3 = \sqrt{2} (1/5 + 0,3)$$

Si consideramos lo anotado anteriormente, el axioma distributivo - recolectivo a la izquierda, se escribe en forma simbólica de la siguiente manera:

$$U=R. \forall a, \forall b, \forall c; \quad a.(b+c) = a.b + a.c \quad \wedge \quad a.b+a.c = a.(b+c)$$

5.8.1. APLICACIONES

Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo / recolectivo, según corresponda.

$$\text{Ejemplo 1: } \sqrt{5} (1/4 + 1/3) = \sqrt{5} . 7/12$$

Proposiciones

1. $\sqrt{5} (1/4 + 1/3) = \sqrt{5} . 7/12$
2. $\sqrt{5} . 1/4 + \sqrt{5} . 1/3 = \sqrt{5} . 7/12$
3. $\sqrt{5}/4 + \sqrt{5}/3 = \sqrt{5} . 7/12$
4. $\sqrt{5} . 7/12 = \sqrt{5} . 7/12$

Razones

- Dato
Axioma distributivo
Def. (x)
Def. (+)

$$\text{Ejemplo 2. } 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,4 = 0,35$$

Proposiciones

1. $0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,4 = 0,35$
2. $0,5.(0,3 + 0,4) = 0,35$
3. $0,5 \times 0,7 = 0,35$
4. $0,35 = 0,35$

Razones

- Dato
Axioma recolectivo
Def. (+)
Def. (x).

EJERCICIOS

1. Verifique las siguientes igualdades aplicando el axioma distributivo α recolectivo según corresponda:

$$1. 3.(4 + 2) = 18$$

$$4. 3.2 + 5.2 = 16$$

$$7. 5.(1 + 2) = 15$$

$$10. 3.1/2 + 5.1/2 = 4$$

$$2. 0,7.(0,4 + 0,5) = 0,63$$

$$5. 4.3 + 5.4 = 32$$

$$8. 0,1.(0,4 + 0,3) = 0,07$$

$$11. 3.0,4 + 5.0,4 = 3,2$$

$$3. 2/5.(3/4 + 2/5) = 23/50$$

$$6. 2.3 + 3.5 = 21$$

$$9. 1/3.(3/2 + 2/3) = 13/18$$

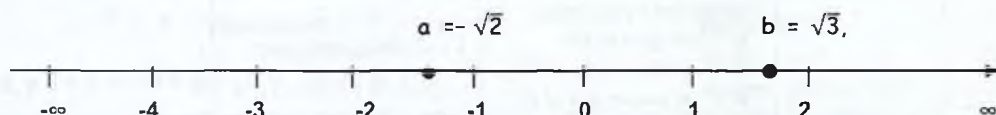
$$12. 1/3.4 + 5.1/3 = 3$$

5.9. ORDEN EN LOS NÚMEROS REALES

5.9.1. DESIGUALDAD

La desigualdad, es una relación matemática entre dos expresiones que no son iguales. Los símbolos utilizados para denotar una desigualdad son: $<$ (menor que) o $>$ (mayor que). Por ejemplo:

1. Un número real a es **menor** que un número real b , si en la recta numérica el punto a está a la izquierda del punto b , por ejemplo:



Como puede verse en el gráfico $a < b$ y en particular $-\sqrt{2} < \sqrt{3}$, por la razón indicada anteriormente.

2. Un número real b es **mayor** que un número real a , si en la recta numérica el punto b está a la derecha del punto a , por ejemplo:



Como puede verse en el gráfico $b > a$ y en particular $\sqrt{3} > -\sqrt{2}$, por la razón indicada anteriormente.

Definición 1: a es menor que b es equivalente a decir que: la diferencia $(a - b)$ es un número negativo. En forma simbólica se escribe:

$$a < b \Leftrightarrow (a - b) < 0$$

Ejemplo: $-\sqrt{2} < \sqrt{3}$ porque $(-\sqrt{2} - \sqrt{3})$ es negativo.

Definición 2: a es mayor que b es equivalente a decir que: la diferencia $(a - b)$ es un número positivo. En forma simbólica se tiene:

$$a > b \Leftrightarrow (a - b) > 0$$

Ejemplos: $\sqrt{3} > -\sqrt{2}$ porque $[\sqrt{3} - (-\sqrt{2})]$ es positivo

Observaciones:

1. $x > 0 \Leftrightarrow x$ es positivo

2. $x < 0 \Leftrightarrow x$ es negativo

Son, también, usuales las siguientes notaciones:

4. $a \geq b$, se lee "mayor o igual".

3. $a \leq b$, se lee "menor o igual".

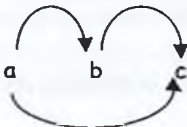
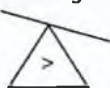
$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$$

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

3. Los números reales no están colocados de manera que se puedan ordenar de uno en uno. Es decir, no existe "el siguiente" de un número real, pues entre dos números reales cualesquiera hay otros, de modo que, si se representan sobre una recta, ésta queda densamente ocupada por ellos: si tomamos un tramo de recta, un segmento, por pequeño que sea, contiene infinitos números reales.

5.9.2. AXIOMAS DE LA DESIGUALDAD (ORDEN)

En los siguientes axiomas, $U = \mathbb{R}$, se lee: "El universo es el conjunto de los números reales". Y, $\forall a, \forall b, \forall c$, se lee: "Para todo a, para todo b, para todo c". Del mismo modo, $\exists c$, se lee "Existe un único elemento y solo uno". El cuantificador particular $\exists c$ se puede representar por: $\exists! c$, con el mismo significado.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. TRICOTOMÍA	Entre dos números reales cualesquiera se cumple una sola de las siguientes relaciones: - el 1º es igual al 2º - el 1º es mayor que el 2º, o - el 1º es menor que el 2º.	2 y 2, se cumple que: $2 = 2$ 5 y 2, se cumple que: $5 > 2$ 1 y 3, se cumple que: $1 < 3$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b:$ $a = b$ $a > b$ $a < b$ $a \neq b \Rightarrow a > b \vee a < b$
2. TRANSITIVO 	Si un 1º número real es mayor (menor) que un 2º y éste mayor (menor) que un 3º, entonces el 1º es mayor (menor) que el 3º.	$5 > 2 \wedge 2 > 0 \rightarrow 5 > 0$ $1 < 2 \wedge 2 < 3 \rightarrow 1 < 3$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$ $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
3. ANTISIMÉTRICO	Si un número real es mayor que un segundo, entonces el segundo es menor que el primero.	$\sqrt{3} > -\sqrt{2} \leftrightarrow -\sqrt{2} < \sqrt{3}$ $4 < 12 \leftrightarrow 12 > 4$ $9 > 3 \leftrightarrow 3 < 9$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b:$ $a > b \Leftrightarrow b < a$ $a < b \Leftrightarrow b > a$ $a > b \Leftrightarrow b \neq a$
5. ADITIVO  (El signo no cambia)	Si a cada miembro de una desigualdad se suma un mismo número real cualquiera, el sentido de la desigualdad no cambia.	$7 > 3 \wedge 2 = 2 \rightarrow 7 + 2 > 3 + 2$ $5 < 9 \wedge 3 = 3 \rightarrow 5 + 3 < 9 + 3$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b, \forall c:$ $a > b \wedge c = c \Rightarrow a + c > b + c$ $a < b \wedge c = c \Rightarrow a + c < b + c$
6. MULTIPLICATIVO  (El signo cambia si el factor es negativo) 	Si cada miembro de una desigualdad se multiplica por un mismo número real positivo, el sentido de la desigualdad no cambia, pero si se multiplica por un número real negativo el signo de la desigualdad cambia.	Número positivo $3 < 9 \wedge +2 = +2 \rightarrow 3 \cdot 2 < 9 \cdot 2$ Número negativo $3 < 9 \wedge -2 = -2 \rightarrow 3 \cdot (-2) > 9 \cdot (-2)$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b, \forall c:$ Número positivo ($c > 0$) $a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ Número negativo ($c < 0$) $a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
7. ARQUÍMEDES Si un número real positivo es mayor que otro número real positivo, existe por lo menos un número entero positivo, que multiplicado por el menor da un producto que es mayor que el número mayor dado.		$8 > 3, 4 \in \mathbb{Z}^+:$ $8 < 3 \cdot 4$	$U = \mathbb{R}^+, \forall a, \forall b:$ $a > b, \exists n \in \mathbb{Z}^+ : a < b \cdot n$
8. DENSIDAD Si un número real cualquiera es mayor que otro, existe por lo menos un número real que es menor que el mayor de ellos y mayor que el menor. En otras palabras, entre dos números cualesquiera existe un conjunto infinito de números reales.		$4 > 3$, existe 3,5 tal que $4 > 3,5 > 3$ 3,15 tal que $4 > 3,15 > 3$	$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b, \exists c:$ $a > b \Leftrightarrow a > c > b$

5.9.3. APLICACIONES (RESOLUCIÓN DE INECUACIONES BÁSICAS)

Si una desigualdad contiene incógnitas se llama inecuación. Una inecuación es verdadera para determinados valores de las letras que contiene, por ejemplo: $x > 3$, es verdadera para todos los números reales mayores que 3. Las letras que intervienen en las inecuaciones reciben el nombre de **variables**, y generalmente se indican mediante las últimas letras minúsculas del alfabeto (x , y , z). La expresión que se antepone al signo $>$ o $<$ se llama **primer miembro** y la que sigue **segundo miembro**.

Ejemplo 1. Resuelva la inecuación: $x + 2 > 5$

Proposiciones

1. $x + 2 > 5$
2. $x + 2 + (-2) > 5 + (-2)$
3. $x + [2 + (-2)] > 5 + (-2)$
4. $x + 0 > 5 + (-2)$
5. $x > 5 + (-2)$
6. $x > 3$

Razones

- Dato
 Axioma aditivo ($<, >$)
 Axioma asociativo (+)
 Axioma invertivo (+)
 Axioma modulativo (+)
 Axioma clausurativo (+)



La flecha con origen abierto (circunferencia) indica que todos los números mayores que 3 son soluciones de la inecuación, menos el 3.

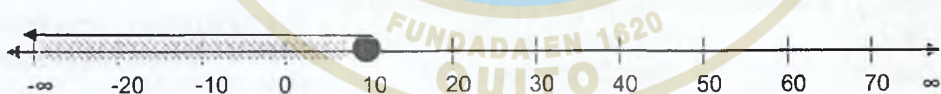
Ejemplo 2. Resuelva la inecuación: $x - 2 \leq 8$.

Proposiciones

1. $x - 2 \leq 8$
2. $x + (-2) \leq 8$
3. $x + (-2) + 2 \leq 8 + 2$
4. $x + [(-2) + 2] \leq 8 + 2$
5. $x + 0 \leq 8 + 2$
6. $x \leq 8 + 2$
7. $x \leq 10$

Razones

- Dato
 Definición de resta
 Axioma aditivo ($<, >$)
 Axioma asociativo (+)
 Axioma invertivo (+)
 Axioma modulativo (+)
 Axioma clausurativo (+)



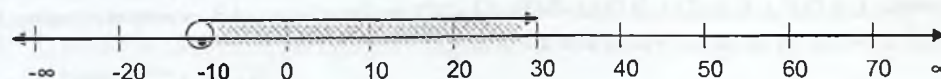
Ejemplo 3. Resuelva la inecuación: $x/2 > -5$

Proposiciones

1. $x/2 > -5$
2. $x \cdot 1/2 > -5$
3. $x \cdot 1/2 \cdot (2) > -5 \cdot (2)$
4. $x \cdot [1/2 \cdot 2] > -5 \cdot (2)$
5. $x \cdot 1 > -5 \cdot (2)$
6. $x > -5 \cdot (2)$
7. $x > -10$

Razones

- Dato
 Definición de división
 Axioma multiplicativo ($<, >$)
 Axioma asociativo (x)
 Axioma invertivo (x)
 Axioma modulativo (x)
 Axioma clausurativo (x)



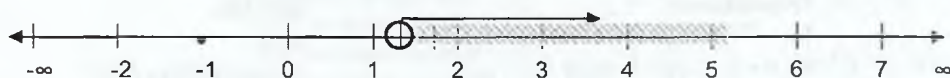
Ejemplo 4. Resuelva la inecuación: $-3x < -4$

Proposiciones

1. $-3x < -4$
2. $x \cdot (-3) < -4$
3. $x \cdot (-3) \cdot (-1/3) > -4 \cdot (-1/3)$
4. $x \cdot [(-3) \cdot (-1/3)] > -4 \cdot (-1/3)$
5. $x \cdot 1 > -4 \cdot (-1/3)$
6. $x > -4 \cdot (-1/3)$
7. $x > 4/3$

Razones

- Dato
- Axioma conmutativo (x)
- Axioma multiplicativo (<, >)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulativo (x)
- Axioma clausurativo (x)



Ejemplo 5. Resuelva la inecuación: $2 < -2x$

Proposiciones

1. $2 < -2x$
2. $-2x > 2$
3. $x \cdot (-2) > 2$
4. $x \cdot (-2) \cdot (-1/2) < 2 \cdot (-1/2)$
5. $x \cdot [(-2) \cdot (-1/2)] < 2 \cdot (-1/2)$
6. $x \cdot 1 < 2 \cdot (-1/2)$
7. $x < 2 \cdot (-1/2)$
8. $x < -1$

Razones

- Dato
- $a < b \Leftrightarrow b > a$
- Axioma conmutativo (x)
- Axioma multiplicativo (<, >)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulativo (x)
- Axioma clausurativo (x)



EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes inecuaciones. Represente las soluciones en la recta numérica.

- | | | |
|-----------------|---------------------|----------------------|
| 1. $x + 3 > 1$ | 2. $z + 8 > 5$ | 3. $x + 2 > -1$ |
| 4. $y + 6 > -2$ | 5. $z + 0,5 > 0,25$ | 6. $y + 7 > -2$ |
| 7. $x - 5 < 2$ | 8. $z - 4 < -8$ | 9. $x - 1/5 < 4$ |
| 10. $x - 3 < 7$ | 11. $y - 6 < -1/3$ | 12. $x - 1/4 < -1/2$ |
| 13. $x/3 > 2$ | 14. $z/5 > -3$ | 15. $x/5 < 3$ |
| 16. $y/4 > 1$ | 17. $z/3 > 1/2$ | 18. $x/4 < -5$ |
| 19. $-2x < 5$ | 20. $-6y > 7$ | 21. $-2x < -1/3$ |
| 22. $-3y < -2$ | 23. $-4y > -5$ | 24. $-3y < 7$ |
| 25. $3 < 5x$ | 26. $5 < -3y$ | 27. $-5 < 1/2x$ |
| 28. $-5 < 2y$ | 29. $-6 < -4z$ | 30. $4 < -3/2y$ |
| 31. $2 > 3x$ | 32. $-4 > 5z$ | 33. $-7 > 2x$ |
| 34. $7 > 4y$ | 35. $-2 > -1/3y$ | 36. $-1/3 > -5/4y$ |

5.10. POTENCIACIÓN (REALES CON EXPONENTES RACIONALES): ($\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$)

Se llama potenciación al producto formado mediante multiplicaciones sucesivas de un mismo número o letra. Por ejemplo: $(-2/3)^3 = (-2/3) \cdot (-2/3) \cdot (-2/3)$. El $-2/3$ se llama base, el 3 exponente. Luego, como $(-2/3)^3 = -8/27$, el $-8/27$ es la tercera potencia de $-2/3$.

5.10.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si la base a es un número real ($\mathbb{R}$), y el exponente n racional, $\mathbb{Q} = \{x/x = \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. POTENCIA CERO (Exponente 0)	La potencia cero (exponente 0) de un número real a , distinto de cero, es igual a 1: $a^0 = 1; a \neq 0$	$(-3)^0 = 1$ $(-3/4)^0 = 1$ $(\pi)^0 = 1$
2. POTENCIA UNO (Exponente 1)	La potencia uno (primera potencia) de un número real a , es igual al mismo número sin el exponente: $a^1 = a$	$-3^1 = -3$ $(-2/3)^1 = -2/3$ $(-\sqrt{3})^1 = -\sqrt{3}$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA (PEP) $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La PEP, de un número real a es igual al producto de n veces a ; siendo $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}; a \in \mathbb{R} \wedge n \in N^*$	$(-3/2)^2 =$ $(-3/2)(-3/2)$ $(-\sqrt{3})^2 =$ $(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})$
4. POTENCIA ENÉSIMA NEGATIVA (PEN)	La PEN, de un número real a , distinto de cero, es igual al inverso de la potencia con exponente positivo; siendo $n > 0$: $a^{-n} = 1/a^n; a \neq 0 \wedge n > 0 \in \mathbb{N}$	$2^{-3} = 1/2^3$ $(3/4)^{-2} =$ $1/(3/4)^2$ $(\sqrt{2})^{-3} = 1/(\sqrt{2})^3$
5. POTENCIA ENÉSIMA FRACCIONARIA (PEF)	La PEF, de un número real a positivo, es igual a la raíz enésima de a^m ; siendo m y n naturales mayores que 0 y primos entre sí: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}; a > 0$ $[a^{1/n} = \sqrt[n]{a}; a > 0 \wedge m = 1]$	$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 8$ $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} =$ $2,236\dots$

5.10.2. TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^n y b^n , son potencias definidas en los reales con exponentes racionales:

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA PAR	La PEP par de base positiva (+) o negativa (-) es positiva: $(a)^n = x; n \in N^* \text{ par}$ $(-a)^n = x; n \in N^* \text{ par}$	$(1/\sqrt{3})^2 = 1/3$ $(2/\sqrt{3})^2 = 4/3$ $(-2/\sqrt{3})^2 = 4/3$ $(-\sqrt{2}/4)^2 = 1/8$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA IMPAR	La PEP impar de base positiva (+) es positiva y de base negativa (-) es negativa: $(a)^n = x; n \in N^* \text{ impar}$ $(-a)^n = -x; n \in N^* \text{ impar}$	$(2/3)^3 = 8/27$ $(3/\pi)^3 = 27/\pi^3$ $(-\pi/3)^3 = -\pi^3/27$ $(-3/2)^3 = -27/8$
1. POTENCIA ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La potencia enésima del producto de números reales es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(\pi/5 \cdot 3/6)^2 =$ $(\pi/5)^2 \cdot (3/6)^2$
2. POTENCIA ENÉSIMA DEL COCIENTE	La potencia enésima del cociente (división) de números reales, es igual al cociente de las potencias enésimas; $b \neq 0$. $(a/b)^n = a^n/b^n; b \neq 0$	$(6/5 \div 3/2)^2 =$ $(6/5)^2 \div (3/2)^2$

Observaciones:

- El significado de un exponente (-) queda definido mediante la igualdad: $a^{-m/n} = 1/a^{m/n}$; $a \neq 0 \wedge m, n > 0$.
- Cuando la base es una expresión decimal, es conveniente expresarla en forma fraccionaria.
- La definición de potencia con exponente negativo es $a^{-m/n} = 1/a^{m/n}$. Luego, si consideramos que: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, se tiene: $a^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{a^m}$.

5.10.3. OPERACIONES DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^m y a^n , son potencias definidas en los números reales con exponentes racionales:

OPERACIÓN	TEOREMA	EJEMPLO
1. PRODUCTO DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se suman los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-\pi/2)^2 \cdot (-\pi/2)^3 = (-\pi/2)^{2+3} = (-\pi/2)^5$
2. COCIENTE DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se restan los exponentes: $a^m/a^n = a^{m-n}; a \neq 0$	$(-1/3)^4/(-1/3)^6 = (-1/3)^{4-6} = (-1/3)^{-2}$
3. POTENCIA DE POTENCIA	Se mantiene la base y se multiplican los exponentes: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$[(-2/5)^3]^2 = (-2/5)^{3 \cdot 2} = (-2/5)^6$

EJERCICIOS

1. Hallar los siguientes productos (cocientes):

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------------|--------------------------------|------------------------|
| 1. $(4^{3/2})(-4^{4/3})$ | 2. $(-32)^{2/5}(81)^{5/4}$ | 3. $(-27)^{-2/3}(1/16)^{-3/2}$ | 4. $0,01^{-5/2}$ |
| 5. $(4/25)^{-1/2}$ | 6. $0,008^{-5/3}$ | 7. $(-0,125)^{-1/3}$ | 8. $(0,4 \cdot 0,5)^3$ |
| 9. $(1/2 \div 1/5)^2$ | 10. $4^5/-4^6$ | 11. $0,2^5/-0,2^4$ | 12. $(1/3)^5/-(1/3)^3$ |
| 13. $(2/3)^2$ | 14. $(0,4/0,5)^3$ | 15. $(3/2)^2$ | 16. $2^4/2^3$ |
| 17. $3^{1/3} \cdot 3^{1/2}$ | 18. $(3^{1/2})^{1/3}$ | 19. $(2,3)^{1/2}$ | 20. $(2 \div 5)^{1/5}$ |

2. Demostrar: $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}; a > 0$

5.11. RADICACIÓN

5.11.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si a es un número real, y n es natural mayor que uno (conjunto representado por N^*):

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA EXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La raíz enésima exacta de un número real a , llamado radicando es otro número real " x ", tal que, elevado a la potencia enésima, es igual al mismo radicando. $\exists a: \sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a; n \in N^*$	$\sqrt[3]{8/27} = 2/3 \quad \dots$ $(2/3)^3 = 8/27$
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1 (índice n , exponente m)	La raíz enésima de 1 es igual a 1; siendo: m y n naturales mayores que 1: $\sqrt[n]{1^m} = 1 \quad \text{ó} \quad \sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[3]{1^2} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La raíz y potencia enésima de un mismo número real, se simplifican: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; a \geq 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$ $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; n \in N^* \text{ impar}$	$(\sqrt{2/5})^2 = 2/5$ $(\sqrt{-2/5})^2 = \mathbb{Z}$, en R $(\sqrt[3]{2/5})^3 = 2/5$ $(\sqrt[3]{-2/5})^3 = -2/5$
4. RAÍZ ENÉSIMA INEXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La raíz enésima no exacta de un número real a , mayor que 0, es igual $a^{1/n}$; n natural mayor que 1: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}; a > 0 \wedge n \in N^*$ $\sqrt[n]{-a} = -a^{1/n}; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$	$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} \approx 1,25992\dots$ $\sqrt[3]{-2} \approx -1,259\dots$
5. RAÍZ ENÉSIMA DE UNA POTENCIA (a^m)	La raíz enésima de una potencia (a^m), siendo: a mayor que 0, y m y n naturales mayores que 1, y primos entre sí, es igual a: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m; a > 0 \wedge n \in N^*$	$\sqrt[3]{2^2} = 2^{2/3} = (\sqrt[3]{2})^2$

Observaciones:

1. La radicación es la operación inversa de la potenciación: $\sqrt[n]{a} = x \equiv x^n = a; n \in \mathbb{N}^*$. Por ejemplo: $\sqrt{16} = 4 \rightarrow 4^2 = 16$.
2. De la definición 4 se tiene que un número irracional se puede escribir como un número decimal con infinitas cifras decimales no periódicas: $\sqrt{2} = 2^{1/2} = 1,4142\dots$
3. La potencia $2^{1/2}$ se halla mediante logaritmos: $2^{1/2} = x \rightarrow \log_2(x) = 1/2 \rightarrow \log(x) = 0,150515 \rightarrow x = 1,4142\dots$ (Antilogaritmo).
4. Las raíces indicadas que no pueden expresarse exactamente por ningún número entero ni fraccionario, reciben el nombre de radicales. Por ejemplo: $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$. Generalmente, los radicales no se expresan en forma decimal.

5.11.2. TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

Si: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$, son raíces definidas en los números reales con índice, n , natural mayor que uno ($\mathbb{N}^*$):

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA PAR (Exacta o inexacta) Tiene 3 posibilidades: $\mathbb{N}^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	1. Radicando positivo (+): Tiene dos raíces opuestas. $\sqrt[n]{a} = \pm x; a > 0 \wedge n \in \mathbb{N}^* \text{ par}$	Exacta: $\sqrt{4/25} = \pm 2/5 \rightarrow (\pm 2/5)^2 = 4/25$ Inexacta: $\sqrt{2/25} = \pm\sqrt{2}/5 \rightarrow (\pm\sqrt{2}/5)^2 = 2/25$
	2. Radicando igual a 0: Tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in \mathbb{N}^* \text{ par}$	$\sqrt{0} = 0 \rightarrow (0)^2 = 0$
	3. Radicando negativo (-): No tiene raíces en $\mathbb{R}$. $\sqrt[n]{-a} = \pm i; n \in \mathbb{N}^* \text{ par}$	Exacta: $\sqrt{-4/25} = \pm i, \text{ en } \mathbb{R}$ Inexacta: $\sqrt{-2/25} = \pm i, \text{ en } \mathbb{R}$
2. RAÍZ ENÉSIMA IMPAR (Exacta o inexacta) Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): Tiene una raíz positiva $\sqrt[n]{a} = +x; a > 0 \wedge n \in \mathbb{N}^* \text{ impar}$	Exacta: $\sqrt[3]{8/27} = 2/3 \leftrightarrow (2/3)^3 = 8/27$ Inexacta: $\sqrt[3]{5/27} = \sqrt[3]{5}/3 \rightarrow (\sqrt[3]{5}/3)^3 = 5/27$
	2. Radicando igual a 0: Tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in \mathbb{N}^* \text{ impar}$	$\sqrt[3]{0} = 0 \rightarrow (0)^3 = 0$
	3. Radicando negativo (-): Tiene una raíz negativa. $\sqrt[n]{-a} = -x; a > 0 \wedge n \in \mathbb{N}^* \text{ impar}$	Exacta: $\sqrt[3]{-8/125} = -2/5 \rightarrow (-2/5)^3 = -8/125$ Inexacta: $\sqrt[3]{-5/27} = -\sqrt[3]{5}/3 \rightarrow (-\sqrt[3]{5}/3)^3 = -5/27$
3. RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La raíz enésima de un producto es igual al producto de la raíz enésima de cada factor (definidas en $\mathbb{R}$): $\exists a, b: \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	Exacta $\sqrt{(4/9)(25/36)} = \sqrt{4/9} \cdot \sqrt{25/36} = 5/9$ Inexacta $\sqrt{(2/9)(5/6)} = \sqrt{2/9} \cdot \sqrt{25/36} = 5\sqrt{2}/18$ $\sqrt{-4/9 \cdot 5/36}, \pm i \text{ en } \mathbb{R}$
4. RAÍZ ENÉSIMA DEL COCIENTE.	La raíz enésima de la división es igual al cociente de las raíces enésimas (definidas en $\mathbb{R}$): $b \neq 0$. $\exists a, b: \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} : b \neq 0$	Exacta: $\sqrt{9/4 \cdot 16/25} = \sqrt{9/4} / \sqrt{16/25} = 5/4$ Inexacta: $\sqrt{(2/3)/(5/6)} = \sqrt{2/3} / \sqrt{5/6} = 2/\sqrt{5}$

5.11.3. IGUALDAD DE RADICALES

La igualdad de radicales se puede establecer a partir de la igualdad de potencias de exponente fraccionario. Dos potencias de exponente fraccionario son iguales si los radicales correspondientes lo son, o también, si las fracciones de estas potencias son equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^q} \equiv a^{m/n} = a^{q/p} \equiv \frac{m}{n} = \frac{q}{p}$$

Si se multiplica o se divide el índice de un radical y el exponente del radicando por un mismo número natural distinto de cero, se obtiene otro radical de igual valor.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Esta propiedad permite: simplificar radicales, obtener dos radicales con el mismo índice y comparar radicales.

5.11.4. SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES

Un radical está simplificado cuando todos los factores primos, de la cantidad subradical, están elevados a exponentes menores que el índice del radical. Por ejemplo: Simplificar $\sqrt{18}$:

Proposiciones

1. $\sqrt{18} = \sqrt{18}$
2. $\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2}$
3. $\sqrt{18} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2}$
4. $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Razones

- Axi. Reflexivo (=).
Factores primos.
 $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
 $\sqrt[n]{a^n} = a$

EJERCICIOS

1. Simplificar.

- | | | | | |
|---------------------|-------------------------------|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $\sqrt{50}$ | 2. $\sqrt{27}$ | 3. $\sqrt{32}$ | 4. $(1/2)\sqrt{8}$ | 5. $(2/3)\sqrt{18}$ |
| 6. $(3/4)\sqrt{48}$ | 7. $(-1/5)\sqrt{50}$ | 8. $(-1/6)\sqrt{72}$ | 9. $\sqrt[3]{81}$ | 10. $\sqrt[3]{56}$ |
| 11. $-\sqrt[3]{48}$ | 12. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}$ | 13. $(2/3)\sqrt[3]{54}$ | 14. $(3/4)\sqrt[3]{128}$ | 15. $(8/5)\sqrt[3]{600}$ |

2. Construir un mentefacto para la radicación en R.

5.11.5. OBTENCIÓN DE DOS RADICALES CON EL MISMO ÍNDICE

1. Se escriben los radicales como potencia de exponente fraccionario.
2. Se simplifican los exponentes fraccionarios, si es posible,
3. Se halla el mcm de los denominadores,
4. Se divide el mcm entre cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.
5. Se escriben los exponentes fraccionarios con el denominador común.

Por ejemplo: escribir los siguientes radicales, con igual índice: $\sqrt[3]{10^2}$ y $\sqrt[4]{10^3}$.

Proposiciones

1. $\sqrt[3]{10^2}$ y $\sqrt[4]{10^3}$
2. $10^{2/3}$ y $10^{3/4}$
3. El mcm (3,4) = 12
4. $10^{8/12}$ y $10^{9/12}$
5. $\sqrt[12]{10^8}$ y $\sqrt[12]{10^9}$

Razones

- Dato.
 $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$
Def. mcm.
Exponente fraccionario con igual denominador
 $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

Luego, de dos radicales con el mismo índice es mayor el que tiene mayor radicando: $\sqrt[12]{10^9} > \sqrt[12]{10^8}$.

EJERCICIOS

1. Escriba los siguientes radicales con el mismo índice. Indique cuál es mayor.

- | | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $\sqrt[5]{4}$ y $\sqrt[3]{4}$ | 2. $\sqrt[4]{7}$ y $\sqrt[5]{7^2}$ | 3. $\sqrt[4]{64}$ y $\sqrt[3]{4}$ | 4. $\sqrt{7}$ y $\sqrt[3]{7}$ | 5. $\sqrt[4]{12}$ y $\sqrt{12}$ |
| 6. $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{5}$ | 7. $\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{5}$ | 8. $\sqrt[5]{4^3}$ y $\sqrt[4]{4^5}$ | 9. $\sqrt[3]{3^5}$ y $\sqrt[5]{27}$ | 10. $\sqrt[3]{32}$ y $\sqrt[4]{128}$ |
| 11. $\sqrt[3]{49}$ y $\sqrt[4]{343}$ | 12. $\sqrt[3]{36}$ y $\sqrt[5]{216}$ | 13. $\sqrt[3]{729}$ y $\sqrt[5]{81}$ | 14. $\sqrt[5]{3^7}$ y $\sqrt[4]{3^5}$ | 15. $\sqrt[4]{12^5}$ y $\sqrt[3]{12^4}$ |

5.11.6. RADICALES SEMEJANTES

Se llama radicales semejantes a los radicales que tienen el mismo grado y el mismo radicando. Por ejemplo: $\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$ son semejantes, y se pueden operar como términos semejantes. $\sqrt{2}$ y $4\sqrt{3}$ no son semejantes.

Observación: se llama coeficiente al factor (número, letra) que precede a un radical.

5.11.7. OPERACIONES CON RADICALES

a. SUMA Y RESTA:

Para sumar y/o restar radicales se simplifican los radicales semejantes y se efectúan las operaciones indicadas. Por ejemplo: Simplificar: $2\sqrt{75} + \sqrt{28} - \sqrt{12}$.

Proposiciones

- $2\sqrt{75} + \sqrt{28} - \sqrt{12} = 2\sqrt{75} + \sqrt{28} - \sqrt{12}$
- $2\sqrt{75} + \sqrt{28} - \sqrt{12} = 10\sqrt{3} + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$
- $2\sqrt{75} + \sqrt{28} - \sqrt{12} = 8\sqrt{3} + 2\sqrt{7}$

Razones

- Axi. Reflexivo (=)
Simplificación de radicales.
Términos semejantes.

