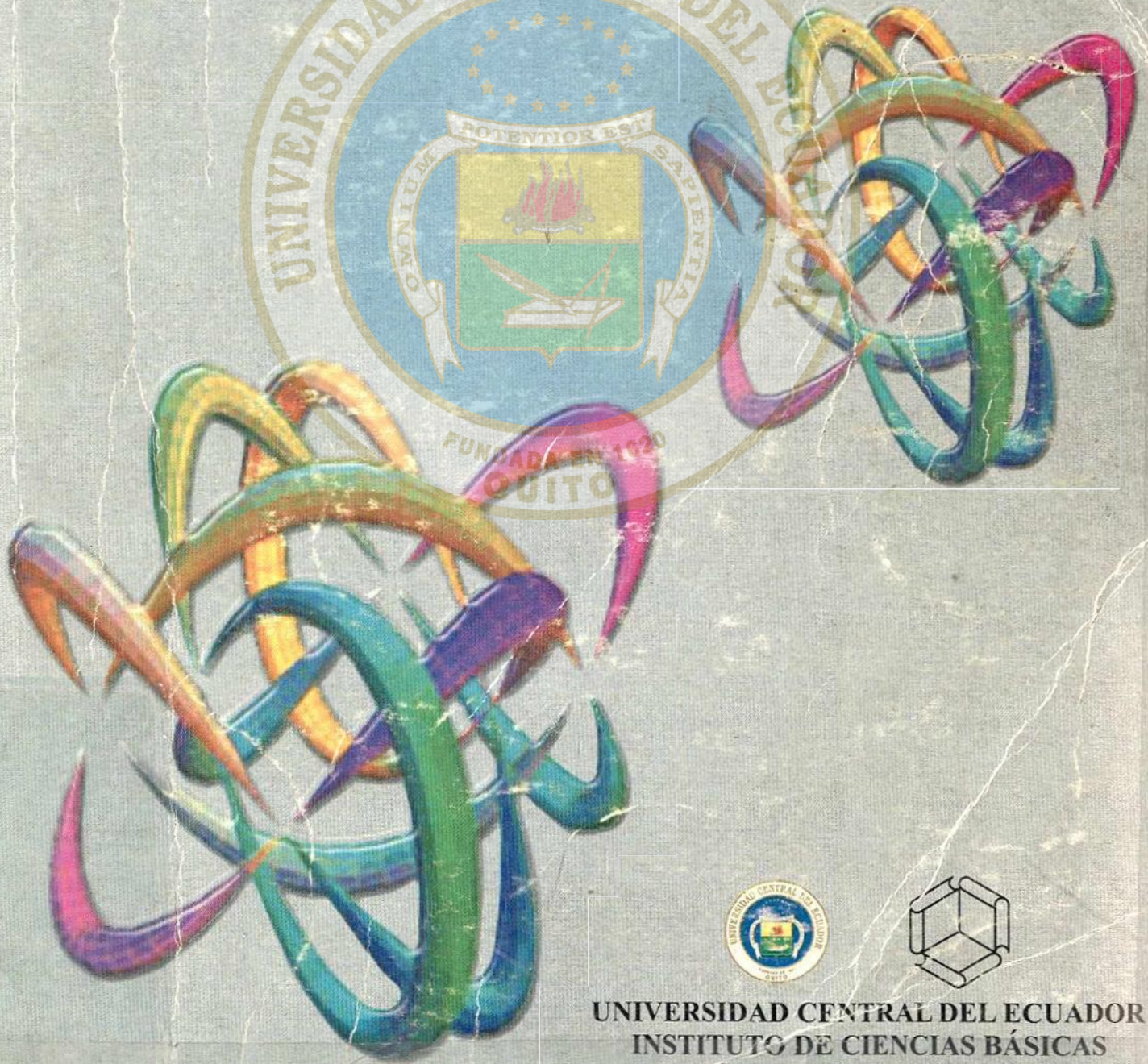
Fundamentos de Análisis
MATEMÁTICO

Jorge Lara
Hernán Benalcázar



UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Sistema Integrado de Bibliotecas
Biblioteca digital UCE
Calle Jerónimo Leyton y Gato Sobral – Cdla. Universitaria
+593 2230757 ext: 808 biblioteca.general@uce.edu.ec

BASE LEGAL PARA DIGITALIZACIÓN DE LIBROS CON DERECHOS DE AUTOR

El Sistema Integrado de Bibliotecas de la Universidad Central del Ecuador, digitalizará su acervo bibliográfico siempre y cuando sea para fines educativos y de investigación. No se permite la reproducción y distribución para la comercialización directa e indirecta del mismo.

La digitalización del material bibliográfico se lo realiza de acuerdo al Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación Art. 212 numeral 9, Literal ii "(…) Una biblioteca o archivo podrá, además, realizar los siguientes actos (…) La reproducción electrónica y comunicación pública de obras de su colección para ser consultadas gratuita y simultáneamente hasta por un número razonable de usuarios, sólo en terminales de redes de la respectiva institución o para usuarios de esa institución bajo su control, en condiciones que garanticen que no se puedan hacer copias electrónicas de esas reproducciones" y literal vii "La reproducción, adaptación, traducción, transformación, arreglo, distribución y comunicación de una obra protegida por derechos de autor o una prestación protegida por derechos conexos, en uno o más formatos accesibles para el uso exclusivo de personas con discapacidad".

Este material se considera un producto intelectual a favor de su autor; por tanto, la titularidad de sus derechos se encuentra protegida por el Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación. La violación a dichos derechos constituye un delito que será responsabilidad del usuario.

Este libro está disponible físicamente en:

BIBLIOTECA	Biblioteca General			**PISO**	01
				ESTANTE	10
				BANDEJA	14
CONVENIO INTERINSTITUCIONAL		**UNIVERSIDAD**			


UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM
SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

515
L31f
2012
c.1

Fundamentos de ANÁLISIS MATEMÁTICO

Jorge Lara
Hernán Benalcázar

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620

ID: 2405
054/15336
EIO - B14

INVENTARIO
Compra: ..... Donación: X ..... Transfer: —
Proveedor: .....
Factura: ..... Fecha: ..... Precio: $ 10
N° Inf. Recep.: ..... Fecha Inf.: .....
N° Alta: .....
Biblioteca: General

PRIMERA EDICIÓN: Diciembre 1987
SEGUNDA EDICIÓN: Abril 1996
TERCERA EDICIÓN AUMENTADA Y CORREGIDA: junio 2005
REIMPRESIONES: junio 2008 – mayo 2010 – octubre 2012

© Derechos reservados: Unidad de Matemática, Instituto de Ciencias Básicas. Universidad Central del Ecuador
Editado: Talleres de la Unidad de Matemática.

Pedidos: Unidad de Matemática Teléfonos: 226741 – 2904796
Email: cena@uce.edu.ec

Reservados todos los derechos. Ninguna parte de esta obra se puede reproducir en ninguna forma, ni por ningún medio sin autorización de la Unidad de Matemática.

PRÓLOGO

Fundamentos de Análisis Matemático es una obra que en su primera edición se publicó en tres volúmenes; el primero dedicado a la lógica, conjuntos y números reales; el segundo, a las funciones reales y el tercero a sucesiones, límites de sucesiones, límite de funciones y continuidad. La nueva edición corregida aborda los fundamentos de la lógica, nociones de conjuntos, propiedades fundamentales de los números reales y el estudio de las funciones reales.

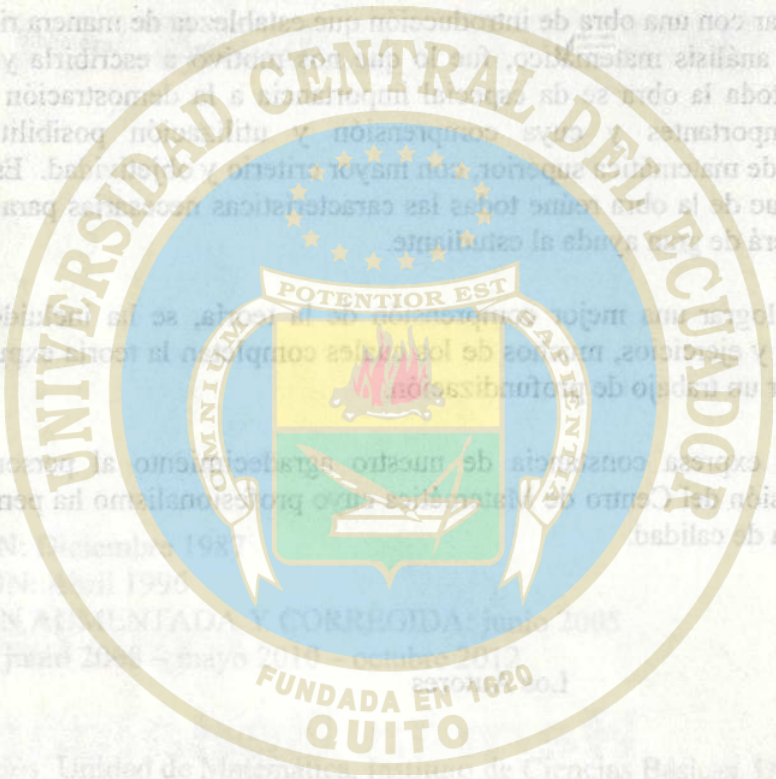
La necesidad de contar con una obra de introducción que establezca de manera rigurosa los fundamentos del análisis matemático, fue lo que nos motivó a escribirla y es así como a lo largo de toda la obra se da especial importancia a la demostración de las propiedades mas importantes y cuya comprensión y utilización posibilitará el tratamiento de temas de matemática superior, con mayor criterio y objetividad. Estamos seguros que el enfoque de la obra reúne todas las características necesarias para sentar sólidas bases y que será de gran ayuda al estudiante.

Con la finalidad de lograr una mejor comprensión de la teoría, se ha incluido gran variedad de ejemplos y ejercicios, muchos de los cuales completan la teoría expuesta y otros invitan a realizar un trabajo de profundización.

Finalmente, dejamos expresa constancia de nuestro agradecimiento al personal de secretaría y de impresión del Centro de Matemática cuyo profesionalismo ha permitido el contar con una obra de calidad.

Los Autores

Quito, junio 2005


UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Índice general

1. Notas Sobre Lógica Matemática **1**

1.1. Introducción 1

1.2. Leyes Lógicas 2

1.2.1. Proposiciones 2

1.2.2. Conectivos Lógicos 3

1.2.3. Tautologías 7

1.2.4. Métodos de Demostración 12

1.2.5. Cuantificadores 13

2. Teoría Elemental de Conjuntos **17**

2.1. Introducción 17

2.2. Determinación de Conjuntos 18

2.3. Relaciones entre Conjuntos 21

2.3.1. Inclusión de Conjuntos 21

2.3.2. Partes de un Conjunto.- Conjunto de partes 26

2.4. Operaciones entre conjuntos 29

2.4.1. Unión de Conjuntos 29

2.4.2. Intersección de Conjuntos 31

2.4.3. Complementario 36

2.4.4. Diferencia Simétrica 38

2.5. Producto Cartesiano 44

3. El Sistema de los Números Reales **53**

3.1. Ley de Composición Interna 53

3.1.1. Propiedades de una Ley de Composición Interna 55

3.1.2. Grupo Conmutativo 60

3.1.3. Cuerpo Conmutativo 61

3.2. El Sistema de los Números Reales 64

3.2.1. Axiomas de Cuerpo 64

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
OMNIUM
FUNDADA EN 1620
QUITO

3.2.2. Axiomas de Orden 71
3.2.3. Valor Absoluto 97
3.2.4. Subconjuntos Importantes de $\mathbb{R}$ 118
3.2.5. Raíces Enésimas 137
3.2.6. Aproximación Decimal de un Número Real 140
3.2.7. Principio de Inducción 143
3.2.8. El Símbolo de Sumatoria $\sum$ 149
3.2.9. Factorial y Coeficiente Binomial 155
3.2.10. Binomio de Newton 157

4. Funciones Reales **161**
4.1. Definición de Función 161
4.1.1. Igualdad de funciones 166
4.2. Imagen Directa 168
4.3. Imagen Recíproca 175
4.4. Funciones Biyectivas e Inversas 180
4.4.1. Funciones Inyectivas. 180
4.4.2. Funciones Sobreyectivas 182
4.4.3. Funciones Biyectivas 185
4.4.4. Función Inversa 191
4.5. Composición de Funciones 196
4.5.1. Estructura Algebraica de $(L(A), \circ)$ 207
4.6. Funciones Reales 211
4.6.1. Funciones Monótonas 216
4.6.2. Funciones Pares e Impares 223
4.6.3. Operaciones con Funciones Reales 229
4.6.4. Producto de Números Reales por Funciones 232
4.6.5. Producto de funciones 235
4.7. Algunas Funciones Reales Importantes 237
4.7.1. Función Constante 237
4.7.2. Función Signo de x 238
4.7.3. Función Característica o indicatriz 238
4.7.4. Función parte entera de x 241
4.7.5. Función Valor Absoluto 246
4.7.6. Función Identidad 249
4.7.7. Función Afín y Lineal 249

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1620
QUITO

4.7.8. Función potencia positiva 252
4.7.9. Función potencia negativa 254
4.7.10. Función polinomial 254
4.7.11. Funciones Racionales 260
4.8. Funciones Acotadas y Envolventes 262
4.8.1. Funciones Acotadas 262
4.8.2. Envolventes de una familia de funciones 269
4.8.3. Funciones definidas mediante el extremo superior de un conjunto 276
4.8.4. Funciones definidas mediante el extremo inferior de un conjunto 278
4.9. Funciones Periódicas 287
4.10. Las funciones trigonométricas 289
4.10.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ 289
4.10.2. Funciones Trignométricas 314
4.10.3. Las funciones tangente y cotangente 334
4.10.4. Propiedades de las funciones tangente y cotangente. 335
4.10.5. Funciones Secante y Cosecante 342
4.10.6. Fórmulas de transformación de sumas y diferencias de senos o cosenos a producto y viceversa 344
4.11. Ecuaciones Trigonométricas 346
4.12. Inecuaciones Trigonométricas 358

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1620
QUITO


UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo 1

Notas Sobre Lógica Matemática

1.1. Introducción

Una disciplina Matemática está constituida por una cadena de proposiciones, naturalmente estas proposiciones deben estructurarse de un modo sistemático de forma que podamos advertir sus mutuas relaciones, es decir, cada afirmación que se dé debe estar justificada en hechos anteriores junto con la simbología y nombres asignados a los diferentes conceptos matemáticos.

Este procedimiento conduce a aceptar ciertos conceptos u objetos primitivos como no susceptibles de definición; es decir, que no se expresarán con otros términos más sencillos. Admitiremos que al formular un concepto primitivo, cada individuo concibe la misma idea respecto a la que tienen todos los demás; mencionamos algunos de estos: conjunto, número, punto, recta, no, pertenece a ($\in$), etc.

Por otra parte, para construir nuestra teoría hemos de partir de unas proposiciones primeras que deben aceptarse sin demostración, éstas constituyen la base sobre la cual se demuestran otras proposiciones y se elaboran los conceptos no primitivos; las denominaremos **axiomas**.

Otras proposiciones denominadas **definiciones** no se demuestran ni tendría sentido intentarlo, simplemente asignan un significado a una palabra, a una expresión, introducen abreviaciones convenientes o nueva simbología.

Finalmente, otras proposiciones que se deducen o demuestran a partir de otras anteriores ya demostradas y de los axiomas, utilizando conceptos primitivos, definiciones y ciertas reglas llamadas reglas de la lógica; ellas se denominan **teoremas**.

El orden en que aparecen los conceptos primitivos, axiomas, definiciones y teoremas depende de las necesidades, del uso y aplicaciones que demos a la teoría. Un tratamiento como éste, exige el estudio de la Lógica Matemática.

La Lógica es el estudio de los métodos y principios que nos permiten distinguir el razonamiento correcto del incorrecto y de manera muy general podemos decir que la Lógica Matemática nace de aplicar a la Lógica los métodos de la Matemática; para tal propósito comenzamos adoptando un simbolismo adecuado para representar los argumentos verbales por fórmulas, en las que se pone en evidencia las Estructuras Lógicas.

El propósito de este capítulo es el estudio de las proposiciones así como el de las reglas lógicas, las mismas que nos permitirán establecer los diferentes métodos de demostración que se utilizan en Matemática.