EJERCICIOS

1. Simplificar.

- | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ | 2. $3\sqrt{5} + \sqrt{20}$ | 3. $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ | 4. $\sqrt{18} + \sqrt{50}$ |
| 5. $2\sqrt{32} + 3\sqrt{72}$ | 6. $3\sqrt{28} - \sqrt{63}$ | 7. $4\sqrt{8} + 5\sqrt{50}$ | 8. $\sqrt{8} - 1/3 \cdot \sqrt{12}$ |
| 9. $3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5}$ | 10. $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81}$ | 11. $2\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$ | 12. $\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{81}$ |
| 13. $4\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$ | 14. $5\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{128}$ | 15. $\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{250}$ | 16. $3\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135}$ |

b. MULTIPLICACIÓN DE RADICALES CON EL MISMO ÍNDICE

Se conserva el signo radical. Se multiplican los coeficientes y las cantidades subradicales, respectivamente. Se simplifica el producto de la cantidad subradical, si es posible. Por ejemplo: Multiplicar: $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10}$.

Proposiciones

- $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} = 2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10}$
- $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} = 6\sqrt{60}$
- $2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{10} = 12\sqrt{15}$

Razones

- Axi. Reflexivo (=).
Def. (x).
Simplificación de radicales.

EJERCICIOS

1. Multiplicar.

- | | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|--|
| 1. $2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}$ | 2. $3\sqrt{3} \cdot -3\sqrt{21}$ | 3. $4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{20}$ | 4. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$ |
| 5. $-2\sqrt{32} \cdot 3\sqrt{72}$ | 6. $3\sqrt{28} \cdot \sqrt{63}$ | 7. $-4\sqrt{8} \cdot 5\sqrt{50}$ | 8. $\sqrt{8} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{12}$ |
| 9. $3\sqrt[3]{4} \cdot 2\sqrt[3]{6}$ | 10. $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{72}$ | 11. $2\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$ | 12. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{10}$ |

c. DIVISIÓN DE RADICALES CON EL MISMO ÍNDICE

Se conserva el signo radical. Luego, se dividen los coeficientes y las cantidades subradicales, respectivamente. Se simplifica el cociente de la cantidad subradical, si es posible. Por ejemplo:

Dividir: $10\sqrt{10} \div 5\sqrt{2}$

Proposiciones

1. $10\sqrt{10} \div 5\sqrt{2} = 10\sqrt{10} \div 5\sqrt{2}$
2. $10\sqrt{10} \div 5\sqrt{2} = 10/5 \cdot \sqrt{10 \div 2}$
3. $10\sqrt{10} \div 5\sqrt{2} = 2\sqrt{5}$

Razones

Axi. Reflexivo (=).
Def. ($\div$).
Simplificación.

EJERCICIOS

1. Dividir:

- | | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|--|---|
| 1. $2\sqrt{8} \div \sqrt{2}$ | 2. $10\sqrt{10} \div 2\sqrt{5}$ | 3. $4\sqrt{24} \div \frac{2}{3}\sqrt{3}$ | 4. $\sqrt{60} \div \sqrt{5}$ |
| 5. $-2\sqrt{75} \div 3\sqrt{3}$ | 6. $3\sqrt{28} \div \sqrt{3}$ | 7. $-4\sqrt{8} \div 5\sqrt{5}$ | 8. $\sqrt{8} \div \frac{1}{3}\sqrt{12}$ |
| 9. $-4\sqrt[3]{16} \div 2\sqrt[3]{2}$ | 10. $\sqrt[3]{48} \div \sqrt[3]{3}$ | 11. $2\sqrt[3]{4} \div \sqrt[3]{2}$ | 12. $\sqrt[3]{50} \div \sqrt[3]{10}$ |
| 13. $4\sqrt[3]{10} \div \sqrt[3]{2}$ | 14. $5\sqrt[3]{36} \div \sqrt[3]{4}$ | 15. $\sqrt[3]{75} \div 3\sqrt[3]{25}$ | 16. $3\sqrt[3]{40} \div \sqrt[3]{5}$ |

d. POTENCIA

Para elevar un radical a una potencia cualquiera se eleva la cantidad subradical a esa potencia. Por ejemplo:

Efectuar: $(\sqrt{2})^3$

Proposiciones

1. $(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^3$
2. $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3}$
3. $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

Razones

Axi. Reflexivo (=).
Def. $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$
Simplificación de radicales.

EJERCICIOS

1. Calcular:

- | | | | |
|--------------------|--------------------|----------------------|---------------------|
| 1. $2(\sqrt{5})^2$ | 2. $(\sqrt{3})^3$ | 3. $(\sqrt{5})^4$ | 4. $2(\sqrt{10})^2$ |
| 5. $(\sqrt{7})^3$ | 6. $3(\sqrt{6})^3$ | 7. $-5(\sqrt{12})^3$ | 8. $2(\sqrt{5})^3$ |

e. RACIONALIZACIÓN

Se llama racionalización a la operación que consiste en transformar una fracción, que tenga uno o más radicales en el denominador, en otra fracción equivalente sin radicales en el denominador.

En general, para racionalizar el denominador se multiplica, el numerador y el denominador, por un factor adecuado que permita obtener una fracción equivalente, cuyo denominador sea un número racional. Es decir, que tenga raíz exacta; a fin de extraer la raíz y eliminar el signo radical del denominador. Se presentan tres casos:

1. Si es de la forma $\frac{1}{b\sqrt{c}}$, se multiplica el numerador y denominador por $\sqrt{c}$. Por ejemplo:

Racionalizar: $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

Proposiciones

$$1. \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$2. \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$3. \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2}$$

$$4. \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2}$$

$$5. \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Razones

Axioma Reflexivo (=).

Multiplicación: $a/b = ac/bc$

Def. Potencia

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Simplificación.

EJERCICIOS

1. Racionalizar el denominador:

$$1. \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$2. \frac{2}{\sqrt{12}}$$

$$3. \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$4. \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$5. \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$6. \frac{7}{\sqrt{10}}$$

$$7. \frac{11}{\sqrt{6}}$$

$$8. \frac{2}{\sqrt{12}}$$

$$9. \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$10. \frac{5}{\sqrt{5}}$$

2. Si es de la forma $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$, se multiplica el numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$. Por ejemplo:

Racionalizar: $\frac{2}{3\sqrt[5]{4}}$

Proposiciones

$$1. \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}}$$

$$2. \frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\sqrt[5]{2^3}}$$

$$3. \frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}}$$

$$4. \frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3 \cdot 2}$$

$$5. \frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

Razones

Axioma Reflexivo (=). Def. a^n

Multiplicación: $a/b = ac/bc$

Def. a^n , $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Simplificación.

EJERCICIOS

1. Racionalizar el denominador:

$$1. \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$2. \frac{5}{\sqrt[3]{2}}$$

$$3. \frac{3}{\sqrt[5]{3}}$$

$$4. \frac{7}{\sqrt[4]{5}}$$

$$5. \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

$$6. \frac{3}{\sqrt[3]{6}}$$

$$7. \frac{4}{\sqrt[4]{7}}$$

$$8. \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$$

$$9. \frac{3}{\sqrt[5]{2}}$$

$$10. \frac{7}{\sqrt[5]{4}}$$

3. Si es de la forma $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$, (el denominador es un binomio con al menos un radical); se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador, el mismo que se llama factor de racionalización. Los siguientes productos notables se usan para encontrar algunos factores de racionalización:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \quad (1)$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad (2)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad (3)$$

Racionalizar: $\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

Proposiciones

$$1. \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$2. \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$$

$$3. \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$4. \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2 - 3}$$

$$5. \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-1}$$

$$6. \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

Razones

Axioma Reflexivo (=).

Multiplicación: $a/b = ac/bc$

Axi. Distributivo, Def. $a^2 - b^2$

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

Def (+).

$a/-1 = -a$

EJERCICIOS

1. Racionalizar el denominador:

$$1. \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$6. \frac{2}{\sqrt[3]{1/2} - \sqrt[3]{1/6}}$$

$$11. \frac{2/3}{\sqrt[3]{1/7} - \sqrt[3]{1/3}}$$

$$2. \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$$

$$7. \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 2}$$

$$12. \frac{4}{\sqrt[3]{5} - 3}$$

$$3. \frac{-1}{0,2 - \sqrt{3}}$$

$$8. \frac{-3}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{7}}$$

$$13. \frac{a}{b\sqrt{c}}$$

$$4. \frac{-0,3}{3 - \sqrt{1/3}}$$

$$9. \frac{2}{-\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$14. \frac{a}{b\sqrt[n]{c}}$$

$$5. \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{11}}$$

$$10. \frac{1/5}{\sqrt[3]{1/2} + \sqrt[3]{1/5}}$$

2. Construya un esquema de barras para la clasificación de los números reales.

Observaciones:

- Si observamos con atención notaremos que las propiedades de los números se basan en las operaciones de suma, multiplicación y potenciación, debido a que son operaciones básicas. La resta, división, radicación y logaritmación, dependen de ellas. La resta es la suma de un inverso aditivo: $a - b = a + (-b)$. La división es la multiplicación por un inverso multiplicativo: $a/b = a \cdot 1/b = a \cdot b^{-1}$; $b \neq 0$. La radicación: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ y la logaritmación: $\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a$. La resta y la división no son conmutativas y tampoco son asociativas. A pesar de estos inconvenientes, estas operaciones son importantes en el cálculo.
- La suma, la resta, el producto y el cociente de dos números reales es otro número real. La potenciación es posible cuando el exponente es un número racional. Si la base es negativa con exponente par la potencia es positiva y si el exponente es impar es negativa. La raíz de un número real no siempre es posible, sólo ocurre cuando la raíz está definida (definición 1). Con índice par se tiene: para radicando positivo dos raíces ($\pm$) y radicando negativo no tiene solución. Para índice impar: el radicando positivo tiene una sola raíz (+) y el radicando negativo tiene una sola raíz (-).

CAPÍTULO 6

TEOREMAS DE LOS NÚMEROS REALES

6.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se estudian los teoremas básicos de los números reales, los mismos que son de utilidad para resolver ecuaciones e inecuaciones, mediante un proceso más sencillo que el estudiado anteriormente. En general, se llama teorema a toda proposición que necesita de la demostración respectiva. Los teoremas se clasifican en dos grupos, con fines didácticos: de la igualdad y de la desigualdad; los mismos que se estudian a continuación.

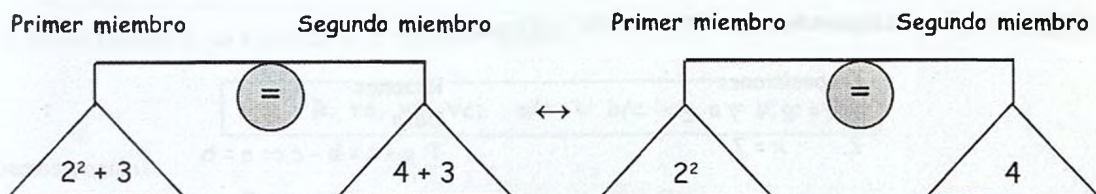
6.2. TEOREMAS BÁSICOS (IGUALDAD)

Los siguientes teoremas se definen en el conjunto de los números reales, los mismos que se demuestran usando los axiomas estudiados anteriormente, previa a la utilización en resolución de ecuaciones:

T	NOMBRE	FORMA SIMBÓLICA
1	Cancelativo (términos positivos)	$a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$
2	Cancelativo (términos negativos)	$a - c = b - c \Leftrightarrow a = b$
3	Cancelativo (factores)	$a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$
4	Cancelativo (divisores)	$a/c = b/c \Leftrightarrow a = b; c \neq 0$
5	Transposición de términos positivos	$a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$
6	Transposición de términos negativos	$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$
7	Transposición de factores	$a \cdot b = 1 \Leftrightarrow a = 1/b; b \neq 0$
8	Transposición de divisores	$a/b = 1 \Leftrightarrow a = b; b \neq 0$
9	Cambio de signos	$-a = -b \Leftrightarrow a = b$

TEOREMA 1: CANCELATIVO (TÉRMINOS POSITIVOS)

Si en cada miembro de una igualdad se suprime un mismo número real positivo cualquiera, la relación de igualdad se conserva (el primer miembro sigue siendo igual al segundo). El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el término positivo 3 y la relación de igualdad se mantiene.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c: a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a + c = b + c$
2. $a + c + (-c) = b + c + (-c)$
3. $a + [c + (-c)] = b + [c + (-c)]$
4. $a + 0 = b + 0$
5. $a = b$

Razones

Dato
Axioma aditivo (=)
Axioma asociativo (+)
Axioma invertivo (+)
Axioma modulativo (+)

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas: $x + 2 = 7 + 2$

Proposiciones

1. $x + 2 = 7 + 2$
2. $x = 7$

Razones

Dato
T: $a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$

TEOREMA 2: CANCELATIVO (TÉRMINOS NEGATIVOS)

Si en cada miembro de una igualdad se suprime un mismo número real negativo, la relación de igualdad se conserva (el primer miembro sigue siendo igual al segundo). El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el término negativo -3 y la relación de igualdad se mantiene.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c; a - c = b - c \Leftrightarrow a = b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a - c = b - c$
2. $a + (-c) = b + (-c)$
3. $a + (-c) + c = b + (-c) + c$
4. $a + [(-c) + c] = b + [(-c) + c]$
5. $a + 0 = b + 0$
6. $a = b$

Razones

Dato
Def. (-)
Axioma aditivo (=)
Axioma asociativo (+)
Axioma invertivo (+)
Axioma modulativo (+)

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas: $x - 2 = 7 - 2$

Proposiciones

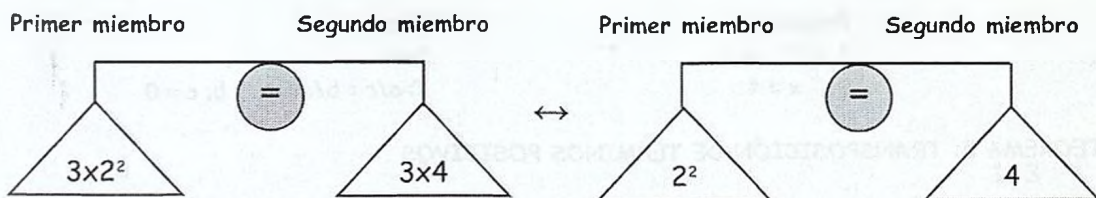
1. $x - 2 = 7 - 2$
2. $x = 7$

Razones

Dato
T: $a - c = b - c \Leftrightarrow a = b$

TEOREMA 3: CANCELATIVO (FACTORES)

Si en cada miembro de una igualdad se suprime un mismo factor, la relación de igualdad se conserva (el primer miembro sigue siendo igual al segundo). El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el factor positivo 3 y la relación de igualdad se mantiene. Situación parecida se presenta para el factor negativo -3 .



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c \neq 0; a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a \cdot c = b \cdot c$
2. $a \cdot c \cdot 1/c = b \cdot c \cdot 1/c$
3. $a \cdot [c \cdot 1/c] = b \cdot [c \cdot 1/c]$
4. $a \cdot 1 = b \cdot 1$
5. $a = b$

Razones

- Dato
- Axioma multiplicativo (=)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulatorio (x)

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas: $2x = 2 \cdot 4$

Proposiciones

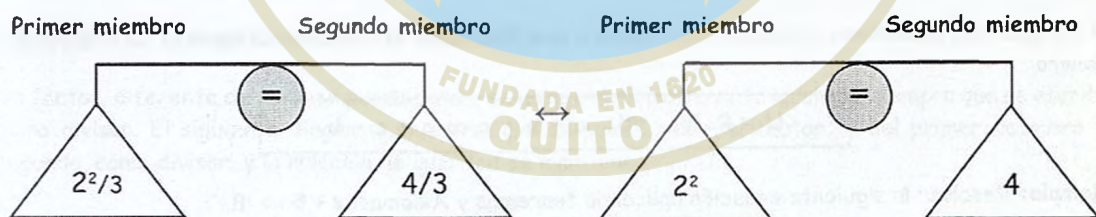
1. $2x = 2 \cdot 4$
2. $x = 4$

Razones

- Dato
- T: $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$

TEOREMA 4: CANCELATIVO (DIVISORES)

Si en cada miembro de una igualdad se suprime un mismo divisor, diferentes de 0, la relación de igualdad se conserva (el primer miembro sigue siendo igual al segundo). El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el divisor positivo 3 y la relación de igualdad se mantiene.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c; a/c = b/c \Leftrightarrow a = b; c \neq 0$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a/c = b/c$
2. $a \cdot 1/c = b \cdot 1/c$
3. $a \cdot c \cdot 1/c = b \cdot c \cdot 1/c$
4. $a \cdot [c \cdot 1/c] = b \cdot [c \cdot 1/c]$
5. $a \cdot 1 = b \cdot 1$
6. $a = b$

Razones

- Dato
- Def. (÷)
- Axioma multiplicativo (=)
- Axioma asociativo (x)
- Axioma invertivo (x)
- Axioma modulatorio (x)

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas: $x/2 = 4/2$.

Proposiciones

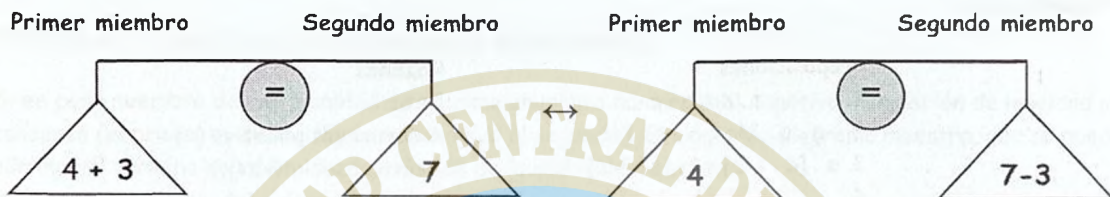
1. $x/2 = 4/2$
2. $x = 4$

Razones

Dato
T: $a/c = b/c \Leftrightarrow a = b; c \neq 0$

TEOREMA 5: TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS POSITIVOS

Los términos positivos de una igualdad se pueden pasar o transponer, de un miembro a otro; siempre que, al mismo tiempo, se cambie el signo $+$ por $-$, de los términos que se transponen. El siguiente diagrama muestra, que se puede pasar el término 3, del primer miembro al segundo, cambiando el signo $+$ por el $-$, y la relación de igualdad se mantiene (el primer miembro sigue siendo igual al segundo).



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a + b = 0$
2. $a + b + (-b) = 0 + (-b)$
3. $a + [b + (-b)] = 0 + (-b)$
4. $a + 0 = 0 + (-b)$
5. $a = -b$

Razones

Dato
Axioma aditivo ($=$)
Axioma asociativo ($+$)
Axioma inversivo ($+$)
Axioma modulatorio ($+$)

Si en lugar del 0, se tiene cualquier otro número real, entonces el teorema se escribe de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas y Axiomas: $x + 5 = 8$.

Proposiciones

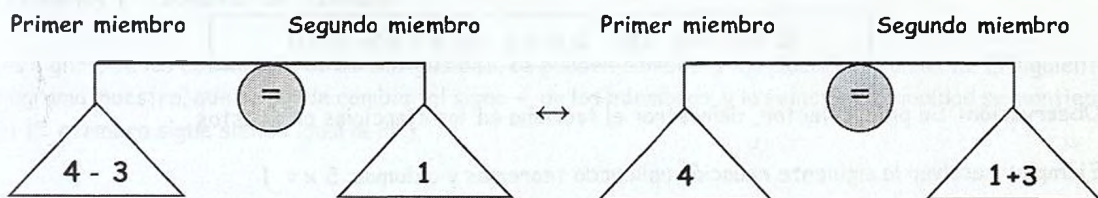
1. $x + 5 = 8$
2. $x = 8 - 5$
3. $x = 3$

Razones

Dato
T: $a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$
Def $\{-\}$.

TEOREMA 6: TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS NEGATIVOS

Los términos negativos de una igualdad se pueden transponer, de un miembro a otro; siempre que, al mismo tiempo, se cambie el signo $-$ por $+$, de los términos que se trasladan. El siguiente diagrama muestra, que se puede pasar el término -3 , del 1º miembro al 2º, cambiando el signo $-$ por el $+$, y la relación de igualdad se mantiene (el 1º miembro sigue siendo igual al 2º).



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b; \quad a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $a - b = 0$	Dato
2. $a + (-b) = 0$	Definición de resta
3. $a + (-b) + b = 0 + b$	Axioma aditivo (=)
4. $a + [(-b) + b] = 0 + b$	Axioma asociativo (+)
5. $a + 0 = 0 + b$	Axioma invertivo (+)
6. $a = b$	Axioma modulativo (+)

Si en lugar del 0, se tiene cualquier otro número real c , entonces se tiene:

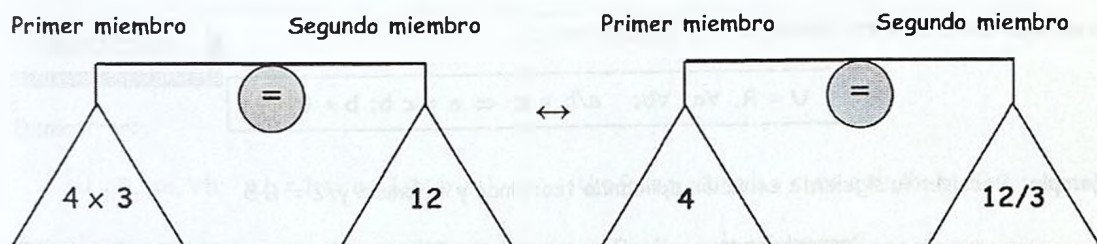
$$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b; \quad a - b = c \Leftrightarrow a = c + b$$

Ejemplo: resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas y axiomas: $y - 4 = 5$

Proposiciones	Razones
1. $y - 4 = 5$	Dato
2. $y = 5 + 4$	T: $a - b = c \Leftrightarrow a = c + b$
3. $y = 9$	Def (+).

TEOREMA 7: TRANSPOSICIÓN DE FACTORES

Un factor, diferente de cero, se puede pasar, de un miembro a otro de la igualdad; siempre que se escriba como divisor. El siguiente diagrama muestra, que se puede pasar el factor 3, del primer miembro al segundo, como divisor, y la relación de igualdad se mantiene.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b; \quad a \cdot b = 1 \Leftrightarrow a = 1/b; \quad b \neq 0$$

Si en lugar del 1, se tiene cualquier otro número real c , entonces se tiene:

$$U = R. \forall a, \forall b: a \cdot b = c \Leftrightarrow a = c/b; b \neq 0$$

Observación: Se pide, al lector, demostrar el teorema en los ejercicios propuestos

Ejemplo: resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas y axiomas: $5x = 1$

Proposiciones

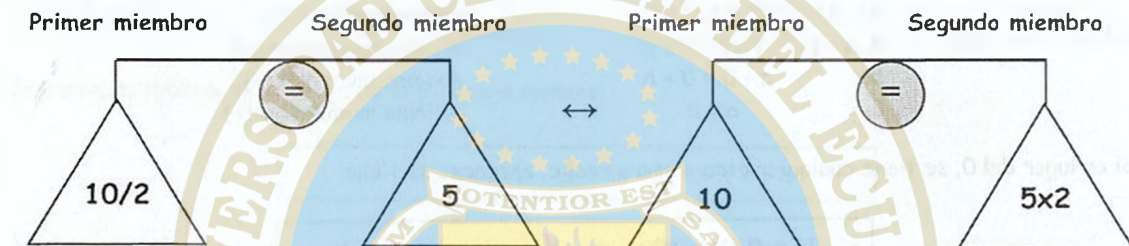
1. $5x = 1$
2. $x = 1/5$

Razones

Dato
T: $a \cdot b = c \Leftrightarrow a = c/b; b \neq 0$

TEOREMA 8: TRANSPOSICIÓN DE DIVISORES

Un divisor, diferente de cero, se puede pasar, de un miembro a otro de la igualdad; siempre que se escriba como factor. El siguiente diagrama muestra, que se puede pasar el divisor 2, del 1^{er} miembro al 2^{do}, como factor, y la relación de igualdad se mantiene (el 1^{er} miembro sigue siendo igual al 2^{do}).



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b: a/b = 1 \Leftrightarrow a = b; b \neq 0$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a/b = 1$
2. $a \cdot 1/b = 1$
3. $a \cdot 1/b \cdot b = 1 \cdot b$
4. $a [1/b \cdot b] = 1 \cdot b$
5. $a \cdot 1 = 1 \cdot b$
6. $a = b$

Razones

Dato
Definición de división
Axioma multiplicativo ($\cdot$)
Axioma asociativo ($\cdot$)
Axioma invertivo ($\cdot$)
Axioma modulativo ($\cdot$)

Si en lugar del 1, se tiene cualquier otro número real c :

$$U = R. \forall a, \forall b: a/b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b; b \neq 0$$

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas y axiomas: $y/2 = 0,5$

Proposiciones

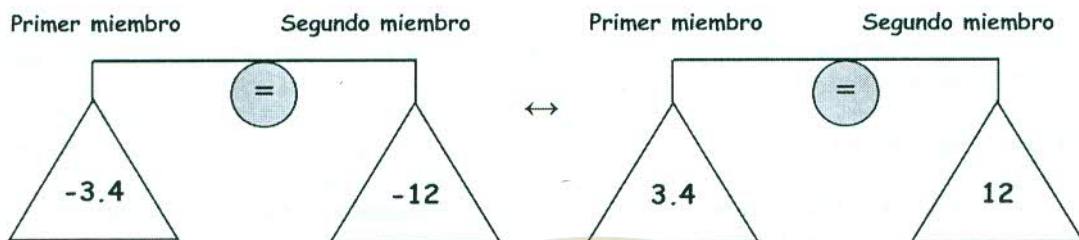
1. $y/2 = 0,5$
2. $y = 2 \cdot 0,5$
3. $y = 1$

Razones

Dato
T: $a/b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b; b \neq 0$
Def. ($\cdot$)

TEOREMA 9: CAMBIO DE SIGNOS

Los signos, de los dos miembros de una igualdad, se pueden cambiar y la relación se conserva. El siguiente diagrama muestra, que se puede cambiar el signo $-$, de los miembros, y la relación de igualdad se mantiene (el 1^{er} miembro sigue siendo igual al 2^{do}).



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; -a = -b \Leftrightarrow a = b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $-a = -b$
2. $-a + a = -b + a$
3. $0 = -b + a$
4. $0 + b = -b + a + b$
5. $0 + b = -b + [a + b]$
6. $0 + b = -b + [b + a]$
7. $0 + b = [-b + b] + a$
8. $0 + b = 0 + a$
9. $b = a$
10. $a = b$

Razones

- Dato
- Axioma aditivo ($=$)
- Axioma invertivo ($+$)
- Axioma aditivo ($=$)
- Axioma asociativo ($+$)
- Axioma conmutativo ($+$)
- Axioma asociativo ($+$)
- Axioma invertivo ($+$)
- Axioma modulativo ($+$)
- Axioma simétrico ($=$)

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación aplicando teoremas y axiomas: $-y = 0,5$.

Proposiciones

1. $-y = 0,5$
2. $y = -0,5$

Razones

- Dato
- T: $-a = -b \Leftrightarrow a = b$

EJERCICIOS

1. Demostrar:

$$U = R. \forall a, \forall b; a \cdot b = 1 \Leftrightarrow a = 1/b; b \neq 0$$

$$U = R. \forall a, \forall b; a \cdot b = c \Leftrightarrow a = c/b; b \neq 0$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones aplicando teoremas. Grafique la solución en la recta numérica.

$$1. x + 10 = 8 + 10$$

$$2. y + 5 = -3 + 5$$

$$3. z + 1/2 = 3 + \frac{1}{2}$$

$$4. x - 10 = 8 - 10$$

$$5. y - 5 = -3 - 5$$

$$6. z - 1/2 = 3 - 1/2$$

$$7. -3x = 5 \cdot (-3)$$

$$8. 1/2 x = 1/2 \cdot 3$$

$$9. 0,5z = 0,5 \cdot 6$$

- | | | |
|----------------------|-------------------|----------------------|
| 10. $x/-3 = 5 /(-3)$ | 11. $x/-2 = 3/-2$ | 12. $z/0,5 = 6/0,5$ |
| 13. $x + 5 = 6$ | 14. $y + 3 = -7$ | 15. $z + 1/2 = 3$ |
| 16. $x - 5 = 6$ | 17. $y - 3 = -7$ | 18. $z - 1/2 = -1/3$ |
| 19. $3y = 4$ | 20. $4z = -5$ | 21. $7z = -1/3$ |
| 22. $y/3 = 7$ | 23. $z/5 = -4$ | 24. $x/6 = -1/2$ |
| 25. $-y = -1/8$ | 26. $-z = -0,25$ | 27. $-x = -5/3$ |

6.2.1. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Los teoremas demostrados anteriormente permiten resolver ecuaciones, evitando algunos de los pasos que contienen los teoremas.

Ejemplo 1. Resolver: $x + 4 = 12$.

Proposiciones

- $x + 4 = 12$
- $x = 12 - 4$
- $x = 8$

Razones

- Dato
 T. $a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$
 Axioma clausurativo (+).

Ejemplo 2. Resolver: $x - 4 = -2$

Proposiciones

- $x - 4 = -2$
- $x = -2 + 4$
- $x = 2$

Razones

- Dato
 T. $a - b = c \Leftrightarrow a = c + b$
 Axioma clausurativo (+).

Ejemplo 3. Resolver: $2(x - 5) = -13$

Proposiciones

- $2(x - 5) = -13$
- $2x - 10 = -13$
- $2x = -13 + 10$
- $2x = -3$
- $x/2 = -3$
- $x = -3/2$
- $x = -1,5$

Razones

- Dato
 Axioma distributivo ($x, +$)
 T. $a - b = c \Leftrightarrow a = c + b$
 Axioma clausurativo (+).
 Axioma conmutativo (x).
 T. $a \cdot b = c \Leftrightarrow a = c/b, b \neq 0$
 Def. ($\div$)

EJERCICIOS

- Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando los axiomas de los números reales y los teoremas. Grafique la solución en la recta numérica.

- | | | |
|---------------------|------------------------|----------------------|
| 1) $x + 2 = 6$ | 2) $y + 3 = -5$ | 3) $z + 4 = 8$ |
| 4) $x - 5 = 2$ | 5) $z - 4 = -3$ | 6) $2x + 2 = 3$ |
| 7) $3z + 4 = -2$ | 8) $4y - 5 = 3$ | 9) $5x - 3 = -13$ |
| 10) $2(x + 4) = -4$ | 11) $-2x + 2 = 3$ | 12) $-3z + 4 = -2$ |
| 13) $-4y - 5 = 3$ | 14) $-5x - 3 = -13$ | 15) $-3(x - 2) = -2$ |
| 16) $-2y + 5 = 9$ | 17) $-5x/2 - 3 = -3/2$ | 18) $-4(x + 5) = -4$ |
| 19) $-y - 2 = 3$ | 20) $-x + 3 = -6$ | 21) $-2(x - 2) = -5$ |

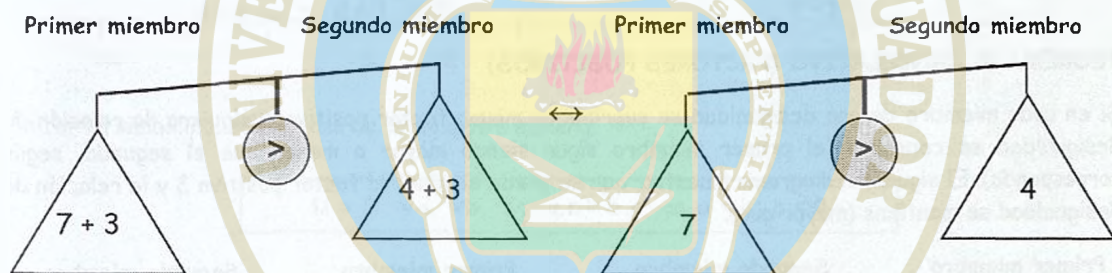
6.3. TEOREMAS BÁSICOS (DESIGUALDAD)

Los siguientes teoremas se definen en el conjunto de los números reales, los mismos que se demuestran usando los axiomas estudiados anteriormente:

T	NOMBRE	FORMA SIMBÓLICA	
1	Cancelativo (términos positivos)	$a + c > b + c \Leftrightarrow a > b$	$a + c < b + c \Leftrightarrow a < b$
2	Cancelativo (términos negativos)	$a - c > b - c \Leftrightarrow a > b$	$a - c < b - c \Leftrightarrow a < b$
3	Cancelativo (factores positivos)	$a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a > b; c > 0$	$a \cdot c < b \cdot c \Leftrightarrow a < b; c > 0$
4	Cancelativo (factores negativos)	$a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a < b; c < 0$	$a \cdot c < b \cdot c \Leftrightarrow a > b; c < 0$
5	Transposición de términos positivos	$a + b > 0 \Leftrightarrow a > -b$	$a + b < 0 \Leftrightarrow a > -b$
6	Transposición de términos negativos	$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$	$a - b < 0 \Leftrightarrow a > b$
7	Transposición de factores positivos	$a \cdot b > 1 \Leftrightarrow a > 1/b; b > 0$	$a \cdot b < 1 \Leftrightarrow a > 1/b; b > 0$
8	Transposición de factores negativos	$a \cdot b > 1 \Leftrightarrow a < 1/b; b < 0$	$a \cdot b < 1 \Leftrightarrow a < 1/b; b < 0$
9	Transposición de divisores positivos	$a/b > 1 \Leftrightarrow a > b; b > 0$	$a/b < 1 \Leftrightarrow a > b; b > 0$
10	Transposición de divisores negativos	$a/b > 1 \Leftrightarrow a < b; b < 0$	$a/b < 1 \Leftrightarrow a < b; b < 0$
11	Cambio de signos	$-a > -b \Leftrightarrow a < b$	$-a < -b \Leftrightarrow a > b$

TEOREMA 1. CANCELATIVO (TÉRMINOS POSITIVOS)

Si en cada miembro de una desigualdad se suprime un mismo número real positivo cualquiera, la relación de desigualdad se conserva (el 1^{er} miembro sigue siendo mayor o menor que el 2^{do}, según corresponda). El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el término positivo 3 y la relación de desigualdad se mantiene (mayor que).