1.2. Leyes Lógicas

1.2.1. Proposiciones

Definición 1.1 *Una proposición es una expresión o frase acerca de la cual se puede afirmar sin ambiguedad su verdad o falsedad.*

EJEMPLOS.

1. "16 es un número par".
2. "$2 < 0$".
3. "La altura de todo triángulo isósceles es mediana de dicho triángulo".
4. "Todos los hombres son mortales".

Las proposiciones 1, 3, y 4 son verdaderas mientras que la proposición 2 es falsa.
Existen por otra parte frases u oraciones que no son ni verdaderas ni falsas o acerca de las cuales no tiene sentido hablar de su verdad o falsedad y de éstas no nos ocuparemos. Entre este tipo de frases tenemos por ejemplo:

1. ¡Hola!
2. ¿Qué hora es?
3. Buenos días.
4. ¿Qué es el subdesarrollo?

Notación. A las proposiciones las representaremos con la letras p, q, r, ..., etc.

EJEMPLO
A la proposición "7 es número impar" podemos llamarla p; y escribiremos: p: "7 es número impar"; lo cual leeremos p es la proposición "7 es número impar".

Definición 1.2 *Se llama valor de verdad de una proposición a la verdad o falsedad de su contenido.*

Si una proposición p es verdadera, su valor de verdad se denota por $v(p) = V$ y si la proposición p es falsa, su valor de verdad se denota por $v(p) = F$.
A todas las proposiciones las agruparemos en un conjunto que lo notaremos $\mathcal{P}$.

Ejercicios

Indique si las siguientes frases son o no proposiciones y en caso afirmativo indique su valor de verdad.

1. El sol es un planeta.
2. Todo número es divisible por cero.

3. 4 no es menor o igual que 2.
4. Yo soy quiteño.
5. La Tierra es un planeta.
6. Es falso que $1 + 1 = 3$.
7. ¿Qué es la inflación?
8. El área de un cuadrado de perímetro p es $p^2/16$.
9. La suma de los ángulos internos de un triángulo en el plano es 180°.
10. El área de un círculo de diámetro D es $\pi D^2/4$.
11. Cero es divisible por todo número distinto de cero.

1.2.2. Conectivos Lógicos

Podemos obtener proposiciones más complejas mediante la utilización de los denominados conectivos lógicos; siendo los más utilizados los siguientes: negación ("no"), conjunción ("y"), disyunción ("o inclusiva"), bidisyunción ("o excluyente"), implicación ("si — entonces"), equivalencia ("si y solo si").

Negación

Definición 1.3 *La negación "no", es el conectivo lógico que a toda proposición p asocia la proposición "no p", la cual es verdadera si p es falsa y falsa si p es verdadera.*

La negación de p se acostumbra a notarla de varias maneras: $\neg p$, $\bar{p}$, $\sim p$; lo cual en todos los casos se lee "no p".

De acuerdo a la definición se tiene que:

Si $v(p) = V$, $v(\sim p) = F$ y si $v(p) = F$, $v(\sim p) = V$.

Estos resultados se resumen en la siguiente tabla denominada tabla de valores de verdad.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Se dice también que las proposiciones p y $\sim p$ son contradictorias. Por ejemplo, la negación de la proposición verdadera "$2 < 5$" es la proposición falsa "$2 \geq 5$".

Como ejercicio niegue las proposiciones del ejercicio anterior.

Conjunción

Definición 1.4 *La conjunción es el conectivo lógico "y", que a todo par de proposiciones p, q asocia la proposición "p y q"; la misma que es verdadera si p y q lo son y falsa en todos los demás casos.*

Notaremos "y" con el símbolo "$\wedge$". Por lo tanto, en lugar de "p y q" escribiremos "$p \wedge q$".

De acuerdo a la definición de la conjunción, su tabla de valores de verdad está dada por:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO

Dadas las proposiciones:

p : 30 es múltiplo de 5;

q : 2 es un número primo.

Entonces, $p \wedge q$ es la proposición "30 es múltiplo de 5 y 2 es un número primo".

Y como $v(p) = V$, $v(q) = V$, se tiene que $v(p \wedge q) = V$.

Disyunción

Definición 1.5 *La disyunción es el conectivo lógico "o", (o inclusiva) que a todo par de proposiciones p, q asocia la proposición "p o q", la misma que es verdadera si al menos una de las proposiciones p, q es verdadera y falsa únicamente si las dos son falsas.*

Notación. "p o q" se representa por "$p \vee q$".

De acuerdo a la definición de la disyunción, su tabla de valores de verdad es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO

Consideremos las proposiciones:

$p : 2 < 0$;

q : para todo número real x, se tiene $x^2 + 1 < 0$.

La disyunción de las proposiciones p, q es la proposición $p \vee q : 2 < 0$ para todo número real x, se tiene $x^2 + 1 < 0$. La cual es una proposición falsa, pues $v(p) = F$, $v(q) = F$.

Bidisyunción

Definición 1.6 *La bidisyunción es el conectivo lógico "ó " (o excluyente) que a todo par de proposiciones p, q asocia la proposición "p ó q", que la notaremos "p $\veebar$ q", la misma que es verdadera únicamente cuando una de ellas es verdadera.*

Su tabla de valores de verdad es:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1620
QUITO

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO.

Sean las proposiciones:

p : Un número entero n es par;

q : Un número entero n es impar.

Entonces, la proposición:"un número entero n es par ó impar", es una proposición verdadera cuando n sea par, cuando n sea impar y únicamente en esas condiciones. Es obvio que es falso que el número n sea simultáneamente par e impar.

Observación. La "o" en el sentido inclusivo, incluye el valor de verdad V para $p \vee q$ cuando, tanto p como q son verdaderas. En cambio, la "ó" exclusiva, excluye la simultaneidad de la verdad de p y q.

Implicación

Definición 1.7 *Llamaremos implicación de las proposiciones p, q, a la proposición: $(\sim p) \vee q$, que la notaremos $p \Rightarrow q$; es decir que:*

"$p \Rightarrow q$" es la misma proposición que $(\sim p) \vee q$.

Observación.- "$p \Rightarrow q$" leeremos: "si p entonces q" ó "p implica q".

La tabla de valores de verdad está dada por:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Resulta entonces que la proposición: "$p \Rightarrow q$" es falsa si y solamente si la proposición p es verdadera y q es falsa.

EJEMPLOS

1. La proposición: "Si Quito es la capital del Ecuador entonces los pájaros vuelan", es verdadera; pues tanto la proposición: "Quito es la capital del Ecuador", como la proposición: "los pájaros vuelan", son verdaderas.
2. La proposición: "$2 > 0$ implica que la Luna es una estrella" es una proposición falsa, pues la proposición: "$2 > 0$" es verdadera y la proposición: "la Luna es una estrella" es falsa.
3. "Si $1 < 0$ entonces 6 es un número impar", es una proposición verdadera de acuerdo a la tabla de valores de verdad.

4. La proposición: "Si $1 < 0$ entonces la Tierra es un planeta", es verdadera.

Observación. En los ejemplos dados, vemos que existen ciertas proposiciones que siendo matemáticamente correctas, en el lenguaje corriente resultan un poco raras. Sin embargo, en matemática los axiomas y teoremas que utilizaremos serán proposiciones verdaderas de tal manera que si queremos probar que $p \Rightarrow q$ es verdadera, supuesto que p es verdadera, bastará demostrar que q es verdadera.

Así por ejemplo; si queremos probar que la proposición: "Si el número natural n es múltiplo de 4 entonces n es par", es verdadera; supondremos que la proposición p: "El número natural n es múltiplo de 4" es verdadera y probaremos que la proposición q: "El número natural n es par" es verdadera. Es decir, veremos que de p se deduce q.

En efecto: Si n es múltiplo de 4 entonces n es de la forma $4m$ para algún número natural m, pero $4m = 2(2m)$ y como $p = 2m$ es un número natural, se sigue que $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, es decir que n es un número par.

Observación.- En la proposición $p \Rightarrow q$ se dice que p es condición suficiente de q o que q es condición necesaria de p.

En el último ejemplo, es claro que el hecho de que el número natural n sea divisible por 4 es suficiente para que n sea par o también es verdad que, para que n sea divisible por 4 es condición necesaria que n sea un número par (pero no suficiente, pues por ejemplo 10 es par y no es divisible por 4).

Equivalencia

Definición 1.8 *Sean p, q proposiciones, se llama equivalencia de p, q a la proposición $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ que se nota: $p \Leftrightarrow q$. Es decir que:*

$$\boxed{p \Leftrightarrow q \text{ es la misma proposición que } (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)}$$

$p \Leftrightarrow q$ leeremos: "p es equivalente a q" o "p si y solo si q".

De acuerdo a la definición de $p \Leftrightarrow q$ tenemos que la tabla de valores de verdad de la equivalencia estará dada por:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

EJEMPLOS

1. Dadas las proposiciones: "La Tierra es cuadrada"; q: "7 es divisible por 2", entonces $p \Leftrightarrow q$ es la proposición: "La Tierra es cuadrada si y solo si 7 es divisible por 2". Proposición que es verdadera pues tanto p como q son falsas.

2. La proposición: "$2 > 0$ si y solo si Marte es un planeta" es verdadera pues tanto la proposición p: "$2 > 0$" como q: "Marte es un planeta", son verdaderas.

Observación.- Igual que en el caso de la implicación, aquí también aparecen ciertas proposiciones raras en el lenguaje corriente, pero matemáticamente correctas.

Por otra parte, si queremos probar que $p \Leftrightarrow q$ probaremos que: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$; puesto que $p \Leftrightarrow q$ es la misma proposición que: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Veamos un ejemplo que aclare lo últimamente indicado. Sea p: "el número natural n es par"; q: "el número natural $n+1$ es impar"; entonces $p \Leftrightarrow q$ es la proposición: "El número natural n es par si y solo si $n+1$ es impar".

Veremos que de p se deduce q y que de q se deduce p. En efecto, veamos en primer lugar que de p se deduce q; es decir que $p \Rightarrow q$. Así, como n es par, n es de la forma $2m$, para algún número natural m, luego $n+1 = 2m+1$, lo que nos dice precisamente que $n+1$ es impar.

Veamos ahora que de q se deduce p; es decir, $q \Rightarrow p$. Si $n+1$ es impar, entonces $n+1 = 2p+1$, para algún natural p, de donde se sigue que $n = 2p$, resultado este último que nos dice que n es par.

1.2.3. Tautologías

Definición 1.9 *Se llaman tautologías aquellas proposiciones que son verdaderas cualesquiera que sean los valores de verdad de las proposiciones componentes.*

EJEMPLOS

1. $p \Leftrightarrow p$ es tautología. Pues su tabla de valores de verdad está dada por:

p	$p \Leftrightarrow p$
V	V
F	V

Esto nos permite escribir $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee q)$ en lugar de: $p \Rightarrow q$ es la misma proposición que: $(\sim p) \vee q$ y $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow p)]$ en lugar de $p \Leftrightarrow q$ es la misma proposición que: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

2. $p \Leftrightarrow [\sim (\sim p)]$ es una tautología. En efecto,

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$	$p \Leftrightarrow [\sim (\sim p)]$
V	F	V	V
F	V	F	V

3. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$ es una tautología.

Efectivamente,

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	F

Y como,

$\sim (p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
F	F
F	F
F	F
V	V

entonces

p	q	$\sim(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$[(\sim p) \wedge (\sim q)]$
V	V		V	
V	F		V	
F	V		V	
F	F		V	

4. Contraejemplo.

$(p \vee q) \Rightarrow p$, no es una tautología como efectivamente se observa en la tabla de valores de verdad que se indica a continuación.

p	q	$p \vee q$	$p \vee q$	$\Rightarrow$	p
V	V	V		V	
V	F	V		V	
F	V	V		V	
F	F	F		V	

5. $p \Rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.

p	q	$p \vee q$	p	$\Rightarrow$	$(p \vee q)$
V	V	V		V	
V	F	V		V	
F	V	V		V	
F	F	F		V	

Ejercicios Resueltos

1. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías.

   a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow p$.

   b) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$.

   c) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.

   Solución.

   a)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(\sim q)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow p$
V	V	F	F	V		F		V
V	F	F	V	F		F		V
F	V	V	F	V		F		V
F	F	V	V	V		V		F

   Por lo tanto; $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q)] \Rightarrow p$, no es una tautología.

   b)

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q)$	$\wedge$	r	p	$\wedge$	$(q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V			V			V
V	V	F	V	F	F			F			V
V	F	V	F	F	F			F			V
V	F	F	F	F	F			F			V
F	V	V	F	V	F			F			V
F	V	F	F	F	F			F			V
F	F	V	F	F	F			F			V
F	F	F	F	F	F			F			V

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR ESTO SCIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Consecuentemente, la proposición: $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$, es una tautología.

c)

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \quad \wedge \quad (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Entonces:

p	q	r	$[p \wedge (q \vee r)] \quad \Leftrightarrow \quad [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

Conclusión. $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ es una tautología.

2. *a)* Construir la tabla de valores de verdad de la proposición: $[\sim (p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow p \veebar q$.

b) Mostrar que $[\sim (p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \wedge (\sim q)) \vee (q \wedge (\sim p))]$.

Solución.

a)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$(p \veebar q)$	$[\sim (p \Leftrightarrow q)] \quad \Leftrightarrow \quad (p \veebar q)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V

b) Puesto que:

$$\begin{aligned}(p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\ &\Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)],\end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}[\sim (p \Leftrightarrow q)] &\Leftrightarrow \sim [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \\ &\Leftrightarrow [\sim (\sim p \vee q)] \vee [\sim (\sim q \vee p)].\end{aligned}$$

Ahora bien, como: $[\sim (\sim p \vee q)] \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)]$, y $[\sim (\sim q \vee p)] \Leftrightarrow (q \wedge \sim p)$, se sigue que:

$$[\sim (p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)].$$

De a) y b) se deduce que $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \Leftrightarrow (p \veebar q)$.

3. Dadas las proposiciones.

   a) $(\sim q) \vee r$.

   b) $((\sim q) \vee r) \wedge q$.

   c) $\{[((\sim q) \vee r) \wedge q] \vee (\sim q)\}$.

   Encontrar el valor de verdad de cada una de ellas en los cuatro casos siguientes:

CASO	$v(q)$	$v(r)$
I	V	V
II	V	F
III	F	V
IV	F	F

Solución.

a)

CASO	q	$\sim q$	r	$(\sim q)$	$\vee$	r
I	V	F	V			V
II	V	F	F			F
III	F	V	V			V
IV	F	V	F			V

b)

CASO	q	$\sim q$	r	$(\sim q)$	$\vee$	r	$[(\sim q) \vee r]$	$\wedge$	q
I	V	F	V			V			V
II	V	F	F			F			F
III	F	V	V			V			F
IV	F	V	F			V			F

c)

CASO	q	$\sim q$	r	$(\sim q)$	$\vee$	r	$[(\sim q) \vee r]$	$\wedge$	q	$([(\sim q) \vee r] \wedge q)$	$\vee$	$(\sim q)$
I	V	F	V		V			V			V	
II	V	F	F		F			F			F	
III	F	V	V		V			F			V	
IV	F	V	F		V			F			V	

Ejercicios

1. Sea $r = \sim ((\sim p) \wedge q) \wedge q$. Encontrar el valor de verdad de r cuando $v(p) = F$ y $v(q) = V$. Igualmente, para cuando $v(p) = V$ y $v(q) = F$.

2. Sean p, q, r proposiciones y supongamos que p es verdadera, q falsa y r verdadera. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

   a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$.

   b) $(\sim q) \Rightarrow (\sim r)$.

   c) $[p \vee (\sim q)] \Leftrightarrow (q \wedge r)$.

   d) $[(\sim p) \vee r] \wedge q$.

3. Si p, q, r son proposiciones. ¿Cuáles son las negaciones de las siguientes proposiciones?

   a) $p \wedge q$.
   b) $(p \vee q) \wedge r$.
   c) $(p \wedge q) \wedge r$.
   d) $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
   e) $[(p \veebar q) \wedge q] \Rightarrow (\sim p)$.
   f) $(p \vee q) \veebar r$.