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c; a + c > b + c \Leftrightarrow a > b$$

Demostración:

Proposiciones

- $a + c > b + c$
- $a + c + (-c) > b + c + (-c)$
- $a + [c + (-c)] > b + [c + (-c)]$
- $a + 0 > b + 0$
- $a > b$

Razones

- Dato
 Axioma aditivo (<, >)
 Axioma asociativo (+)
 Axioma invertivo (+)
 Axioma modulativo (+)

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $x + 3 > 4 + 3$.

Proposiciones

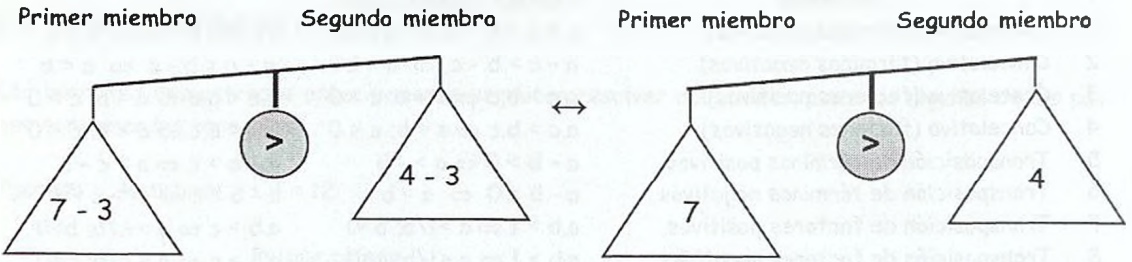
- $x + 3 > 4 + 3$
- $x > 4$

Razones

- Dato
 T: $a + c > b + c \Leftrightarrow a > b$

TEOREMA 2. CANCELATIVO (TÉRMINOS NEGATIVOS)

Si en cada miembro de una desigualdad se suprime un mismo número real negativo cualquiera, la relación de desigualdad se conserva (el 1º miembro sigue siendo mayor o menor que el 2º, según corresponda). El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el término negativo -3 y la relación de desigualdad se mantiene (mayor que).



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c; a - c > b - c \Leftrightarrow a > b$$

Observación: la demostración es similar a la del teorema anterior.

Ejemplo: resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $x - 3 > 4 - 3$

Proposiciones

1. $x - 3 > 4 - 3$

2. $x > 4$

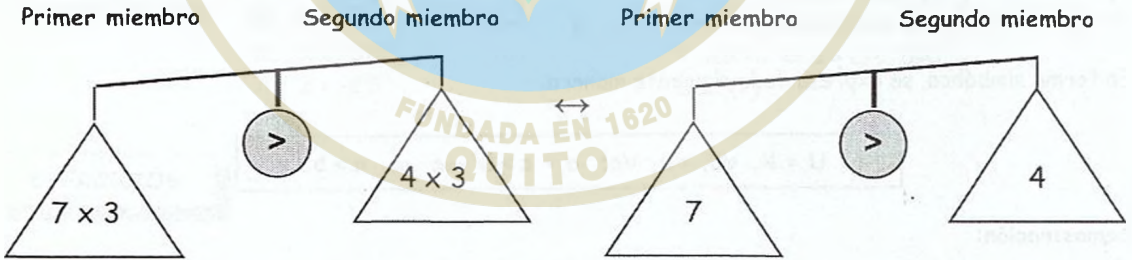
Razones

Dato

T: $a - c > b - c \Leftrightarrow a > b$

TEOREMA 3. CANCELATIVO (FACTORES POSITIVOS)

Si en cada miembro de una desigualdad se suprime un mismo factor positivo cualquiera, la relación de desigualdad se conserva (el primer miembro sigue siendo mayor o menor que el segundo, según corresponda). El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el factor positivo 3 y la relación de desigualdad se mantiene (mayor que).



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c; a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a > b; c > 0$$

Observación: Se pide la demostración al lector, en los ejercicios propuestos.

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $x \cdot 3 > 4 \cdot 3$

Proposiciones

1. $y \cdot 3 > 4 \cdot 3$

2. $y > 4$

Razones

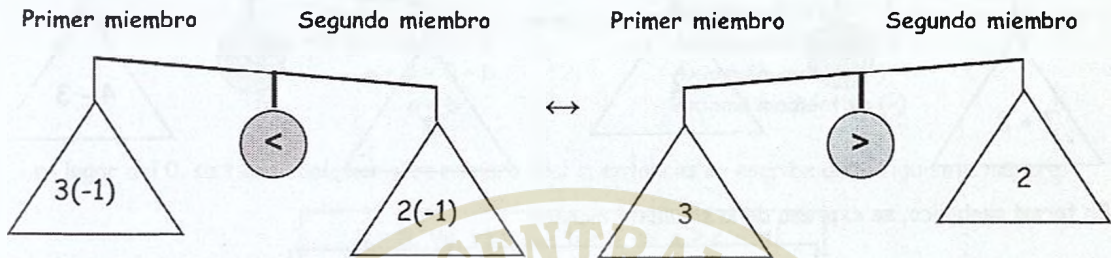
Dato

T: $a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a > b; c > 0$

TEOREMA 4. CANCELATIVO (FACTORES NEGATIVOS)

En cada miembro de una desigualdad se puede suprimir un mismo factor negativo cualquiera, siempre que, al mismo tiempo, se cambie el signo de la relación de desigualdad (mayor que por menor que o menor que por mayor que, según corresponda).

El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el factor negativo -1, y la relación de desigualdad cambia, de menor que a mayor que.



Observación: La desigualdad $3(-1) < 2(-1)$ se puede escribir como $-3 < -2$. En la recta numérica se tiene que el -3 se encuentra a la izquierda del -2 (menor que). Al suprimir el -1, se tiene que 3 es mayor que 2. En este caso el 3 se encuentra a la derecha del 2, en la recta numérica.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c; a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a < b; c < 0$$

Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $a \cdot c > b \cdot c$	Dato
2. $a \cdot c \cdot (1/c) < b \cdot c \cdot (1/c)$	Axioma multiplicativo (<,>); $c < 0$
3. $a \cdot [c \cdot (1/c)] < b \cdot [c \cdot (1/c)]$	Axioma asociativo (x)
4. $a < b$	Axioma invertivo, modulativo (x)

Ejemplo 1: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $y \cdot (-3) > 5 \cdot (-3)$

Proposiciones	Razones
1. $y \cdot (-3) > 5 \cdot (-3)$	Dato
2. $y < 5$	T: $a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a < b; c < 0$

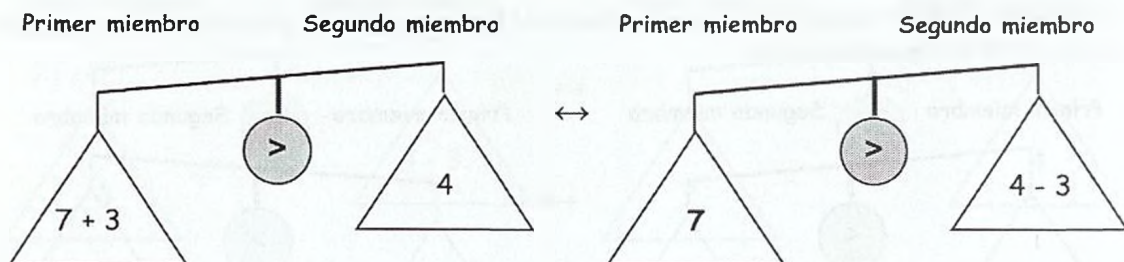
Ejemplo 2: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $x \cdot (-2) < (-5) \cdot (-2)$

Proposiciones	Razones
1. $x \cdot (-2) < (-5) \cdot (-2)$	Dato
2. $x > -5$	T: $a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a < b; c < 0$

TEOREMA 5. TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS POSITIVOS

Los términos (+) de una desigualdad se pueden pasar, de un miembro a otro; siempre que, al mismo tiempo, se cambie el signo + por -, de los términos que se transponen.

El siguiente diagrama muestra, que se puede transponer el término +3, del 1º al 2º miembro, siempre que se cambie de signo, es decir como -3.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; \quad a + b > 0 \Leftrightarrow a > -b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a + b > 0$
2. $a + b + (-b) > 0 + (-b)$
3. $a + [b + (-b)] > 0 + (-b)$
4. $a + 0 > 0 + (-b)$
5. $a > -b$

Razones

- Dato
- Axioma aditivo (<,>)
- Axioma asociativo (+)
- Axioma invertivo (+)
- Axioma modulativo (+)

Si en lugar del 0, se tiene cualquier otro número real c, entonces se escribe de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; \quad a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$$

Ejemplo: resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y Axiomas: $y + 3 > 5$.

Proposiciones

1. $y + 3 > 5$
2. $y > 5 - 3$
3. $y > 2$

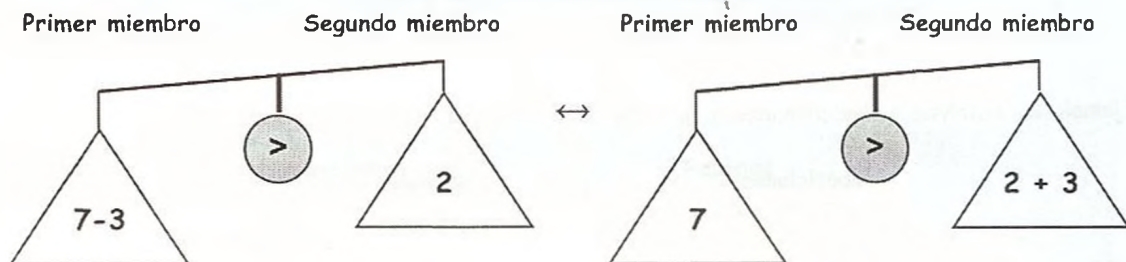
Razones

- Dato
- T: $a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$
- Def. (-)

TEOREMA 6. TRANSPOSICIÓN DE TÉRMINOS NEGATIVOS

Los términos (-) de una desigualdad se pueden pasar, de un miembro a otro; siempre que, al mismo tiempo, se cambie el signo - por +, de los términos que se transponen.

El siguiente diagrama muestra, que se puede pasar el término negativo -3, del 1º al 2º miembro, siempre que se cambie de signo, es decir como +3.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b; a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$$

Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $a - b > 0$	Dato
2. $a + (-b) > 0$	Definición de resta
3. $a + (-b) + b > 0 + b$	Axioma aditivo (<, >)
4. $a + [(-b) + b] > 0 + b$	Axioma asociativo (+)
5. $a + 0 > 0 + b$	Axioma invertivo (+)
6. $a > b$	Axioma modulativo (+)

Si en lugar del 0, se tiene cualquier otro número real c, entonces se escribe de la siguiente manera:

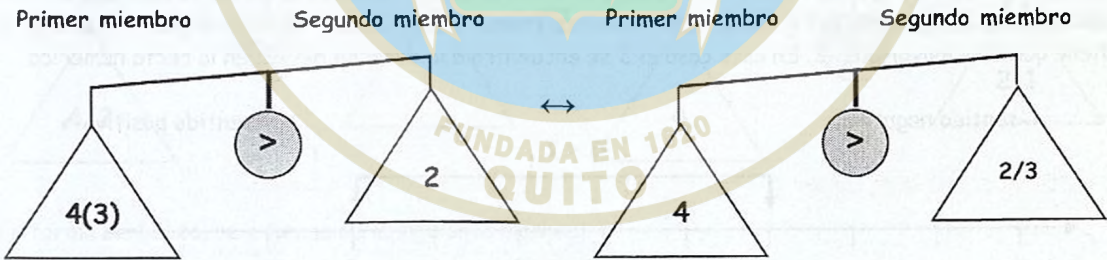
$$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b; a - b > c \Leftrightarrow a > c + b$$

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $y - 3 > 5$.

Proposiciones	Razones
1. $y - 3 > 5$	Dato
2. $y > 5 + 3$	T: $a - b > c \Leftrightarrow a > c + b$
3. $y > 8$	Def. (+)

TEOREMA 7. TRANSPOSICIÓN DE FACTORES POSITIVOS

Los factores positivos (mayores que cero) de una desigualdad se pueden pasar, de un miembro a otro; siempre que, al mismo tiempo, se escriba como divisor. El siguiente diagrama muestra, que se puede transponer el factor positivo 3, del 1^{er} al 2^{do} miembro, siempre que se escriba como divisor, es decir como 1/3.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{R}, \forall a, \forall b; a \cdot b > 1 \Leftrightarrow a > 1/b; b > 0$$

Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $a \cdot b > 1$	Dato
2. $a \cdot b \cdot (1/b) > 1 \cdot (1/b)$	Axioma multiplicativo (<,>); $b > 0$
3. $a \cdot [b \cdot (1/b)] > 1 \cdot (1/b)$	Axioma asociativo (x)
4. $a \cdot 1 > 1 \cdot (1/b)$	Axioma invertivo (x)
5. $a > (1/b)$	Axioma modulativo (x)

Si en lugar del 1, se tiene cualquier otro número real c , entonces se escribe de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; a.b > c \Leftrightarrow a > c/b; b > 0$$

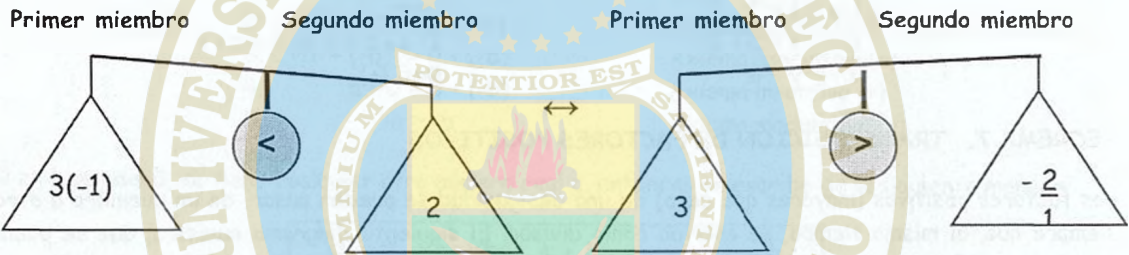
Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $2y > 4$.

Proposiciones	Razones
1. $2y > 4$	Dato
2. $y^2 > 4$	Axioma Conmutativo (x)
3. $y > 4/2$	T: $a.b > c \Leftrightarrow a > c/b; b > 0$
4. $y > 2$	Def. (÷)

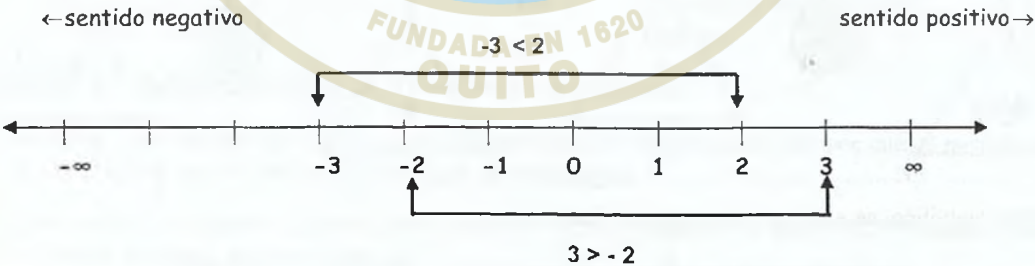
TEOREMA 8. TRANSPOSICIÓN DE FACTORES NEGATIVOS

Los factores negativos (menores que cero) de una desigualdad se pueden pasar, de un miembro a otro; siempre que, al mismo tiempo, se escriba como divisor y se cambie el signo de la desigualdad.

El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el factor negativo -1 y la relación de desigualdad cambia, de menor que a mayor que.



Observación: La desigualdad $3(-1) < 2$ se puede escribir como $-3 < 2$, de esta forma se nota que el -3 se encuentra a la izquierda del 2, en la recta numérica (menor que). Al pasar el -1, al segundo miembro, se tiene que 3 es mayor que -2. En este caso el 3 se encuentra a la derecha del -2, en la recta numérica.



Observación: El 3 se encuentra a la derecha del -2 (3 es mayor que -2). El -3 se encuentra a la izquierda del 2 (-3 es menor que 2).

En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; a.b > 1 \Leftrightarrow a < 1/b ; b < 0$$

Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $a \cdot b > 1$	Dato
2. $a \cdot b \cdot (1/b) < 1 \cdot (1/b)$	Axioma multiplicativo ($<, >$); $b < 0$
3. $a \cdot [b \cdot (1/b)] < 1 \cdot (1/b)$	Axioma asociativo (x)
4. $a \cdot 1 < 1 \cdot (1/b)$	Axioma invertivo (x)
5. $a < (1/b)$	Axioma modulatorio (x)

Si en lugar del 1, se tiene cualquier otro número real c , entonces se escribe de la siguiente manera:

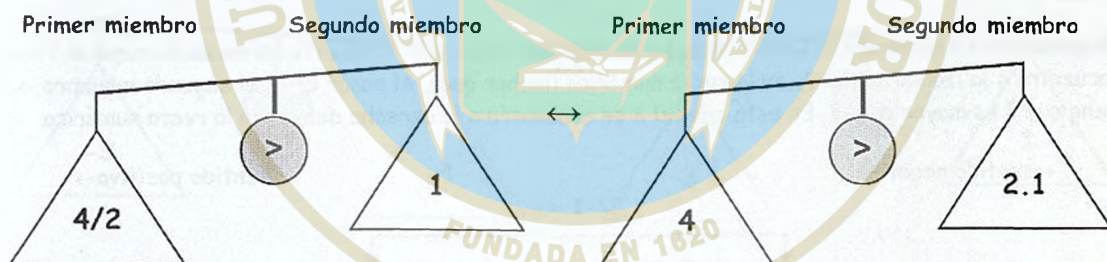
$$U = R. \forall a, \forall b; a \cdot b > c \Leftrightarrow a < c/b; b < 0$$

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $-2y > 4$

Proposiciones	Razones
1. $-2y > 4$	Dato
2. $y(-2) > 4$	Axioma Conmutativo (x)
3. $y < -4/2$	T: $a \cdot b > c \Leftrightarrow a < c/b; b < 0$
4. $y < -2$	Def. ($\div$)

TEOREMA 9: TRANSPOSICIÓN DE DIVISORES POSITIVOS

Los divisores positivos (mayores que cero) de una desigualdad se pueden pasar, de un miembro a otro; siempre que, al mismo tiempo, se escriba como factor. El siguiente diagrama muestra, que se puede pasar o transponer el divisor positivo 2, del 1^{er} al 2^{do} miembro, siempre que se escriba como factor.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; a/b > 1 \Leftrightarrow a > b; b > 0$$

Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $a/b > 1$	Dato
2. $a \cdot 1/b > 1 \cdot b$	Definición de división
3. $a \cdot 1/b \cdot b > 1 \cdot b$	Axioma multiplicativo ($<, >$); $b > 0$.
4. $a [1/b \cdot b] > 1 \cdot b$	Axioma asociativo (x)
5. $a \cdot 1 > 1 \cdot b$	Axioma invertivo (x)
6. $a > b$	Axioma modulatorio (x)

Si en lugar del 1, se tiene cualquier otro número real c:

$$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b; a/b > c \Leftrightarrow a > c.b; b > 0$$

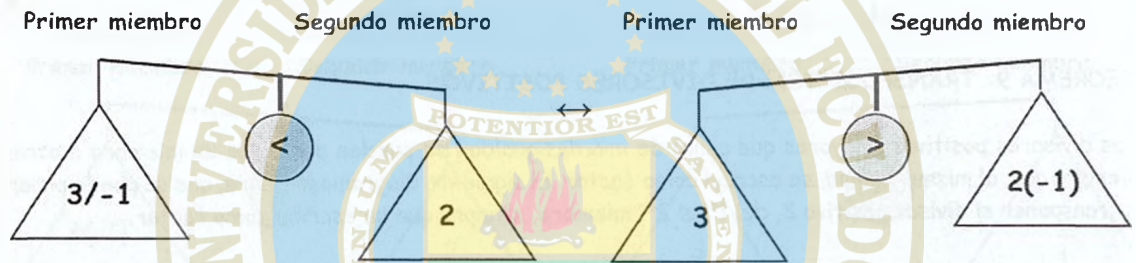
Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $y/2 > 4$.

Proposiciones	Razones
1. $y/2 > 4$	Dato
2. $y > 4.2$	T: $a/b > c \Leftrightarrow a > c.b; b > 0$
3. $y > 8$	Def. (x)

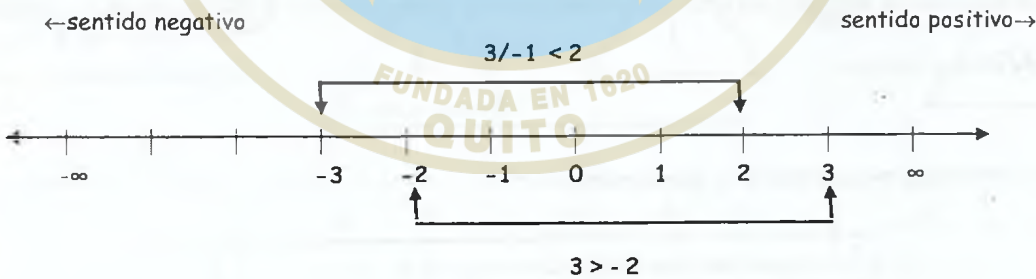
TEOREMA 10: TRANSPOSICIÓN DE DIVISORES NEGATIVOS

Los divisores negativos (menores que cero) de una desigualdad se pueden pasar, de un miembro a otro; siempre que, al mismo tiempo, se escriba como factor y se cambie el signo de la desigualdad.

El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el factor negativo -1 y la relación de desigualdad cambia, de menor que a mayor que.



Observación: La desigualdad $3/(-1) < 2$ se puede escribir como $-3 < 2$, de esta forma se nota que el -3 se encuentra a la izquierda del 2, en la recta numérica (menor que). Al pasar el -1, al segundo miembro, se tiene que 3 es mayor que -2. En este caso el 3 se encuentra a la derecha del -2, en la recta numérica.



Observación: El 3 se encuentra a la derecha del -2, por lo tanto 3 es mayor que 2. el -3/1 se encuentra a la izquierda del 2, por lo tanto -3/1 es menor que 2.

En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b; a/b > 1 \Leftrightarrow a < b; b < 0$$

Demostración:

Proposiciones	Razones
1. $a/b > 1$	Dato
2. $a \cdot 1/b > 1$	Definición de división
3. $a \cdot 1/b \cdot (b) > 1 \cdot (b)$	Axioma multiplicativo ($<,>$); $b < 0$
4. $a [1/b \cdot (b)] > 1 \cdot (b)$	Axioma asociativo (x)
5. $a \cdot 1 > 1 \cdot (b)$	Axioma invertivo (x)
6. $a > b$	Axioma modulativo (x)

Si en lugar del 1, se tiene cualquier otro número real c:

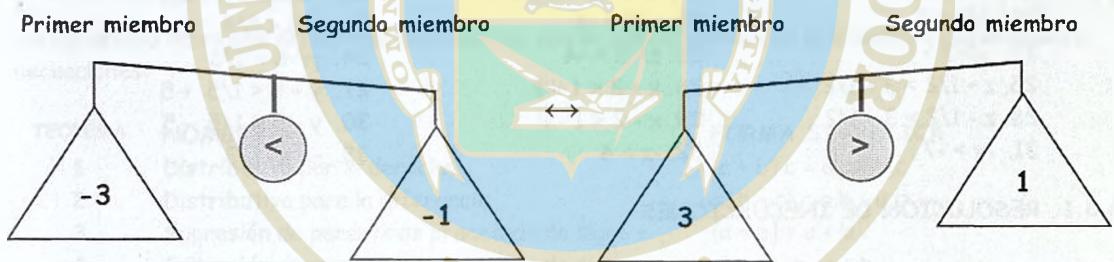
$$U = R. \forall a, \forall b; a/b > c \Leftrightarrow a < cb; b < 0$$

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y Axiomas: $y/-2 > 4$.

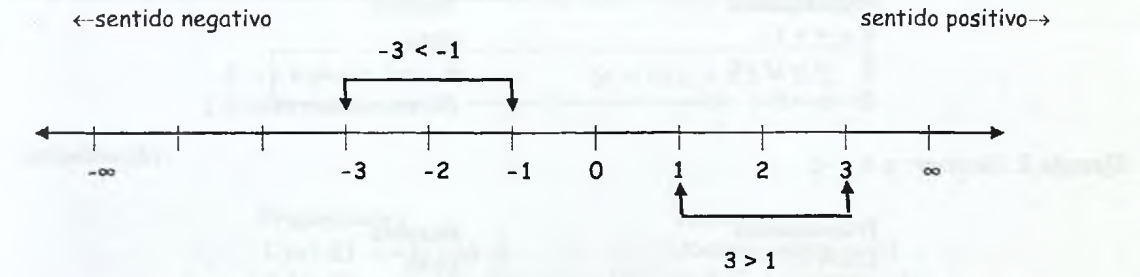
Proposiciones	Razones
1. $y/-2 > 4$	Dato
2. $y < 4 \cdot (-2)$	T: $a/b > c \Leftrightarrow a < c \cdot b; b < 0$
3. $y < -8$	Def. (x)

TEOREMA 11. CAMBIO DE SIGNOS

Los signos positivos o negativos, de los dos miembros de una desigualdad, se pueden cambiar siempre que al mismo tiempo se cambie el signo de la desigualdad. El siguiente diagrama muestra, que se puede eliminar el factor negativo -1 y la relación de desigualdad cambia, de menor que a mayor que.



Observación: En la desigualdad $-3 < -1$ se nota que el -3 se encuentra a la izquierda del -1, en la recta numérica (menor que). Al cambiar los signos negativos, de los miembros, por positivos tiene que 3 es mayor que 1. En este caso el 3 se encuentra a la derecha del 1, en la recta numérica.



En forma simbólica, se expresa de la siguiente manera:

$$U = R. \forall a, \forall b; -a > -b \Leftrightarrow a < b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $-a > -b$
2. $(-a)(-1) < (-b)(-1)$
3. $a \cdot 1 < b \cdot 1$
4. $a < b$

Razones

Dato
Axioma multiplicativo ($<, >$)
Ley de signos
Axioma modulatorio ($\times$)

Ejemplo: Resolver la siguiente inecuación aplicando teoremas y axiomas: $-y > 4$.

Proposiciones

1. $-y > 4$
2. $y < -4$

Razones

Dato
T. $-a > -b \Leftrightarrow a < b$

EJERCICIOS

1. Demostrar:

$$1. U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b, \forall c: a - c > b - c \Leftrightarrow a > b. \quad 2. U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b, \forall c: a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a > b; c > 0.$$

2. Resolver las siguientes inecuaciones aplicando teoremas y axiomas. Grafique la solución.

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. $x \cdot 1/2 > 1 \cdot 1/2$ | 2. $y \cdot 5 < 1/4 \cdot 5$ | 3. $z \cdot 1/3 < 0,25 \cdot 1/3$ |
| 4. $x \cdot (-2) > 1/2 \cdot (-2)$ | 5. $y \cdot (-1/4) > 7 \cdot (-1/4)$ | 6. $z \cdot (-0,25) < 0,3 \cdot (-0,25)$ |
| 7. $y + 1/2 > 0$ | 8. $z + 1/5 > 1/2$ | 9. $x + 0,25 < -0,5$ |
| 10. $y \cdot 1/2 > 0$ | 11. $z - 1/5 > 1/2$ | 12. $x - 0,25 < -0,5$ |
| 13. $y \cdot 1/2 > 0$ | 14. $z \cdot 1/5 > 1/2$ | 15. $x \cdot 0,25 < -0,5$ |
| 16. $-1/2 y > 0$ | 17. $-1/5 z > 1/2$ | 18. $-0,25 x < -0,5$ |
| 19. $y/3 > 7$ | 20. $z/5 > -4$ | 21. $y/6 < 1/3$ |
| 22. $y/-3 > 7$ | 23. $z/-5 > -4$ | 24. $y/-6 < 1/3$ |
| 25. $z + 1/2 > 3 + 1/2$ | 26. $x + 2 < 1 + 2$ | 27. $y + 5 < 1/5 + 5$ |
| 28. $z - 1/2 > 3 - 1/2$ | 29. $x - 2 < 1 - 2$ | 30. $y - 5 < 1/5 - 5$ |
| 31. $-y > -7$ | 32. $-z > 4$ | 33. $-x < -1/3$ |

6.3.1. RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

Los teoremas demostrados anteriormente, nos permiten resolver inecuaciones evitando algunos de los pasos que contienen los teoremas.

Ejemplo 1. Resolver: $x + 4 > 12$.

Proposiciones

1. $x + 4 > 12$
2. $x > 12 - 4$
3. $x > 8$

Razones

Dato
T. $a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$
Axioma clausurativo (+).

Ejemplo 2. Resolver: $x - 4 < -2$

Proposiciones

1. $x - 4 < -2$
2. $x < -2 + 4$
3. $x < 2$

Razones

Dato
T. $a - b < c \Leftrightarrow a < c + b$
Axioma clausurativo (+).

Ejemplo 3. Resolver: $-2x - 5 < 13$

Proposiciones

- 1. $-2x - 5 < 13$
- 2. $-2x < 13 + 5$
- 3. $-2x < 18$
- 4. $x(-2) < 18$
- 5. $x > 18 / -2$
- 6. $x > -9$

Razones

Dato
 $T. a - b < c \Leftrightarrow a < c + b$
Axioma clausurativo (+).
Axioma conmutativo (x).
 $T. a \cdot b < c \Leftrightarrow a > c / b, b < 0$
Simplificación

EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes inecuaciones utilizando los axiomas de los números reales y los teoremas. Grafique la solución en la recta numérica.