4. Sean p y q proposiciones. Determine en cada uno de los siguientes casos si q es verdadera.

   a) $v(p) = V$ y $v(p \Rightarrow q) = F$,
   b) $v[(\sim q) \Rightarrow (p \wedge \sim p)] = V$,
   c) $v(p \wedge q) = F$ y $v(p) = V$,
   d) $v(q \Rightarrow (\sim p)) = F$ y $v(p) = V$.

5. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías:

   a) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$.
   b) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$.
   c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.
   d) $[(p \wedge q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$.
   e) $p \Rightarrow p \vee q$.
   f) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge q)$.
   g) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$.
   h) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
   i) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$.
   j) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$.
   k) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.
   l) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$.
   m) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$.
   n) $p \Rightarrow (p \wedge q)$.
   ñ) $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
   o) $\{[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)] \wedge (q \Rightarrow s)\} \Rightarrow (r \vee s)$.
   p) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$.
   q) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]$.
   r) $[\sim (p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow \{[p \wedge (\sim q)] \vee [q \wedge (\sim p)]\}$.
   s) $[\sim (p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow \{[q \wedge (\sim r)] \Rightarrow \sim p\}$.
   t) $(r \Rightarrow s) \Rightarrow \{(r \vee t) \Rightarrow (s \vee t)\}$.
   u) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.
   v) $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$.
   w) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.
   x) $([p \Rightarrow (p \vee q)] \wedge p) \Rightarrow (p \vee q)$.
   y) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

1.2.4. Métodos de Demostración

Hemos dicho que todas las proposiciones de una teoría matemática se clasifican en dos tipos: las aceptadas sin demostración, que son los axiomas y definiciones (donde no hay nada que demostrar) y las deducidas, llamadas teoremas.

La demostración de un teorema es un procedimiento en el que se enlazan o combinan dos o más proposiciones utilizando ciertas reglas lógicas. La validez de la demostración de un teorema resulta de la validez de las proposiciones y reglas lógicas que en ella intervienen. Por lo general, el enunciado de un teorema incluye explícitamente las proposiciones de partida, éstas las denominaremos hipótesis, (H), del teorema; si partiendo de las hipótesis H se puede deducir otra proposición, llamada tesis (T); en otros términos, debemos verificar que la proposición $H \Rightarrow T$ es verdadera.

Los siguientes métodos de demostración son los más usuales.

Método Directo. De acuerdo a la tabla de valores de verdad de la implicación, para demostrar que la proposición $H \Rightarrow T$ es verdadera, es suficiente demostrar que, si la proposición H es verdadera, entonces T es verdadera.

EJEMPLO

Probar que si n es un número entero impar, entonces n^2 es impar.

Demostración.- La hipótesis es que n es un número entero impar, luego $n = 2m + 1$ para algún entero m; consecuentemente.

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m+1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1. \end{aligned}$$

Si $p = 2m^2 + 2m$, el cual es un número entero, tenemos: $n^2 = 2p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$, es decir que n^2 es impar.

Luego, hemos probado que la tesis es verdadera, como queríamos.■

Reducción al Absurdo. De acuerdo a la tabla de valores de verdad de la implicación, para demostrar que la proposición $p \Rightarrow q$ es verdadera, es suficiente deducir de la hipótesis: p es verdadera y q falsa, un resultado imposible, es decir, dos proposiciones contradictorias.

EJEMPLO

Probar que $\dfrac{1}{0}$ no es un número real.

Demostración.- Supongamos que $\dfrac{1}{0}$ es un número real a; es decir que $\dfrac{1}{0} = a$; se sigue entonces que $1 = a \cdot 0$. Pero como para todo número real a, $a \cdot 0 = 0$ se sigue finalmente que $1 = 0$, lo cual es un absurdo puesto que $1 \neq 0$. Este absurdo se obtiene por haber supuesto que $\dfrac{1}{0}$ es un número real; luego lo correcto es que $\dfrac{1}{0}$ no es un número real. ■

Aprovechamos este ejemplo para recalcar que: no existe división por cero.

Método de la Contraposición. De la tautología $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ se sigue que para demostrar que q es verdadera sabiendo que p es verdadera, basta demostrar que la proposición $\sim q \Rightarrow \sim p$ es verdadera.

EJEMPLO

Probar que si a^2 es impar, entonces a es impar.

Demostración.- Probaremos que si a no es impar, entonces a^2 no es impar, sabiendo que la proposición "a^2 es impar" es verdadera.

En efecto, si a no es impar, entonces a es par y por lo demostrado anteriormente a^2 es par; es decir que a^2 no es impar, que es justamente lo que queríamos verificar. ■

Ejercicios

1. Probar que si a es múltiplo de 6, entonces a es múltiplo de 2.
2. Sean a, b, c números enteros, demostrar por reducción al absurdo que si a divide a $(b+c)$ y a divide a b, entonces a divide a c.

   (Se dice que a divide a b y se nota $a|b$, si existe un entero n tal que $b = an$).
3. Utilizando el método de la contraposición, mostrar que si n es impar, entonces $n-2$ es impar.
4. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}$, n^2+2 no es divisible por 4.
5. Probar que: Si x, y son enteros impares entonces x^2+y^2 no es divisible por 4.
6. Probar que: Si x, y son números enteros impares entonces x^2+y^2 es divisible por 2.
7. Si x, y son números enteros pares, probar que x^2+y^2 es divisible por 4.
8. Sea n un número entero, probar que: $n(n+1)(n+2)$ o también que: $(n-1)n(n+1)$ es divisible por 6.
9. Supongamos que $m = 5n+1$ para algún entero n, mostrar que m^2 se escribe en la misma forma; es decir, $m^2 = 5k+1$ para algún entero k.
10. Sea x un número entero, probar que x^2 es de la forma $3n$, o bien $3n+1$ para algún entero n, pero no de la forma $3n+2$ (Sugerencia: Todo número entero m es de alguna de las siguientes formas: $m = 3k$, $m = 3k+1$ o $m = 3k+2$).
11. Sean m, n enteros, muestre que mn es par si y solo si, m o n es par.
12. Probar que $n^2 - n$ es divisible por 2 para todo entero n.

1.2.5. Cuantificadores

Funciones Proposicionales

Las siguientes expresiones: "$x+10=12$"; "z es un número impar",

no son proposiciones. Pero, si se sustituye por números las variables x y z, se obtienen entonces proposiciones. Así por ejemplo:

$2+10=12$, 3 es un número impar
$5+10=12$, 17 es un número impar
$30+10=12$, 0 es un número impar,

son proposiciones.

Expresiones como "$x + 10 = 12$", "z es un número impar", se llaman funciones proposicionales.

Definición 1.10 *Una función proposicional (a una o varias variables) sobre un conjunto C es una expresión tal que al reemplazar la variable o las variables por elementos del conjunto C se obtiene una proposición.*

Cuantificadores

Consideremos la función proposicional $x + 2 = 12$, sobre el conjunto de los números naturales. Las siguientes afirmaciones son proposiciones:

"Para todo número natural x, $x + 2 = 12$".

"Existe un número natural x tal que $x + 2 = 12$".

Es decir que las expresiones "Para todo" y "Existe al menos", transforman las funciones proposicionales en proposiciones. Dichas expresiones se conocen como cuantificadores.

La expresión "Para todo" o "Cualquiera que sea" que se nota $\forall$ es empleada para indicar que por ejemplo un enunciado $P(x)$ es verdadero para todo elemento x del conjunto C. Se escribe $\forall x$, $P(x)$. Este cuantificador se conoce como cuantificador universal.

EJEMPLO

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ ($\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales).

La expresión "Existe al menos $\cdots$" que se nota: $\exists$ (llamado *cuantificador existencial*), es empleado para indicar que por ejemplo un enunciado $P(x)$ es verdadero para ciertos elementos de un conjunto C. Se escribe: $\exists x : p(x)$ que se lee: "Existe al menos un x tal que verifica $P(x)$".

Observación.- Si $P(x)$ es verdadera para un único elemento de C, usaremos el signo $\exists!$ que se leerá: "Existe un único".

EJEMPLO

$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = y)$, se lee "Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $y \in \mathbb{R}$ se tiene que $x + y = y$".

Relación entre los cuantificadores. Se tiene la siguiente relación:

1. $[\forall x \in C : P(x)] \Leftrightarrow \sim [\exists x \in C : \sim P(x)]$.
2. $[\exists x \in C : P(x)] \Leftrightarrow \sim [\forall x \in C : \sim P(x)]$.

EJEMPLOS

1. La negación de "todos los hombres son mortales" es "existe al menos un hombre inmortal". La negación de "ningún hombre es mortal" es "algún hombre es mortal".
2. La negación de la proposición: "$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$" es "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$".

3. La negación de la proposición: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n+m = 12)$ es: "$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(n+m \neq 12)$".

Observación.- Cuando los cuantificadores que afectan a una función proposicional son diferentes, hay que tener mucho cuidado con el orden de los mismos; así por ejemplo en las proposiciones:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists m \in \mathbb{N})(n = m+1),$$

$$(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n = m+1),$$

donde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3 \ldots\}$, se tiene que la primera es verdadera, mientras que la segunda es falsa, puesto que en la primera, cualquiera que sea n podemos tomar $m = n-1$; mientras que si la segunda proposición fuese verdadera, existiría al menos un m que verifique por ejemplo: $8 = m+1$ y $10 = m+1$, de donde se seguiría que $m = 7$ y $m = 9$; lo cual no es posible, pues se tendría que $7 = 9$. Por lo tanto no existe dicho m y la proposición es falsa.

Observación. Se tienen las siguientes equivalencias:

$$[(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))] \Leftrightarrow \{[(\forall x)(P(x))] \wedge [(\forall x)(Q(x))]\},$$

$$[(\exists x)(P(x) \vee Q(x))] \Leftrightarrow \{[(\exists x)(P(x))] \vee [(\exists x)(Q(x))]\}.$$

Ejercicios.

1. Dadas las siguientes proposiciones, indicar su valor de verdad y escribir su negación.
   a) $(\exists x \in \mathbb{N})\left(x^2 = \frac{1}{4}\right)$.
   b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n$ es un número par.
   c) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N},\ n+m = m)$.

2. Negar las siguientes proposiciones:
   a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$, $(x \leq y \ o \ y \leq x)$.
   b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})$, $(x+y \neq 1)$.
   c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$, $(\exists z \in \mathbb{R})(z > x+y)$.

3. Una sucesión numérica (a_n) se dice que converge a un número L si para todo número positivo ϵ, existe un entero N tal que para todo entero n, $n \geq N$ implica que $|a_n - L| < \epsilon$. ¿Qué significa que la sucesión (a_n) no converge a L?

4. ¿Son los siguientes enunciados, teoremas de la teoría de los números reales?
   a) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ (y > x)$.
   b) $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (y > x)$.
   c) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ (x+y = 0)$.
   d) $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (xy = 0)$.

5. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías:
   a) $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)$,
   b) $[\neg(p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(q \wedge \neg r) \Rightarrow \neg p]$.

6. Examine las relaciones lógicas existentes entre las siguientes afirmaciones:

a) Todos los hombres son mortales.
b) Todos los hombres son inmortales.
c) Ningún hombre es mortal.
d) Ningún hombre es inmortal.
e) Existen hombres inmortales.
f) Existen hombres mortales.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo 2

Teoría Elemental de Conjuntos

2.1. Introducción

Hemos señalado antes que los términos: **conjunto** y **elemento** los consideraremos como nociones o conceptos primitivos, esto es, que no se pueden definir en función de otros términos más sencillos. Es por ello que para nuestro estudio aceptaremos la noción intuitiva que todos tenemos de conjunto, esto es, como sinónimo de colección, agrupación, clase de objetos. Así por ejemplo hablaremos de una colección de obras de arte, de una clase social, de un grupo de estudiantes, etc. En matemática utilizaremos únicamente el término **conjunto**.

Los objetos que constituyen o forman un conjunto se denominan elementos, miembros, individuos, etc. Es decir que, **un conjunto está constituido por elementos**. Cierto es también que, más adelante hemos de aceptar la existencia de conjuntos con un único elemento e incluso de conjuntos sin elementos.

En general notaremos los conjuntos con las letras mayúsculas del alfabeto: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ y los elementos con letras minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Asociada a los conceptos intuitivos de conjunto y elemento, está la noción de **pertenencia**, y para indicar que un objeto a pertenece a un conjunto A escribiremos: $a \in A$, que se lee "a pertenece al conjunto A" o "a es elemento del conjunto A" y en caso contrario escribiremos: $a \notin A$ que se lee "a no pertenece al conjunto A".

EJEMPLOS

1. Si A es el conjunto formado por las letras de la palabra "matemática", tenemos que:

   $$A = \{a, e, i, m, t, c\}.$$

   En este caso, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

   $a \in A$, $e \in A$, $i \in A$, $m \in A$, $t \in A$, $c \in A$, $5 \notin A$, $k \notin A$.

2. Sea B el conjunto constituido por los números reales que son raíces de la ecuación $x^2+7x+6 = 0$.

   Para saber qué elementos forman el conjunto B, tenemos que resolver la ecuación dada; así:

   $$\begin{aligned} x^2 + 7x + 6 = 0 &\Rightarrow (x+6)(x+1) = 0 \\ &\Rightarrow x + 6 = 0 \text{ o } x + 1 = 0 \\ &\Rightarrow x = -6 \text{ o } x = -1. \end{aligned}$$

   En consecuencia, $B = \{-6, -1\}$.

Otra idea que surge de manera natural es la de igualdad de conjuntos; es decir que somos capaces de discernir cuándo dos conjuntos son iguales o no. Para indicar que dos conjuntos A y B son iguales escribiremos: $A = B$ y en caso contrario, se escribirá: $A \neq B$.

Las nociones de pertenencia y de igualdad las podemos relacionar formalmente en el siguiente axioma:

Axioma de Extensión.- Dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.

EJEMPLO

Los conjuntos A y B constituidos por las letras de la palabra "careta" y por las letras de la palabra "cartera" respectivamente, son iguales. En efecto:

$$A = \{a, c, e, r, t\} = B.$$

2.2. Determinación de Conjuntos

Diremos que un conjunto A está bien definido si dado un objeto a cualquiera, podemos afirmar sin ambigüedad que $a \in A$ o que $a \notin A$.

Los conjuntos se caracterizan o se determinan de dos maneras: por enumeración y por comprensión.

1. Se dice que un conjunto A está definido por **enumeración, extensión o tabulación** cuando se enumeran todos sus elementos; es decir, cuando se escriben todos y cada uno de los elementos del conjunto entre llaves y separados por comas.

   Ejemplos

   a) Si A es el conjunto formado por los números dígitos. Por extensión o enumeración dicho conjunto se escribirá de la siguiente manera:

   $$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

   b) Si B es el conjunto de las vocales, por enumeración dicho conjunto se escribirá:

   $$B = \{a, e, i, o, u\}.$$

2. Si se considera el conjunto de los elementos que cumplen una función proposicional sobre un conjunto referencial, diremos que el conjunto está determinado por comprensión. En el lenguaje familiar las funciones proposicionales se conocen como propiedades.

   Ejemplo. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$.

   En este caso $A = \{-2, 2\}$, el conjunto de referencia es $\mathbb{R}$ (números reales). La función proposicional sobre el conjunto $\mathbb{R}$ es $x^2 = 4$; además, -2 y 2 son los únicos números reales que elevados al cuadrado son iguales a 4; es decir que -2 y 2 son los únicos números reales que a la función proposicional $x^2 = 4$ sobre $\mathbb{R}$, la convierten en una proposición verdadera. Es decir que la función proposicional caracteriza completamente a los elementos del conjunto.

Podemos entonces enunciar el siguiente axioma:

Axioma de Especificación.- A todo conjunto E usado como referencia y a toda función proposicional $p(x)$ sobre el conjunto E, corresponde un conjunto A cuyos elementos son precisamente

aquellos elementos de E que convierten a la función proposicional en una proposición verdadera. El conjunto A se notará:

$$A = \{x \in E : p(x)\}$$

que leeremos: "A es el conjunto de todos los elementos x de E para los cuales es cierta la propiedad $p(x)$".

Observaciones

1. Diremos que los conjuntos $A = \{x \in E : p(x)\}$ y $B = \{x \in E : q(x)\}$ son iguales si y solamente si las funciones proposicionales sobre el conjunto E que los definen son equivalentes.

2. Un mismo ente matemático no puede ser a la vez un conjunto y un elemento de ese conjunto; es decir que excluimos la posibilidad de que:

$$a \in a.$$

3. La colección de todos los conjuntos imaginables no es un conjunto.

EJEMPLOS

1. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$. El conjunto A está constituido por los números reales que son raíces de la ecuación $x^2 - 1 = 0$. En este caso, $p(x)$ es la propiedad: $x^2 - 1 = 0$. Además,

$$\begin{aligned} 1 &\in A \text{ puesto que } p(1) : 1^2 - 1 = 0, \text{ es verdadera} \\ -1 &\in A \text{ puesto que } p(-1) : (-1)^2 - 1 = 0, \text{ es verdadera.} \end{aligned}$$

2. Si $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0\}$ se tiene que $p(x)$ es la propiedad de que $x^2 - 1 < 0$. Veamos a continuación cuáles son los elementos del conjunto B; es decir, cuáles son los números reales que verifican la inecuación $x^2 - 1 < 0$. Así:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 < 0 &\Leftrightarrow x^2 < 1, \text{ extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros se sigue:} \\ &\Leftrightarrow |x| < 1 \text{ puesto que } \sqrt{x^2} = |x| \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 1 \\ &\Leftrightarrow x \in]-1, 1[, \end{aligned}$$

donde $]-1, 1[$ es el intervalo abierto de extremos -1 y 1; el cual se nota también de la forma $(-1, 1)$. Nosotros utilizaremos la primera notación; es decir que $B =]-1, 1[$. La Figura 2.1 es una representación de dicho conjunto.

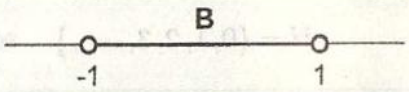


Figura 2.1: Intervalo $]-1, 1[$

3. Si $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ se tiene que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ representa el círculo de centro el origen de coordenadas y radio 1. Los puntos que verifican la relación $x^2 + y^2 \leq 1$, son los puntos del círculo y los del interior al círculo; como se indica en la Figura 2.2.

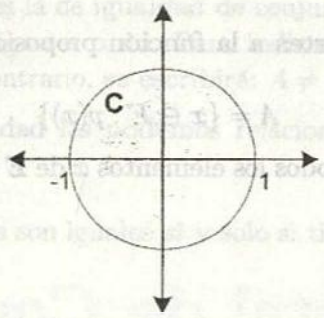


Figura 2.2: Disco de centro el origen y radio unidad.

Observación. Al definir un conjunto A por comprensión: $A = \{x : p(x)\}$, puede suceder que ningún objeto x cumpla la propiedad $p(x)$. En dicho caso, se dice que A es el conjunto vacío y se lo denota con el símbolo $\emptyset$. Es decir que, **el conjunto vacío no tiene elementos.**

EJEMPLO

Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$, se tiene que $A = \emptyset$, puesto que no existe un número real x tal que $x^2 + 1 = 0$; pues como sabemos, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

Podemos definir al conjunto vacío de la siguiente manera:

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

Conjunto Referencial.- Hemos dicho que al determinar un conjunto A por comprensión se supone la existencia de otro conjunto utilizado como referencia, al que se lo llama conjunto referencial y que está formado por la totalidad de los elementos en estudio; este conjunto se lo nota generalmente con la letra $\mathcal{U}$ o con la E.

EJEMPLOS

1. Sea $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x \leq 10\}$. En este ejemplo el conjunto referencial es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \}$; los puntos suspensivos se leen "y así sucesivamente".

   Al determinar el conjunto A por extensión, se tiene que,

   $$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

   Observación.- Por un abuso de lenguaje se dice que el conjunto de los números naturales ha sido determinado por enumeración cuando se escribe

   $$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, \}.$$

   Lo mismo ocurre con el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, cuando se escribe

   $$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, \}.$$

2. Sea el conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 3\}$. En este caso el conjunto referencial es el conjunto de los números enteros. Al determinar el conjunto B por extensión, se tiene que $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

3. Si $C = \left\{x \in \mathbb{Q} : -\frac{1}{2} < x < 2\right\}$, se tiene que el conjunto referencial es el conjunto de los números racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\right\}.$$

Puesto que, como veremos más adelante, entre dos números racionales siempre existe otro número racional; no es posible determinar el conjunto C por extensión.

4. Si $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$, el conjunto de referencia es el conjunto de los números reales. En este caso, tampoco es posible determinar el conjunto D por extensión.

El conjunto D es el intervalo cerrado de extremos -1 y 1; es decir $D = [-1, 1]$, cuya representación se indica en la Figura 2.3.



Figura 2.3: Intervalo $[-1, 1]$

Diagramas de Venn-Euler.- Para representar un conjunto gráficamente, se usan los llamados diagramas de Venn-Euler; los mismos que consisten en representar el conjunto con una área plana, limitada por una curva cerrada. Todos los objetos que pertenecen al conjunto se encuentran en el interior de la curva y cualquier objeto fuera de ella no pertenece al conjunto.

EJEMPLO

Si $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 4\}$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros; se tiene que al conjunto A lo representamos de la manera indicada en la Figura 2.4.



Figura 2.4:

2.3. Relaciones entre Conjuntos

2.3.1. Inclusión de Conjuntos

Definición 2.1 *Sean A y B conjuntos cualesquiera. Se dice que A es subconjunto de B si todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B.*

Escribiremos $A \subset B$ para indicar que A es un subconjunto de B.

En forma abreviada, la definición se expresa de la siguiente manera:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Mediante diagramas de Venn, $A \subset B$ se representa como se indica en la Figura 2.5.

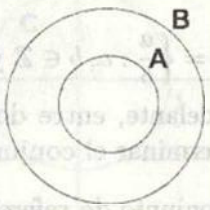


Figura 2.5:

Observaciones

1. $A \subset B$ se lee también por:
   - "A está contenido en B".
   - "A está incluido en B".
   - "A es parte de B".
2. Se usará también la notación $B \supset A$ que se lee "B contiene a A". Es decir que,
$$A \subset B \Leftrightarrow B \supset A.$$
3. Para demostrar que un conjunto A es subconjunto de B, se toma un elemento arbitrario de A y se prueba que este elemento pertenece a B; es decir, verificamos que la proposición: $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$, es verdadera.
4. A la izquierda del símbolo $\in$ debemos tener un elemento y a la derecha un conjunto.
5. La inclusión es una relación entre conjuntos, luego, a ambos lados del símbolo "$\subset$" deben estar conjuntos.

EJEMPLOS

1. Si $M = \{\{0,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$, se tiene por ejemplo que: $\{1,2\} \in M$, $1 \notin M$.
   Nótese que $\{1,2\}$ siendo conjunto, es un elemento de M y es falso que $\{1,2\} \subset M$, en cambio es verdad que $\{\{1,2\}\} \subset M$.
2. Sean $A = \{x : x \text{ es mútiplo de } 4\}$ y $B = \{x : x \text{ es mútiplo de } 2\}$, se tiene que: $A \subset B$.
   En efecto, sea $x \in A$, entonces x es múltiplo de 4, luego puede escribirse en la forma $x = 4p$, para algún entero p, pero $x = 4p = 2(2p)$. Llamando $r = 2p$, se tiene que $x = 2r$, $r \in \mathbb{Z}$; es decir que, x es múltiplo de 2 y por consiguiente $x \in B$. En otros términos, hemos probado que: $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$ es una proposición verdadera; consecuentemente, $A \subset B$.

Observación. Para indicar que A no es subconjunto de B se escribe $A \not\subset B$. Veamos además qué significa que $A \not\subset B$:

$$\begin{aligned} A \not\subset B &\Leftrightarrow \neg(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\exists x : \neg(x \in A \Rightarrow x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x : \neg([\neg(x \in A)] \vee x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (\exists x : \neg(\neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in B))) \\ &\Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B). \end{aligned}$$

Es decir que,

$$\boxed{A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B).}$$

EJEMPLO

Si A y B son los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2\},\ B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 2\},$$

se tiene que $A \not\subset B$ puesto que $-1 \in A$ y $-1 \notin B$ e igualmente $B \not\subset A$ puesto que $2 \in B$ y $2 \notin A$.

Existen entonces conjuntos que no son comparables mediante la relación de inclusión.

Propiedades de la Inclusión.

Sean A, B, C conjuntos.

1. **Propiedad Reflexiva** Para todo conjunto A: $A \subset A$. Es decir que todo conjunto es subconjunto de si mismo.

2. **Propiedad Transitiva** Si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

3. **Propiedad Antisimétrica** Si $A \subset B$ y $B \subset A$ entonces $A = B$.

Demostración.

1. La proposición: $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in A$, es siempre verdadera y por definición de la inclusión de conjuntos se sigue que $A \subset A$.

2. Supongamos que ($A \subset B$ y $B \subset C$) es verdadero. Sea $x \in A$ un elemento arbitrario, como por hipótesis $A \subset B$, entonces $x \in B$; pero como $B \subset C$ se sigue que $x \in C$. Es decir, tenemos que todo elemento de A está en C; o lo que es lo mismo, $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C$.

3. Veamos que $(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow (A = B)$.

   Supongamos que $(A \subset B \wedge B \subset A)$ es verdadera.

   Sea $x \in A$, como $A \subset B$, se sigue que $x \in B$. Sea $x \in B$, como $B \subset A$, $x \in A$. Luego A y B tienen los mismos elementos; es decir, $A = B$. ■

Teorema 2.1 *Sean A y B conjuntos cualesquiera. Entonces:*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).$$

Demostración.- Para demostrar que $(p \Leftrightarrow q)$ es verdadera hay que demostrar que $(p \Rightarrow q)$ es verdadera y que $(q \Rightarrow p)$ también es verdadera.

Es decir que, en nuestro caso tenemos que ver las dos siguientes implicaciones:

a) $(A = B) \Rightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.

b) $(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow (A = B)$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST SAPIENTIA OMNIUM FUNDADA EN 1620 QUITO

La parte b) no es sino la propiedad antisimétrica de la relación de inclusión, nos falta entonces probar únicamente la parte a). En efecto, supongamos que $A = B$ es verdadero. Sea $x \in A$, como $A = B$, x es también elemento de B, luego tenemos que:

$$(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \text{ lo cual es equivalente a } A \subset B.$$

Sea ahora $x \in B$, como $A = B$, x es también elemento de A, luego:

$$(\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subset A.$$

Es decir, tenemos que $A \subset B$ y $B \subset A$. Consecuentemente, está demostrada la implicación. ■

Observación.- Para probar que dos conjuntos A y B son iguales hay que demostrar que $A \subset B$ y que $B \subset A$.

EJEMPLOS

1. Dados los conjuntos $P = \{x : x = 2n + 1, \text{ para algún entero } n\}$ y $Q = \{x : x = 2n - 1, \text{ para algún entero } m\}$, mostrar que $P = Q$.

   Demostración.- Probaremos que $P \subset Q$ y que $Q \subset P$.

   a) Sea $x \in P$, entonces $x = 2n + 1$, para algún entero n, pero $x = 2n + 1 = (2n + 2) - 1$; es decir que $x = 2(n + 1) - 1$. Llamemos $m = n + 1$, entonces; $x = 2m - 1$, $m \in \mathbb{Z}$; lo que muestra que x es un elemento de Q. Como x es un elemento arbitrario, se tiene que:

   $$(\forall x : x \in P \Rightarrow x \in Q) \Leftrightarrow P \subset Q.$$

   b) Sea $x \in Q$, entonces $x = 2m - 1$ para algún entero m. Como: $x = 2m - 1 = (2m - 2) + 1 = 2(m - 1) + 1$, llamando $n = m - 1$, se sigue que $x = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$; lo cual nos dice que x es un elemento de P. Consecuentemente:

   $$(\forall x : x \in Q \Rightarrow x \in P) \Leftrightarrow Q \subset P.$$

   De a) y b) se sigue que $P = Q$.

2. Sean $M = \{a, a\}$ y $N = \{a\}$. Probar que $M = N$.

   Demostración. Sea $x \in M$ entonces $x = a$ o $x = a$ pero como

   $$x = a \vee x = a \Rightarrow x = a,$$

   se sigue que $x \in N$; luego $M \subset N$.

   Recíprocamente, si $x \in N$ entonces $x = a$; pero como $x = a \Rightarrow x = a \vee x = a$ se sigue que $x \in M$.

   Este ejemplo muestra que no es necesario repetir dos o más veces un determinado elemento en un conjunto; basta que figure en él una sola vez.

3. Probar que los siguientes conjuntos son iguales:

   $$A = \{5n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{5n - 3 : n \in \mathbb{Z}\}.$$

   Demostración.

a) Veamos que $A \subset B$:

$$\begin{aligned} \forall x : x \in A &\Rightarrow x = 5n+2 \text{ para algún entero } n; \\ &\Rightarrow x = 5n+5-5+2 \\ &\Rightarrow x = 5(n+1)-3 \\ &\Rightarrow x = 5p-3,\ n+1 = p \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x \in B. \end{aligned}$$

Es decir; hemos probado que todo elemento de A es un elemento de B o lo que es lo mismo que $A \subset B$.

b) De manera similar se prueba que $B \subset A$, su demostración se propone como ejercicio.

De a) y b) se concluye que $A = B$.

Ejercicio

Dados los conjuntos A y B definidos por:

$$A = \{3n+1 : n \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{3n-2 : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $A \not\subset B$.
2. $A \subset B$.
3. $B \subset A$.
4. $A = B$.
5. $A \neq B$.

Definición 2.2 *Sean A y B conjuntos cualesquiera. Se dice que A es subconjunto propio de B o que A está contenido estrictamente en B si $A \subset B$ y $A \neq B$. Notaremos por $A \subsetneq B$.*

EJEMPLOS

1. Si $A = \{0,1,2,3,4\}$ y $B = \{0,1,2,3,4,5\}$ se tiene que A es subconjunto propio de B; es decir que $A \subsetneq B$.

   En lo sucesivo no se determinará explícitamente si un conjunto es o no subconjunto propio de otro conjunto; esto nos permitirá utilizar indistintamente la notación $A \subset B$.

2. Si $A = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$ entonces se sigue que: $A \subset B$; puesto que:

   $$A = \{-3,-2,-1,0\} \text{ y } B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}.$$

   La Figura 2.6 nos muestra que $A \subset B$.

Teorema 2.2 *Para todo conjunto A, $\emptyset \subset A$. (Es decir que el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto).*

Demostración La demostración la realizaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que $\emptyset \not\subset A$; entonces, existe al menos un elemento x en el conjunto $\emptyset$ tal que $x \notin A$; pero ello es un absurdo puesto que $\emptyset$ no tiene elementos. Este absurdo proviene de la suposición de que $\emptyset \not\subset A$; luego lo correcto es que $\emptyset \subset A$, cualquiera que sea el conjunto A. ■

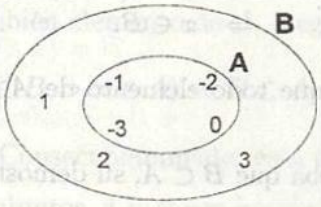


Figura 2.6: $A \subset B$

2.3.2. Partes de un Conjunto.- Conjunto de partes

Definición 2.3 *Sea E un conjunto. Se llama parte de E a todo subconjunto A de E.*

EJEMPLO

En el conjunto de números naturales $\mathbb{N}$, la propiedad de divisibilidad por 2 define una parte de $\mathbb{N}$, que es el conjunto A de números pares. Un número natural x pertenece a A si existe un número natural n tal que $x = 2n$. Se nota entonces:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}; x = 2n\}.$$

La parte de E que no tiene elementos se llama **parte vacía** de E y se nota $\emptyset$. Puesto que no existe un elemento distinto de sí mismo, se tiene que:

$$\emptyset = \{x \in E : x \neq x\}.$$

Definición 2.4 *Sea A un conjunto cualquiera. El conjunto partes de A que lo notaremos $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A. Es decir,*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}.$$

Se tienen además las siguientes equivalencias lógicas:

$$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A,$$

$$\{a\} \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow a \in A.$$

Observación. Es claro que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$. En efecto:

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \emptyset \subset A,$$

$$A \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow A \subset A.$$

EJEMPLOS

1. Hallar $\mathcal{P}(A)$ si $A = \emptyset$.

   Solución. $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$; puesto que el conjunto vacío es el único subconjunto del conjunto vacío.