1. $x + 2 > 6$

4. $x - 5 < 2$

7. $-4y - 5 > 3$

10. $2(x + 4) < -4$

13. $-2y - 5 > 3$

16. $2x + 2 < 3$

19. $2(x + 2) > 6$

22. $-2(x + 2) > 6$
2. $y + 3 < -5$

5. $z - 4 > -3$

8. $-5x - 3 < -13$

11. $-2x + 2 > 3$

14. $-2x - 3 < -13$

17. $3z + 4 < -2$

20. $3(y + 3) < -6$

23. $-3(y + 3) < -6$
3. $z + 4 > 8$

6. $-3z + 4 < -2$

9. $5x - 3 > -13$

12. $-1z + 4 < -2$

15. $-3(x - 2) > -2$

18. $4y - 5 < 3$

21. $2(z + 4) > 8$

24. $-2(z + 4) > 8$

6.4. AXIOMA DISTRIBUTIVO.

Los siguientes teoremas del axioma distributivo, son de mucha utilidad en la solución de ecuaciones e inecuaciones:

TEOREMA	NOMBRE	FORMA SIMBÓLICA
1	Distributivo por la derecha	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
2	Distributivo para la diferencia	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
3	Supresión de paréntesis precedido de signo +	$(a + b) = a + b$
4	Supresión de paréntesis precedido de signo -	$-(a + b) = -a - b$

TEOREMA 1. AXIOMA DISTRIBUTIVO POR LA DERECHA

El producto de varios sumados de un paréntesis por un número real, en la derecha, es igual a la suma de los productos de dicho número real por cada uno de los sumandos del paréntesis:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c: \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Demostración

Proposiciones

- 1. $(a + b) \cdot c = (a + b) \cdot c$
- 2. $(a + b) \cdot c = c \cdot (a + b)$
- 3. $(a + b) \cdot c = c \cdot a + c \cdot b$
- 4. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Razones

Axioma reflexivo (=)
Axioma conmutativo (x)
Axioma distributivo (x)
Axioma conmutativo (x)

Ejemplo 1. Resolver: $(x + 4)^2 = 12$

Proposiciones

1. $(x+4)^2 = 12$
2. $2x + 8 = 12$
3. $2x = 12 - 8$
4. $2x = 4$
5. $x = 4/2$
6. $x = 2$

Razones

Dato
 $T: (a + b).c = a.c + b.c$
 $T: a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$
 Def (-).
 $T: a.b = c \Leftrightarrow a = c/b; b \neq 0$
 Simplificación

Ejemplo 2. Resolver: $(x+4)^3 < -2$

Proposiciones

1. $(x + 4)^3 < -2$
2. $3x + 12 < -2$
2. $3x < -2 - 12$
3. $x < -14$
4. $x < -14/3$

Razones

Dato
 $T: (a + b).c = a.c + b.c$
 $T: a + b < c \Leftrightarrow a < c - b$
 Def (+).
 $T: a.b < c \Leftrightarrow a < c/b; b > 0$

TEOREMA 2. AXIOMA DISTRIBUTIVO PARA LA DIFERENCIA

El producto de un número real por la diferencia indicada de dos números reales es igual a la diferencia de los productos de dicho número real por cada uno de los números incluidos en el paréntesis:

$$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b, \forall c; a.(b - c) = a.b - a.c$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a.(b - c) = a.(b + (-c))$
2. $a.(b - c) = a.[b + (-c)]$
3. $a.(b - c) = a.b + a.(-c)$
4. $a.(b - c) = a.b - a.c$

Razones

Axioma reflexivo (=)
 Definición de resta
 Axioma distributivo
 $T: (-a).b = -a.b$

Ejemplo 1. Resolver: $2(x - 4) = 12$

Proposiciones

1. $2(x-4) = 12$
2. $2x - 8 = 12$
3. $2x = 12 + 8$
4. $2x = 20$
5. $x = 20/2$
6. $x = 10$

Razones

Dato
 $T: c(a - b) = a.c - b.c$
 $T: a - b = c \Leftrightarrow a = c + b$
 Def (+).
 $T: a.b = c \Leftrightarrow a = c/b; b \neq 0$
 Def. (÷)

TEOREMA 3. SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS PRECEDIDO DE SIGNO POSITIVO

El paréntesis precedido de signo positivo (expreso o tácito) puede suprimirse siempre que se mantenga el signo de todos los números incluidos en el. Este teorema es un caso particular del Axioma distributivo, cuando $c = 1$.

$$U = \mathbb{R}. \forall a, \forall b; (a + b) = a + b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $(a + b) = (a + b)$
2. $(a + b) = (1).(a + b)$
3. $(a + b) = (1).a + (1).b$
4. $(a + b) = a + b$

Razones

Axioma reflexivo (=)
T. (1).a = a
Axioma distributivo
Axioma Modulativo (x)

Ejemplo 1. Resolver: $(x+4) < -2$

Proposiciones

1. $(x + 4) < -2$
2. $x + 4 < -2$
3. $x < -2 - 4$
4. $x < -6$

Razones

Dato
T: $(a + b) = a + b$
T. $a + b < c \Leftrightarrow a < c - b$
Def (+).

TEOREMA 4. SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS PRECEDIDO DE SIGNO NEGATIVO

El paréntesis precedido de signo menos puede suprimirse siempre que se cambie de signo a todos los números incluidos en el. Este teorema es un caso particular del axioma distributivo, cuando $c = -1$.

$$U = R. \forall a, \forall b; -(a + b) = -a - b$$

Demostración:

Proposiciones

1. $-(a + b) = -(a + b)$
2. $-(a + b) = (-1).(a + b)$
3. $-(a + b) = (-1).a + (-1).b$
4. $-(a + b) = -a + (-b)$
5. $-(a + b) = -a - b$

Razones

Axioma reflexivo (=)
T. $(-1).a = -a$
Axioma distributivo
T. $(-1).a = -a$
Definición de resta

Ejemplo 1. Resolver: $-(x + 4) = 12$

Proposiciones

1. $-(x+4) = 12$
2. $-x - 4 = 12$
3. $-x = 12 + 4$
4. $-x = 16$
5. $x = -16$

Razones

Dato
T: $-(a + b) = -a - b$
T. $a - b = c \Leftrightarrow a = c + b$
Def (+)
T: $-a = -b \Leftrightarrow a = b$

Ejemplo 2. Resolver: $-(x+4) < -2$

Proposiciones

1. $-(x + 4) < -2$
2. $-x - 4 < -2$
3. $-x < -2 + 4$
4. $-x < 2$
5. $x > -2$

Razones

Dato
T: $-(a + b) = -a - b$
T. $a - b < c \Leftrightarrow a < c + b$
Def (+).
T: $-a < -b \Leftrightarrow a > b$

EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones (inecuaciones) utilizando los axiomas de los números reales y los teoremas. Grafique la solución en la recta numérica.

1. $(x + 2)3 > 6$

2. $(y + 3)10 < -5$

3. $(z + 4)2 = 8$

4. $3(x - 2) > 6$

5. $10(y - 3) < -5$

6. $2(z - 4) = 8$

7. $(x + 2) > 6$

8. $(y + 3) < -5$

9. $(z + 4) = 8$

6.5. UNIFORMIDAD

TEOREMA 5. UNIFORMIDAD (SUMA)

Si se suman miembro a miembro dos igualdades el resultado es otra igualdad:

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c, \forall d; a = b \wedge c = d \Rightarrow a + c = b + d$$

Demostración:

Proposiciones

1. $a, b, c, d \in R$
2. $a + c \in R$
3. $a + c = a + c$
4. $a = b$
5. $c = d$
6. $a + c = b + d$

Razones

- Dato
- Axioma clausurativo (+)
- Axioma reflexivo (=)
- Dato
- Dato
- Sustitución 4 y 5 en 3

TEOREMA 6. UNIFORMIDAD (PRODUCTO)

Si se multiplican miembro a miembro dos igualdades el resultado es otra igualdad.

$$U = R. \forall a, \forall b, \forall c, \forall d; a = b \wedge c = d \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$$

Observación: Se pide la demostración, al lector, en los ejercicios propuestos.

EJERCICIOS

1. Resuelva las siguientes ecuaciones (inecuaciones) utilizando los axiomas de los números reales y los teoremas. Grafique la solución en la recta numérica.

- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 1. $2(x + 9) = 6$ | 2. $-(z + \frac{1}{2}) = 7$ | 3. $2(y + 0,3) = -2,4$ |
| 4. $-(y - 1) < 1/2$ | 5. $-(y - 0,2) < 1,5$ | 6. $(z - 7/3)(-2) < -9/2$ |
| 7. $-(4 + y) = 9$ | 8. $5 + x = -0,9$ | 9. $0,2 + z = -0,7$ |
| 10. $(-5y + 5) > 3$ | 11. $-(5x + 2) < 1/2$ | 12. $-4z - 3 > -0,5$ |
| 13. $4(x - \frac{1}{2}) = 3/4$ | 14. $2 = -(y - 3)$ | 15. $-(0,7 + z) = -1,6$ |
| 16. $1/3 > (5y + 1)3$ | 17. $1/3 > (5z - 2)3$ | 18. $-4 > -(1/3x - 2)2$ |
| 19. $-(3x - 4) = 5$ | 20. $(0,5y - 4) = 3$ | 21. $-(1/2z - 2) = 3$ |
| 22. $-(x + 2) > 6$ | 23. $-(y + 3) < -5$ | 24. $-(z + 4) = 8$ |

2. Demostrar:

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $-(a - b) = -a + b$ | 2. $-(-b) = b$ | 3. $b = a \Leftrightarrow 1/a = 1/b$ |
| 4. $(b - c) \cdot a = a \cdot b - a \cdot c$ | 5. $-(b + a) = -a - b$ | 6. $a - c > b - c \Leftrightarrow a > b$ |
| 7. $a + c < b + c \Leftrightarrow a < b$ | 8. $a \cdot c < b \cdot c \Leftrightarrow a < b$ | 9. $c < 0; a \cdot c < b \cdot c \Leftrightarrow a > b$ |
| 10. $a + b < 0 \Leftrightarrow a < -b$ | 11. $a - b < 0 \Leftrightarrow a < b$ | 12. $a \cdot b < 1 \wedge b > 0 \Leftrightarrow a < 1/b$ |
| 13. $a \cdot b < 1 \wedge b < 0 \Leftrightarrow a > 1/b$ | 14. $-a < -b \Leftrightarrow a > b$ | 15. $a = b \wedge c = d \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$ |

3. Verifique el teorema de uniformidad (suma):

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $2 + 2 = 4 \wedge 2 + 7 = 9$ | 2. $-7 + 4 = -3 \wedge 2 - 5 = -3$ | 3. $6 + 3 = 11 - 2 \wedge 2 = 6 - 4$ |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|

4. Verifique el teorema de uniformidad (producto):

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $2 + 2 = 4 \wedge 2 + 7 = 9$ | 2. $-7 + 4 = -3 \wedge 2 - 5 = -3$ | 3. $6 + 3 = 11 - 2 \wedge 2 = 6 - 4$ |
|---------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|

CAPÍTULO 7

NÚMEROS COMPLEJOS ($\mathbb{C}$)

7.1. INTRODUCCIÓN

En el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) no es posible efectuar la sustracción en todos los casos. Las ecuaciones del tipo: $x + 7 = 2$, no tienen solución, porque -5 no es elemento de los números naturales. Para resolver ecuaciones de esta forma, fue necesario ampliar $\mathbb{N}$ introduciendo los números enteros ($\mathbb{Z}$).

En los enteros, se define la división sólo cuando el numerador es múltiplo del denominador (división exacta), siendo el denominador diferente de cero. En $\mathbb{Z}$, ecuaciones del tipo: $4x + 3 = 0$, no tienen solución ($x = -3/4$), porque $-3/4$ no es elemento de los enteros.

Para resolver ecuaciones de la forma: $4x + 3 = 0$, fue necesario extender el conjunto $\mathbb{Z}$ e introducir el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), para dar significado a expresiones tales como $-3/4$ (números racionales con un número finito de cifras decimales o con un número infinito de cifras decimales periódicas).

El problema de la resta y la división, para todos los casos, se soluciona en $\mathbb{Z}$ y en $\mathbb{Q}$, respectivamente. Analizaremos ahora el problema de la radicación:

1. Las raíces impares de un número tienen el mismo signo que la cantidad subradical. Por ejemplo: $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$, entre otros.
2. Las raíces pares de un número positivo tienen doble signo. Por ejemplo: $\sqrt[2]{4} = \pm 2$, porque $2^2 = 4$ y $(-2)^2 = 4$. Las raíces pares de un número **negativo** no están definidas en el conjunto de los números reales porque toda cantidad, positiva o negativa, elevada a una potencia par da como resultado un número positivo. La raíz $\sqrt[2]{-4}$ no se puede extraer en los números reales. La raíz cuadrada de -4 no es 2 porque: $2^2 \neq -4$ y tampoco -2 ya que $(-2)^2 \neq -4$. Observación: Si la raíz de un número es exacta la expresión es racional caso contrario es irracional.

Al resolver ecuaciones del tipo $x^2 + b = 0$; $b \neq 0$, se tiene que $x = \sqrt{-b}$. Este número, x , no tiene significado alguno en el conjunto de los números reales, por lo que se dice que la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$. Por ejemplo: Si $x^2 + 1 = 0$ entonces $x = \sqrt{-1}$. El número $\sqrt{-1}$ no es elemento de los reales.

El conjunto de los números complejos, representado por $\mathbb{C}$ o $\mathbb{C}$ (mayúscula negritas), permite dar significado a las expresiones del tipo $\sqrt[n]{-b}$ (siendo n un número par y radicando negativo, o bien, las potencias de base negativa cuyo exponente es una fracción irreducible de denominador par).

La manera más sencilla de trabajar con los números complejos consiste en dar un nombre a $\sqrt{-1}$. A esta cantidad se le conoce como unidad imaginaria y se representa por i . Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{-4} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

$$(-4)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

Observación: Extender un conjunto significa que el nuevo sistema debería: 1) Tener todas las propiedades algebraicas del sistema antecesor. 2) Incluir todos los números del sistema antecesor, de tal forma que las operaciones algebraicas: anteriores y nuevas; cuando se apliquen al sistema antecesor sean las mismas. 3) Contener los números del sistema nuevo.

7.2. DETERMINACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Determinar un conjunto es dar a conocer los elementos que lo conforman. Luego, los números complejos se pueden formalizar de las siguientes maneras: binómica, rectangular, polar y trigonométrica.

7.2.1. FORMA BINÓMICA (FB)

DEFINICIÓN. El conjunto de los números complejos se representa con la letra $\mathbb{C}$ o C (mayúscula negrita) y se define de la siguiente forma:

$$\mathbb{C} = \{z/z = a + bi / a \wedge b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}\}$$

Observación: un número complejo se representa en forma binómica mediante la expresión: $a + bi$; siendo a y b números reales, e $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria (Euler, 1977). Por ejemplo:

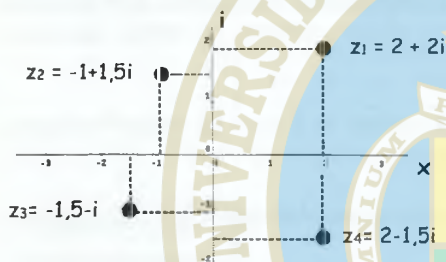
a) $z_1 = 9 - 4i$

b) $z_2 = 9 + 0i$

c) $z_3 = 2i$

Para representar geométricamente un número complejo (Gauss, 1831), denotado en forma binómica, se usa los ejes X e Y , como sistema de referencia. El primero es el eje real (x) y el segundo el eje imaginario (i). El plano X - Y , así formado, se llama plano complejo.

Ejemplo 1: Graficar: $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -1 + 1.5i$, $z_3 = -1.5 - i$, $z_4 = 2 - 1.5i$; en el plano complejo.



Observación: El punto $z_1 = 2 + 2i$ se llama "afijo" del número complejo. Nótese que el eje Y , del plano complejo, se representa con la letra i . Generalmente, se dice "el punto z " en vez de "el punto z que representa al número complejo $z = x + yi$ ".

7.2.2. CLASES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Complejo Real: Si el término imaginario es 0. Se representa de la siguiente manera $z = a + 0i = a$.

a) $z = 25 + 0i = 25$

b) $z_1 = 1 - 0i = 1$

c) $z_2 = -\frac{1}{2} + 0i = -\frac{1}{2}$

Complejo Imaginario (Puro): Si el término real es 0. Se representa de la siguiente manera $z = 0 + bi = bi$.

a) $z = 0 + 5i = 5i$

b) $z_2 = 0 - 7/2 i = -7/2 i$

c) $z_3 = 0 + 2^2 i = 2^2 i$

Complejo Nulo: Si su parte real e imaginaria son nulas. $z = 0 + 0i = 0$.

Complejos Iguales: Dos números complejos son iguales si se cumple que las partes real e imaginaria son iguales, respectivamente.

$$\text{Sea: } z_1 = a + bi, z_2 = c + di. \quad z_1 = z_2 \quad \equiv \quad a + bi = c + di \quad \equiv \quad a = c \wedge b = d$$

$$\text{Ejemplo: } 2 + 5i = 4/2 + 15i/3 \leftrightarrow 2 = 4/2 \wedge 5 = 15/3$$

Observación: en la definición anterior las letras: a , b , c y d , son elementos de los números reales.

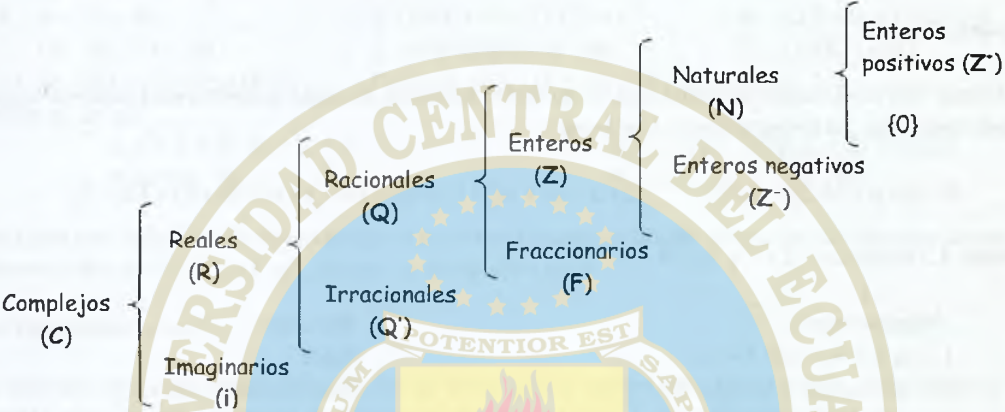
Complejos Conjugados: El conjugado de un número complejo z se obtiene cambiando el signo a la parte imaginaria, se representa por: $\bar{z}$. Es decir, si $z = a + bi$ el número complejo conjugado es $\bar{z} = a - bi$.

a) $z = 2 + 3i$ su conjugado es $\bar{z} = 2 - 3i$ b) $z_1 = 7 - 9i$ su conjugado es $\bar{z}_1 = 7 + 9i$

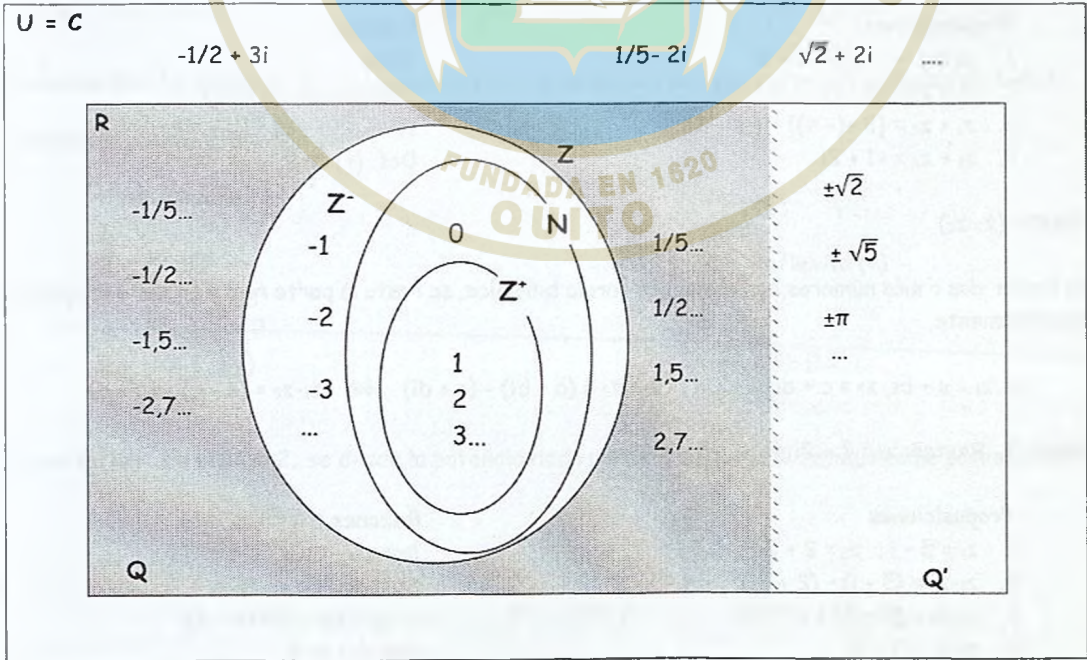
Complejos Opuestos: El opuesto de un número complejo z se obtiene cambiando el signo a la parte real e imaginaria, se representa por $-z$. Es decir, si $z = a + bi$ entonces el opuesto es: $-z = -a - bi$.

a) $z = -4 + 7i$ su opuesto $-z = 4 - 7i$ b) $z_1 = -3 - 9i$ su opuesto $-z_1 = 3 + 9i$

A continuación, se presenta un esquema de llaves que permite ver que el conjunto de los números reales es un subconjunto de los números complejos.



El siguiente diagrama de Venn - Euler muestra las relaciones de inclusión y disyunción de los conjuntos numéricos: Complejos (C), Reales (R), Racionales (Q), Irracionales (Q'), Enteros (Z), Naturales (N), enteros positivos (Z^+), Enteros negativos (Z^-).



EJERCICIOS

1. Graficar los siguientes números complejos, su conjugado y opuesto, en el plano complejo (Gaussiano).

- | | | |
|--------------|---------------|-----------------|
| 1. $3 + i$ | 2. $1/2 - 7i$ | 3. $5 + i$ |
| 4. $2i$ | 5. $-i$ | 6. $-10 + i$ |
| 7. $-1 + 5i$ | 8. 2 | 9. $-4 - 1/2 i$ |

7.2.3. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS (FORMA BINÓMICA)

Las operaciones: suma, resta, multiplicación y división de números complejos, denotados en forma binómica, se definen a continuación.

a. Suma ($z_1 + z_2$)

Para sumar dos o más números complejos, en su forma binómica, se suma la parte real y la parte imaginaria, respectivamente. En forma simbólica se tiene:

$$\text{Si: } z_1 = a + bi, z_2 = c + di. \quad z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) \Leftrightarrow z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo 1. Sumar $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 4 + 2i$.

Proposiciones

- $z_1 = 2 + i; z_2 = 4 + 2i$
- $z_1 + z_2 = (2 + i) + (4 + 2i)$
- $z_1 + z_2 = (2 + 4) + (1 + 2)i$
- $z_1 + z_2 = 6 + 3i$

Razones

Dato
Sustitución en $z_1 + z_2$
Def. (+) en C.
Def. (+) en R.

Ejemplo 2. Sumar $z_1 = 3 - i$ y $z_2 = -4 + 3i$.

Proposiciones

- $z_1 = 3 - i; z_2 = -4 + 3i$
- $z_1 + z_2 = (3 - i) + (-4 + 3i)$
- $z_1 + z_2 = [3 + (-4)] + (-1 + 3)i$
- $z_1 + z_2 = -1 + 2i$

Razones

Dato
Sustitución en $z_1 + z_2$
 $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
Def. (+) en R

b. Resta ($z_1 - z_2$)

Para restar dos o más números complejos, en forma binómica, se resta la parte real y la parte imaginaria, respectivamente.

$$\text{Si: } z_1 = a + bi, z_2 = c + di. \quad z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) \Leftrightarrow z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo 1. Restar: $z_2 = 2 + 2i$ de $z_1 = 5 - i$.

Proposiciones

- $z_1 = 5 - i; z_2 = 2 + 2i$
- $z_1 - z_2 = (5 - i) - (2 + 2i)$
- $z_1 - z_2 = (5 - 2) + (-1 - 2)i$
- $z_1 - z_2 = 3 - 3i$

Razones

Dato
Sustitución en $z_1 - z_2$
 $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
Def. (+) en R.

Ejemplo 2. Restar: $z_4 = 3 + 2i$ de $z_3 = -i$.

Proposiciones

1. $z_3 = -i$; $z_4 = 3 + 2i$
2. $z_3 - z_4 = (-i) - (3 + 2i)$
3. $z_3 - z_4 = (-3) + (-1 - 2i)$
4. $z_3 - z_4 = -3 - 3i$

Razones

Dato

Sustitución en $z_3 - z_4$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Def. (+) en R.

EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes operaciones.

1. $(2 + 3i) + (5 + 2i)$
2. $(-2 + 1,2i) - i$
3. $(-i + 4) - (-1 + 8i)$
4. $4 - (5 - 9i)$
5. $(1/2 - 5i) + (2/3 - i)$
6. $(0,5 + 0,2i) - (2 + 3i)$
7. $(2 - 2i) - (3 - 3i)$
8. $(25 + 30i) - (6 + 8i)$
9. $(7,25i) + (2)$
10. $(2 + 3i) - (7 + 4i) + (6 - i)$
11. $(1/2 + 2i) - (5 + 4i) - (5 - 6i)$

2. Restar z_1 de z_2 .

1. $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 5 - 3i$
2. $z_1 = 1/2 + 3i/4$, $z_2 = 5/2 - 3i/2$
3. $z_1 = 8 - 2i$, $z_2 = -3i$
4. $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = 5 + 5i$

3. Verificar que la definición de resta de los números enteros se puede aplicar en los números complejos.

Observación: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, siendo $-z_2$ el opuesto de z_2 .

c. Multiplicación ($z_1 \cdot z_2$).

En la multiplicación de números complejos se tiene que la unidad imaginaria puede estar elevada a un exponente par o impar. La unidad imaginaria se denota por $i = \sqrt{-1}$, luego, las potencias son:

1. $i^1 = i$
2. $i^2 = -1$
3. $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
4. $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$
5. $i^5 = i^4 \cdot i = i$
6. $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$
7. $i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$
8. $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$
9. $i^9 = i^4 \cdot i^4 \cdot i = i$
10. $i^{10} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 = -1$
11. $i^{11} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^3 = -i$
12. $i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1$

Observación: La potencia: $i^0 = 1$. Los valores de las potencias de i se repiten en períodos de 4 en 4.

Ejemplo 1. Calcular el valor de i^{55} .

Proposiciones

1. i^{55}
2. $i^{55} = i^{55}$
3. $i^{55} = (i^4)^{13} \cdot i^3$
4. $i^{55} = (1)^{13} \cdot i^3$
5. $i^{55} = 1 \cdot (-i)$
6. $i^{55} = -i$

Razones

Dato

Axi. Reflexivo (=)

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$i^4 = 1$$

Def. (a^n); $i^3 = -i$

Def. (x)

Observación: En el paso 2, se divide la potencia dada para 4 y se toma el residuo como potencia de i .

$$i^{55} = i^x$$

$$\begin{array}{r} 55 \\ 3 \overline{) 4} \\ 13 \end{array}$$

$$i^{55} = i^{4(13) \cdot 3} \rightarrow i^{55} = i^{4(13)} \cdot i^3 \rightarrow i^{55} = 1^{13} \cdot (-i) = -i$$

El cociente indica que el período se repite 13 veces y el residuo indica el exponente de dicho período.

Ejemplo 2. Calcular el valor de i^{-75} .

Proposiciones

1. i^{-75}
2. $i^{-75} = i^{-75}$
3. $i^{-75} = 1/i^{75}$
4. $i^{-75} = 1/(i^4)^{18} \cdot i^3$
5. $i^{-75} = 1/i^3$
6. $i^{-75} = -1/i$
7. $i^{-75} = (-1/i) \cdot (i/i)$
8. $i^{-75} = -i/i^2$
9. $i^{-75} = -i/-1$
10. $i^{-75} = i$

Razones

Dato
Ax. Reflexivo (=)
 $a^n = 1/a^n$
Descomposición de factores
 $i^4 = 1$; def. (a^n)
 $i^3 = -1$
Racionalización
Def. (x)
 $i^2 = -1$
Simplificación

Observación: En el paso 7, como i es igual a $\sqrt{-1}$, entonces se debe racionalizar el denominador.

Ejemplo 3. Calcular el valor de $z = \frac{(1+i)^9}{1+i^9}$

Proposiciones

1. $z = \frac{(1+i)^9}{1+i^9}$
2. $z = \frac{(1+i)^9}{1+i}$
3. $z = \frac{(1+i)^8 \cdot (1+i)}{1+i}$
4. $z = (1+i)^8$
5. $z = [(1+i)^2]^4$
6. $z = (1+2i+i^2)^4$
7. $z = (1+2i-1)^4$
8. $z = (2i)^4$
9. $z = 2^4 \cdot i^4$
10. $z = 16 \cdot 1$
11. $z = 16$

Razones

Dato
 $i^9 = i^4 \cdot i^4 \cdot i = i$
 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Simplificación
 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Cuadrado de un binomio
 $i^2 = -1$
Términos semejantes
T: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
Def. (a^n); $i^4 = 1$
Def. (x)

Observación: z es un complejo real.

EJERCICIOS

1. Calcular los valores de las siguientes potencias.

1. i^{28}

4. $(1+i)^{16}$

7. $\frac{(1-i)^6 - 1}{(1+i)^6 + 1}$

2. i^{33}

5. $(1-i)^4$

8. $\frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$

3. $(-i)^{14}$

6. $i^{-3} + i^{-4}$

9. $\frac{(1+i)^9}{(1+i)^7}$

Para multiplicar dos o más números complejos, en forma binómica, se procede de la siguiente manera (álgebra elemental):

Si: $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$.

$$\begin{array}{r} a + bi \\ c + di \\ \hline ac + cbi \\ adi + bdi^2 \\ \hline ac + adi + bci + bdi^2 \end{array}$$

En la respuesta, de la multiplicación anterior, se agrupan los términos con factor común (i) y se reemplaza i^2 por -1:

$$\text{Si: } z_1 = a + bi, z_2 = c + di. \quad z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) \Leftrightarrow z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo 1. Calcular $z_1 \cdot z_2$, si: $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 + 2i$.

Proposiciones

1. $z_1 = 2 + i; z_2 = 3 + 2i$
2. $z_1 z_2 = (2 + i)(3 + 2i)$
3. $z_1 z_2 = [(2)(3) + (2)(2i) + (i)(3) + (i)(2i)]$
4. $z_1 z_2 = 6 + 4i + 3i + 2i^2$
5. $z_1 z_2 = 6 + 4i + 3i + 2(-1)$
6. $z_1 z_2 = 6 + 4i + 3i - 2$
7. $z_1 z_2 = 4 + 7i$

Razones

Dato
 $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$
 $m(a + b) = ma + mb$
 Def. (x)
 $i^2 = -1$
 Def. (x)
 Términos semejantes

Ejemplo 2. Multiplicar: $z_1 = 1/2 + i$ y $z_2 = 3 + 7/2i$.

Proposiciones

1. $z_1 = 1/2 + i; z_2 = 3 + 7/2i$
2. $z_1 z_2 = (1/2 + i)(3 + 7/2i)$
3. $z_1 z_2 = [(1/2)(3) + (1/2)(7/2i) + (i)(3) + (i)(7/2i)]$
4. $z_1 z_2 = 3/2 + 7/4i + 3i + 7/2i^2$
5. $z_1 z_2 = 3/2 + 7/4i + 3i + 7/2(-1)$
6. $z_1 z_2 = 3/2 + 7/4i + 3i - 7/2$
7. $z_1 z_2 = -2 + 19/4i$

Razones

Dato
 $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$
 $m(a + b) = ma + mb$
 Def. (x)
 $i^2 = -1$
 Def. (x)
 Términos semejantes

d. División ($z_1/z_2; z_2 \neq 0$)

Para dividir dos o más números complejos, en su forma binómica, se racionaliza el denominador. Es decir, se multiplica el numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador, siempre y cuando el denominador (divisor) sea diferente de cero.

$$\text{Si: } z_1 = a + bi, z_2 = c + di. \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \times \frac{(c - di)}{(c - di)} \quad z_2 \neq 0$$

Ejemplo 1. Dividir: $z_1 = 2 + i$ para $z_2 = 3 + 2i$.

Proposiciones

1. $z_1 = 2 + i; z_2 = 3 + 2i$
2. $z_1/z_2 = (2 + i)/(3 + 2i)$
3. $z_1/z_2 = [(2 + i)/(3 + 2i)][(3 - 2i)/(3 - 2i)]$
4. $z_1/z_2 = [(2 + i)(3 - 2i)]/[(3 + 2i)(3 - 2i)]$
5. $z_1/z_2 = [6 - 4i + 3i - 2i^2]/[9 - 4i^2]$
6. $z_1/z_2 = [6 - 4i + 3i - 2(-1)]/[9 - 4(-1)]$
7. $z_1/z_2 = [6 - 4i + 3i + 2]/[9 + 4]$
8. $z_1/z_2 = [8 - i]/[13]$
9. $z_1/z_2 = 8/13 - i/13$

Razones

Dato
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)}$
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \times \frac{(c - di)}{(c - di)}$
 Def. (x)
 Def. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
 $i^2 = -1$
 Def. (x)
 Def. (+)
 Axi. Distributivo

Ejemplo 2. Dividir: $z_1 = 5 - 2i$ para $z_2 = 4 + 2i$.