2. Determinar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ si $A = \{a\}$.

   Solución. Los subconjuntos de A son $\emptyset$ y A. Luego:

   $$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, A\}.$$

3. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ si $A = \{a, b\}$.

   Solución. Los subconjuntos de A son: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} = A$. Por lo tanto tenemos que

   $$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}.$$

4. Determinar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ si $A = \{a, b, c\}$.

   Solución. Hallemos en primer lugar los subconjuntos de A:

   $$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = A.$$

Luego:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

Observe que, si en cada uno de los ejemplos anteriores, con $n(A)$ representamos el número de elementos del conjunto A y con $n(\mathcal{P}(A))$ el número de elementos del conjunto $\mathcal{P}(A)$, se verifica que:

$$n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}.$$

Así, en el ejemplo 4, $n(A) = 3$ y $n(\mathcal{P}(A)) = 8$, con lo cual,

$$8 = 2^3 \Leftrightarrow n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}.$$

En general se puede demostrar que: $n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$. Expresión que nos dice además que de un conjunto de n elementos podemos extraer 2^n subconjuntos.

Ejercicios

1. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera (V) o falsa (F).

   a) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$.
   b) $a \in \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$.
   c) $\{\{a\}\} \subset \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$.
   d) $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$.
   e) $\{\{a\}\} \in \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$.
   f) $2 \notin \{1, \{2\}, 3\}$.

2. Dado el conjunto $A = \{\{2\}, 3, \{6, 5\}, 4\}$, determinar la verdad o falsedad de cada una de las siguientes expresiones:

   a) $\{2\} \subset A$.
   b) $3 \notin A$.
   c) $\{4\} \subset \{4\}$.
   d) $\{6, 5\} \in A$.
   e) $\{6, 5\} \subset A$.
   f) $\{3, 4\} \in A$.
   g) $6 \in \{6, 5\}$.
   h) $\{\{2\}, 3\} \subset A$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIS INCUNTIOR ESTENTIOR ESTENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

i) $\{4\} \not\subset A$.
j) $3 \in A$.
k) $\{3,4\} \not\subset A$.
l) $\emptyset \not\subset A$.

3. Dado el conjunto $A = \{\{2\}, \{3,4\}, 5\}$. Determine cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas y cuáles son falsas.

a) $\{2\} \subset \mathcal{P}(A)$.
b) $\{3,4\} \in \mathcal{P}(A)$.
c) $5 \in A$.
d) $\emptyset \in A$.
e) $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$.
f) $A \in \mathcal{P}(A)$.
g) $\{\{2\}, 5\} \subset \mathcal{P}(A)$.
h) $\{\{3,4\}, \{2\}\} \subset A$.
i) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
j) $\{3,4\} \subset A$.
k) $\{5\} \in A$.
l) $\{\{2\}, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

4. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son iguales: $\emptyset, \{0\}, \{\emptyset\}$.

5. Probar que: $A \subset \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$.

6. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $\emptyset \in \emptyset$.
b) $\emptyset \subset \emptyset$.
c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

7. Si $A = \{1\}$ y $B = \{\{1\}\}$.

a) ¿Es $A = B$?
b) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

i. $1 \in B$.
ii. $\{1\} \subset B$.
iii. $A \in B$.
iv. $A \subset B$.
v. $\{1\} \in A$.

8. Probar que: $A \subset \{A\} \Leftrightarrow A = \emptyset$.

9. Indicar si las siguientes fórmulas son verdaderas o no.

a) $(2) \subset (3)$.
b) $(3) \subset (2)$.
c) $(4) \subset \mathbb{Z}$.
d) $(12) \subset (3)$.
e) $(7) \subset (5)$.
f) $\mathbb{Z} \subset (1)$.

Donde con (n) notaremos el conjunto de los múltiplos de n; es decir que:

$$(n) = \{x \in \mathbb{Z} : x = np,\ p \in \mathbb{Z}\}.$$

10. Demostrar que:

a) $(6) \subset (2)$.
b) $(4) \cap (6) = (12)$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 162
QUITO

11. Dados los conjuntos A y B definidos por:

$$A = \{19n + 7 : n \in \mathbb{Z}\} \text{ y } B = \{19n - 12 : n \in \mathbb{Z}\}$$

Demostrar que $A = B$.

12. Determinar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ si $A = \{a, b, c, d\}$.

13. Escriba el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

14. Demuestre que no existe ningún conjunto A tal que $\mathcal{P}(A) \subset A$.

2.4. Operaciones entre conjuntos

2.4.1. Unión de Conjuntos

Definición 2.5 *Sean A y B subconjuntos de E. Se denomina unión de A y B al subconjunto de E cuyos elementos pertenecen a A o a B. Dicho conjunto lo notaremos $A \cup B$; es decir que,*

$$A \cup B = \{x \in E : x \in A \vee x \in B\}.$$

Observación.- $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

La Figura 2.7 muestra una representación del conjunto $A \cup B$.

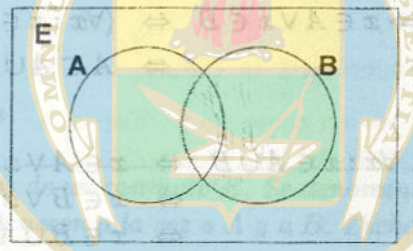


Figura 2.7: La parte sombreada representa al conjunto $A \cup B$

EJEMPLOS

1. Si $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$ entonces $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Determinar el conjunto $A \cup B$ si $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 1\}$.
Solución. Se tiene que $A = [0, 3[$ y $B = [-3, 1[$. Luego $A \cup B = [-3, 3[$. Ver la Figura 2.8.

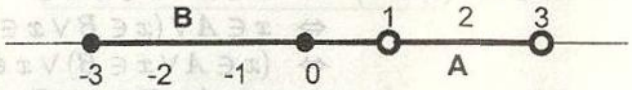


Figura 2.8: $A \cup B = [-3, 3[$

Observación.

$$\boxed{x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B.}$$

Es decir que para que un elemento x no pertenezca a la unión de los conjuntos A y B, x no debe estar ni en A ni en B.

Propiedades de la Unión de Conjuntos

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto E. Entonces:

1. $A \subset A \cup B$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $A \cup A = A$.
4. $A \cup \emptyset = A$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
6. $A \cup E = E$.
7. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Demostración.-

1. Utilizando la tautología: $p \Rightarrow p \vee q$; y haciendo $p : x \in A$ y $q : x \in B$, tendremos

$$\begin{aligned} \forall x : x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B &\Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \\ &\Leftrightarrow A \subset A \cup B. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \forall x : x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \\ &\Leftrightarrow x \in B \cup A \end{aligned}$$

En consecuencia: $A \cup B = B \cup A$.

3. Probaremos que: $A \cup A \subset A$ y $A \subset A \cup A$. Por (1) tenemos que $A \subset A \cup A$, veamos únicamente que $A \cup A \subset A$. En efecto, utilizando la tautología: $p \vee p \Rightarrow p$, se sigue que:

$$\begin{aligned} (\forall x : x \in A \vee x \in A \Rightarrow x \in A) &\Leftrightarrow (\forall x : x \in A \cup A \Rightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow A \cup A \subset A. \end{aligned}$$

En consecuencia $A \cup A = A$.

5. En esta parte, utilizaremos la tautología: $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$. En efecto:

$$\begin{aligned} \forall x : x \in A \cup (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\forall x : x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C,$$

lo que nos dice precisamente que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

7. Demostrar que: $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$, es equivalente a probar que:

   a) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

   b) $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.

   Veamos la parte a):

   Debemos probar que $A \cup B = B$ bajo la hipótesis de que $A \subset B$. Como $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cup B \subset B \wedge B \subset A \cup B$, únicamente debemos probar que $A \cup B \subset B$ pues por la propiedad 1, $B \subset A \cup B$. Así

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Rightarrow x \in B \vee x \in B, \text{ pues } A \subset B \\ &\Rightarrow x \in B. \end{aligned}$$

   Es decir que $A \cup B \subset B$. Consecuentemente, si $A \subset B$ se tiene que $A \cup B = B$.

   Veamos ahora la parte b); es decir, probemos que: $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$. En efecto:

$$\begin{aligned} \forall x : x \in A &\Rightarrow x \in A \vee x \in B \\ &\Rightarrow x \in A \cup B = B \\ &\Rightarrow x \in B. \end{aligned}$$

   En resumen $(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$, bajo la hipótesis de que $A \cup B = B$. ■

Ejercicio

Demostrar las propiedades restantes.

2.4.2. Intersección de Conjuntos

Definición 2.6 *Sean A y B subconjuntos de un conjunto E. Se denomina intersección de A y B al subconjunto de E cuyos elementos pertenecen a la vez a A y a B. Dicho conjunto lo notaremos $A \cap B$; es decir,*

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Observación. $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

En la Figura 2.9 se da una representación de $A \cap B$ utilizando Diagramas de Venn.

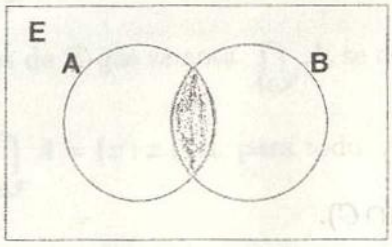


Figura 2.9: La parte sombreada representa al conjunto $A \cap B$

EJEMPLOS

1. Si $A = \{a, \{a\}, b\}$ y $B = \{b, \{b\}\}$ entonces $A \cap B = \{b\}$.

2. Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 6x + 5 = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 15 = 0\}$, se tiene que $A \cap B = \{-5\}$.

Si $A \cap B = \emptyset$, se dice que los conjuntos A y B son disjuntos.

EJEMPLO

Hallar $A \cap B$ si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$

Solución. Veamos qué elementos pertenecen a los conjuntos A y B:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 = 0 &\Rightarrow x^2 = 1 \\ &\Rightarrow |x| = 1 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ o } x = -1, \end{aligned}$$

es decir que $A = \{-1, 1\}$. Por otra parte $B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\} =]-1, 1[$. Consecuentemente $A \cap B = \emptyset$; es decir que A y B son disjuntos.

Observación. $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$.

En efecto:

$$\begin{aligned} x \notin A \cap B &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow ([\neg(x \in A)] \vee [\neg(x \in B)]) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B. \end{aligned}$$

Propiedades de la Intersección y la Unión.

Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto E. Entonces:

1. $A \cap A = A$.
2. $A \cap B = B \cap A$.
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cap B \subset A$.
6. $A \cap E = A$.
7. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
10. $A \cup (A \cap B) = A$.
11. $(A \cup B) \cap A = A$.

Demostración.-

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1620
QUITO

1. Es consecuencia directa de la tautología: $p \wedge p \Leftrightarrow p$. En efecto;

$$\begin{aligned}(\forall x : x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A) &\Leftrightarrow (\forall x : x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow A \cap A = A.\end{aligned}$$

5. En esta parte utilizaremos la tautología: $p \wedge q \Rightarrow p$. En efecto;

$$\forall x : x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A,$$

es decir que

$$(\forall x : x \in A \cap B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow A \cap B \subset A.$$

4. Es consecuencia de la propiedad (5), y del hecho de que el conjunto $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto.

9.

$$\begin{aligned}\forall x : x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow (\forall x : x \in A \vee x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow (\forall x : x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)) \\ &\Leftrightarrow (\forall x : x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C) \\ &\Leftrightarrow (\forall x : x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)).\end{aligned}$$

Consecuentemente, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. ■

Ejercicio

Demostrar las propiedades restantes.

Unión e Intersección Generalizadas.

Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos es un conjunto cuyos elementos son conjuntos.

EJEMPLO

$\mathcal{F} = \{\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7,8,9\}\}$.

Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos, la unión de los elementos de $\mathcal{F}$ que se nota $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$, se define por

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : x \in A, \text{ para algún } A \in \mathcal{F}\}.$$

La intersección de los elementos de $\mathcal{F}$ que se nota $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$, se define por

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : x \in A, \text{ para todo } A \in \mathcal{F}\}.$$

EJEMPLO

Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los conjuntos cuyos elementos son múltiplos de n para algún entero n. Es decir que:

$$\mathcal{F} = \{A_n : A_n = (n), n \in \mathbb{Z}\},$$

donde (n) representa el conjunto de los múltiplos de n.

Elementos de esta familia son por ejemplo:

$A_1 = (1) = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$

$A_2 = (2) = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$

$A_3 = (3) = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$

$A_4 = (4) = \{\cdots, -8, -4, 0, 4, 8, \cdots\}$, etc.

En este caso se tiene que:

$$\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A = \mathbb{Z}, \quad \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \{0\}.$$

Ejercicio.

Si $A_i = [-i, i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Hallar:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

Diferencia

Definición 2.7 *Sean A y B subconjuntos de E. La diferencia de A y B que se nota $A \setminus B$ es el subconjunto de E constituido por aquellos elementos que pertenecen a A pero no pertenecen a B. Es decir que,*

$$A \setminus B = \{x \in E : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

En la Figura 2.10 se indica su representación.

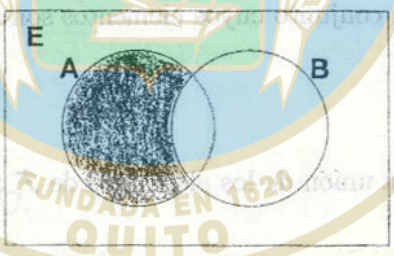


Figura 2.10: La parte sombreada representa al conjunto $A - B$

Observación. $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

Veamos a continuación qué significa que $x \notin A \setminus B$:

$$\begin{aligned} x \notin (A \setminus B) &\Leftrightarrow \neg\,(x \in (A \setminus B)) \\ &\Leftrightarrow \neg\,(x \in A \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow \neg\,(x \in A) \vee (\neg(x \notin B)) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B. \end{aligned}$$

Es decir que:

$$\boxed{x \notin (A \setminus B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B.}$$

EJEMPLO

Determinar $A \setminus B$ y $B \setminus A$ si A y B son los conjuntos

$$A = \{1, 2, \{2\}, \{1, 2\}\}, \quad B = \{\{1, 2\}, \{1\}\}.$$

Solución.- $A \setminus B = \{1, 2, \{2\}\}, \quad B \setminus A = \{\{1\}\}.$

Propiedades

1. $A \setminus B \subset A.$
2. $(A \setminus B) \cap B = \emptyset.$
3. $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset.$
4. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$
5. $A \setminus \emptyset = A.$
6. $\emptyset \setminus A = \emptyset.$
7. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \setminus B = A.$

Demostración.

1. Veamos que $A \setminus B \subset A$. En efecto:

$$\begin{aligned} \forall x : x \in (A \setminus B) &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A. \end{aligned}$$

   Es decir que:

$$(\forall x : x \in (A \setminus B) \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow A \setminus B \subset A.$$

2. Probaremos que:

   - $(A \setminus B) \cap B \subset \emptyset$ y
   - $\emptyset \subset (A \setminus B) \cap B.$

   Puesto que el conjunto vacío ($\emptyset$) es subconjunto de todo conjunto, tenemos inmediatamente la parte b). Resta por tanto únicamente probar la parte a). En efecto:

$$\begin{aligned} \forall x : x \in (A \setminus B) \cap B &\Rightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \in B \\ &\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in B \\ &\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin B) \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \in \emptyset \\ &\Rightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

   En resumen:

$$(\forall x : x \in (A \setminus B) \cap B \Longrightarrow x \in \emptyset) \Longleftrightarrow (A \setminus B) \cap B \subset \emptyset.$$

3.

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \cap (A \cap B) &= ((A \setminus B) \cap B) \cap A \\ &= \emptyset \cap A = \emptyset. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

5. Por la parte 1 tenemos que $A \setminus \emptyset \subset A$, luego, para probar que $A \setminus \emptyset = A$ resta probar que $A \subset A \setminus \emptyset$. Así:

$$\begin{aligned} \forall x : x \in A &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin \emptyset \\ &\Rightarrow x \in A \setminus \emptyset. \end{aligned}$$

   De lo cual se sigue que $A \subset A \setminus \emptyset$.

6. Por la parte 1 tenemos que $\emptyset \setminus A \subset \emptyset$ y como obviamente $\emptyset \subset (\emptyset \setminus A)$ concluimos que $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

7. Debemos probar que $A \setminus B = A$, bajo la hipótesis de que $A \cap B = \emptyset$. Como por la propiedad 1 se tiene que $A \setminus B \subset A$, debemos probar que $A \subset A \setminus B$. En efecto: $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B$ pues por hipótesis $A \cap B = \emptyset$, de donde se sigue finalmente que $x \in A \setminus B$.

   En consecuencia, $A \subset A \setminus B$. ■

2.4.3. Complementario

Definición 2.8 *Siendo E un conjunto referencial y A un subconjunto de E. Se llama complementario de A en E, el conjunto notado $C_E A$. Es decir,*

$$C_E A = E \setminus A = \{x \in E : x \notin A\}.$$

$$x \in C_E A \Leftrightarrow x \notin A.$$

Utilizando diagramas de Venn, la Figura 2.11 constituye una representación del conjunto $C_E A$.



Figura 2.11: La parte sombreada representa al conjunto $C_E A$.

Observación.- Si no existe peligro de confusión respecto al conjunto referencial E, se usan las siguientes notaciones:

$\overline{A}, A', A^c$, en lugar de $C_E A$.Es decir que

$$C_E A = A^c = A' = \overline{A}.$$

En adelante utilizaremos únicamente la notación A^c.

EJEMPLO

Si $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ entonces $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Propiedades

Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto E. Entonces:

1. $A \setminus B = A \cap B^c$.

2. $A \cap A^c = \emptyset$.
3. $(A^c)^c = A$.
4. $A \cup A^c = E$.
5. $\emptyset^c = E$, $E^c = \emptyset$.
6. Leyes de MORGAN.
   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
7. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.
8. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
9. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Demostración

1. $$\begin{aligned} \forall x : x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B^c. \end{aligned}$$

   Conclusión: $A \setminus B = A \cap B^c$

2. Como $\emptyset \subset A \cap A^c$, debemos probar únicamente que $A \cap A^c \subset \emptyset$. En efecto;

   $$\begin{aligned} \forall x : x \in A \cap A^c &\Rightarrow x \in A \wedge x \in A^c \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin A \\ &\Rightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

   En resumen, $(\forall x : x \in A \cap A^c \Rightarrow x \in \emptyset) \Leftrightarrow A \cap A^c \subset \emptyset$.

6. •

   $$\begin{aligned} \forall x : x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

   En resumen, $(\forall x : x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c) \Leftrightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

   •

   $$\begin{aligned} \forall x : x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

   Es decir que: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

7. Es resultado directo de la tautología: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$. En efecto:

   $$\begin{aligned} (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) &\Leftrightarrow (\forall x : x \notin B \Rightarrow x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (\forall x : x \in B^c \Rightarrow x \in A^c). \end{aligned}$$

   Luego, $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

   Otra forma de proceder es la siguiente:

a) Veamos que: $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$. En efecto,

$$\forall x : x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in A^c \Rightarrow x \notin A \text{ pues } A \subset B.$$

Es decir: $(\forall x : x \in B^c \Rightarrow x \in A^c) \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

b) Probemos ahora que: $B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B$. En efecto,

$$\forall x : x \in A \Rightarrow x \notin A^c \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \notin B^c, \text{ pues } B^c \subset A^c.$$

En resumen, $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$, luego $A \subset B$.

De a) y b) se sigue que: $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

8.

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \\ &= (A \cap A) \cap (B^c \cap C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) \\ &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \blacksquare \end{aligned}$$

Ejercicio.- Probar las restantes propiedades.

Leyes de Morgan Generalizadas Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Entonces:

- $\left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A\right)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A^c$.
- $\left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A\right)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A^c$.

2.4.4. Diferencia Simétrica

Definición 2.9 *Sean A y B subconjuntos del conjunto referencial E. Se denomina diferencia simétrica de A y B, que se nota $A \triangle B$, al conjunto: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Es decir que: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.*

Utilizando diagramas de Venn, en la Figura 2.12 se representa el conjunto $A \triangle B$.

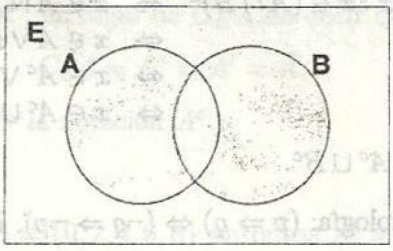


Figura 2.12: La parte sombreada representa $A \triangle B$

Propiedades Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto E. Entonces:

1. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. $A \triangle B = B \triangle A$.
3. $A^c \triangle B^c = A \triangle B$.
4. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
5. $A \triangle \emptyset = A$.
6. $A \triangle A = \emptyset$.

Demostración.-

1.

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= [(A \cap B^c) \cup B] \cap [(A \cap B^c) \cup A^c] \\ &= [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)] \cap [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)] \\ &= [(A \cup B) \cap E] \cap [E \cap (B^c \cup A^c)] \\ &= [A \cup B] \cap [B^c \cup A^c] \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B). \end{aligned}$$

Podemos entonces decir que $A \triangle B$ es el conjunto constituido por los elementos que pertenecen sea, solamente a A o solamente a B, pero no a los dos.

2.

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= B \triangle A. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} A^c \triangle B^c &= (A^c \setminus B^c) \cup (B^c \setminus A^c) \\ &= [A^c \cap (B^c)^c] \cup [B^c \cap (A^c)^c] \\ &= [A^c \cap B] \cup [B^c \cap A] \\ &= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= A \triangle B. \end{aligned}$$

5. Como $A \triangle \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A)$ y puesto que: $A \setminus \emptyset = A$ y $\emptyset \setminus A = \emptyset$ se sigue que $A \triangle \emptyset = A \cup \emptyset = A$. ■

Se propone al lector demostrar las restantes propiedades.

Ejercicios Resueltos

1. Sean A, B conjuntos. Probar que:

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A.$$

Solución.- Puesto que $A \subset A \cup B$, entonces $A \cap (A \cup B) = A$ y $A \cup (A \cap B) = A$.

Hemos utilizado el siguiente resultado: Si V, W son conjuntos tales que $V \subset W$, entonces $V \cap W = V$ y $V \cup W = W$.

2. Muestre que $A \cup B = A \cap B$ si y solo si $A = B$.

Solución.- Supuesto que $A = B$, es evidente que $A \cup B = A \cap B$. Supongamos ahora que $A \cup B = A \cap B$ y probemos que $A = B$, es decir, probemos que $A \subset B$ y $B \subset A$.

Sea $x \in A$, entonces $x \in (A \cup B)$ y como $A \cup B = A \cap B$, $x \in B$; esto es, si $x \in A$ entonces $x \in B$; es decir, $A \subset B$.

Si $x \in B$ entonces $x \in (A \cup B)$ y siendo $A \cup B = A \cap B$, resulta que $x \in A$, luego $B \subset A$.

Por tanto, $A = B$.

3. Sean A, B subconjuntos de un conjunto E, pongamos $V = A \cap B$, $W = A \cap B^c$. Verifique que $V \cap W = \emptyset$ y $V \cup W = A$.

Solución.-

a)

$$\begin{aligned} V \cap W &= (A \cap B) \cap (A \cap B^c) \\ &= A \cap (B \cap B^c) \\ &= A \cap \emptyset, \text{ (pues } B \cap B^c = B \setminus B = \emptyset) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V \cup W &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= A \cap E \text{ (pues } B \cup B^c = E) \\ &= A \text{ (pues } A \subset E). \end{aligned}$$

4. Sean A, B, C subconjuntos de un conjunto referencial E. Construir conjuntos V_1, V_2, V_3 disjuntos dos a dos cuya unión sea $A \cup B \cup C$, a partir de A, B, C. Generalizar el procedimiento para n subconjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de un conjunto referencial E.

Solución.- Comencemos observando que dados los conjuntos A y B; podemos construir a partir de estos, dos conjuntos disjuntos V_1, V_2 cuya unión sea $A \cup B$.

Efectivamente, si hacemos $V_1 = A$, $V_2 = B \setminus A$, entonces: $V_1 \cap V_2 = A \cap (B \setminus A) = A \cap (B \cap A^c) = (A \cap A^c) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \cap (A \cup A^c) = (A \cup B) \cap E = A \cup B$. Si añadimos el conjunto C, pongamos $V_3 = C \setminus (A \cup B)$.

Verifiquemos que $V_1 \cap V_3 = \emptyset$. En efecto:

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_3 &= A \cap [C \setminus (A \cup B)] \\ &= A \cap [C \cap A^c \cap B^c] = C \cap (A \cap A^c) \cap B^c \\ &= C \cap \emptyset \cap B^c = \emptyset. \end{aligned}$$

De modo análogo se verifica que $V_2 \cap V_3 = \emptyset$.

Probemos que $\bigcup_{i=1}^{3} V_i = A \cup B \cup C$. En efecto:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{3} V_i &= [A \cup (B \setminus A)] \cup [C \setminus (A \cup B)] \\ &= (A \cup B) \cup [C \cap (A \cup B)^c] \\ &= (A \cup B \cup C) \cap [(A \cup B) \cup (A \cup B)^c] \\ &= (A \cup B \cup C) \cap E, \text{ donde E es el conjunto referencial} \\ &= A \cup B \cup C.\end{aligned}$$

Dados $A_1, \ldots, A_n$, el proceso anterior se generaliza del siguiente modo:

Hacemos

$$\begin{aligned}V_1 &= A_1 \\ V_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ &\vdots \\ V_k &= A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \\ &\vdots \\ V_n &= A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j.\end{aligned}$$

Se verifica que $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$; $i, j = 1, \cdots, n$ y que $\bigcup_{i=1}^{n} V_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, cuya demostración se lo hace por inducción, tema que será tratado más adelante.

5. Probar que: $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{n} (A_1 \setminus A_k)$.

Solución.-

$$\begin{aligned}A_1 \setminus \textstyle\bigcup_{k=1}^{n}(A_1 \setminus A_k) &= A_1 \cap [\textstyle\bigcup_{k=1}^{n}(A_1 \setminus A_k)]^c \\ &= A_1 \cap [\textstyle\bigcap_{k=1}^{n}(A_1 - A_k)^c] \\ &= A_1 \cap [\textstyle\bigcap_{k=1}^{n}(A_1 \cap A_k^c)^c] \\ &= A_1 \cap [\textstyle\bigcap_{k=1}^{n}(A_1^c \cup A_k)] \\ &= A_1 \cap [A_1^c \cup (\textstyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k)] \\ &= (A_1 \cap A_1^c) \cup [A_1 \cap (\textstyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k)] \\ &= \emptyset \cup [A_1 \cap (\textstyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k)] \\ &= A_1 \cap (\textstyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \\ &= \textstyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k\end{aligned}$$

6. Demostrar que $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$.

Solución. Debemos verificar que $\mathcal{P}(X \cap Y) \subset \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$ y que $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(X \cap Y)$.

a) Probemos que $\mathcal{P}(X \cap Y) \subset \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.
Sea $A \in \mathcal{P}(X \cap Y)$, entonces $A \subset X \cap Y$. Como $X \cap Y \subset X$, $X \cap Y \subset Y$ se sigue que $A \subset X$ y $A \subset Y$, lo que prueba que $A \in \mathcal{P}(X)$ y $A \in \mathcal{P}(Y)$, es decir, $A \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

b) Probemos ahora que $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) \subset \mathcal{P}(X \cap Y)$.
Sea $A \in \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$ entonces $A \in \mathcal{P}(X)$ y $A \in \mathcal{P}(Y)$; de la definición del conjunto partes de un conjunto se tiene que $A \subset X$ y $A \subset Y$, luego $A \subset X \cap Y$ (justifique esta última afirmación) lo que implica que $A \in \mathcal{P}(X \cap Y)$.
De a) y b) se tiene el resultado.

Ejercicios

Sean A, B, C, D subconjuntos de un conjunto referencial E.

1. Sean $A = \{4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$ y $C = \{4, 7, 5, 11\}$. Hallar:

   a) $A \cup B$,
   b) $A \cap B$,
   c) $B \cap C$,
   d) $(A \cup B) \cup C$
   e) $(A \cap C) \cup B$
   f) $A \setminus C$.
   g) $(C \setminus B) \setminus A$.
   h) $(A \setminus B) \cap (B \setminus C)$.
   i) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   j) $A \triangle (B \cup C)$.

2. ¿Cúales de las siguientes proposiciones son siempre verdaderas?

   a) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$.
   b) $A \subset B^c \Leftrightarrow B \subset A^c$.
   c) $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

3. ¿Cúales de las siguientes fórmulas son verdaderas?

   a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.
   b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
   c) $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$.

4. Sean A y B dos conjuntos, pruebe que:

   a) $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.
   b) $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.
   c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow A \subset B$.
   d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. Construir además un ejemplo en el cual se vea que

   $$\mathcal{P}(A \cup B) \not\subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

   e) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.

5. Sea A un conjunto cualquiera, pruebe que:

   a) $\bigcup_{A_i \in \mathcal{P}(A)} A_i = A$.

   b) $\bigcap_{A_i \in \mathcal{P}(A)} A_i = \emptyset$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

6. Demostrar que:

   a) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$.
   b) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
   c) $A \triangle C = B \triangle C \Rightarrow A = B$.

7. Probar que:

   a) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.
   b) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A^c$.
   c) $(A \cup B) \triangle (A \cap B) = A \triangle B$.
   d) $A \triangle (A \cap B) = A \setminus B$.
   e) $A \triangle (A \cup B) = B \setminus A$.
   f) $(A \triangle B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.
   g) $A \setminus (A \triangle B) = A \cap B$, $B \setminus (A \triangle B) = A \cap B$.
   h) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
   i) $(D \subset A \wedge D \subset B) \Leftrightarrow D \subset (A \cap B)$.
   j) $(A \subset C \wedge B \subset C) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$.
   k) $A \subset B \Leftrightarrow A^c \cup B = E$.
   l) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
   m) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
   n) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
   ñ) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
   o) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
   p) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
   q) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$.
   r) $A \triangle B = C \Leftrightarrow A \triangle C = B \Leftrightarrow B \triangle C = A$.
   s) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
   t) $(A \cup B) \cap B^c = A \setminus B$.
   u) $(A \cap B) \cup B^c = (B \setminus A)^c$.
   v) $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$.
   w) $(A \cup B)^c \cap (C \cup A^c)^c = \emptyset$.
   x) $(A \cap B)^c \cup (C \cap A^c)^c = \emptyset$.

8. Utilizando propiedades de las operaciones entre conjuntos, probar que:

   a) $(A \cap B) \setminus [(A \setminus C) \cup (B \setminus C)] = A \cap B \cap C$.
   b) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
   c) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
   d) $(A \cup B) \cap (A \triangle B) = A \triangle B$.
   e) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cap B) \cap (A^c \cup B^c) = \emptyset$.
   f) $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A^c \cap B \cap C)$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

g) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$.
h) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
i) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
j) $[(B \cup C) \setminus (B \cap C)] \cup A = (B \triangle C) \cup A$.
k) $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$.
l) $(C \cap A) \cup (B \cap A) \cup (A^c \cup B^c)^c = A \cap (B \cup C)$.
m) $(A \triangle B) \setminus C = (A \cap C^c) \triangle (B \cap C^c)$.

9. .

a) Demostrar que una de las dos fórmulas siguientes es siempre correcta y la otra algunas veces es falsa.
1) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$.
2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

b) Establecer una condición necesaria y suficiente adicional para que la fórmula que sea incorrecta sea siempre válida.

10. Sean A, B y C tres elementos de $\mathcal{P}(E)$. Probar que:

$$[(A \cup B) \subset (A \cup C) \text{ y } (A \cap B) \subset (A \cap C)] \Rightarrow B \subset C.$$

2.5. Producto Cartesiano

Sean A y B conjuntos, se llama producto cartesiano (o simplemente producto) de los conjuntos A y B al conjunto constituido por elementos de la forma (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Dicho conjunto se nota $A \times B$ y se lee también "A cruz B". Es decir $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$.

Diremos que $u \in A \times B$ si $u = (a, b)$ para algún $a \in A$ y algún $b \in B$. Los elementos de la forma (a, b) se denominan "pares ordenados".

Igualdad de pares ordenados.-

Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si verifican la siguiente condición:
$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

EJEMPLOS

1. $(3, 7) = \left(\frac{6}{2}, -(-7)\right)$

2. $(3, 5) \neq (5, 3)$, puesto que no son iguales las primeras componentes y tampoco las segundas componentes.

3. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{0, 1\}$. Determinar: $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ y $B \times B$.
Solución.-

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1),(c,0),(c,1)\}, \\ B \times A &= \{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}, \\ A \times A &= \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b),(c,c)\}, \\ B \times B &= \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}. \end{aligned}$$

Observaciones.

1. En general se tiene que $A \times B \neq B \times A$.
2. Cuando $A = B$, el producto $A \times B$ se suele designar con A^2; es decir que $A^2 = A \times A$.
3. Si representamos al conjunto de los números reales con los puntos de una recta, tenemos que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ se suele representarlo con los puntos del plano, como se indica en la Figura 2.13.

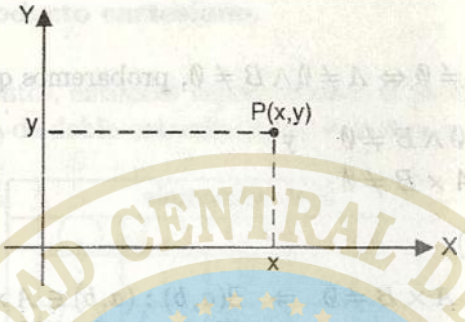


Figura 2.13:

Donde en general al eje horizontal se lo suele denominar eje de las abscisas o eje de las X y al eje vertical, eje de las ordenadas o eje de las Y. En este caso cualquier punto P del plano se representa con un par de coordenadas (x, y), donde x representa la distancia del punto P al eje Y y y representa la distancia del punto P al eje X. Es claro en este caso que los puntos P y Q de coordenadas $(3, 5)$ y $(5, 3)$ respectivamente, son diferentes. Ver Figura 2.14.

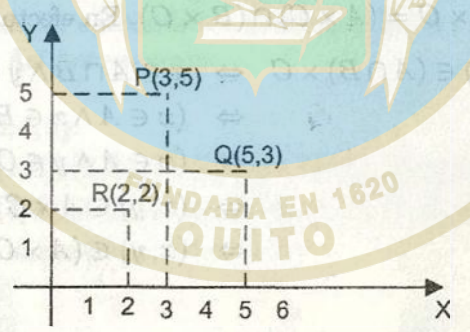


Figura 2.14:

Igualmente, se tienen los puntos de coordenadas (x, x); es decir puntos en los cuales las componentes son iguales; pero es claro que cada componente designa o representa una propiedad particular: la distancia del punto a los ejes X e Y.

Propiedades Sean A, B, C, D conjuntos. Entonces:

1. $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$.
2. $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
5. $(A \setminus B) \times C = A \times C \setminus B \times C$.
6. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
7. $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D) \cup (A \times D) \cup (B \times C)$.
8. Sean A y B conjuntos no vacíos. Si $A \subset C$ y $B \subset D$ entonces $A \times B \subset C \times D$.

Demostración.-

1. Para probar que $A \times B \neq \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$, probaremos que:

   a) $A \times B \neq \emptyset \Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ y

   b) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \Rightarrow A \times B \neq \emptyset$.

   Demostremos la parte a):

$$\begin{aligned} A \times B \neq \emptyset &\Rightarrow \exists (a,b) : (a,b) \in A \times B \\ &\Rightarrow (\exists a : a \in A) \wedge (\exists b : b \in B) \\ &\Rightarrow A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset. \end{aligned}$$

   Demostremos ahora la parte b):

$$\begin{aligned} A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset &\Rightarrow (\exists a : a \in A) \wedge (\exists b : b \in B) \\ &\Rightarrow \exists (a,b) : (a,b) \in A \times B \\ &\Rightarrow A \times B \neq \emptyset. \end{aligned}$$

   De a) y b) se sigue el resultado. ■

4. Mostremos que $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$. En efecto:

$$\begin{aligned} \forall (x,y) : (x,y) \in (A \cap B) \times C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \in B \times C \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C). \end{aligned}$$

   En resumen:

$$[\forall (x,y) : (x,y) \in (A \cap B) \times C \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)] \Leftrightarrow (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

6.

$$\begin{aligned} \forall (x,y) : (x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) &\Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge y \in C \cap D \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \in B \times D \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D). \end{aligned}$$

   En resumen hemos probado que:

$$\forall (x,y) : (x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D),$$

   o lo que es lo mismo

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

8.

$$\begin{aligned} \forall (x,y) : (x,y) \in A \times B &\Rightarrow x \in A \wedge y \in B \\ &\Rightarrow x \in C \wedge y \in D \text{ (pues por hipótesis } A \subset C, \text{ y } B \subset D) \\ &\Rightarrow (x,y) \in C \times D. \end{aligned}$$

Consecuentemente, $A \times B \subset C \times D$. ■

Ejercicio.- Demostrar las restantes propiedades.

Representación gráfica del producto cartesiano.

1. Si A y B tienen pocos elementos, entonces representamos el producto $A \times B$ en la forma de un arreglo denominado tabla de doble entrada, como se indica a continuación:

	elementos de B			
	(,)	(,)	(,)	(,)
	⋮	⋮	⋮	⋮
	(,)	(,)	(,)	(,)

Así por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces:

A B	1	2	3	4
a	$(a,1)$	$(a,2)$	$(a,3)$	$(a,4)$
b	$(b,1)$	$(b,2)$	$(b,3)$	$(b,4)$
c	$(c,1)$	$(c,2)$	$(c,3)$	$(c,4)$

2. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$; entonces los elementos de $A \times B$ los representamos como puntos del plano cartesiano. Así por ejemplo:

   a) Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.
   $A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$.
   $B \times A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$.
   Cuya representación se indica en la Figura 2.15:

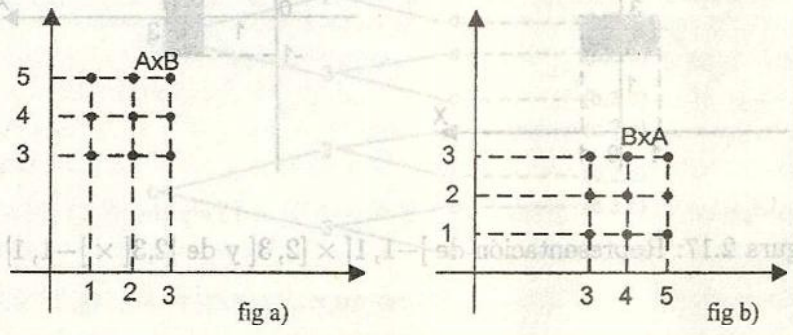


Figura 2.15: Representación gráfica $A \times B$ y $B \times A$

En la figura a) está representado $A \times B$ y en la figura b), $B \times A$. Los puntos señalados pertenecen respectivamente a los conjuntos $A \times B$ y $B \times A$.

b) Si $A = [-1, 1]$ y $B = \{2\}$. Se tiene que:

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge y = 2\},$$

$$B \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2 \wedge -1 \leq y \leq 1\}.$$

Cuyas representaciones gráficas se muestran en la Figura 2.16.

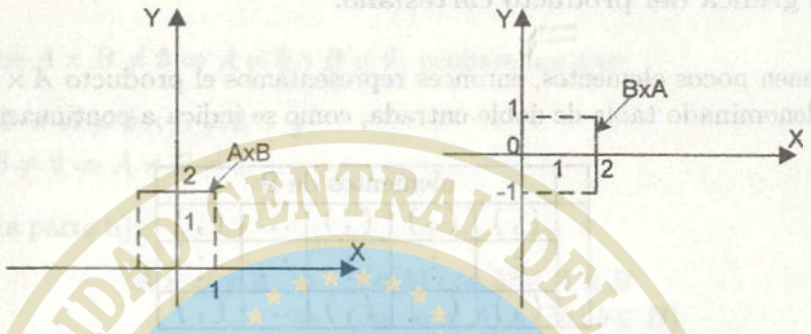


Figura 2.16:

c) Si $A =]-1, 1]$ y $B = [2, 3[$, se tiene que:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leq 1 \wedge 2 \leq y < 3\} \\ B \times A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x < 3 \wedge -1 < y \leq 1\} \end{aligned}$$

Dichos conjuntos se representan en la Figura 2.17.

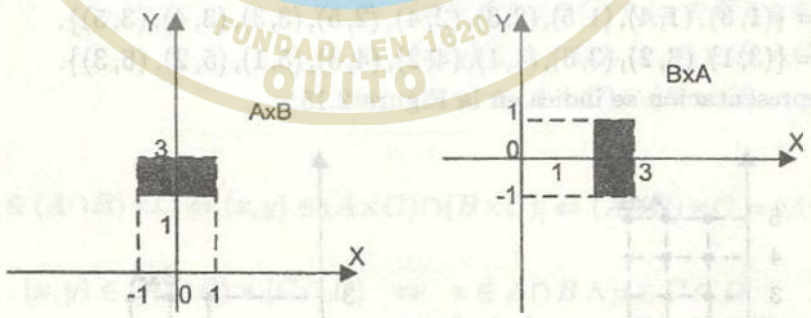


Figura 2.17: Representación de $]-1, 1[\times [2, 3[$ y de $[2, 3[\times]-1, 1]$

d) Si $A =]-1, 2[\cup]3, 4[$ y $B = [1, 2] \cup [-1, 0]$ entonces:

- $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < x < 2 \vee 3 < x < 4) \wedge (1 \leq y \leq 2 \vee -1 \leq y \leq 0)\}$.

Su representación gráfica se muestra en la Figura 2.18.

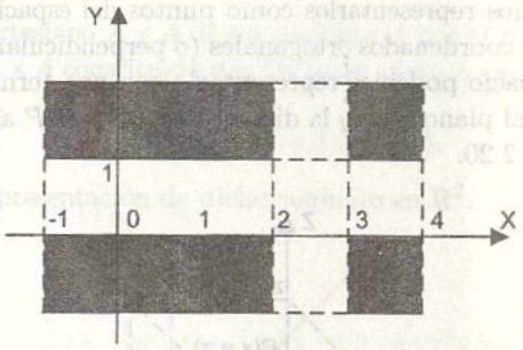


Figura 2.18: Representación de $]-1,2[\cup]3,4[) \times ([-1,0]\cup[1,2])$

Sean A, B, C conjuntos, se llama producto cartesiano (o simplemente producto) de A, B y C al conjunto notado $A \times B \times C$ definido por:

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Un elemento de $A \times B \times C$ se denomina *"terna ordenada"*.

EJEMPLO

Si $A = \{a,b,c\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{e,d\}$ entonces:

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(a,2,e),(a,2,d),(a,3,e),(a,3,d),(b,2,e),(b,2,d),\\ &(b,3,e),(b,3,d),(c,2,e),(c,2,d),(c,3,e),(c,3,d)\}. \end{aligned}$$

Este producto cartesiano $A \times B \times C$ podemos determinarlo utilizando los llamados diagramas de árbol como el que se indica en la Figura 2.19.

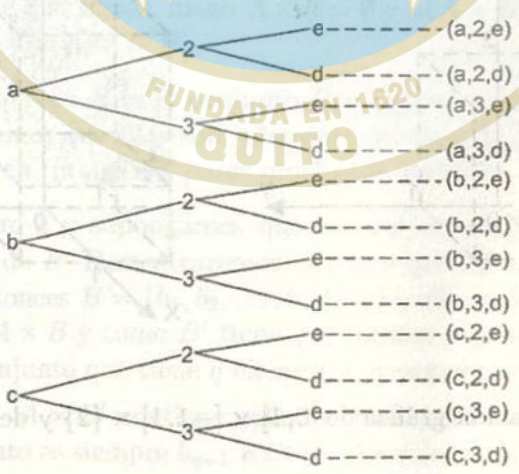


Figura 2.19: Diagrama de árbol de $\{a,b,c\} \times \{2,3\} \times \{c,d\}$

Observaciones.- Si $A = B = C = E$ entonces, $A \times B \times C$ se nota E^3. Por ejemplo, notamos con $\mathbb{R}^3$ al producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es decir que:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Los elementos de $\mathbb{R}^3$ podemos representarlos como puntos del espacio, para lo cual se utiliza por ejemplo un sistema de 3 ejes coordenados ortogonales (o perpendiculares) entre sí. Se tiene entonces que a cada punto P del espacio podemos representarlo con una terna ordenada (x, y, z), donde x es la distancia del punto P al plano YZ, y la distancia del punto P al plano XZ, z la distancia de P al plano XY. Ver Figura 2.20.

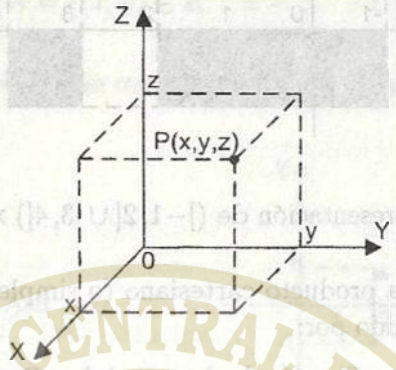


Figura 2.20:

EJEMPLO.

Si A, B, C y D son los conjuntos:

$$A = [0,1],\ B = [-1,1],\ C = \{2\},\ D = [1,3].$$

Representemos gráficamente: $A \times B \times C$ y $A \times B \times D$. (Ver Figura 2.21).

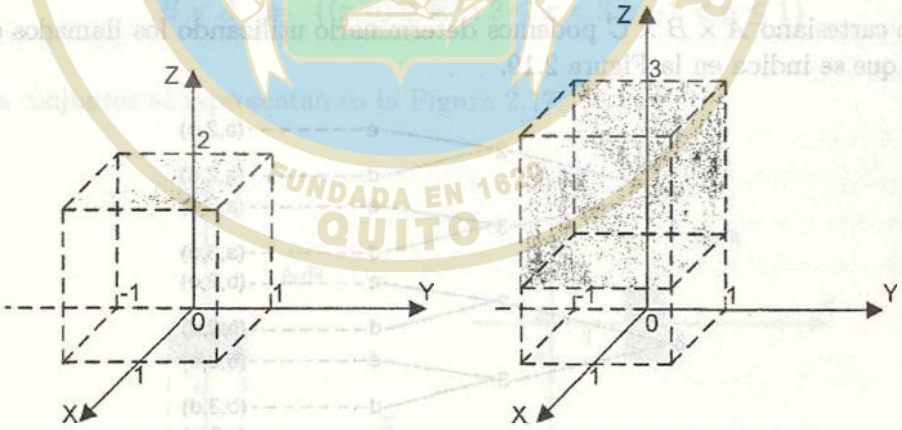


Figura 2.21: Representación gráfica de $[0,1] \times [-1,1] \times \{2\}$ y de $[0,1] \times [-1,1] \times [1,3]$

Igualmente, podemos definir el producto cartesiano de n conjuntos: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la siguiente manera:

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i;\ \forall i = 1, \ldots, n\}$.

El elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se denomina *"n-upla ordenada"*.

Si los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son todos iguales a un conjunto E, el producto cartesiano $E \times E \times \cdots \times E$ es notado E^n.

Consideremos el producto cartesiano $A \times A$ de un conjunto A por sí mismo. Se llama **diagonal** de $A \times A$ el subconjunto $\triangle$ de $A \times A$ constituido por los pares cuyas coordenadas son iguales. Es decir que:

$$\triangle = \{(x, y) \in A \times A : x = y\}.$$

La Figura 2.22 muestra la representación de dicho conjunto en $\mathbb{R}^2$.

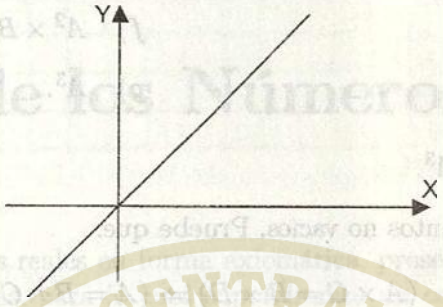


Figura 2.22:

Número de elementos de $A \times B$ cuando A y B son conjuntos finitos.

Sean A y B conjuntos con un número finito de elementos y notemos con $n(A)$, $n(B)$ y $n(A \times B)$ al número de elementos de los conjuntos A, B y $A \times B$ respectivamente.