Proposiciones

1. $z_1 = 5 - 2i$; $z_2 = 4 + 2i$
2. $z_1/z_2 = (5 - 2i)/(4 + 2i)$
3. $z_1/z_2 = [(5 - 2i)/(4 + 2i)][(4 - 2i)/(4 - 2i)]$
4. $z_1/z_2 = [(5 - 2i)(4 - 2i)]/[(4 + 2i)(4 - 2i)]$
5. $z_1/z_2 = [20 - 10i - 8i + 4i^2]/[16 - 4i^2]$
6. $z_1/z_2 = [20 - 10i - 8i + 4(-1)]/[16 - 4(-1)]$
7. $z_1/z_2 = [20 - 10i - 8i - 4]/[16 + 4]$
8. $z_1/z_2 = [16 - 18i]/[20]$
9. $z_1/z_2 = 4/5 - 9i/10$

Razones

Dato

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \times \frac{(c - di)}{(c - di)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \times \frac{(c - di)}{(c - di)}$$

Def. (x)

$$\text{Def. } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$i^2 = -1$$

Def. (x)

Def. (+)

Axi. Distributivo. Simplificación

EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes operaciones con números complejos.

1. $(2 + 5i) \times (2 + 8i)$

2. $(-2 + 1,2i) \times i$

3. $(-i + 4) \div (-1 + 8i)$

4. $(4 + 3i) \times (5 - 9i)$

5. $(1/2 - 5i) \div (2/3 - i)$

6. $(0,5 + 0,2i) - (2 + 3i)$

7. $(2 - 2i) \times (3 - 3i)$

8. $(25 + 30i) \div (6 + 8i)$

9. $(7,25i) \div (2 + 2i)$

10. $[(2 + 3i)(7 + 4i)] \div (6 - i)$

11. $[(1/2 + 2i) \div (5 + 4i)] \times (5 - 6i)$

7.3. FORMA RECTANGULAR (FR)

La expresión binómica de un número complejo ($z = x + yi$; $x \wedge y \in \mathbb{R}$) se puede escribir, de manera simplificada, usando pares ordenados elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es decir:

$$z = x + yi = (x, y)$$

A cualquiera de estas dos formas se conoce como forma binómica, sin embargo, llamaremos rectangular a la segunda (Hamilton, 1870).

En el par ordenado (x, y) , x es la parte real de z e y la parte imaginaria. El número complejo: $2 + 2i$ (forma binómica) se escribe como $(2, 2)$, en forma rectangular.

Los números complejos de la forma $(x, 0)$, con parte imaginaria 0, se escriben con el número real x . por ejemplo: $(1, 0) = 1$, $(0, 0) = 0$, $(2, 0) = 2$, entre otros. El número complejo i se representa por $(0, 1)$, es decir, $i = (0, 1)$.

Los pares ordenados de la forma $(x, 0)$ siempre se encuentran en el eje horizontal por esta razón se llama **eje real**. Los pares ordenados de la forma $(0, y)$ se encuentran en el eje vertical por lo que se le llama **eje imaginario**. Todo número complejo puede ser representado mediante puntos en el plano. El plano usado para esta representación se conoce con el nombre de plano complejo.

DEFINICIÓN:

Todo número complejo se puede escribir de la forma: $z = (x, y)$, por lo tanto:

$$C = \{z/z = (x, y); x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

7.3.1. CLASES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Conjugado. Si $z = (x,y)$ es un número complejo, entonces $\bar{z} = (x, -y)$ es el conjugado de z .

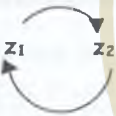
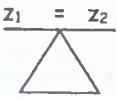
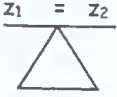
Opuesto. Si $z = (x,y)$ es un número complejo entonces $-z = (-x, -y)$ es el opuesto aditivo de z .

7.3.2. AXIOMAS DE LA IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS ($z_1 = z_2$)

Dos números complejos son iguales si y solo si sus partes reales e imaginarias son iguales:

$$z_1 = z_2 \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2; \quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

La igualdad de números complejos cumple con los siguientes axiomas:

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. DICOTOMÍA	Entre dos números complejos cualesquiera se cumple una y solo una de las siguientes relaciones: son iguales o son diferentes.	$z_1 = 2+3i, z_2 = 3+2i:$ $z_1 \neq z_2$ $z_1 = 3i/2, z_2 = 1,5i:$ $z_1 = z_2$	$U = \mathbb{C}, \forall z_1, z_2:$ $z_1 = z_2 \vee z_1 \neq z_2$
2. REFLEXIVO 	Todo número complejo es igual a sí mismo.	$z_1 = \sqrt{2}-0,3i$ $z_1 = z_1$	$U = \mathbb{C}, \forall z:$ $z = z$
3. SIMÉTRICO 	Si un primer número complejo cualquiera es igual a un segundo, equivale a decir que el segundo es igual al primero.	$z_1 = 3i/2, z_2 = 1,5i$ $3i/2 = 1,5i$ $1,5i = 3i/2$	$U = \mathbb{C}, \forall z_1, z_2:$ $z_1 = z_2 \Leftrightarrow z_2 = z_1$
4. TRANSITIVO 	Si un primer número complejo es igual a un segundo y este igual a un tercero, implica que el primero es igual al tercero.	$z_1 = 4i, z_2 = 2^2i,$ $z_3 = \sqrt{16}i$ $4i = 2^2i \wedge 2^2i = \sqrt{16}i$ $\rightarrow 4i = \sqrt{16}i$	$U = \mathbb{C}, \forall z_1, z_2, z_3:$ $z_1 = z_2 \wedge z_2 = z_3 \Rightarrow z_1 = z_3$
5. ADITIVO  $z_1 + z_3 = z_2 + z_3$	Si a cada miembro de una igualdad se suma un mismo número complejo cualquiera, la relación de igualdad se conserva (subsiste, permanece).	$z_1 = 4i, z_2 = 2^2i$ $z_3 = 2$ $4i + 2 = 2^2i + 2$	$U = \mathbb{C}, \forall z_1, z_2, z_3:$ $z_1 = z_2 \wedge z_3 = z_3 \Rightarrow z_1 + z_3 = z_2 + z_3$
6. MULTIPLICATIVO  $z_1 \times z_3 = z_2 \times z_3$	Si a cada miembro de una igualdad se multiplica por un mismo número complejo cualquiera, la relación de igualdad subsiste (se conserva).	$z_1 = 4i, z_2 = 2^2i$ $z_3 = 2$ $4i \cdot 2 = 2^2i \cdot 2$	$U = \mathbb{C}, \forall z_1, z_2, z_3:$ $z_1 = z_2 \wedge z_3 = z_3 \Rightarrow z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_3$

7.3.3. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA RECTANGULAR

Las operaciones: suma, resta, multiplicación y división se definen a continuación:

a. Suma ($z_1 + z_2$).

Se suman las primeras y segundas componentes, de los pares ordenados, respectivamente.

$$\text{Si: } z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2). \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \Leftrightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ejemplo 1. Sumar: $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 4 + 2i$.

Proposiciones

1. $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 4 + 2i$
2. $z_1 + z_2 = (2, 1) + (4, 2)$
3. $z_1 + z_2 = (2 + 4, 1 + 2)$
4. $z_1 + z_2 = (6, 3)$
5. $z_1 + z_2 = 6 + 3i$

Razones

Dato
Sustitución en $z_1 + z_2$. FR.
Def. (+) en C.
Def. (+) en R.
Forma binómica

Ejemplo 2. Sumar: $z_1 = 3 - i$ y $z_2 = -4 + 3i$.

Proposiciones

1. $z_1 = 3 - i$; $z_2 = -4 + 3i$
2. $z_1 + z_2 = (3, -1) + (-4, 3)$
3. $z_1 + z_2 = (3 - 4, -1 + 3)$
4. $z_1 + z_2 = (-1, 2)$
5. $z_1 + z_2 = -1 + 2i$

Razones

Dato
Sustitución en $z_1 + z_2$. FR.
Def. (+) en C. FR.
Def. (+) en R.
Forma binómica

La suma de números complejos cumple con los siguientes axiomas:

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	La suma de dos números C cualesquiera es un número C único.	$(2,0)$ y $(0,4) \in C \wedge$ $(2,0) + (0,4) = (2,4)$ $\rightarrow (2,4) \in C$	$U = C. \forall z_1, z_2, \exists z_3:$ $z_1 + z_2 = z_3 \Rightarrow z_3 \in C$
2. CONMUTATIVO	El orden de los sumandos no altera la suma total.	$(5,0) + (0,4) =$ $(0,4) + (5,0) = (5,4)$	$U = C. \forall z_1, z_2$ $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. ASOCIATIVO	Los sumandos C se pueden agrupar de cualquier modo, sin que altere la suma total.	$[(1,2) + (3,4)] +$ $(2,5) =$ $(1,2) + [(3,4) +$ $(2,5)]$	$U = C. \forall z_1, z_2, z_3:$ $(z_1 + z_2) + z_3 =$ $z_1 + (z_2 + z_3)$
4. MODULATIVO El par ordenado $(0,0)$ se llama elemento idéntico, neutro o módulo de la adición.	Existe uno y solo un C , $(0,0)$, tal que sumado con cualquier C , el resultado es el mismo número C .	$(9,4) + (0,0) = (9,4)$	$U = C. \forall z, \exists (0,0):$ $(0,0) + (x,y) = (x,y)$
5. INVERTIVO $(-z)$, se llama inverso aditivo u opuesto de z .	Para cada complejo z existe un complejo $(-z)$ tal que sumados es igual a $(0,0)$; con z diferente de cero.	$(5,1) + (-5,-1) = (0,0)$	$U = C. \forall z, \exists (-z):$ $z + (-z) = (0,0); z \neq (0,0)$

Ejemplo 3. Demostrar: $U = C. \forall z_1, z_2: z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Proposiciones

1. $z_1 + z_2 = z_1 + z_2$
2. $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
3. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
4. $z_1 + z_2 = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$
5. $z_1 + z_2 = (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$
6. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Razones

- Axi. Reflexivo (=).
 Def. Complejo. FR.
 Def (+) en C . FR
 Axi. Conmutativo (+), Reales.
 Def (+) en C . FR
 Def. Complejo. FR.

b. Resta ($z_1 - z_2$)

La resta de números complejos consiste en **sumar** al minuendo el opuesto del sustraendo.

Si: $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2): z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

EJERCICIOS

1. Demostrar las propiedades de la suma.
2. Sumar los siguientes números complejos, en forma rectangular.

- | | | |
|-------------------------------------|--|------------------------------|
| 1. $(2 + 5i) + (2 + 8i)$ | 2. $(-2 + 1,2i) - i$ | 3. $(-i + 4) - (-1 + 8i)$ |
| 4. $4 - (5 - 9i)$ | 5. $(1/2 - 5i) + (2/3 - i)$ | 6. $(0,5 + 0,2i) - (2 + 3i)$ |
| 7. $(2 - 2i) - (3 - 3i)$ | 8. $(25 + 30i) - (6 + 8i)$ | 9. $(7,25i) + (2)$ |
| 10. $(2 + 3i) - (7 + 4i) + (6 - i)$ | 11. $(1/2 + 2i) - (5 + 4i) - (5 - 6i)$ | |

c. Multiplicación ($z_1 \cdot z_2$)

Si: $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2): z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) (x_2, y_2) \Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

La primera componente del par ordenado **se obtiene** hallado el producto de las primeras componentes **menos** el producto de las segundas componentes. La segunda componente es igual a la suma de los productos de los extremos más la de los medios.

Ejemplo 1. Multiplicar: $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 + 2i$.

Proposiciones

1. $z_1 = 2 + i; z_2 = 3 + 2i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (2, 1) (3, 2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (2 \times 3 - 1 \times 2, 2 \times 2 + 3 \times 1)$
4. $z_1 \cdot z_2 = (6 - 2, 4 + 3)$
5. $z_1 \cdot z_2 = (4, 7)$
6. $z_1 \cdot z_2 = 4 + 7i$

Razones

- Dato
 FR
 Def. (x) en C
 Def. (x) en R
 Def. (+) en R
 Forma binómica

Ejemplo 2. Multiplicar: $z_1 = 1/2 + i$ y $z_2 = 3 + 7/2i$.

Proposiciones

1. $z_1 = 1/2 + i; z_2 = 3 + 7/2i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (1/2, 1) (3, 7/2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = [(1/2)(3) - (1)(7/2), (1/2)(7/2) + (1)(3)]$
4. $z_1 \cdot z_2 = (3/2 - 7/2, 7/4 + 3)$
5. $z_1 \cdot z_2 = (-2, 19/4)$
6. $z_1 \cdot z_2 = -2 + (19/4)i$

Razones

- Dato
 FR
 Def. (x) en C
 Def. (x) en R
 Def. (+) en R
 Forma binómica

La multiplicación de números complejos cumple con los siguientes axiomas:

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO	F. SIMBÓLICA
1. CLAUSURATIVO	El producto de dos números complejos cualesquiera es un complejo único.	$(2,1) \text{ y } (3,4) \in \mathbb{C} \wedge$ $(2,1) \cdot (3,4) = (2,11)$ $\rightarrow (2,11) \in \mathbb{C}$	$U = \mathbb{C}. \forall z_1, z_2, z_3:$ $z_1 \cdot z_2 = z_3 \Rightarrow z_3 \in \mathbb{C}$
2. CONMUTATIVO	El orden de los factores no altera el producto total.	$(5,0) \cdot (1,4) =$ $(1,4) \cdot (5,0) = (5,20)$	$U = \mathbb{C}. \forall z_1, z_2$ $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
3. ASOCIATIVO	Los factores complejos se pueden agrupar de cualquier modo, sin que altere el producto total.	$[(1,2) \cdot (3,4)] \cdot (2,5) =$ $(1,2) \cdot [(3,4) \cdot (2,5)]$	$U = \mathbb{C}. \forall z_1, z_2, z_3:$ $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 =$ $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
4. MODULATIVO El par ordenado (1,0) se llama elemento idéntico, neutro o módulo de la multiplicación.	Existe uno y solo un número complejo, tal que multiplicado con cualquier complejo, el resultado es siempre ese número complejo.	$(9,4) \cdot (1,0) = (9,4)$	$U = \mathbb{C}. \forall z, S_{(1,0)}:$ $(1,0) \cdot (x,y) = (x,y)$
5. INVERTIVO (z^{-1}) , se llama inverso multiplicativo o recíproco de z y viceversa.	Para cada número complejo z , diferente de $(0,0)$, existe un número complejo (z^{-1}) tal que: $z \cdot (z^{-1}) = (1,0)$.	$(5,1) \cdot (5/26, -1/26) = (1,0)$	$U = \mathbb{C}. \forall z, \exists (z^{-1}):$ $z \cdot (z^{-1}) = (1,0);$ $z \neq (0,0).$

Observación: el inverso multiplicativo de $z = (x,y)$; $z \neq 0$, es $z^{-1} = [x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2)]$; $(x^2+y^2) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones

- $z = (x,y), z^{-1} = (a,b)$
- $z \cdot z^{-1} = (x,y)(a,b)$
- $zz^{-1} = (xa-yb, xb+ya)$
- $(x,y)(a,b) = (xa-yb, xb+ya)$
- $(x,y)(a,b) = (1,0) = 1$
- $xa - yb = 1$ y $xb + ya = 0$
- $a = x/(x^2+y^2)$ y $b = -y/(x^2+y^2)$
- $z^{-1} = [x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2)]$; $(x^2+y^2) \neq 0$

Razones

Dato, suposición $z^{-1} = (a,b)$; $a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}$
Sustitución en zz^{-1}
Def. (x) en $\mathbb{C}$
Axi. Transitivo $(=)$ en $\mathbb{C}$, 2 y 3
Axi. Modulativo (x) en $\mathbb{C}$
Igualdad de números $\mathbb{C}$. 4 y 5
Resolviendo el sistema para a y b .
Sustitución: 7 en 1

Si $z \neq (0,0)$ se tiene que $(x^2+y^2) \neq 0$. Luego el recíproco de un número complejo se define como:

$$z^{-1} = [x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2)]; (x^2+y^2) \neq 0$$

Ejemplos: El recíproco de $(2,3)$ es $(2/13, -3/13)$

El recíproco de $(0,-4)$ es $(0, 1/4)$

Observación: El producto de un número complejo por su inverso (recíproco) es siempre igual a 1.

$$(2,3) (2/13, -3/13) = (1,0) = 1$$

$$(0,-4) (0,1/4) = (1,0) = 1$$

d. División (z_1/z_2 ; $z_2 \neq 0$)

La división de dos números complejos es igual a multiplicar el dividendo por el recíproco del divisor.

$$\text{Si: } z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2); z_2 \neq 0. \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}; z_2 \neq 0$$

Ejemplo 1. Dividir: $(1,3)/(2,3)$.

Proposiciones

1. $z_1 / z_2 = (1,3)/(2,3)$
2. $z_1 / z_2 = (1,3) (2/13, -3/13)$
3. $z_1 / z_2 = (2/13 + 9/13, -3/13 + 6/13)$
4. $z_1 / z_2 = (11/13, 3/13)$

Razones

- Dato
Def. de División en $\mathbb{C}$.
Def. (x) en $\mathbb{C}$
Def. (+) en $\mathbb{R}$

Cualquier conjunto con dos operaciones, adición y multiplicación, que cumplan con las diez propiedades indicadas anteriormente, más la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, se llama campo. La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma se define como:

$$U = \mathbb{C}. \forall z_1, z_2, z_3: z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$$

Ejemplo 1. Resolver: $(1,3)[(2,3) + (4,1)]$, dos formas.

Proposiciones

1. $(1,3)[(2,3) + (4,1)]$
2. $= (1,3)(2,3) + (1,3)(4,1)$
3. $= (-7,9) + (1,13)$
4. $= (-6,22)$

Razones

- Dato
Propiedad distributiva.
Def. (x) en $\mathbb{C}$
Def. (+) en $\mathbb{C}$

Proposiciones

1. $(1,3)[(2,3) + (4,1)]$
2. $= (1,3)(6,4)$
3. $= (-6,22)$

Razones

- Dato
Def. (+) en $\mathbb{C}$
Def. (x) en $\mathbb{C}$

EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes operaciones con números complejos, en forma rectangular.

1. $(2 + 5i) \times (2 + 8i)$
2. $(-2 + 1,2i) \times i$
3. $(-i + 4) \div (-1 + 8i)$
4. $(4 + 3i) \times (5 - 9i)$
5. $(1/2 - 5i) \div (2/3 - i)$
6. $(0,5 + 0,2i) - (2 + 3i)$
7. $(2 - 2i) \times (3 - 3i)$
8. $(25 + 30i) \div (6 + 8i)$
9. $(7,25i) \div (2 + 2i)$
10. $[(2 + 3i) \times (7 + 4i)] \div (6 - i)$
11. $[(1/2 + 2i) \div (5 + 4i)] \times (5 - 6i)$

2. Demostrar $U = \mathbb{C}. \forall z_1, z_2, z_3:$

1. $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$
4. $z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 0$
5. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_4} = \frac{z_1 z_4 + z_2 z_3}{z_2 z_4}; z_2 \neq 0, z_4 \neq 0$

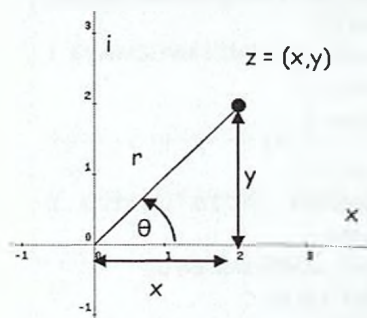
6. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
7. $z^{-1} = \overline{z}/z$
8. $(z_1/z_2) (z_3/z_4) = (z_1 z_3)/(z_2 z_4); z_2 \neq 0, z_4 \neq 0$
9. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

3. Mostrar, gráficamente, que:

1. z y $-z$ son simétricos respecto del origen (Simetría respecto de un punto)
2. z y $\overline{z}$ son simétricos respecto del eje X (reflexión) (Simetría respecto de una recta)

7.4. FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO (FP)

Sea el número complejo $z = (x,y) = x + yi$; no nulo. Llamaremos.



Módulo de z, radio (r) o valor absoluto de z a la longitud del segmento (cantidad positiva) que une el origen con el punto z (afijo), denotado por: r o $|z|$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + yi| \quad (\text{T. de Pitágoras})$$

Argumento de z o amplitud, al ángulo positivo (θ) que forma el segmento (origen - afijo) con el sentido positivo del eje de las abscisas, denotado por $\text{Arg}(z)$ o θ :

$$\text{Arg}(z) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{Def. arco tangente})$$

Observación: en función de los signos de x e y se suma π al ángulo obtenido para hallar el ángulo positivo, en sentido anti horario.

DEFINICIÓN

Si r es el módulo y θ el argumento, de un número complejo no nulo, entonces (r, θ) son las coordenadas polares planas del número complejo z . Luego, el conjunto de los números complejos, se determina por:

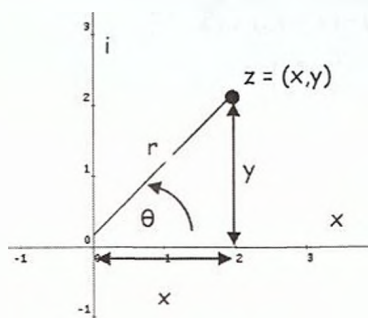
$$C = \{z/z = (r, \theta); r = |z| \wedge \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right); 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

El número $z = (r, \theta)$ se puede denotar, también, escribiendo el módulo (r) y el ángulo (θ) como subíndice: $z = r_\theta$ o $z = |z|_\theta$. Geométricamente se representa por la circunferencia de radio r , con centro en el origen, y por el ángulo θ , que forma con el eje X ; siendo $0 \leq \theta < 2\pi$. El extremo opuesto al origen del segmento corresponde al afijo.

Cada número complejo no nulo tiene infinidad de argumentos (multiplicidad), positivos y negativos, que se diferencian entre sí en múltiplos enteros de 2π . Por ejemplo: $1_{\pi/2} = 1_{5\pi/2} = 1_{9\pi/2}$, entre otros. Si z es igual a cero, su módulo es cero, pero su argumento no está definido.

Si se quiere evitar la multiplicidad de argumentos (ángulos coterminales) se puede seleccionar para θ un intervalo semiabierto de longitud 2π . Por ejemplo: para $[0, 2\pi)$ se obtiene el argumento principal de z , y la multiplicidad de los argumentos (multivariados) con: $\theta_k = \{\phi + 2k\pi; k \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo 1. Graficar $z = 2 + 2i$. Hallar el módulo y el argumento principal. Escribir z en forma polar.



El **módulo**, radio (r) o valor absoluto de z :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + yi|$$

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

El **ángulo** ($0 \leq \theta < 2\pi$), argumento o amplitud de z :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right); \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) \rightarrow \theta = \tan^{-1}(1) \rightarrow \theta = 45^\circ = \pi/4$$

Forma polar: $z = (2\sqrt{2}, 45^\circ)$ o $z = 2\sqrt{2} \pi/4$

Ejemplo 2. Expresar en forma polar: $z_1 = 1+i$, $z_2 = -4+3i$, $z_3 = -2-2i$, $z_4 = 4-3i$.

$$z_1 = 1+i$$

$$r_1 = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \pi/4 \text{ (positivo)}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \pi/4 = (\sqrt{2}; 0,25\pi)$$

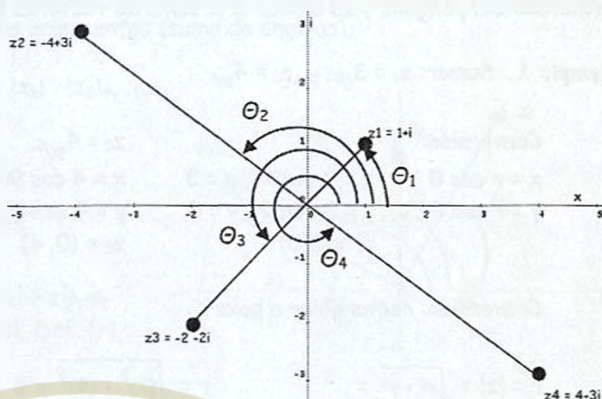
$$z_2 = -4+3i$$

$$r_2 = |z| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = 5$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = -0,21\pi$$

$$\theta_2 = \pi - 0,21\pi = 0,79\pi \text{ (positivo)}$$

$$z_2 = 5 \ 0,79\pi = (5; 0,79\pi)$$



$$z_3 = -2-2i$$

$$r_3 = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \pi/4$$

$$\theta_3 = \pi + \pi/4 = 5\pi/4 \text{ (positivo)}$$

$$z_3 = \sqrt{8} \ 5\pi/4 = (\sqrt{8}, 5\pi/4)$$

$$z_4 = 4-3i$$

$$r_4 = |z| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = 5$$

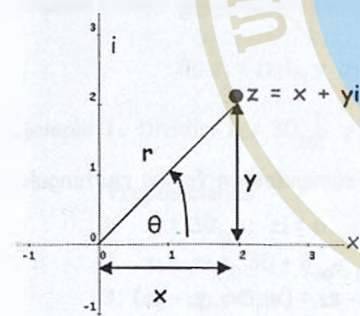
$$\theta_4 = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = -0,21\pi$$

$$\theta_4 = 2\pi - 0,21\pi = 1,79\pi \text{ (positivo)}$$

$$z_4 = 5 \ 1,79\pi = (5; 1,79\pi)$$

7.4.1. CONVERSIÓN DE FORMA BINÓMICA A POLAR Y VICEVERSA

Sea el número complejo $z = (x,y) = x + yi$; no nulo. Para Efectuar las conversiones se procede de la siguiente manera.



Binómica: $z = x + yi = (x,y)$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + yi|$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Polar: $z = (r, \theta)$ ó $z = r e^{j\theta}$

Polar: $z = (r, \theta)$ ó $z = r e^{j\theta}$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Binómica: $z = x + yi = (x,y)$

7.4.2. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

A continuación, se definen las operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación:

a. Suma (z_1+z_2).

Para sumar dos números complejos, en forma polar, se escriben los sumandos en forma rectangular. Luego, se suman las primeras y segundas componentes, de los pares ordenados, respectivamente.

$$\text{Si: } z_1 = (r_1, \theta_1) = (x_1, y_1), z_2 = (r_2, \theta_2) = (x_2, y_2).$$

$$z_1+z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \Leftrightarrow z_1+z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Observación: El resultado puede escribirse en forma polar.

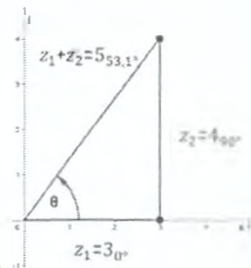
Para sumar varios números complejos, gráficamente: se traza z_1 en el plano complejo, en el afijo de z_1 se traza el número z_2 , y así sucesivamente. La suma está representada por el segmento dirigido comprendido desde el origen al afijo del último número graficado. El procedimiento descrito se conoce con el nombre de método del polígono y es similar a la suma de vectores mediante sus componentes rectangulares.

Ejemplo 1. Sumar: $z_1 = 3_{0^\circ}$ y $z_2 = 4_{90^\circ}$.

Conversión:	$z_1 = 3_{0^\circ}$	$z_2 = 4_{90^\circ}$	$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$x = r \cos \theta$	$x = 3 \cos 0^\circ, x = 3$	$x = 4 \cos 90^\circ, x = 0$	$z_1 + z_2 = (3 + 0, 0 + 4)$
$y = r \sin \theta$	$y = 3 \sin 0^\circ, y = 0$	$y = 4 \sin 90^\circ, y = 4$	$z_1 + z_2 = (3, 4)$
	$z_1 = (3, 0)$	$z_2 = (0, 4)$	

Conversión: rectangular a polar.

$r = z = \sqrt{x^2 + y^2} =$	$r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53,1^\circ$
	$z_1 + z_2 = 5_{53,1^\circ}$ Forma polar



Ejemplo 2. Sumar: $z_1 = 2_{45^\circ}$, $z_2 = 3_{190^\circ}$, $z_3 = 2,5_{270^\circ}$.

Componente:	Real	Imaginaria
$z_1 = 2_{45^\circ}$	$x = 2 \cos 45^\circ \approx 1,4$	$y = 2 \sin 45^\circ \approx 1,4$
$z_2 = 3_{190^\circ}$	$x = 3 \cos 190^\circ \approx -3$	$y = 3 \sin 190^\circ \approx -0,5$
$z_3 = 2,5_{270^\circ}$	$x = 2,5 \cos 270^\circ = 0$	$y = 2,5 \sin 270^\circ \approx -2,5$
	$\sum x \approx -1,6$	$\sum y \approx -1,6$

$r = \sqrt{(-1,6)^2 + (-1,6)^2} \approx 2,3$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1,6}{1,6}\right) \approx 45^\circ$
$\theta \approx 225^\circ$ (ángulo positivo)	$z_1 + z_2 + z_3 = z = 2,3_{225^\circ}$



b. Resta ($z_1 - z_2$).

Para restar dos números complejos, en forma polar, se escriben los sumandos en forma rectangular. Luego, se aplica la definición de resta:

Si: $z_1 = (r_1, \theta_1) = (x_1, y_1)$, $z_2 = (r_2, \theta_2) = (x_2, y_2)$.

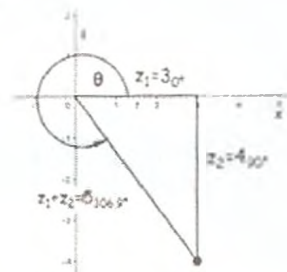
$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \quad z_1 - z_2 = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Ejemplo 1. Calcular: $z_1 - z_2$ si $z_1 = 3_{0^\circ}$ y $z_2 = 4_{90^\circ}$.

Conversión:	$z_1 = 3_{0^\circ}$	$z_2 = 4_{90^\circ}$	$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$
$x = r \cos \theta$	$x = 3 \cos 0^\circ, x = 3$	$x = 4 \cos 90^\circ, x = 0$	$z_1 - z_2 = (3 - 0, 0 - 4)$
$y = r \sin \theta$	$y = 3 \sin 0^\circ, y = 0$	$y = 4 \sin 90^\circ, y = 4$	$z_1 - z_2 = (3, -4)$
	$z_1 = (3, 0)$	$z_2 = (0, 4)$	

Conversión: rectangular a polar.

$r = z = \sqrt{x^2 + y^2} =$	$r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) = -53,1^\circ$
	$z_1 - z_2 = 5_{306,9^\circ}$ Forma polar



c. Multiplicación ($z_1 \cdot z_2$)

El producto de dos números complejos, en forma polar, es un complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos (suma de ángulos).

$$\text{Si: } z_1 = |z_1|\theta_1 \text{ y } z_2 = |z_2|\theta_2, \quad z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\theta_1 + \theta_2$$

Ejemplo 1. Multiplicar: $z_1 = 1,5_{60^\circ}$ y $z_2 = 1_{90^\circ}$.

Proposiciones

1. $z_1 = 1,5_{60^\circ}$ y $z_2 = 1_{90^\circ}$
2. $z_1 z_2 = 1,5 \times 1_{60^\circ + 90^\circ}$
3. $z_1 z_2 = 1,5_{150^\circ}$

Razones

Dato

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\theta_1 + \theta_2$$

Def. (x); Def. (+)



Ejemplo 2. Multiplicar: $z_1 = 15_{10^\circ}$ y $z_2 = 17_{13^\circ}$.

Proposiciones

1. $z_1 = 15_{10^\circ}$; $z_2 = 17_{13^\circ}$
2. $z_1 z_2 = 15 \times 17_{10^\circ + 13^\circ}$
3. $z_1 z_2 = 255_{23^\circ}$

Razones

Dato

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\theta_1 + \theta_2$$

Def. (x); Def. (+)

Observación: para multiplicar 3 o más números complejos se aplica la propiedad asociativa de la multiplicación:

$$U = C. \forall z_1, z_2, z_3: (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

d. División (z_1/z_2 ; $z_2 \neq 0$)

El cociente de dos números complejos, en forma polar, es un complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de los argumentos.

$$\text{Si: } z_1 = |z_1|\theta_1 \text{ y } z_2 = |z_2|\theta_2, \quad z_1/z_2 = |z_1| \div |z_2|\theta_1 - \theta_2; z_2 \neq 0$$

Ejemplo 1. Dividir: $z_1 = 30_{30^\circ}$ y $z_2 = 6_{13^\circ}$.

Proposiciones

1. $z_1 = 30_{30^\circ}$; $z_2 = 6_{13^\circ}$
2. $z_1 \div z_2 = 30 \div 6_{30^\circ - 13^\circ}$
3. $z_1 \div z_2 = 5_{17^\circ}$

Razones

Dato

$$z_1 z_2 = |z_1| \div |z_2|\theta_1 - \theta_2$$

Def. ($\div$), Def. (-)

Ejemplo 2. Dividir: $z_1 = \frac{1}{25}_{88^\circ}$ y $z_2 = \frac{1}{5}_{13^\circ}$.

Proposiciones

1. $z_1 = \frac{1}{25}_{88^\circ}$; $z_2 = \frac{1}{5}_{13^\circ}$
2. $z_1 \div z_2 = \frac{1}{25} \div \frac{1}{5}_{88^\circ - 13^\circ}$
3. $z_1 \div z_2 = 0,2_{75^\circ}$

Razones

Dato

$$z_1 z_2 = |z_1| \div |z_2|\theta_1 - \theta_2$$

Def. ($\div$), Def. (-)

c. Potencia (z^n)

La potencia n-ésima de un número en forma polar, r_θ , es un complejo cuyo módulo es la potencia n-ésima de r y cuyo argumento es n veces θ .

$$\text{Sea } z = r_\theta: \quad z^n = (r_\theta)^n \Leftrightarrow z^n = (r^n, n\theta) \Leftrightarrow z^n = r^n_{n\theta}$$

[Teorema De Moivre]

Ejemplo 1. Calcular: z^2 si $z = 4_{180}$

Proposiciones

1. $z = 4_{180}$
2. $z^2 = (4_{180})^2$
3. $z^2 = 4^2_{2 \times 180}$
4. $z^2 = 16_{360}$

Razones

Dato.
Cuadrado en 1
 $z^n = r^n_{n\theta}$
Def. (a)ⁿ; Def. (x)

Ejemplo 2. Calcular: z^5 si $z = 2_{750}$.

Proposiciones

1. $z = 2_{750}$
2. $z^5 = 2^5_{5 \times 750}$
3. $z^5 = 32_{3750}$

Razones

Dato
 $z^n = r^n_{n\theta}$
Def. (a)ⁿ; Def. (x)

e. Radicación ($\sqrt[n]{z}$)

Cualquier número complejo, diferente de 0, tiene exactamente n raíces n -ésimas complejas, todas ellas con el mismo módulo y argumentos multivariados. De entre todas las raíces n -ésimas de z designaremos por: $z_0 = \sqrt[n]{z}$ a la raíz n -ésima principal, definida por:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}_{\theta} \Leftrightarrow z_0 = \sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{r}, \theta/n)$$

Observación: θ/n es el argumento principal.

Los argumentos multivariados se hallan mediante la expresión: $\theta_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$, siendo $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$, según corresponda. Cuando $k = 0$ se tiene el argumento principal: θ/n , y para valores de $k > 0$ se hallan los demás argumentos. Sea $z = r_{\theta k}$, escrito en forma polar.

$$\sqrt[n]{r_{\theta k}} = (\sqrt[n]{r}, \theta_k); \theta_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}; k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1) \quad [\theta \text{ en radianes}]$$

$$\sqrt[n]{r_{\theta k}} = (\sqrt[n]{r}, \theta_k); \theta_k = \frac{\theta + 360^\circ k}{n}; k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1) \quad [\theta \text{ en grados}]$$

Observación: Considerando el índice del radical, existen n soluciones para θ_k , correspondientes a k elecciones consecutivas de números enteros positivos ($n \in \mathbb{Z}^+$). Para hallar las n raíces n -ésimas de Z , se tiene: Para $k = 0$, el primer argumento (argumento principal), correspondiente a la primera raíz. $k = 1$ (1 vuelta completa) se obtiene el segundo argumento para la segunda raíz. $k = 2$ (2 vueltas completas) se tiene el tercer argumento para la tercera raíz. $k = n-1$ se obtiene la raíz n -ésima. k indica el número de vueltas completas y n el tipo de raíces que se desea hallar: Por ejemplo:

Cuadradas: $\theta_k = \frac{\theta + 2\pi k}{2}; k = 0, 1$

$\theta_0 = \frac{\theta}{2}; k = 0$ (argumento principal)

Argumentos multivariados:

$\theta_1 = \frac{\theta + 2\pi}{2}; k = 1$ (segundo argumento)

Cúbicas: $\theta_k = \frac{\theta + 2\pi k}{3}; k = 0, 1, 2$

$\theta_0 = \frac{\theta}{3}; k = 0$ (argumento principal)

Argumentos multivariados:

$\theta_1 = \frac{\theta + 2\pi}{3}; k = 1$ (segundo argumento)

$\theta_2 = \frac{\theta + 4\pi}{3}; k = 2$ (tercer argumento)

Observación: Para raíces cuartas, $n = 4$. Para raíces quintas, $n = 5$, y así sucesivamente.

Geométricamente, significa que las raíces n -ésimas de un número complejo z de módulo r están situadas en los vértices de un n -ágono regular, inscrito en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ con centro en el origen, y que se localizan igualmente espaciadas.

Ejemplo 1. Obtener las tres raíces cúbicas de 1:

Se escribe el 1 en forma binómica, $(1 + 0i)$, para calcular el módulo y el argumento, de la forma polar:

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1; \quad \text{Arg}(z) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) = 0 \text{ rad} = 0^\circ$$

$$\text{Forma polar: } z = (1, 0^\circ), \text{ ó } z = 1_{0^\circ}$$

$$\text{Sustituyendo, en el ejercicio propuesto, se pide hallar: } \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_{0^\circ}} = \sqrt[3]{1_{0\pi}}$$

$$\text{Definición: } \sqrt[n]{r_{\theta k}} = (\sqrt[n]{r}, \theta_k); \theta_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}; k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1).$$

$$\text{Módulo: } \sqrt[3]{1} = 1$$

$$\text{Argumentos: } \theta_k = \frac{0 + 2\pi k}{3}; k = 0, 1, 2$$

$$\theta_0 = \frac{0\pi}{3} = 0 \text{ rad} = 0^\circ \quad (\text{argumento principal: } \theta/n)$$

$$\theta_1 = \frac{0\pi + 2\pi(1)}{3} = 2\pi/3 \text{ rad} = 120^\circ$$

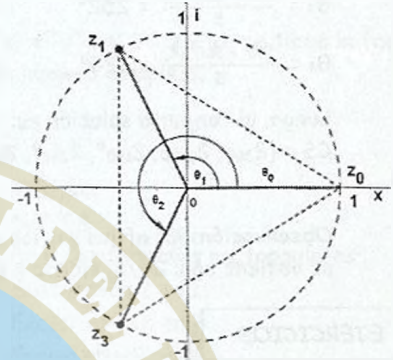
$$\theta_2 = \frac{0\pi + 2\pi(2)}{3} = 4\pi/3 \text{ rad} = 240^\circ$$

Luego, las tres raíces son:

$$z_0 = 1_{0\pi} = 1_{0^\circ}$$

$$z_1 = 1_{2\pi/3} = 1_{120^\circ}$$

$$z_2 = 1_{4\pi/3} = 1_{240^\circ}$$



Observación: los afijos son los vértices de un triángulo equilátero. La variación (espaciado) se obtiene con: $2\pi/n$, siendo n el número de raíces. Luego la variación es de: $2\pi/3$ ó 120° .

$$\text{Conjunto solución: } \sqrt[3]{z} = \{z_0, z_1, z_2\}, CS = \{1_{0\pi}, 1_{2\pi/3}, 1_{4\pi/3}\} \text{ ó } CS = \{1_{0^\circ}, 1_{120^\circ}, 1_{240^\circ}\}.$$

VERIFICACIÓN:

$$z_0 = 1_0 = 1 + 0i$$

$$z_1 = 1_{2\pi/3} = 1_{120^\circ}$$

$$z_0^3 = 1^3 = 1$$

$$z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$$

$$z_1^3 = [(-1 + \sqrt{3}i)/2]^3$$

$$z_1^3 = [(-1)^3 + 3(-1)^2\sqrt{3}i + 3(-1)(\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3]/8$$

$$z_1^3 = [-1 + 3\sqrt{3}i - 3 \cdot 3i^2 + (\sqrt{3})^3 i^3]/8 = [-1 + 3\sqrt{3}i - 9i^2 + (\sqrt{3})^2 \sqrt{3}i^3]/8$$

$$z_1^3 = [-1 + 3\sqrt{3}i + 9 - 3\sqrt{3}i]/8 = 8/8 = 1.$$

$$z_2 = 1_{4\pi/3} = 1_{240^\circ}$$

$$z_2^3 = [(-1 - \sqrt{3}i)/2]^3 = 1$$

Observación: La expresión: $z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, se obtiene transformando la forma polar: $z_1 = 1_{120^\circ}$, a forma binómica: $z_1 = (-1 + \sqrt{3}i)/2$, con: $\cos 120^\circ = -1/2$, $\sin 120^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 240^\circ = -1/2$, $\sin 240^\circ = -\sqrt{3}/2$. De la misma forma se verifica para z_2 .

Ejemplo 2. Hallar las cinco raíces quintas de -32.

Se escribe el -32 en forma binómica $(-32 + 0i)$ y luego en forma polar.

$$\text{Modulo: } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-32)^2 + 0^2} = 32$$

$$\text{Argumento: } \text{Arg}(z) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-32}\right) = 180^\circ$$

$$\text{Forma polar: } z = (32, 180^\circ) \text{ ó } z = 32_{180^\circ}$$

$$\text{Sustituyendo, en el ejercicio propuesto, se pide: } \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180^\circ}} = (\sqrt[5]{32}, 180^\circ)$$

Definición: $\sqrt[n]{r_{\theta k}} = (\sqrt[n]{r}, \theta_k)$.

Módulo: $\sqrt[5]{32} = 2$, $\text{Arg}(z) = \theta = 180^\circ$.

Argumentos: $\theta_k = \frac{\theta + 360^\circ \cdot k}{5}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

$\theta_0 = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$ (argumento principal)

$\theta_1 = \frac{180^\circ + 360^\circ (1)}{5} = 108^\circ$

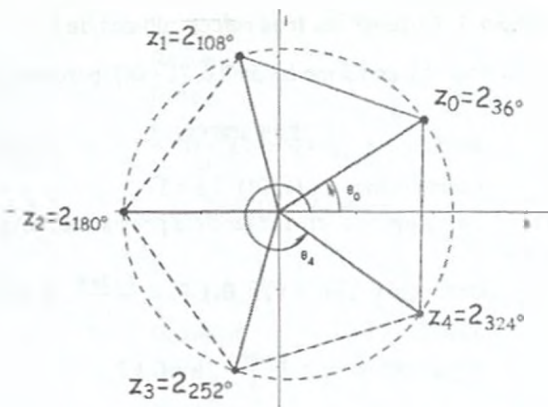
$\theta_2 = \frac{180^\circ + 360^\circ (2)}{5} = 180^\circ$

$\theta_3 = \frac{180^\circ + 360^\circ (3)}{5} = 252^\circ$

$\theta_4 = \frac{180^\circ + 360^\circ (4)}{5} = 324^\circ$

Luego, el conjunto solución es:

$CS = \{2_{36^\circ}, 2_{108^\circ}, 2_{180^\circ}, 2_{252^\circ}, 2_{324^\circ}\}$



Observación: los afijos son los vértices de un polígono regular de 5 lados. La variación (espaciado) se obtiene con: $2\pi/n$, siendo n el número de raíces. Luego la variación es de: $2\pi/5$ ó 72° .

EJERCICIOS

1. Sustituya r por $|z|$, en las siguientes expresiones, para obtener proposiciones equivalentes:

1. $(z)^n = (r_\theta)^n \Leftrightarrow (z)^n = r^n_{\theta n}$ 2. $\sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{r_{\theta k}} = (\sqrt[n]{r}, \theta_k)$; $\theta_k = \frac{\theta + 2\pi \cdot k}{n}$; $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$

2. Expresar en forma polar:

1. $1+i$ 2. $2i$ 3. $\sqrt{6} + \sqrt{2}i$ 4. $3/4 + i/2$

3. Multiplicar, en forma polar. Trazar la gráfica respectiva.

1. $z_1 = 2_{30^\circ}$ $z_2 = 3_{120^\circ}$ 2. $z_1 = 5_{45^\circ}$ $z_2 = 1_{325^\circ}$
3. $z_1 = 3_{\pi/6}$ $z_2 = 2_{\pi/6}$ 4. $z_1 = 4_{\pi/12}$ $z_2 = 2_{\pi/6}$

4. Dividir, en forma polar. Trazar la gráfica respectiva.

1. $z_1 = 5_{10^\circ}$ $z_2 = 1/2_{5^\circ}$ 2. $z_1 = 8_{96^\circ}$ $z_2 = 5_{85^\circ}$
3. $z_1 = 4_{\pi/6}$ $z_2 = 2_{\pi/2}$ 4. $z_1 = 6_{\pi/12}$ $z_2 = 2_{\pi/6}$

5. Calcular la potencia: $(z_1)^4$ ó $(z_2)^{11}$, según corresponda. Trazar la gráfica respectiva.

1. $z_1 = 2_{30^\circ}$ 2. $z_2 = 3_{120^\circ}$ 3. $z_1 = 5_{45^\circ}$ 4. $z_2 = 1_{325^\circ}$
5. $z_1 = 1_{3^\circ}$ 6. $z_2 = 1/2_{5^\circ}$ 7. $z_1 = 8_{96^\circ}$ 8. $z_2 = 5_{185^\circ}$

6. Calcular las raíces, según corresponda. Trazar la gráfica respectiva.

1. $z_1 = 2_{30^\circ}; \sqrt[3]{z_1}$ 2. $z_2 = 3_{120^\circ}; \sqrt[4]{z_2}$ 3. $z_1 = 5_{45^\circ}; \sqrt[4]{z_1}$ 4. $z_2 = 1_{32^\circ}; \sqrt[3]{z_2}$
5. $z_1 = 1_{3^\circ}; \sqrt[5]{z_1}$ 6. $z_2 = 1/2_{5^\circ}; \sqrt[4]{z_2}$ 7. $z_1 = 8_{96^\circ}; \sqrt[3]{z_1}$ 8. $z_2 = 5_{185^\circ}; \sqrt[4]{z_2}$

7. Hallar las raíces complejas de las siguientes ecuaciones.

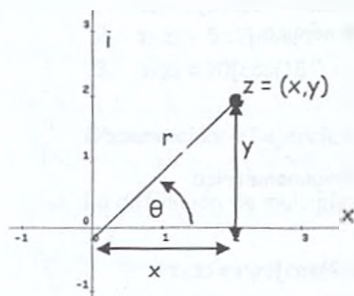
1. $x^2 - 2x + 6 = 0$ 2. $x^2 - 3x + 3 = 0$ 3. $2x^2 + 4x + 5 = 0$
4. $x^2 + 3x + 8 = 0$ 5. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$ 6. $x^2 + 16 = 0$

Observación: Por la fórmula, sustituir discriminante negativo por i^2 .

8. Hallar la expresión general para un número complejo opuesto y conjugado en forma polar.

7.5. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea el número complejo $z = (x,y) = x + yi$; no nulo. Las componentes rectangulares se calculan de la siguiente forma:



Componente x (parte real):

$$\cos \theta = x/r \rightarrow x = r \cos \theta$$

Componente y (parte imaginaria):

$$\text{Sen } \theta = y/r \rightarrow y = r \text{ sen } \theta$$

Por sustitución de "x" e "y" en: $z = x + yi$, se tiene la forma trigonométrica de un número complejo.

Demostración:

Proposiciones

1. $z = x + yi$
2. $x = r \cos \theta, y = r \text{ sen } \theta$
3. $z = r \cos \theta + i r \text{ sen } \theta$
4. $z = r (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$
5. $z = r \text{ cis } \theta$

Razones

Def. FB
Def. Componentes rectangulares
Sustitución 2 en 1
Factor común en 3
Forma abreviada

Como $r = |z|$, por sustitución se puede escribir:

Forma trigonométrica: $z = |z| (\cos \theta + i \text{ sen } \theta)$

Forma abreviada: $z = |z| \text{ cis } \theta$

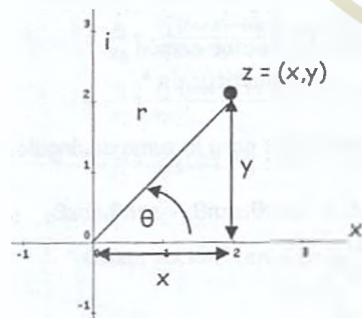
DEFINICIÓN

Si r es el módulo y θ el ángulo (argumento principal), de un número complejo no nulo, entonces el conjunto de los números complejos, se determina en forma trigonométrica por:

$$C = \{z/z = |z| (\cos \theta + i \text{ sen } \theta); |z| > 0 \wedge 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

$$C = \{z/z = r (\cos \theta + i \text{ sen } \theta); r > 0 \wedge 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Ejemplo 1. Expresar: $z = 2 + 2i$, en forma trigonométrica.



El módulo, radio (r) o valor absoluto de z :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

El ángulo ($0 \leq \theta < 2\pi$), argumento o amplitud de z :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) \rightarrow \theta = \tan^{-1}(1) \rightarrow \theta = 45^\circ = \pi/4$$

Forma trigonométrica:

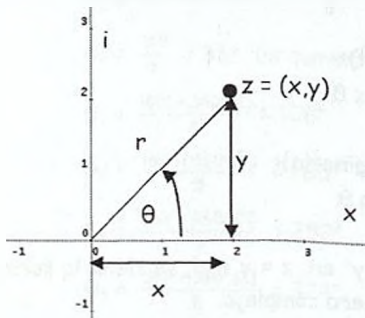
$$z = 2\sqrt{2} (\cos \pi/4 + i \text{ sen } \pi/4) \quad \text{ó} \quad z = 2\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \text{ sen } 45^\circ)$$

Forma abreviada:

$$z = 2\sqrt{2} \text{ cis } \pi/4 \quad \text{ó} \quad z = 2\sqrt{2} \text{ cis } 45^\circ$$

7.5.1. CONVERSIÓN DE FORMA BINÓMICA A TRIGONOMÉTRICA Y VICEVERSA

Sea el número complejo $z = (x,y) = x + yi$; no nulo. Para Efectuar las conversiones se procede de la siguiente manera.



Binómica a trigonométrica:

$$z = x + yi$$

Binómica

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Arg}(z) = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Trigonométrica

Trigonométrica a Binómica:

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Trigonométrica

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = x + yi$$

Binómica

7.5.2. OPERACIONES EN FORMA TRIGONOMÉTRICA (FT)

a. Multiplicación ($z_1 \cdot z_2$):

El producto de dos números complejos, en forma trigonométrica, es un complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos (suma de ángulos).

$$\text{Si: } z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$$

Demostración:

Proposiciones

- $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$
- $z_1 z_2 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i \sin \theta_1 \sin \theta_2]$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2]$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$

Razones

- Dato
Sustitución 1 en $z_1 z_2$
Axi. Conmutativo (x)
Def. (x)
 $i^2 = -1$
Factor común
Sustitución *

Observación*: en el paso 7 se consideran las igualdades trigonométricas para la suma de ángulos:

$$\cos (\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\sin (\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

Ejemplo 1. Multiplicar $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ y $z_2 = 3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$.

Proposiciones

- $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ);$
 $z_2 = 3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$
- $z_1 z_2 = 2 \times 3 [\cos (30^\circ + 25^\circ) + i \sin (30^\circ + 25^\circ)]$
- $z_1 z_2 = 6 [\cos (55^\circ) + i \sin (55^\circ)]$

Razones

- Dato
Def. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]$
Def. (x); Def. (+)

Ejemplo 2. Multiplicar $z_1 = 5(\cos 3^\circ + i \operatorname{sen} 3^\circ)$ y $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$.

Proposiciones

1. $z_1 = 5(\cos 3^\circ + i \operatorname{sen} 3^\circ)$;
 $z_2 = 2(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$
2. $z_1 z_2 = 5 \times 2 [\cos(3^\circ + 15^\circ) + i \operatorname{sen}(3^\circ + 15^\circ)]$
3. $z_1 z_2 = 10 [\cos(18^\circ) + i \operatorname{sen}(18^\circ)]$

Razones

Dato

Def. $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

Def. (x); Def. (+)

Observación: el ejercicio anterior se puede resolver mediante la forma abreviada: $z = r \operatorname{cis} \theta$.

La definición de multiplicación mediante la forma abreviada es:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

Proposiciones

1. $z_1 = 5 \operatorname{cis} 3^\circ$;
 $z_2 = 2 \operatorname{cis} 15^\circ$
2. $z_1 z_2 = 5 \times 2 \operatorname{cis}(3^\circ + 15^\circ)$
3. $z_1 z_2 = 10 \operatorname{cis} 18^\circ$

Razones

Dato

Def. $z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

Def. (x); Def. (+)

b. División (z_1/z_2 ; $z_2 \neq 0$)

El cociente de dos números complejos, en forma trigonométrica, es un complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de los argumentos.

Si: $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$.

$$z_1/z_2 = (r_1 \div r_2) [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]; z_2 \neq 0$$

Demostración:

Proposiciones

1. $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)}$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) (\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) (\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}$
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)]}{r_2 (\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)}$
5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$

Razones

Dato

Sustitución de 1 en z_1/z_2

Racionalización

Def. (x)

Identidad T. Sustitución *

Observación*: en el paso 5 se consideran las igualdades trigonométricas para la resta de ángulos:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$$

$$\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) = \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2$$

En forma abreviada se escribe:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]; z_2 \neq 0 \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2); z_2 \neq 0$$

Ejemplo 1. Dividir $z_1 = 10(\cos 28^\circ + i \operatorname{sen} 28^\circ)$ y $z_2 = 5(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)$.

Proposiciones	Razones
1. $z_1 = 10(\cos 28^\circ + i \operatorname{sen} 28^\circ);$ $z_2 = 5(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)$	Dato
2. $z_1 \div z_2 = 10/5[\cos(28^\circ - 25^\circ) + i \operatorname{sen}(28^\circ - 25^\circ)]$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]; z_2 \neq 0$
3. $z_1 \div z_2 = 2[\cos(3^\circ) + i \operatorname{sen}(3^\circ)]$	Def. ($\div$); Def. (+)

Ejemplo 2. Dividir $z_1 = 9(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$ y $z_2 = 5(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$.

Proposiciones	Razones
1. $z_1 = 9(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ);$ $z_2 = 5(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$	Dato
2. $z_1 \div z_2 = 9/5[\cos(45^\circ - 30^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ)]$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]; z_2 \neq 0$
3. $z_1 \div z_2 = 1,8[\cos(15^\circ) + i \operatorname{sen}(15^\circ)]$	Def. ($\div$); Def. (+)

Observación: se puede utilizar la forma abreviada $z = r \operatorname{cis} \theta$:

Proposiciones	Razones
1. $z_1 = 9 \operatorname{cis} 45^\circ;$ $z_2 = 5 \operatorname{cis} 30^\circ$	Dato
2. $z_1 \div z_2 = 9/5 \operatorname{cis}(45^\circ - 30^\circ)$	Def. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2); z_2 \neq 0$
3. $z_1 \div z_2 = 1,8 \operatorname{cis} 15^\circ$	Def. ($\div$); Def. (+)

c. Potencia (z^n)

La potencia n-ésima de un número complejo, en forma trigonométrica, es otro número complejo cuyo módulo es la potencia n-ésima de r y cuyo argumento es n veces θ (Fórmula de De Moivre).

Sea: $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Si multiplicamos un número complejo por sí mismo, se tiene:

Proposiciones	Razones
1. $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$	Dato
2. $z \cdot z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \cdot r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$	Sustitución en $z \cdot z$
3. $z \cdot z = r \cdot r [\cos(\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta)]$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$
4. $z^2 = r^2 [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)]$	$a^2 = a \cdot a, 2a = a + a.$

Para z^3 se tiene:

- $z^3 = z^2 \cdot z$
- $z^2 \cdot z = r^2 [\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)] \cdot r [\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta]$
- $z^2 \cdot z = r^2 \cdot r [\cos(2\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(2\theta + \theta)]$
- $z^3 = r^3 [\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta)]$

De la misma manera se pueden obtener fórmulas similares para: $z^4, z^5, z^6, \dots, z^n$; para cada número entero positivo n . El teorema de De Moivre establece el resultado general:

$$\text{Si } z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+: z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

El teorema De Moivre se demuestra por inducción matemática, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1. n = 1 & \quad z^n = r^n [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)] \\ & \quad z = r [\cos (\theta) + i \operatorname{sen} (\theta)] \\ 2. n = k & \quad z^k = r^k [\cos (k\theta) + i \operatorname{sen} (k\theta)] \\ 3. n = k + 1 & \quad z^{k+1} = r^{k+1} [\cos (k+1)\theta + i \operatorname{sen} (k+1)\theta] \end{aligned}$$

Teorema

$$z^k = r^k [\cos (k\theta) + i \operatorname{sen} (k\theta)] \Rightarrow z^{k+1} = r^{k+1} [\cos (k+1)\theta + i \operatorname{sen} (k+1)\theta]$$

Hipótesis Tesis

Observación: Para facilitar la demostración se supone que: $r = 1$.

Proposiciones

$$\begin{aligned} 1. z^k &= [\cos(k\theta) + i \operatorname{sen} (k\theta)] \\ 2. z^k [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] &= [\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)] [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \\ 3. z^{k+1} &= [\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta)] [\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)] \\ 4. z^{k+1} &= \cos(k\theta)\cos\theta + i \cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta + i \operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}\theta \\ 5. z^{k+1} &= [\cos(k\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}\theta] + i [\operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta] \\ 6. z^{k+1} &= \cos(k\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(k\theta + \theta) \\ 7. z^{k+1} &= \cos(k+1)\theta + i \operatorname{sen}(k+1)\theta \end{aligned}$$

Razones

Dato.
Axi. Multiplicativo (=)
 $a^n \cdot a = a^{n+1}$
Def. (x). FB. $i^2 = -1$
Agrupación, FC.
Suma de ángulos.
Factor común

- DEFINICIONES BÁSICAS

Si z es un complejo, y n un número natural mayor que uno (conjunto representado por $\mathbb{N}^*$), se tiene:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN
1. POTENCIA ENÉSIMA $\mathbb{N}^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	Si la base es un número complejo z y n el exponente natural mayor que 1: $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \dots z}_{n \text{ veces}}; z \in \mathbb{C} \wedge n \in \mathbb{N}^*$
2. POTENCIA CERO (Exponente 0)	Se llama potencia cero de un número complejo, distinto de 0, al número 1: $z^0 = 1 = 1+0i; z \neq 0$
3. POTENCIA UNO (Exponente 1)	Se llama potencia uno (primera potencia) de un número complejo z , al mismo número sin el exponente: $z^1 = z$

- TEOREMAS BÁSICOS DE LA POTENCIACIÓN

NOMBRE	TEOREMA
1. POTENCIA DEL PRODUCTO	La potencia enésima de un producto es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores. $(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n; n > 0 \in \mathbb{N}$
2. POTENCIA DEL COCIENTE	La potencia enésima de un cociente es igual a la potencia enésima del dividendo, dividida para la potencia enésima del divisor. $(z_1/z_2)^n = z_1^n / z_2^n; z_2 \neq 0$

Ejemplo 1. Desarrollar z^2 si $z = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$

Proposiciones

$$\begin{aligned} 1. z &= 2 (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \\ 2. z^2 &= 2^2 [\cos (2 \times 30^\circ) + i \operatorname{sen} (2 \times 30^\circ)] \\ 3. z^2 &= 4 (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) \end{aligned}$$

Razones

Dato
Def. $z^n = r^n [\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)]$
Def. (a^n); Def. (x)

Ejemplo 2. Desarrollar z^5 si $z = 2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$

Proposiciones

1. $z = 2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$
2. $z^5 = 2^5 [\cos (5 \times 25^\circ) + i \sin (5 \times 25^\circ)]$
3. $z^5 = 32 (\cos 125^\circ + i \sin 125^\circ)$

Razones

- Dato
- Def. $z^n = r^n [\cos (n\theta) + i \sin (n\theta)]$
- Def. (a^n) ; Def. (x)

Observación: se puede utilizar la forma abreviada $z = r \operatorname{cis} (\theta)$ de la siguiente forma:

$$z^n = r^n [\cos (n\theta) + i \sin (n\theta)] \rightarrow z^n = r^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

Proposiciones

1. $z = 2 \operatorname{cis} 25^\circ$
2. $z^5 = 2^5 \operatorname{cis} (5 \times 25^\circ)$
3. $z^5 = 32 \operatorname{cis} 125^\circ$

Razones

- Dato
- Def. $z^n = r^n \operatorname{cis} (n\theta)$
- Def. (a^n) ; Def. (x)

Ejemplo 3. Hallar todas las potencias enteras positivas de i .

Se escribe el número complejo i en forma binómica $(0 + 1i)$ y luego en forma trigonométrica.

Modulo: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + 1^2} = 1$

Argumento: $\operatorname{Arg} (z) = 90^\circ = \pi/2$

Ver en el gráfico adjunto.

Forma trigonométrica: $z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \rightarrow z = 1 (\cos \pi/2 + i \sin \pi/2)$

$r = 1$; $\operatorname{Arg} (z) = \pi/2$

$z^n = r^n [\cos (n\theta) + i \sin (n\theta)]$

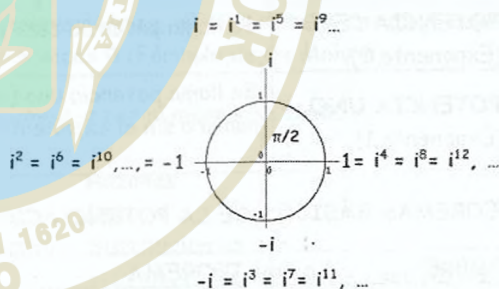
$i^n = 1^n [\cos (n \pi/2) + i \sin (n \pi/2)]$

$i^1 = 1^1 [\cos (\pi/2) + i \sin (\pi/2)] = i$

$i^2 = 1 [\cos (\pi) + i \sin (\pi)] = -1 + 0i = -1$

$i^3 = 1 [\cos (3\pi/2) + i \sin (3\pi/2)] = 0 - i = -i$

$i^4 = 1 [\cos (2\pi) + i \sin (2\pi)] = 1 + 0i = 1$



Las siguientes potencias enteras positivas de i , se repiten:

$i^5 = i^4 i^1 = 1 i = i$

$i^6 = i^4 i^2 = 1 (-1) = -1$

$i^7 = i^4 i^3 = 1 (-i) = -i$

$i^8 = i^4 i^4 = 1 (1) = 1$

Geoméricamente: Cada vez que el exponente se incrementa en 1, i^n pasa de un cuadrante al siguiente, en el círculo unitario. Es decir:

$i^{4n} = 1,$

$i^{4n+1} = i,$

$i^{4n+2} = -1,$

$i^{4n+3} = -i; n \in \mathbb{N}$

Para hallar el valor de i^{55} , por ejemplo, dividimos 55 para 4: $55 = 4(13) + 3$. Luego, considerando la expresión: $i^{4n+3} = -i$, se tiene:

$i^{55} = i^{4(13)+3} \rightarrow i^{55} = i^{4(13)} i^3 \rightarrow i^{55} = 1^{13} (-i) = -i$

d. Radicación [$\sqrt[n]{z}$]

Cualquier número complejo, diferente de 0, tiene exactamente n raíces n -ésimas complejas, todas ellas con el mismo módulo y argumentos multivariados. De entre todas las raíces n -ésimas de z designaremos por: $z_0 = \sqrt[n]{z}$ a la raíz n -ésima principal, definida por:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)} \Leftrightarrow z_0 = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n}\right) \right]$$

Observación: θ/n es el argumento principal.

Los argumentos multivariados se hallan mediante la expresión: $\theta_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$; siendo $k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$, según corresponda. Cuando $k = 0$ se tiene el argumento principal: θ/n , y para valores de $k > 0$ se hallan los demás argumentos.

Sea $z = r(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k)$, escrito en forma trigonométrica.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k)} \Leftrightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \right]; k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1) \quad [\text{radianes}]$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k)} \Leftrightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right) \right]; k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1) \quad [\text{grados}]$$

Observación: Considerando el índice del radical, existen n soluciones para θ_k correspondientes a k elecciones consecutivas de números enteros positivos ($n \in \mathbb{Z}^+$).

Ejemplo 1. Hallar las dos raíces cuadradas de i .

Se escribe i en forma binómica, $(0 + i)$, y luego en forma trigonométrica:

$$\text{Módulo: } r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + 1^2} = 1$$

$$\text{Argumento: } \operatorname{Arg}(z) = \theta = 90^\circ = \pi/2$$

$$\text{Forma trigonométrica: } z = 1(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \right]; k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

Observación: el índice es 2, luego $n = 2$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{1} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{2}\right) \right]; k = 0, 1$$

$$z_0 = 1 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]; k = 0 \rightarrow z_0 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$$

$$\text{El argumento principal es: } \theta/n \rightarrow (\pi/2)/2 = \pi/4$$

$$z_1 = 1 \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right]; k = 1 \rightarrow z_1 = -1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$$

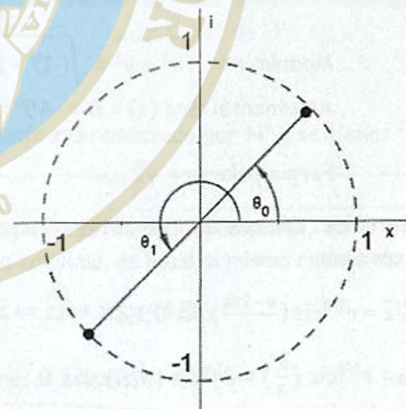
$$\text{Conjunto solución: } \sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1\}$$

Verificación:

$$z_0 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2} \rightarrow z_0^2 = (1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2})^2 \rightarrow z_0 = i$$

$$z_1 = -1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2} \rightarrow z_1^2 = (-1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2})^2 \rightarrow z_1 = i$$

Observación: las raíces: z_0 y z_1 son inversos aditivos. La variación (espaciado) se obtiene con: $2\pi/n$, siendo n el número de raíces ($2\pi/2$). Luego, la variación es: π .



Ejemplo 2. Hallar las tres raíces cúbicas de: $1 + 0i$

Modulo: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + 0^2} = 1$

Argumento: $\text{Arg}(z) = \theta = 0^\circ = 0\pi$

Forma trigonométrica: $z = 1(\cos 0\pi + i \sin 0\pi)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} [\cos(\frac{\theta + 2\pi k}{n}) + i \sin(\frac{\theta + 2\pi k}{n})]; k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Observación: el índice es 3, luego $n = 3$.

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1} [\cos(\frac{0 + 2\pi k}{3}) + i \sin(\frac{0 + 2\pi k}{3})]; k = 0, 1, 2$

$z_0 = 1[\cos(0\pi) + i \sin(0\pi)]; k = 0 \rightarrow z_0 = 1$

El argumento principal es: $\theta/n \rightarrow (0\pi)/3 = 0\pi$

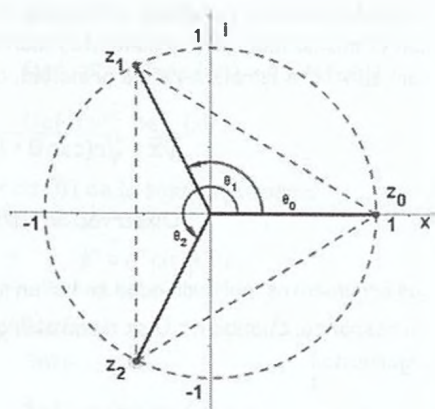
$z_1 = 1[\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3})]; k = 1 \rightarrow z_1 = (-1 + i\sqrt{3})/2$

$z_2 = 1[\cos(\frac{4\pi}{3}) + i \sin(\frac{4\pi}{3})]; k = 2 \rightarrow z_2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$

Conjunto solución: $\sqrt[3]{z} = \{z_0, z_1, z_2\}$

Observación: los afijos de las soluciones son los vértices de un triángulo equilátero. La variación (espaciado) se obtiene con: $2\pi/n$, siendo n el número de raíces ($2\pi/3$). Luego la variación es: $2\pi/3$.

Verificación: $[(-1 + i\sqrt{3})/2]^3 = 1/8[(-1)^3 + 3(\pm i\sqrt{3}) - 3(\pm i\sqrt{3})^2 + (\pm i\sqrt{3})^3]$
 $[(-1 + i\sqrt{3})/2]^3 = 1/8[-1 + 9 + i(\pm 3\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}] = 1$



Considerando la forma abreviada se tiene:

Si: $z = r \text{cis} \theta$: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \text{cis} \theta \Leftrightarrow \sqrt[n]{z} = (r \text{cis} \theta)^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{z} = r^{1/n} \text{cis}(\frac{\theta + 2\pi k}{n}); k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Ejemplo 1. Hallar las tres raíces cúbicas de: $z = -1 + i$

Modulo: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Argumento: $\text{Arg}(z) = \theta = -45^\circ = 135^\circ = 3\pi/4$

Forma polar: $z = \sqrt{2} \text{cis} 3\pi/4$

Las raíces cúbicas de z se obtienen a partir de la expresión:

$\sqrt[3]{z} = r^{1/3} \text{cis}(\frac{\theta + 2\pi k}{3}); k = 0, 1, 2$

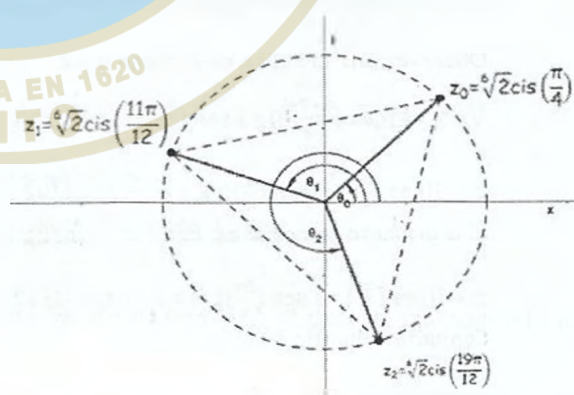
$z_0 = r^{1/3} \text{cis}(\frac{\theta}{3}) = 2^{1/6} \text{cis}(\pi/4); k = 0$

El argumento principal es: $\pi/4$

$z_1 = r^{1/3} \text{cis}(\frac{\theta + 2\pi}{3}) = 2^{1/6} \text{cis}(11\pi/12); k = 1$

$z_2 = r^{1/3} \text{cis}(\frac{\theta + 4\pi}{3}) = 2^{1/6} \text{cis}(19\pi/12); k = 2$

Observación: los afijos de las soluciones son los vértices de un polígono regular de tres lados. Las tres raíces tienen el mismo módulo, pero difieren en el ángulo. La variación (espaciado) se obtiene con: $2\pi/n$, siendo n el número de raíces ($2\pi/3$). Luego la variación es: $2\pi/3$.



Ejemplo 2. Hallar las 6 raíces sextas de: $z = 1 + i$

Modulo: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Argumento: $\text{Arg}(z) = \theta = 45^\circ$

Forma polar: $z = \sqrt{2}_{45^\circ}$

Las raíces sextas de z se obtienen a partir de la expresión:

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} \text{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Observación:

$$r^{1/n} = \sqrt[6]{\sqrt{2}} = \sqrt[12]{2}$$

Las raíces son:

$$z_0 = \sqrt[12]{2} \text{cis } 7,5^\circ$$

El argumento principal es: $7,5^\circ$

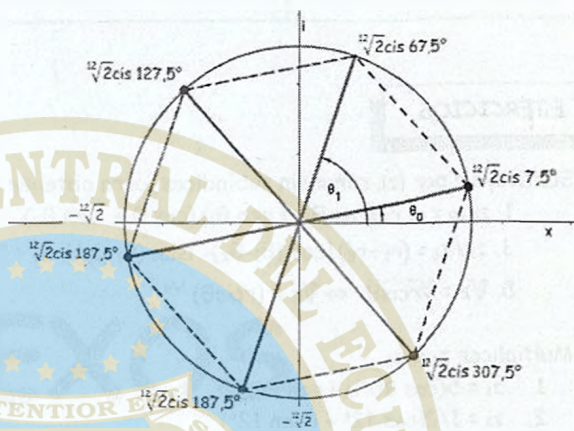
$$z_1 = \sqrt[12]{2} \text{cis } 67,5^\circ$$

$$z_2 = \sqrt[12]{2} \text{cis } 127,5^\circ$$

$$z_3 = \sqrt[12]{2} \text{cis } 187,5^\circ$$

$$z_4 = \sqrt[12]{2} \text{cis } 247,5^\circ$$

$$z_5 = \sqrt[12]{2} \text{cis } 307,5^\circ$$



Observación: los afijos de las soluciones son los vértices de un polígono regular de seis lados. Las seis raíces tienen el mismo módulo, pero difieren en el ángulo. La variación (espaciado) se obtiene con: $2\pi/n$, siendo n el número de raíces ($2\pi/6$). Luego la variación es de 60° .

- DEFINICIONES BÁSICAS

Si z es un número complejo, y n es natural mayor que uno (conjunto representado por $\mathbb{N}^*$), se tiene:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN
1. RAÍZ ENÉSIMA $\mathbb{N}^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La raíz enésima de un número complejo llamado radicando, es otro complejo que, elevado a la potencia enésima, es igual al mismo radicando. $U = \mathbb{C}. \quad z_k = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z_k^n = z; n \in \mathbb{N}^*$ Todo número complejo tiene n raíces n -ésimas.
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1	La raíz enésima de 1 es igual a 1: $\sqrt[n]{1} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La potencia enésima y la raíz enésima de un mismo número, se simplifican: $\sqrt[n]{z^n} = (\sqrt[n]{z})^n = z$

Observación: Si el radicando es cero tiene como raíz cero: $\sqrt[n]{0} = 0 \Leftrightarrow 0^n = 0$.

- TEOREMAS BÁSICOS DE LA RADICACIÓN

NOMBRE	TEOREMA
1. RADICACIÓN DEL PRODUCTO	La raíz enésima de un producto es igual al producto de la raíz enésima de cada factor: $U = C. \sqrt[n]{z_1 z_2} = \sqrt[n]{z_1} \sqrt[n]{z_2}$
2. RADICACIÓN DEL COCIENTE	La raíz enésima de un cociente es igual a la raíz enésima del dividendo dividida para la del divisor: $U = C. \sqrt[n]{z_1/z_2} = \sqrt[n]{z_1} / \sqrt[n]{z_2}; z_2 \neq 0$

EJERCICIOS

1. Sustituya r por $|z|$, con o sin subíndices, para obtener proposiciones equivalentes:

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$
- $z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$
- $z_1/z_2 = (r_1/r_2) [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]; z_2 \neq 0$
- $\sqrt[n]{z} = r^{1/n} \text{cis}(\frac{\theta + 2\pi k}{n}), k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \text{cis} \theta \Leftrightarrow \sqrt[n]{z} = (r \text{cis} \theta)^{1/n}$
- $\sqrt[n]{z} = (r \text{cis} \theta)^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{z} = r^{1/n} \text{cis}(\frac{\theta}{n})$

2. Multiplicar $z_1 \times z_2$

- $z_1 = 5(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ $z_2 = 2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$
- $z_1 = 1/2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$ $z_2 = 4/3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$
- $z_1 = 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ $z_2 = 3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$
- $z_1 = 3(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)$ $z_2 = 1/6(\cos 89^\circ + i \sin 89^\circ)$

3. Dividir $z_1 \div z_2$

- $z_1 = 15(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ $z_2 = 3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$
- $z_1 = 1/2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$ $z_2 = 4/3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$
- $z_1 = 24(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ)$ $z_2 = 8(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$
- $z_1 = 3(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)$ $z_2 = 1/2(\cos 89^\circ + i \sin 89^\circ)$

4. Calcular las siguientes potencias.

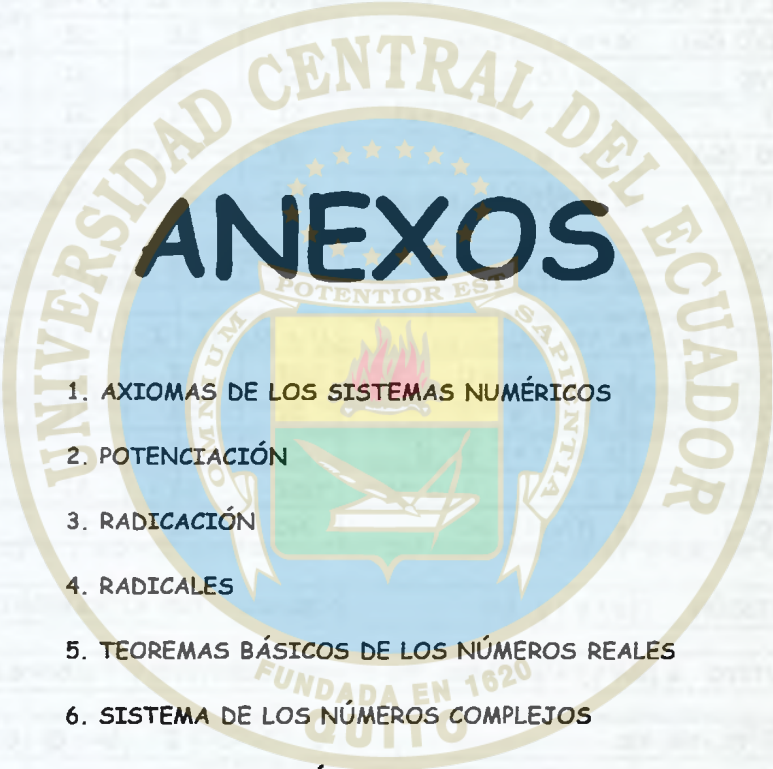
- z^1 si $z = 5(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- z^2 si $z = 2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$
- z^3 si $z = 1/2(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$
- z^4 si $z = 1(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$
- z^5 si $z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- z^6 si $z = 1(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$
- z^0 si $z = 6(\cos 8/3^\circ + i \sin 8/3^\circ)$
- z^2 si $z = 5(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$
- z^1 si $z = 96(\cos 48^\circ + i \sin 48^\circ)$
- z^2 si $z = 1/2(\cos 89^\circ + i \sin 89^\circ)$

5. Calcular: $\sqrt[3]{z_1}, \sqrt[4]{z_2}, \sqrt[5]{z_3}, \sqrt[6]{z_4}, \sqrt[7]{z_5}$.

- $z_1 = (2 + 5i)$
- $z_1 = (2/3 - i)$
- $z_2 = (2 + 8i)$
- $z_2 = (7 - 25i)$
- $z_3 = (1/2 - 5i)$
- $z_3 = (-1 + 3i)$
- $z_4 = (2 + 3i)$
- $z_4 = (2 - i)$
- $z_5 = (0,5 + 0,2i)$
- $z_5 = (1 + 3i)$

6. Sea: $z_1 = (2 + 5i), z_2 = (2 + 8i)$ y $n = 3$. Verificar:

- $\sqrt[3]{z_1 z_2} = \sqrt[3]{z_1} \sqrt[3]{z_2}$
- $\sqrt[3]{z_1/z_2} = \sqrt[3]{z_1} / \sqrt[3]{z_2}; z_2 \neq 0$

The logo of the Universidad Central del Ecuador is a circular emblem. It features a blue outer ring with the text "UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR" in white. Inside the ring is a shield with a yellow upper half and a green lower half. The shield is flanked by two white banners with the Latin motto "POTENTIOR EST SAPIENTIA". Above the shield are five yellow stars. The word "ANEXOS" is written in large, bold, black letters across the center of the logo.

ANEXOS

1. AXIOMAS DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS
2. POTENCIACIÓN
3. RADICACIÓN
4. RADICALES
5. TEOREMAS BÁSICOS DE LOS NÚMEROS REALES
6. SISTEMA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS
7. ISOMORFISMO NÚMEROS COMPLEJOS - VECTORES
8. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO
9. OPERACIONES CON NUMEROS DECIMALES

ANEXO 1. AXIOMAS DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \{x/x = \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

$$\mathbb{Q}' = \{x / x \notin \mathbb{Q}\}$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

IGUALDAD (=). $\forall a, \forall b, \forall c.$		$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{Q}'$	$U = \mathbb{R}$
DICOTOMÍA	$a = b \vee a \neq b$	SI	SI	SI	SI	SI
REFLEXIVO	$a = a$	SI	SI	SI	SI	SI
SIMÉTRICO	$a = b \Leftrightarrow b = a$	SI	SI	SI	SI	SI
TRANSITIVO	$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$	SI	SI	SI	SI	SI
ADITIVO	$a = b \wedge c = c \Rightarrow a + c = b + c$	SI	SI	SI	SI	SI
MULTIPLICATIVO	$a = b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$	SI	SI	SI	SI	SI

ADICIÓN (+). $\forall a, \forall b, \forall c.$		$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{Q}'$	$U = \mathbb{R}$
CLAUSURATIVO (S_c)	$a + b = c \Rightarrow c \in U$	SI	SI	SI	$\exists a, b$	SI
CONMUTATIVO	$a + b = b + a$	SI	SI	SI	SI	SI
ASOCIATIVO	$(a + b) + c = a + (b + c)$	SI	SI	SI	SI	SI
MODULATIVO (S_0)	$a + 0 = a$	SI	SI	SI	NO	SI
INVERTIVO ($\exists -a$)	$a + (-a) = 0$	NO	SI	SI	NO	SI

DEF. DE RESTA	$a - b = a + (-b)$	$\exists a, b$	SI	SI	SI	SI
---------------	--------------------	----------------	----	----	----	----

MULTIPLICACIÓN (x). $\forall a, \forall b, \forall c.$		$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{Q}'$	$U = \mathbb{R}$
CLAUSURATIVO (S_c)	$a \cdot b = c \Rightarrow c \in U$	SI	SI	SI	$\exists a, b$	SI
CONMUTATIVO	$a \cdot b = b \cdot a$	SI	SI	SI	SI	SI
ASOCIATIVO	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	SI	SI	SI	SI	SI
MODULATIVO (S_0)	$a \cdot 1 = a$	SI	SI	SI	NO	SI
INVERTIVO ($\exists -a$)	$a \cdot (1/a) = 1; a \neq 0$	NO	SI	SI	NO	SI

DEF. DE DIVISIÓN	$a / b = a \cdot 1/b$	$\exists a, b$	SI	SI	SI	SI
------------------	-----------------------	----------------	----	----	----	----

DISTRIBUTIVO	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	RECOLECTIVO	$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
--------------	---	-------------	---

ORDEN (<, >). $\forall a, \forall b, \forall c.$		$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{Q}'$	$U = \mathbb{R}$
TRICOTOMÍA	$a \neq b \Leftrightarrow a > b \vee a < b$	SI	SI	SI	SI	SI
ANTISIMÉTRICO	$a > b \Leftrightarrow b < a$	SI	SI	SI	SI	SI
TRANSITIVO	$a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$	SI	SI	SI	SI	SI
ADITIVO	$a > b \wedge c = c \Rightarrow a + c > b + c$	SI	SI	SI	SI	SI
MULTIPLICATIVO ($c > 0$)	$a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	SI	SI	SI	SI	SI
MULTIPLICATIVO ($c < 0$)	$a > b \wedge c = c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	NO	SI	SI	SI	SI

Observación: La resta de dos números naturales no siempre es posible, solo ocurre cuando el minuendo es mayor que el sustraendo. El cociente de dos números naturales o enteros no siempre es un número natural (entero), solo ocurre cuando la división es exacta. La suma, la resta, el producto y el cociente de dos números racionales es otro número racional. La suma, la resta, el producto y el cociente de dos números irracionales no siempre es otro número irracional. Los números irracionales se pueden escribir mediante números decimales periódicos y los irracionales mediante números decimales no periódicos.

ANEXO 2. POTENCIACIÓN

2.1. NATURALES CON EXPONENTES NATURALES: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

2.1.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si la base a y el exponente n , son números naturales: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. POTENCIA CERO	La potencia cero (exponente cero), de un número natural a distinto de cero, es igual a 1: $a^0 = 1; a \neq 0$	$0^0 = \exists$ $(1)^0 = 1$ $(2)^0 = 1$
2. POTENCIA UNO	La potencia uno (exponente 1, primera potencia) de un número natural a , es igual al mismo número sin el exponente. $a^1 = a$	$0^1 = 0$ $1^1 = 1$ $2^1 = 2$ $3^1 = 3$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA (PEP) $\mathbb{N}^* = \{2,3,4,\dots\}$	La PEP de un número natural a , es igual al producto de n veces a ; siendo $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}}; a \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}^*$	$0^2 = 0 \cdot 0$ $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

2.1.2. TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Sí: a^n y b^n ; son potencias definidas en los números naturales, $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$:

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. POTENCIA ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La potencia enésima del producto de números naturales, es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^0 = 1$ $(2 \cdot 3)^1 = 2 \cdot 3 = 6$ $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$ $6^2 = 4 \cdot 9$
2. POTENCIA ENÉSIMA DEL COCIENTE EXACTO	La potencia enésima del cociente exacto (división exacta) de números naturales, es igual al cociente de las potencias enésimas; $b \neq 0$: $(a/b)^n = a^n/b^n; b \neq 0$	$(6/3)^0 = 1$ $(6/3)^1 = 6/3$ $(6/3)^2 = 6^2/3^2$ $2^2 = 36/9$

Observación: $(a \cdot b)^0 = 1; a \cdot b \neq 0$, por la definición 1. Del mismo modo: $(a/b)^1 = a/b$, por la definición 2.

2.1.3. OPERACIONES DE LA POTENCIACIÓN.

Si a es un número natural, m y n naturales mayores que cero ($m, n \in \mathbb{N} > 0$):

OPERACIÓN	TEOREMA	EJEMPLO
1. PRODUCTO DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se suman los exponentes. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$ $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
2. COCIENTE DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se restan los exponentes. $a^m/a^n = a^{m-n}; m > n \text{ y } a \neq 0$	$2^4/2^3 = 2^{4-3} = 2$
3. POTENCIA DE POTENCIA	Se mantiene la base y se multiplican los exponentes. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

Observación: la resta de exponentes, cuando el minuendo es menor que el sustraendo, no está definida en los números naturales. Cualquier potencia de un número tiene un valor único o siempre es igual.

2.2. ENTEROS CON EXPONENTES NATURALES: $\mathbb{Z}^N$

2.2.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si la base a es un número entero, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, y el exponente n un natural, $N = \{0, 1, 2, ...\}$:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. POTENCIA CERO	La potencia cero, exponente 0, de un número entero a , distinto de cero, es igual a 1: $a^0 = 1; a \neq 0$	$0^0 = 3$ $(2)^0 = 1$ $(-2)^0 = 1$
2. POTENCIA UNO	La potencia uno (exponente 1) de un número entero a , es igual al mismo número sin el exponente. $a^1 = a$	$0^1 = 0$ $2^1 = 2$ $(-2)^1 = -2$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA (PEP) $N^* = \{2, 3, 4, ...\}$	La PEP, de un número entero a , es igual al producto de n veces a ; siendo $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}}; a \in \mathbb{Z} \wedge n \in N^*$	$(0)^2 = 0 \cdot 0$ $(2)^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $(-2)^2 = (-2)(-2)$ $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3)$

2.2.2. TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^n y b^n , son potencias definidas en los números enteros con exponentes naturales, $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$:

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA PAR	La PEP par de base positiva (+) o negativa (-) es positiva: $(a)^n = x; n \in N^* \text{ par}$ $(-a)^n = x; n \in N^* \text{ par}$	$(2)^2 = 4$ $(3)^2 = 9$ $(-2)^2 = 4$ $(-3)^2 = 9$
2. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA IMPAR	La PEP impar de base positiva (+) es positiva y de base negativa (-) es negativa: $(a)^n = x; n \in N^* \text{ impar}$ $(-a)^n = -x; n \in N^* \text{ impar}$	$(2)^3 = 8$ $(3)^3 = 27$ $(-2)^3 = -8$ $(-3)^3 = -27$
3. POTENCIA ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La potencia enésima del producto de números enteros, es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-2 \cdot 3)^2 = (-2)^2 \cdot 3^2$ $(-2 \cdot 3)^2 = (-2)^2 \cdot 3^2$ $36 = 36$
4. POTENCIA ENÉSIMA DEL COCIENTE EXACTO	La potencia enésima de cociente exacto (división exacta) de números enteros, es igual al cociente de las potencias enésimas; $b \neq 0$. $(a/b)^n = a^n/b^n; b \neq 0$	$(-6/3)^2 = (-6)^2/3^2$ $(-2)^2 = 36/9$ $4 = 4$

Observación: $(-2)^2 \neq -2^2$. En el primer caso se tiene que $(-2)^2 = 4$, y en el segundo $-2^2 = -4$.

2.2.3. OPERACIONES DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^m y a^n , son potencias definidas en los números enteros con exponentes naturales:

OPERACIÓN	TEOREMA	EJEMPLO
1. PRODUCTO DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se suman los exponentes. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-2)^2 \cdot (-2)^3 =$ $(-2)^{2+3} = (-2)^5$
2. COCIENTE DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se restan los exponentes. $a^m/a^n = a^{m-n}; m \geq n \text{ y } a \neq 0$	$(-2)^5/(-2)^3 =$ $(-2)^{5-3} = (-2)^2 = 4$
3. POTENCIA DE POTENCIA	Se mantiene la base y se multiplican los exponentes $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$[(-2)^3]^2 = (-2)^{3 \cdot 2}$ $[(-2)^3]^2 = 2^6$

Observación: la resta (exponentes) no está definida en $\mathbb{N}$ cuando el minuendo menor que el sustraendo.

2.3. RACIONALES CON EXPONENTES ENTEROS: $\mathbb{Q}^Z$

2.3.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si la base a es un número racional, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{F}$, y el exponente n un entero, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. POTENCIA CERO	La potencia cero (exponente 0) de un número racional a , distinto de cero, es igual a 1: $a^0 = 1; a \neq 0$	$(0/5)^0 = \cancel{0}$ $(-3/4)^0 = 1$ $(-2/5)^0 = 1$
2. POTENCIA UNO	La potencia uno (primera potencia) de un número racional a , es igual al mismo número sin el exponente: $a^1 = a$	$0^1 = 0$ $3^1 = 3$ $(-2/3)^1 = -2/3$ $(-5)^1 = -5$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA (PEP) $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La PEP, de un número racional a , es igual al producto de n veces a ; siendo $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}}; a \in \mathbb{Q} \wedge n \in N^*$	$(1/2)^2 = (1/2)(1/2)$ $(-3/2)^2 = (-3/2)(-3/2)$
4. POTENCIA ENÉSIMA NEGATIVA (PEN)	La PEN, de un número racional a distinto de cero, es igual al inverso de la potencia con exponente positivo; $n > 0$: $a^{-n} = 1/a^n; a \neq 0 \wedge n > 0 \in \mathbb{N}$	$0^{-2} = \cancel{0}$ $2^{-1} = 1/2$ $2^{-3} = 1/2^3$ $(3/4)^{-2} = 1/(3/4)^2$

Observación: cuando el exponente es negativo no tiene sentido hablar de $-n$ factores.

2.3.2. TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^n y b^n , son potencias definidas en los números racionales con exponentes enteros:

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA PAR	La PEP par de base positiva (+) o negativa (-) es positiva: $(a)^n = x; n \in N^* \text{ par}$ $(-a)^n = x; n \in N^* \text{ par}$	$(1/2)^2 = 1/4$ $(2/3)^2 = 4/9$ $(-2/3)^2 = 4/9$ $(-3/4)^2 = 9/16$
2. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA IMPAR	La PEP impar de base positiva (+) es positiva y de base negativa (-) es negativa: $(a)^n = x; n \in N^* \text{ impar}$ $(-a)^n = -x; n \in N^* \text{ impar}$	$(2/3)^3 = 8/27$ $(3/2)^3 = 27/8$ $(-2/3)^3 = -8/27$ $(-3/2)^3 = -27/8$
3. POTENCIA ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La potencia enésima del producto de números racionales es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$[(2/5)(3/6)]^2 = (2/5)^2 \cdot (3/6)^2$
4. POTENCIA ENÉSIMA DEL COCIENTE	La potencia enésima del cociente de números racionales (división), es igual al cociente de las potencias enésimas; $b \neq 0$. $(a/b)^n = a^n/b^n; b \neq 0$	$[(6/5) \div (3/2)]^2 = (6/5)^2 \div (3/2)^2$

2.3.3. OPERACIONES DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^m y a^n , son potencias definidas en los números racionales con exponentes enteros:

OPERACIÓN	TEOREMA	EJEMPLO
1. PRODUCTO DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se suman los exponentes. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-1/2)^2 \cdot (-1/2)^3 = (-1/2)^{2+3} = (-1/2)^5$
2. COCIENTE DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se restan los exponentes. $a^m/a^n = a^{m-n}; a \neq 0$	$(-1/3)^4/(-1/3)^6 = (-1/3)^{4-6} = (-1/3)^{-2}$
3. POTENCIA DE POTENCIA	Se mantiene la base y se multiplican los exponentes. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$[(-2/5)^3]^2 = (-2/5)^{3 \cdot 2} = (-2/5)^6$

2.4. REALES CON EXPONENTES RACIONALES: $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$
2.4.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si la base a es un número real ($\mathbb{R}$), y el exponente n racional, $\mathbb{Q} = \{x/x = \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. POTENCIA CERO (Exponente 0)	La potencia cero (exponente 0) de un número real a , distinto de cero, es igual a 1: $a^0 = 1; a \neq 0$	$(-3)^0 = 1$ $(-3/4)^0 = 1$ $(\pi)^0 = 1$
2. POTENCIA UNO (Exponente 1)	La potencia uno (primera potencia) de un número real a , es igual al mismo número sin el exponente: $a^1 = a$	$-3^1 = -3$ $(-2/3)^1 = -2/3$ $(-\sqrt{3})^1 = -\sqrt{3}$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA (PEP) $\mathbb{N}^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La PEP, de un número real a es igual al producto de n veces a : siendo $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n; a \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}^*$	$(-3/2)^2 =$ $(-3/2)(-3/2)$ $(-\sqrt{3})^2 =$ $(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})$
4. POTENCIA ENÉSIMA NEGATIVA (PEN)	La PEN, de un número real a , distinto de cero, es igual al inverso de la potencia con exponente positivo; siendo $n > 0$: $a^{-n} = 1/a^n; a \neq 0 \wedge n > 0 \in \mathbb{N}$	$2^{-3} = 1/2^3$ $(3/4)^{-2} =$ $1/(3/4)^2$ $(\sqrt{2})^{-3} = 1/(\sqrt{2})^3$
5. POTENCIA ENÉSIMA FRACCIONARIA (PEF)	La PEF, de un número real a positivo, es igual a la raíz enésima de a^m : siendo m y n naturales mayores que 0 y primos entre sí: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}; a > 0 \quad [a^{1/n} = \sqrt[n]{a}; a > 0 \wedge m = 1]$	$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 8$ $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} =$ $2,236\dots$

2.4.2. TEOREMAS DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^n y b^n , son potencias definidas en los reales con exponentes racionales:

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA PAR	La PEP par de base positiva (+) o negativa (-) es positiva: $(a)^n = x; n \in \mathbb{N}^*$ par $(-a)^n = x; n \in \mathbb{N}^*$ par	$(1/\sqrt{3})^2 = 1/3$ $(2/\sqrt{3})^2 = 4/3$ $(-2/\sqrt{3})^2 = 4/3$ $(-\sqrt{2}/4)^2 = 1/8$
3. POTENCIA ENÉSIMA POSITIVA IMPAR	La PEP impar de base positiva (+) es positiva y de base negativa (-) es negativa: $(a)^n = x; n \in \mathbb{N}^*$ impar $(-a)^n = -x; n \in \mathbb{N}^*$ impar	$(2/3)^3 = 8/27$ $(3/\pi)^3 = 27/\pi^3$ $(-\pi/3)^3 = -\pi^3/27$ $(-3/2)^3 = -27/8$
1. POTENCIA ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La potencia enésima del producto de números reales es igual al producto de las potencias enésimas de cada uno de los factores: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(\pi/5 \cdot 3/6)^2 =$ $(\pi/5)^2 \cdot (3/6)^2$
2. POTENCIA ENÉSIMA DEL COCIENTE	La potencia enésima del cociente (división) de números reales, es igual al cociente de las potencias enésimas; $b \neq 0$. $(a/b)^n = a^n/b^n; b \neq 0$	$(6/5 \div 3/2)^2 =$ $(6/5)^2 \div (3/2)^2$

2.4.3. OPERACIONES DE LA POTENCIACIÓN

Si: a^m y a^n , son potencias definidas en los números reales con exponentes racionales:

OPERACIÓN	TEOREMA	EJEMPLO
1. PRODUCTO DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se suman los exponentes: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(-\pi/2)^2 \cdot (-\pi/2)^3 =$ $(-\pi/2)^{2+3} = (-\pi/2)^5$
2. COCIENTE DE POTENCIAS	De igual base: Se mantiene la base y se restan los exponentes: $a^m/a^n = a^{m-n}; a \neq 0$	$(-1/3)^4/(-1/3)^6 =$ $(-1/3)^{4-6} = (-1/3)^{-2}$
3. POTENCIA DE POTENCIA	Se mantiene la base y se multiplican los exponentes: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$[(-2/5)^3]^2 =$ $(-2/5)^{3 \cdot 2} = (-2/5)^6$

ANEXO 3. RADICACIÓN

3.1. NATURALES

3.1.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si *a* es un número natural, y *n* es natural mayor que uno (conjunto representado por *N**):

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA EXACTA $N^* = \{2,3,4,...\}$	La raíz enésima exacta de un número natural llamado radicando, es otro natural tal que, elevado a la potencia enésima, es igual al mismo radicando. $\exists a: \sqrt[n]{a} = x \equiv x^n = a; n \in N^*$	$\sqrt[3]{8} = 2 \leftrightarrow 2^3 = 8$ $\sqrt{2} = \bar{2}$, en <i>N</i>
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1	La raíz enésima de 1 es igual a 1: $\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La raíz y potencia enésima de un mismo número natural, se simplifican: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$

3.1.2. TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

Si: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$, son raíces definidas en los números naturales con índice, *n*, natural mayor que uno (*N**):

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La raíz enésima de un producto de números naturales es igual al producto de la raíz enésima de cada factor, siempre que estén definidas. $\exists a,b: \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$ $10 = 10$ $\sqrt{2 \cdot 5} = \bar{3}$, en <i>N</i>
2. RAÍZ ENÉSIMA DEL COCIENTE EXACTO	La raíz enésima del cociente exacto (división exacta), de números naturales, es igual al cociente de las potencias enésimas, dividiendo y divisor; siempre que estén definidas; <i>b</i> ≠ 0: $\exists a,b: \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}; b \neq 0$	$\sqrt{16 \div 4} = \sqrt{16} \div \sqrt{4}$ $2 = 2$ $\sqrt{2/5} = \bar{3}$, en <i>N</i>

3.2. ENTEROS

3.2.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si *a* es un número entero, y *n* es natural mayor que uno (conjunto representado por *N**), se tiene:

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA EXACTA $N^* = \{2,3,4,...\}$	La raíz enésima exacta de un número entero llamado radicando, es otro entero que, elevado a la potencia enésima, es igual al mismo radicando. $\exists a: \sqrt[n]{a} = x \equiv x^n = a; n \in N^*$	Exacta $\sqrt[3]{8} = 2 \leftrightarrow 2^3 = 8$ Inexacta $\sqrt{2} = \bar{2}$, en <i>Z</i>
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1	La raíz enésima de 1 es igual a 1: $\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La raíz y potencia enésima, de un mismo número entero, se simplifican: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; n \in N^* \text{ impar}$ $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; a \geq 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt[3]{2^3} = 2$ $\sqrt[3]{-2^3} = -2$ $\sqrt{2^2} = 2$ $\sqrt{-2^2} = \bar{2}$

3.2.2. TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

Si: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$, son raíces definidas en los números enteros con índice, n , natural mayor que uno (N^*):

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA PAR EXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$ Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): tiene dos raíces opuestas. $\exists a: \sqrt[n]{a} = \pm x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$ Inexacta: $\sqrt[3]{3} = \beta$, en Z	Exacta $\sqrt{25} = \pm 5 \leftrightarrow$ $(\pm 5)^2 = 25$
	2. Radicando igual a 0: tiene una raíz, el 0. $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt{0} = 0 \leftrightarrow$ $(0)^2 = 0$
	3. Radicando negativo (-): no tiene raíces en Z . $\sqrt[n]{-a} = \beta; n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt{-4} = \beta$, en Z
2. RAÍZ ENÉSIMA IMPAR EXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$ Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): tiene una raíz positiva $\exists a: \sqrt[n]{a} = +x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$ Inexacta: $\sqrt[3]{7} = \beta$, en Z	$\sqrt[3]{8} = 2 \leftrightarrow 2^3 = 8$
	2. Radicando igual a 0: tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ impar}$	$\sqrt[3]{0} = 0$
	3. Radicando negativo (-): tiene una raíz negativa. $\exists -a: \sqrt[n]{-a} = -x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$ Inexacta: $\sqrt[3]{-5} = \beta$, en Z	$\sqrt[3]{-8} = -2 \leftrightarrow (-2)^3 = -8$
3. RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La raíz enésima de un producto es igual al producto de la raíz enésima de cada factor (definidas en Z): $\exists a, b: \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$ $\sqrt{2 \cdot 5} = \beta$, en Z
4. RAÍZ ENÉSIMA DEL COCIENTE EXACTO	La raíz enésima de la división exacta es igual al cociente de las raíces enésimas (definidas en Z), dividiendo y divisor; $b \neq 0$. $\exists a, b: \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}; b \neq 0$	$\sqrt{16/4} = \sqrt{16} / \sqrt{4}$ $\sqrt{3/7} = \beta$, en Z

3.3. RACIONALES

3.3.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si a es un número racional, y n es natural mayor que uno (conjunto representado por N^*):

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA EXACTA. $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La raíz enésima exacta de un número racional a , llamado radicando es otro racional " x ", tal que, elevado a la potencia enésima, es igual al mismo radicando. $\exists a: \sqrt[n]{a} = x \leftrightarrow x^n = a; n \in N^*$ Inexacta: $\sqrt[2]{2/5} = \beta$, en Q	Exacta $\sqrt[3]{8/27} = 2/3 \leftrightarrow$ $(2/3)^3 = 8/27$
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1	La raíz enésima de 1 es igual a 1: $\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La raíz enésima y potencia enésima, de un mismo número racional a , se simplifican: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; n \in N^* \text{ impar}$ $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; a \geq 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt[3]{(\frac{2}{5})^3} = 2/5$ $\sqrt[3]{(-\frac{2}{5})^3} = -2/5$ $\sqrt[2]{(\frac{2}{5})^2} = 2/5$ $\sqrt[2]{(-\frac{2}{5})^2} = \beta$

Observación: la raíz de un número racional no siempre es posible, sólo ocurre cuando la raíz enésima es exacta (definición 1). Por ejemplo: $\sqrt{4/25} = \pm 2/5 \leftrightarrow (\pm 2/5)^2 = 4/25$. La raíz $\sqrt{2/25}$ no es posible en los números racionales porque no existe ningún número que elevado a la potencia 2 de 2/25. Del mismo modo, la raíz de $\sqrt{4/3}$; no es posible porque no existe ningún número racional que elevado al cuadrado de 4/3.

3.3.2. TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

Si: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$, son raíces definidas en los números racionales con índice n, natural mayor que uno (N^*):

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA PAR EXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$ Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): tiene dos raíces opuestas. $\exists a: \sqrt[n]{a} = \pm x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$ Inexacta: $\sqrt[3]{3/5} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt[4]{4/25} = \pm 2/5 \leftrightarrow$ $(\pm 2/5)^2 = 4/25$
	2. Radicando igual a 0: tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt{0} = 0 \leftrightarrow$ $(0)^2 = 0$
	3. Radicando negativo (-): no tiene raíces en Q. $\sqrt[n]{-a} = \pm; n \in N^* \text{ par (no tiene solución en Q)}$	$\sqrt{-4/25} = \pm$, en Q
2. RAÍZ ENÉSIMA IMPAR EXACTA Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): tiene una raíz positiva $\exists a: \sqrt[n]{a} = +x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$ Inexacta: $\sqrt[3]{5/27} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt[3]{8/27} = 2/3 \dots$ $(2/3)^3 = 8/27$
	2. Radicando igual a 0: tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ impar}$	$\sqrt[3]{0} = 0$
	3. Radicando negativo (-): tiene una raíz negativa. $\exists -a: \sqrt[n]{-a} = -x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$ Inexacta: $\sqrt[3]{-5/27} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt[3]{-8/125} = -2/5 \leftrightarrow$ $(-2/5)^3 = -8/125$
3. RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La raíz enésima del producto es igual al producto de la raíz enésima de cada factor (definidas en Q): $\exists a, b: \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ Inexacta: $\sqrt{(2/9)(5/6)} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt{(4/9)(25/36)} =$ $\sqrt{4/9} \cdot \sqrt{25/36} =$ $(3/2)(4/5)$
4. RAÍZ ENÉSIMA DEL COCIENTE.	La raíz enésima del cociente, de números racionales, es igual al cociente de las raíces enésimas (definidas en Q), dividiendo y divisor; $b \neq 0$. $\exists a, b: \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}; b \neq 0$ Inexacta: $\sqrt{(2/9)/(5/6)} = \pm$, en Q	Exacta $\sqrt[3]{9/4 \cdot 16/25} =$ $\sqrt[3]{9/4} / \sqrt[3]{16/25} =$ $3/2 \div 4/5$

3.4. REALES

3.4.1. DEFINICIONES BÁSICAS

Si a es un número real, y n es natural mayor que uno (conjunto representado por N^*):

EXPRESIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA EXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La raíz enésima exacta de un número real a, llamado radicando es otro número real "x", tal que, elevado a la potencia enésima, es igual al mismo radicando. $\exists a: \sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a; n \in N^*$	$\sqrt[3]{8/27} = 2/3 \dots$ $(2/3)^3 = 8/27$
2. RAÍZ ENÉSIMA DE 1 (índice n, exponente m)	La raíz enésima de 1 es igual a 1; siendo: m y n naturales mayores que 1: $\sqrt[n]{1^m} = 1$ ó $\sqrt[m]{1} = 1$	$\sqrt[3]{1^2} = 1$
3. RAÍZ y POTENCIA ENÉSIMA:	La raíz y potencia enésima de un mismo número real, se simplifican: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; a \geq 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$ $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a; n \in N^* \text{ impar}$	$(\sqrt{2/5})^2 = 2/5$ $(\sqrt{-2/5})^2 = \pm$, en R $(\sqrt[3]{2/5})^3 = 2/5$ $(\sqrt[3]{-2/5})^3 = -2/5$
4. RAÍZ ENÉSIMA INEXACTA $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	La raíz enésima no exacta de un número real a, mayor que 0, es igual $a^{1/n}$; n natural mayor que 1: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}; a > 0 \wedge n \in N^*$ $\sqrt[n]{-a} = -a^{1/n}; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$	$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} \approx$ 1.25992... $\sqrt[3]{-2} \approx -1.259...$
5. RAÍZ ENÉSIMA DE UNA POTENCIA (a^m)	La raíz enésima de una potencia (a^m), siendo: a mayor que 0, y m naturales mayores que 1, y primos entre sí, es igual a: $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m; a > 0 \wedge n \in N^*$	$\sqrt[3]{2^2} = 2^{2/3} = (\sqrt[3]{2})^2$

3.4.2. TEOREMAS DE LA RADICACIÓN

Si: $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$, son raíces definidas en los números reales con índice, n , natural mayor que uno (N^*):

NOMBRE	TEOREMA	EJEMPLO
1. RAÍZ ENÉSIMA PAR (Exacta o inexacta) Tiene 3 posibilidades: $N^* = \{2, 3, 4, \dots\}$	1. Radicando positivo (+): Tiene dos raíces opuestas. $\sqrt[n]{a} = \pm x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ par}$	Exacta: $\sqrt[4]{4/25} = \pm 2/5 \leftrightarrow (\pm 2/5)^2 = 4/25$ Inexacta: $\sqrt[4]{2/25} = \pm \sqrt[4]{2}/5 \leftrightarrow (\pm \sqrt[4]{2}/5)^2 = 2/25$
	2. Radicando igual a 0: Tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ par}$	$\sqrt[4]{0} = 0 \leftrightarrow (0)^2 = 0$
	3. Radicando negativo (-): No tiene raíces en R. $\sqrt[n]{-a} = \pm i; n \in N^* \text{ par}$	Exacta: $\sqrt[4]{-4/25} = \pm i, \text{ en R}$ Inexacta: $\sqrt[4]{-2/25} = \pm i \sqrt[4]{2}/5, \text{ en R}$
2. RAÍZ ENÉSIMA IMPAR (Exacta o inexacta) Tiene 3 posibilidades:	1. Radicando positivo (+): Tiene una raíz positiva $\sqrt[n]{a} = +x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$	Exacta: $\sqrt[3]{8/27} = 2/3 \leftrightarrow (2/3)^3 = 8/27$ Inexacta: $\sqrt[3]{5/27} = \sqrt[3]{5}/3 \leftrightarrow (\sqrt[3]{5}/3)^3 = 5/27$
	2. Radicando igual a 0: Tiene una raíz, el 0 $\sqrt[n]{0} = 0; n \in N^* \text{ impar}$	$\sqrt[3]{0} = 0 \leftrightarrow (0)^3 = 0$
	3. Radicando negativo (-): Tiene una raíz negativa. $\sqrt[n]{-a} = -x; a > 0 \wedge n \in N^* \text{ impar}$	Exacta: $\sqrt[3]{-8/125} = -2/5 \leftrightarrow (-2/5)^3 = -8/125$ Inexacta: $\sqrt[3]{-5/27} = -\sqrt[3]{5}/3 \leftrightarrow (-\sqrt[3]{5}/3)^3 = -5/27$
3. RAÍZ ENÉSIMA DEL PRODUCTO	La raíz enésima de un producto es igual al producto de la raíz enésima de cada factor (definidas en R): $\exists a, b: \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	Exacta: $\sqrt[4]{(4/9)(25/36)} = \sqrt[4]{4/9} \cdot \sqrt[4]{25/36} = 5/9$ Inexacta: $\sqrt[4]{(2/9)(5/6)} = \sqrt[4]{2/9} \cdot \sqrt[4]{5/6} = 5\sqrt[4]{2}/18$ $\sqrt[4]{-4/9 \cdot 5/36}, i \text{ en R}$
4. RAÍZ ENÉSIMA DEL COCIENTE.	La raíz enésima de la división es igual al cociente de las raíces enésimas (definidas en R); $b \neq 0$. $\exists a, b: \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b}; b \neq 0$	Exacta: $\sqrt[4]{9/4 \cdot 16/25} = \sqrt[4]{9/4} / \sqrt[4]{16/25} = 5/4$ Inexacta: $\sqrt[4]{(2/3)/(5/6)} = \sqrt[4]{2/3} / \sqrt[4]{5/6} = 2/\sqrt[4]{5}$

Observaciones:

- La raíz de un número: N, Z o Q : no siempre es posible, solo ocurre cuando la raíz es exacta.
- En N, Z, Q, I y R se observa que:
 1. Para las raíces con índice par se tiene: radicando positivo tiene dos raíces ($\pm$) y radicando negativo no tiene solución.
 2. Para índice impar: radicando positivo tiene una sola raíz (+) y radicando negativo tiene una sola raíz (-).
 3. La raíz n -ésima de un número irracional se puede expresar mediante un número decimal con infinitas cifras no periódicas, mediante una expresión aproximada.

ANEXO 4. RADICALES

Las potencias de exponente fraccionario se pueden definir mediante la raíz principal de la base, es decir: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$; en donde la fracción m/n se supone simplificada, n positivo y se excluye el caso en que n es par y a negativo. En el cálculo con raíces, es preferible la representación mediante exponentes fraccionarios. En casos más sencillos es frecuente la representación por radicales. Las propiedades de los radicales son consecuencia inmediata de las propiedades de los exponentes y tienen, por consiguiente, los mismos casos de excepción. En los siguientes casos las letras m y p representan enteros cualesquiera y las letras n, q y k enteros positivos:

1. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^2}$

2. $\sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$

3. $\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a/b}$

4. $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

5. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

6. $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[kn]{a^m}$

ANEXO 5. TEOREMAS BÁSICOS DE LOS REALES

1. IGUALDAD

TEOREMA	NOMBRE	FORMA SIMBÓLICA
1	Cancelativo (términos positivos)	$a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$
2	Cancelativo (términos negativos)	$a - c = b - c \Leftrightarrow a = b$
3	Cancelativo (factores)	$a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$
4	Cancelativo (divisores)	$a/c = b/c \Leftrightarrow a = b; c \neq 0$
5	Transposición de términos (+)	$a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b$ $a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$
6	Transposición de términos (-)	$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ $a - b = c \Leftrightarrow a = c + b$
7	Transposición de factores	$a \cdot b = 1 \Leftrightarrow a = 1/b; b \neq 0$ $a \cdot b = c \Leftrightarrow a = c/b; b \neq 0$
8	Transposición de divisores	$a/b = 1 \Leftrightarrow a = b; b \neq 0$ $a/b = c \Leftrightarrow a = c \cdot b; b \neq 0$
9	Cambio de signos	$-a = -b \Leftrightarrow a = b$

2. DESIGUALDAD

TEOREMA	NOMBRE	FORMA SIMBÓLICA
1	Cancelativo (términos positivos)	$a + c > b + c \Leftrightarrow a > b$
2	Cancelativo (términos negativos)	$a - c > b - c \Leftrightarrow a > b$
3	Cancelativo (factores positivos)	$a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a > b; c > 0$
4	Cancelativo (factores negativos)	$a \cdot c > b \cdot c \Leftrightarrow a < b; c < 0$
5	Transposición de términos positivos	$a + b > 0 \Leftrightarrow a > -b$ $a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$
6	Transposición de términos negativos	$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b$ $a - b > c \Leftrightarrow a > c + b$
7	Transposición de factores positivos	$a \cdot b > 1 \Leftrightarrow a > 1/b; b > 0$ $a \cdot b > c \Leftrightarrow a > c/b; b > 0$
8	Transposición de factores negativos	$a \cdot b > 1 \Leftrightarrow a < 1/b; b < 0$ $a \cdot b > c \Leftrightarrow a < c/b; b < 0$
9	Transposición de divisores positivos	$a/b > 1 \Leftrightarrow a > b; b > 0$ $a/b > c \Leftrightarrow a > c \cdot b; b > 0$
10	Transposición de divisores negativos	$a/b > 1 \Leftrightarrow a < b; b < 0$ $a/b > c \Leftrightarrow a < c \cdot b; b < 0$
11	Cambio de signos	$-a > -b \Leftrightarrow a < b$

3. DISTRIBUTIVO / UNIFORMIDAD

TEOREMA	NOMBRE	FORMA SIMBÓLICA
1	Distributivo por la derecha	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
2	Distributivo para la diferencia	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$
3	Supresión de paréntesis precedido de signo +	$(a + b) = a + b$
4	Supresión de paréntesis precedido de signo -	$-(a + b) = -a - b$
5	Uniformidad para la suma de igualdades	$a = b \wedge c = d \Rightarrow a + c = b + d$
6	Uniformidad para el producto de igualdades	$a = b \wedge c = d \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$

ANEXO 6. SISTEMA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos son una extensión de los números reales, por lo mismo se cumplen los siguientes axiomas:

ADICIÓN (+). $U = C. \forall z_1, z_2, Sz_3:$	
CLAUSURATIVO (S_c)	$z_1 + z_2 = z_3 \Rightarrow z_3 \in C$
CONMUTATIVO	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
ASOCIATIVO	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
MODULATIVO. $S_{(0,0)}$	$(0,0) + (x,y) = (x,y)$
INVERTIVO ($\exists -z$)	$z + (-z) = (0,0); z \neq (0,0)$

MULTIPLICACIÓN (x). $U = C. \forall z_1, z_2, Sz_3:$	
CLAUSURATIVO (S_c)	$z_1 \cdot z_2 = z_3 \Rightarrow z_3 \in C$
CONMUTATIVO	$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
ASOCIATIVO	$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
MODULATIVO. $S_{(1,0)}$	$(1,0) \cdot (x,y) = (x,y)$
INVERTIVO $\exists (z^{-1})$	$z \cdot (z^{-1}) = (1,0); z \neq (0,0)$

DEF. DE RESTA	$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
---------------	----------------------------

DEF. DE DIVISIÓN	$z_1 \div z_2 = z_1 \cdot z_2^{-1}; z_2 \neq 0$
------------------	---

Observación: Los números complejos poseen uno y solo un inverso aditivo e inverso multiplicativo (recíproco): $z^{-1} = [x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2)]; (x^2+y^2) \neq 0$. La multiplicación es distributiva respecto de la suma

DISTRIBUTIVO: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$	RECOLECTIVO: $(z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) = z_1 \cdot (z_2 + z_3)$
---	--

Además:

1. Todo número real es elemento de C.
2. La suma de dos números reales en C es la misma que en el sistema de los reales.
3. El producto de dos números reales en C es el mismo que en el sistema de los reales.
4. El módulo de la suma en C es el 0 de los reales.
5. El módulo de la multiplicación en C es el 1 de los reales.
6. El conjunto C contiene un elemento especial i (unidad imaginaria) que tiene la propiedad:
 $i, i = i^2 = -1$.

Observaciones:

1. La relación de orden de los números reales no es aplicable a los números complejos, es decir, no tiene sentido hablar de que un número complejo es mayor o menor que otro. En consecuencia, no se puede asignar un signo a un número complejo dado. Pero, aclaramos, si existe el negativo de un número complejo (axioma invertivo de la suma).
2. El teorema de los números reales: $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}; a > 0 \wedge b > 0$, no es válida para los números imaginarios. Porque: $\sqrt{-a} \sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$ sino a $\sqrt{ab}$. El resultado correcto se obtiene de la siguiente forma: $\sqrt{-a} \sqrt{-b} = \sqrt{a}i \sqrt{b}i = i^2 \sqrt{ab} = - \sqrt{ab}$. Para evitar este error se escriben los números complejos en la forma $a + bi$, se realizan las operaciones con i como si fuera un literal y al final se reemplaza la potencia de i, considerando:

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 1. $i^1 = i$ | 5. $i^5 = i^4, i = i$ | 9. $i^9 = i^4, i^4, i = i$ |
| 2. $i^2 = -1$ | 6. $i^6 = i^4, i^2 = -1$ | 10. $i^{10} = i^4, i^4, i^2 = -1$ |
| 3. $i^3 = i^2, i = -i$ | 7. $i^7 = i^4, i^3 = -i$ | 11. $i^{11} = i^4, i^4, i^3 = -i$ |
| 4. $i^4 = i^2, i^2 = 1$ | 8. $i^8 = i^4, i^4 = 1$ | 12. $i^{12} = i^4, i^4, i^4 = 1$ |

Observación: Los valores de las potencias de i se repiten en periodos de 4 en 4.

ANEXO 7. ISOMORFISMO NÚMEROS COMPLEJOS - VECTORES

De la misma manera que dos números complejos son iguales si y solo si la parte real e imaginaria son las mismas, dos vectores en el plano son iguales si y solo si sus componentes x e y son las mismas. La representación geométrica de los números complejos, generalmente, es la misma que se usa para los vectores en el plano.

Adicionalmente, los números complejos se suman (forma rectangular) de la misma manera que los vectores y se representan geométricamente de la misma manera (método del paralelogramo o del polígono).

La multiplicación de un número complejo por un número real, definido por:

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \text{ donde } y_1 = 0 \text{ es:}$$

$$x_1(x_2 + iy_2) = (x_1x_2) + i(x_1y_2)$$

Misma que, corresponde, exactamente a la multiplicación de un vector por un escalar. Es decir: multiplicando cada "componente" por el factor real.

Por lo mismo, se puede decir que existe una cierta "igualdad" entre estos dos tópicos. Cuando dos sistemas matemáticos son los mismos, en este sentido, se dice que existe un isomorfismo. La palabra "isomorfismo" tiene dos raíces griegas. "iso" que significa "igual" y "morphos" denota "forma".

Es importante recalcar que el isomorfismo es entre partes de estos dos tópicos. La teoría de los números complejos y la teoría de vectores en el plano, tienen la misma forma solamente cuando se restringe el análisis de la relación de igualdad, a la operación adición, y multiplicación por un número real (Producto escalar en el sistema vectorial).

El isomorfismo como "analogía" no es necesariamente una "igualdad" completa. El sistema de los vectores en el plano y el de los números complejos tienen diferencias importantes, por ejemplo: la multiplicación de dos números complejos y la de dos vectores:

1. El producto de dos números complejos es un número complejo (axioma clausurativo) mientras que el producto de dos vectores en el plano no es un vector en el plano (no es clausurativo).
2. El producto interno de dos vectores no es un vector es un escalar.
3. La multiplicación de números complejos es asociativa y en el caso de los vectores no lo es.

Los dos sistemas difieren adicionalmente en el sentido de que los "vectores" pueden ser extendidos en el espacio de tres o más dimensiones.

ANEXO 8. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo se puede denotar en forma exponencial mediante la fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Si, $z = \cos \theta + i \sin \theta$, es un número complejo donde r es su módulo y θ su argumento, entonces mediante la aplicación de la fórmula de Euler se tiene.

$$z = \cos \theta + i \sin \theta = re^{i\theta}$$

El estudio de la forma exponencial corresponde a niveles que superan los propósitos del presente texto.

ANEXO 9. OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

A continuación, se enuncian algunas reglas prácticas para operar con números decimales

1. Para sumar dos o más números decimales se colocan uno debajo de otro, de tal forma que la coma quede en la misma columna. Luego se suman como si fueran números enteros (ley de signos).

Resolver: $234,125 + 32,94$

	C	D	U		d	c	m
	2	3	4	,	1	2	5
+		3	2	,	9	4	0
	2	6	7	,	0	6	5

Observación: Si en alguna posición, de la parte decimal, faltan cifras complete con el 0.

Resolver: Se suman los valores absolutos y al resultado se antepone el signo menos:

Es decir: $-234,105 + (-32,94) = -267,065$.

2. Para restar dos o más números decimales se colocan uno debajo de otro, de tal forma que la coma quede en la misma columna. Luego se resta como si fueran números enteros.

Resolver: $234,105 - 32,94$.

	C	D	U		d	c	m
	2	3	4	,	1	0	5
-			3	2	,	9	4
	2	0	1	,	1	6	5

Observación: Si en el minuendo hay un 0, se debe restar de 10. Si la cifra del minuendo es menor que la cifra del sustraendo, se suma diez a la cifra del minuendo y esa misma cantidad se resta de la cifra del siguiente sustraendo.

Resolver: $32,94 - 234,105$. Se resta el valor absoluto del minuendo del sustraendo, y al resultado se antepone el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

Es decir: $32,94 - 234,105 = -201,165$.

3. Para multiplicar dos o más números decimales se multiplican como si fueran números enteros y luego se separan, en el producto, tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales de los factores; empezando por la derecha.

Resolver: $14,12 \times 2,3$

	1	4	1	2	
X			2	3	
	4	2	3	6	
	2	8	2	4	
	3	2	4	7	6

La suma de las cifras decimales es 3 por lo tanto la respuesta es: 32,476

Observación: Si en el producto no hay cifras suficientes para poner la coma, aumente los ceros que fueran necesarios, a la izquierda del resultado. Ejemplo: $0,012 \times 0,4 = 0,0048$.

Resolver: $(-14,12) \times 2,3$. Se procede como en el ejemplo anterior y al producto se antepone el signo menos (ley de signos). $(-14,12) \times 2,3 = -32,476$.

4. Para dividir un número decimal para otro se multiplican, el dividendo y el divisor, por la unidad seguida de ceros (10, 100, entre otros) como decimales tenga el dividendo o el divisor, para eliminar los decimales, y luego se divide como en los números racionales.

Resolver: $141,2 \div 2,3$

$$\begin{array}{r}
 141,2 \quad | \quad 2,3 \\
 \underline{138} \\
 32 \\
 \underline{23} \\
 90 \\
 \underline{69} \\
 210 \\
 \underline{207} \\
 3
 \end{array}$$

Dividendo y divisor tienen un decimal, multiplicamos por 10, al dividendo y al divisor.

Observación: Cuando el dividendo es 9 se multiplica por 10, 90, y se pone la coma en el cociente. El resto es 0,03 porque se multiplicó por 10 dos veces. Por el algoritmo de la división se tiene: $1412 = 23 \times 61,39 + 0,03$.

Resolver: $141 \div 2,3$

$$\begin{array}{r}
 141,0 \quad | \quad 2,3 \\
 \underline{138} \\
 30 \\
 \underline{23} \\
 70 \\
 \underline{69} \\
 1
 \end{array}$$

El divisor tiene un decimal, multiplicamos por 10, al dividendo y al divisor.

Observación: Cuando el dividendo es 7 se multiplica por 10 y se pone la coma en el cociente. El resto es 0,1 porque se multiplicó una sola vez por 10. Luego, por el algoritmo de la división se tiene: $1410 = 23 \times 61,30 + 0,1$.

Resolver: $141 \div 23$

$$\begin{array}{r}
 141 \quad | \quad 23 \\
 \underline{138} \\
 30 \\
 \underline{23} \\
 70 \\
 \underline{69} \\
 1
 \end{array}$$

El dividendo y el divisor no tienen cifras decimales, entonces se divide como en los racionales.

Observación: Cuando el dividendo es 3 se multiplica por 10 y se pone la coma en el cociente. El resto es 0,01 porque se multiplicó por 10 dos veces. Luego, por el algoritmo de la división se tiene: $141 = 23 \times 6,13 + 0,01$.

5. Para hallar la potencia de un número decimal se opera la base como un entero (sin decimales), luego si el número decimal tiene m decimales y el exponente es n, tendrá mxn decimales.

Resolver: $(2,5)^3$

$(25)^3 = (25)(25)(25) = 15625$

$(2,5)^3 = 15,625$

Observación: El número tiene 1 decimal y el exponente es 3 entonces el número tiene 3 decimales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEN, A. (2007). *Algebra Elemental*. México: Person Educación, México.
- BASTIDAS, P. (2002). *Axiomas y Teoremas de los Números Reales*. Quito: Editorial Colegio Mejía, Ecuador.
- BECERRIL, R. y JARDÓN, D. (2002). *Pre cálculo*. Iztapalapa: Departamento de Matemáticas UAM, México.
- ESPINOZA, E. (2005). *Matemática Básica*. Lima: S/N, Perú.
- FEHR, H. y PHILLIPS, J. (1997). *Teaching Modern Mathematics in the Elementary School*. New York: Ediciones Addison Wesley, EU.
- GONZÁLEZ, M Y MANCIL, J. (2003). *Algebra Elemental Moderna*. Quito: Libresa, Ecuador.
- JIMÉNES, R. (2011). *Matemáticas I. Algebra*. México: Person Educación, México.
- KATTSOFF, L. y SIMONE, A. (1997). *Foundations of Contemporary Mathematics*. New York: McGraw - Hill Book Company, EU.
- LEHMANN, C. (1967). *College Algebra*. New York: Wiley & sons, EU.
- LEITHOLD, I. (1994). *Álgebra y Trigonometría*. México: Harla, México.
- MILLER, CH. y LIAL, M. (1992). *Fundamental of College Algebra*. Glenview: Scott Foresman and Company, Illinois.
- NICHOLS, E. y HEIMER, R. (1995). *Modern Intermediate Algebra*. New York: Holt, Rinehart and Winston Inc, U.E
- OSÉS, J. (2004). *Los números complejos*. Bogotá: Departamento de Matemáticas - Universidad de los Andes Colombia.
- REPETTO, C. LINSKENS, M. y FESQUET, H. (1992). *Matemática Moderna, Aritmética 1, 2 y 3*. Quito: Libresa, Ecuador.
- SULLIVAN, M. (2006). *Algebra y trigonometría*. México: Person Educación, México.
- SWOKOWSKI, E. y COLE, J. (2009). *Algebra y trigonometría con Geometría Analítica*. Santa Fe: Cengage Learning Editores, México.
- ZILL, D. y DEWAR, J. (2012). *Algebra y trigonometría*. New York: McGraw - Hill Book Company, EU.



ACERCA DE LOS AUTORES:

Msc. PACO BASTIDAS ROMO

Licenciado en Ciencias de la Educación.
Especialización Matemática y Física. UCE.
Magister en Educación Superior Mención
Currículo. Universidad Pedagógica
Experimental Libertador (Caracas -
Venezuela) y Universidad Central del
Ecuador.

Ex - docente de Matemática del Colegio
Nacional "Mejía".

Ex - Vicerrector del Colegio Nacional
"Mejía".

Ex - Rector (encargado) del Colegio
Nacional "Mejía".

Docente de Matemática de la Carrera de
Matemática y Física.

MSc. EDWIN VINICIO LOZANO

Licenciado en Ciencias de la Educación.
Especialización Psicología Educativa. UCE.
Doctor en Ciencias de la Educación.
Especialización Psicología Educativa. UCE.
Magister en Administración Educativa y
Docencia Universitaria. UTI.

Ex - Rector de la Unidad Educativa
Municipal "Eugenio Espejo".

Docente de Investigación y Psicología de la
Carrera de Matemática y Física.

MSc. MILTON CORONEL SÁNCHEZ

Licenciado en Ciencias de la Educación.
Especialización Ciencias Exactas. UNACH.
Magister en Docencia Matemática. UTA.
Ex - Rector del Colegio Municipal
"Cotacollao".

Docente de Matemática de la Carrera de
Matemática y Física.

MSc. CARLOS MONTENEGRO BALSECA

Ex. Profesor Principal de Matemática de la
Universidad central del Ecuador.

Ex. Profesor Principal de Matemática de la
Escuela Politécnica Nacional.

Ex. Director del Centro de Matemática de la
Universidad Central del Ecuador.

Profesor de Matemática de la Universidad
de las Américas.



ISBN: 978-9942-8675-2-0



123666