Se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.3 *Si $n(A) = p$, $n(B) = q$ entonces $n(A \times B) = pq$, (o lo que es lo mismo $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$).*

Demostración.- Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p\}$. Estudiemos los siguientes casos particulares:

- Si $n(B) = q = 0$, se tiene que $B = \emptyset$, luego $A \times B = \emptyset$ y $n(A \times B) = 0$; pero $n(A \times B) = 0 = p \times 0$. Luego, $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.
- Si $n(B) = q = 1$, en este caso B es el conjunto $B = \{b\}$, entonces, si examinamos los pares ordenados posibles, tenemos que ellos son solamente del tipo (a_i, b), donde i toma valores de 1 a p. Es decir, que son en total $p \times 1$ pares ordenados. Es decir, $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.
- Ahora, fijemos el número q y supongamos que ya está establecido el teorema para un tal número q de elementos de B. Demostraremos entonces que el teorema es válido para $q + 1$ elementos de B. Sea entonces $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_q, b_{q+1}\}$ y $B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$; como $B' \subset B$ tenemos que $A \times B' \subset A \times B$ y como B' tiene q elementos y hemos supuesto que el teorema es verdadero para un conjunto que tiene q elementos, se sigue que $A \times B'$ tiene pq elementos.

  Por otra parte $A \times B - A \times B'$ contiene solamente los pares ordenados del tipo (a_i, b_{q+1}) donde el segundo elemento es siempre b_{q+1} e i toma los valores de 1 a p; son en total p pares.

  Consecuentemente $A \times B$ contiene $pq + p$ elementos; es decir que:

$$n(A \times B) = p(q + 1) = n(A) \times n(B).$$

  Hemos demostrado entonces que si el teorema es verdadero para q elementos en B, es verdadero también para $q + 1$ elementos en B. Como era verdadero para un elemento en B, aplicando la demostración anterior un número suficiente de veces, vemos que el teorema es verdadero cualquiera que sea el número q de elementos en B. Este método de demostración se conoce como demostración por inducción y lo abordaremos más adelante. ■

Ejercicios

1. Si $(x, 0) = (y, 0)$. ¿Qué puede decir de x e y?
2. Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{m, n, p\}$. Hallar:

   a) $A \times B$,
   b) A^2,
   c) B^2,
   d) $B \times A$.
   e) $(A \cup B) \times B$.
   f) $A^2 \times B$.
   g) A^3.

3. Sea $A = \{x, y\}$. Hallar A^3.
4. Sean A, B, C y D conjuntos no vacíos. Pruebe que:

$$(A \times C = B \times D) \Rightarrow (A = B \wedge C = D).$$

5. Si $A = [-3, 2]$, $B =]1, 3[$, $C = [-1, 2]$. Representar gráficamente los siguientes conjuntos.

   a) $A \times B$,
   b) $B \times C$,
   c) $(A \cup B) \times C$,
   d) $(A \cap C) \times B$.
   e) $(A \times B)^c$.
   f) $(B \times C)^c$.

6. Si A y B son subconjuntos de E. Deducir una expresión para $(A \times B)^c$.
7. Sean A y B conjuntos. Pruebe que:

$$A \times B = B \times A \Leftrightarrow [(A = B) \vee (A = \emptyset \vee B = \emptyset)].$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIORI EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo 3

El Sistema de los Números Reales

Antes de introducir los números reales en forma axiomática, presentaremos una breve revisión de las leyes de composición internas, para lo cual supondremos un conocimiento previo de lo que es una función.

3.1. Ley de Composición Interna

Definición 3.1 *Se llama Ley de Composición Interna (u operación) en un conjunto E, toda función de $E \times E$ en E.*

EJEMPLO

Si E es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, la adición en $\mathbb{N}$, es la ley de composición interna que a todo elemento (a, b) de $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, asocia el número $a + b$, el cual es otro elemento de $\mathbb{N}$. Es decir que:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & (a, b) & \mapsto & a + b \end{array}$$

Contraejemplos. Si consideramos la diferencia en el conjunto de los números naturales, tenemos que ésta no es una operación interna en $\mathbb{N}$, puesto que $a - b$ está definido solamente cuando $a \geq b$. Se dice en este caso que es una ley de composición interna definida en una parte de $\mathbb{N}$.

En la Figura (3.1) se representan los elementos del conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como puntos del plano.

La operación diferencia está definida para todos los pares (a, b) que se encuentran en la diagonal y bajo ella.

Igualmente, la división $(\div)$ no es una ley de composición interna en $\mathbb{N}$, pues a/b está definida solamente cuando b divide a a. En este caso, se dice también que $*$ es una ley de composición interna en una parte de $\mathbb{N}$.

En adelante consideraremos únicamente leyes de composición internas definidas en todo el conjunto E.

Notación.- Para designar una ley de composición interna, se emplean generalmente los siguientes signos tipográficos arbitrarios: $*$, $\top$, $\triangle$, $+$, $-$, $\times$, ..., etc.

Si designamos la ley por $*$ y si c es la imagen del par (a, b) de E^2 por esta ley $*$, decimos que c es el compuesto de a por b, o que c es el resultado de la operación; en cuyo caso escribiremos $c = a * b$.

Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, la multiplicación es una ley de composición interna definida en todo $\mathbb{N}$, tal que al par $(7, 5)$ asocia el número 35; lo cual escribimos $35 = 7 \times 5$.

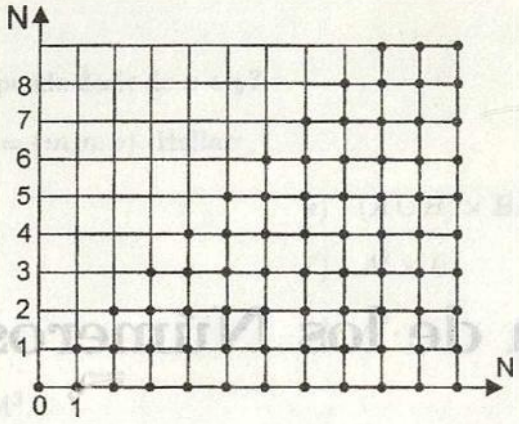


Figura 3.1: Los pares (a, b) marcados cumplen con la condición $a \geq b$.

Observación. En lugar de decir que "$*$ es una ley de composición interna definida en E" diremos simplemente que: "$*$ es una ley en E".

EJEMPLOS

1. En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, son leyes de composición internas **la adición y la multiplicación** definidas respectivamente por:

$$\begin{array}{rcl} +:\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}, \\ (a,b) & \mapsto & c=a+b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \cdot:\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (a,b) & \mapsto & c=a\cdot b=ab. \end{array}$$

   En cambio la **sustracción y la división** no son leyes de composición internas en $\mathbb{N}$ puesto que $a-b$ está definida solamente si $a \geq b$ y a/b está definido solamente si b divide a a.

2. Si $E = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la adición, la sustracción y la multiplicación son leyes internas en E. Es decir que:

$$\begin{array}{rcl} +:E\times E & \longrightarrow & E; \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -:E\times E & \longrightarrow & E; \\ (a,b) & \longmapsto & c=a-b \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \cdot:E\times E & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longmapsto & c=a\cdot b=ab \end{array}$$

   En cambio la división no es una ley interna en E; puesto que en $\mathbb{Z}$, a/b está definido solamente si b divide a a y $b \neq 0$ y en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, a/b está definido siempre que $b \neq 0$.

3. Sea E un conjunto cualquiera, $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de las partes de E, las leyes u operaciones: unión ($\cup$), intersección ($\cap$), diferencia ($\setminus$) y la diferencia simétrica ($\triangle$) son internas en $\mathcal{P}(E)$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} \cup:\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (A,B) & \longmapsto & C=A\cup B. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \cap:\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (A,B) & \longmapsto & C=A\cap B. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \setminus:\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (A,B) & \longmapsto & C=A\setminus B. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \triangle : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (A, B) & \longmapsto & C = A \triangle B. \end{array}$$

Tabla de una ley de composición interna. Cuando el número de elementos del conjunto E no es muy grande, para determinar una ley de composición interna, es cómodo reunir los resultados en una tabla llamada **tabla de la ley.**

Sea por ejemplo, el conjunto $E = \{a, b, c\}$ y en este conjunto una ley notada $*$, para la cual se tiene las igualdades:

$$\begin{array}{lll} a * a = b; & b * a = b; & c * a = c \\ a * b = a; & b * b = c; & c * b = a \\ a * c = c; & b * c = a; & c * c = a. \end{array}$$

A continuación damos la tabla de la ley $*$ definida en el conjunto E:

$*$	a	b	c
a	b	a	c
b	b	c	a
c	c	a	a

¿La operación $*$ es asociativa? ¿Es conmutativa? ¿Existe elemento neutro? Si la respuesta a la última pregunta es afirmativa, ¿existen elementos simetrizables?.

Parte Estable

Definición 3.2 *Sea $A \subset E$. Se dice que A es estable para la ley de composición $*$ en E si:*

$$x \in A \wedge y \in A \Rightarrow x * y \in A.$$

3.1.1. Propiedades de una Ley de Composición Interna

Consideremos un conjunto E y una ley de composición interna en E notada $*$. Esta ley presenta, eventualmente, ciertas características que las vamos a estudiar a continuación:

a) Conmutatividad.

Definición 3.3 *Una ley interna $*$ sobre E es conmutativa si y solamente si:*

$$\forall (a, b) \in E^2,\ a * b = b * a.$$

EJEMPLO

La adición en $\mathbb{N}$ es una ley conmutativa; en efecto, tenemos que:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2,\ a + b = b + a.$$

Observaciones.

1. Para establecer que una ley de composición interna $*$ sobre E no es conmutativa, es suficiente establecer la existencia de al menos un par $(a, b) \in E^2$ para el cual $a * b \neq b * a$. Es decir que:

$$(\text{La ley } * \text{ no es conmutativa}) \Leftrightarrow (\exists (a, b) \in E^2, a * b \neq b * a).$$

2. Si una ley $*$ en un conjunto E no es conmutativa, puede suceder que existan ciertos pares (a, b) para los cuales se tenga $a * b = b * a$. En cuyo caso se dice que los elementos a y b son conmutables para la ley $*$.

EJEMPLO

En el conjunto $\mathcal{P}(E)$, las leyes u operaciones: $\cup$, $\cap$ y $\triangle$ son conmutativas puesto que hemos probado antes que

$$\begin{aligned} \forall (A,B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) : A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \\ A \triangle B &= B \triangle A. \end{aligned}$$

En cambio la ley de composición interna diferencia ($\setminus$) no es conmutativa; puesto que en general se tiene que:

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

y se tiene la igualdad solamente cuando $A = B$; es decir que todo elemento conmuta consigo mismo.

b) Asociatividad.

Definición 3.4 *Una ley interna $*$ en E es asociativa si y solamente si:*

$$\forall (a,b,c) \in E^3, (a*b)*c = a*(b*c).$$

Si la ley $*$ es asociativa, escribimos:

$$(a*b)*c = a*(b*c) = a*b*c.$$

EJEMPLOS

1. La adición en $\mathbb{R}$ es una ley asociativa; pues se tiene que:

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a+b)+c = a+(b+c).$$

2. La unión, la intersección y la diferencia en $\mathcal{P}(E)$ son leyes de composición asociativas puesto que:

$$\forall (A,B,C) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E):$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \\ A \triangle (B \triangle C) &= (A \triangle B) \triangle C. \end{aligned}$$

Observaciones.

1. Para determinar que una ley de composición interna $*$ no es asociativa, es suficiente mostrar la existencia de al menos una terna (a,b,c) para la cual $(a*b)*c \neq a*(b*c)$. Es decir que:

   La ley $*$ sobre E no es asociativa si: $\exists (a,b,c) \in E^3 : (a*b)*c \neq a*(b*c)$.

2. Si la ley $*$ es asociativa, la composición de varios elementos puede ser obtenida componiendo entre ellos dos o varios elementos a condición de respetar el orden en el cual ellos se presentan. Por ejemplo, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} ([(a*b)*c]*d)*e &= (a*b)*(c*d)*e \\ &= (a*b*c)*(d*e) \\ &= a*b*c*d*e. \end{aligned}$$

c) **Distributividad de una ley con respecto a otra.**

Definición 3.5 *Sea E un conjunto y dos leyes de composición internas $*$ y $\triangle$ sobre E. Se dice que la ley $*$ es distributiva respecto a la ley $\triangle$ si y solamente si:*

$$\forall (a,b,c) \in E^3,$$

$$\begin{aligned} a*(b\triangle c) &= (a*b)\triangle(a*c), \text{ y} \\ (b\triangle c)*a &= (b*a)\triangle(c*a). \end{aligned}$$

EJEMPLOS

1. Si $E=\mathbb{N}$, $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ y $(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a)$ o lo que es lo mismo:

$$a(b+c)=ab+ac \text{ y } (b+c)a=ba+ca.$$

2. En $\mathcal{P}(E)$ la unión y la intersección son distributivas: En efecto.

$$\forall (A,B,C)\in[\mathcal{P}(E)]^3$$

$$\begin{aligned} A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C) \\ (B\cap C)\cup A &= (B\cup A)\cap(C\cup A). \end{aligned}$$

y además:

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C), \\ (B\cup C)\cap A &= (B\cap A)\cup(C\cap A). \end{aligned}$$

Observación Si la ley $*$ es conmutativa, para establecer que ella es distributiva respecto a la ley $\triangle$, es suficiente probar que una de las igualdades siguientes se verifica:

$$a*(b\triangle c)=(a*b)\triangle(a*c) \quad \text{o} \quad (b\triangle c)*a=(b*a)\triangle(c*a).$$

d) **Elemento Neutro.**

Definición 3.6 *Se dice que un elemento e de un conjunto E es un elemento neutro para la ley de composición interna $*$ sobre E si y solamente si:*

$$\forall a\in E,\ a*e=e*a=a.$$

EJEMPLOS

1. Si consideramos el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la operación de multiplicación, tenemos que el neutro es 1, puesto que:

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ n\times 1=1\times n=n.$$

2. En el conjunto $\mathcal{P}(E)$ con la operación unión tenemos que el neutro es el conjunto vacío ($\emptyset$); puesto que:

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A.$$

Si consideramos la operación intersección ($\cap$), tenemos que el neutro es el conjunto referencial E; en efecto:

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad A \cap E = E \cap A = A.$$

El neutro para la operación diferencia simétrica es el conjunto vacío, ya que:

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \; A \triangle \emptyset = \emptyset \triangle A = A.$$

¿Existe neutro para la operación diferencia ($\setminus$) en el conjunto $\mathcal{P}(E)$?

Teorema 3.1 *Si una ley de composición interna $*$ definida en E admite un elemento neutro e, este elemento es único.*

Demostración

Si e y e' son dos elementos neutros para la operación $*$ en E, se tiene que:

$$\forall x \in E, \; x * e = e * x = x, \tag{3.1}$$

$$\forall x \in E, \; x * e' = e' * x = x. \tag{3.2}$$

Como (3.1) se cumple $\forall x \in E$, en particular se cumple para $e' \in E$; es decir,

$$e' * e = e * e' = e. \tag{3.3}$$

De manera similar (3.2) se cumple para $e \in E$; es decir,

$$e * e' = e' * e = e. \tag{3.4}$$

De (3.3) y (3.4) se deduce que $e = e'$. ■

e) Simétrico de un Elemento.

Definición 3.7 *Si una ley de composición interna $*$ sobre E admite un elemento neutro e, se dice que un elemento $a \in E$ admite un simétrico para la ley $*$ si y solamente si existe un elemento a' de E que verifica las siguientes igualdades:*

$$a * a' = a' * a = e.$$

EJEMPLO

En el conjunto $\mathcal{P}(E)$ con la operación diferencia simétrica ($\triangle$), dado un conjunto A, el simétrico es A mismo, puesto que:

$$A \triangle A = \emptyset.$$

Además, de la propiedad:

$$A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B,$$

se deduce que dado un elemento A cualquiera, su simétrico es A mismo.

Si consideramos la operación unión en $\mathcal{P}(E)$, ¿dado un conjunto A, existe el simétrico de A? ¿Cuál es el único elemento que admite un simétrico? ¿Qué ocurre respecto a la operación intersección?

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM SCIENTIOR EST SALUTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Teorema 3.2 *Si una ley u operación $*$ en E es asociativa, de elemento neutro e y si un elemento a de E admite para esta ley un simétrico a', ese simétrico es único.*

Demostración

Supongamos que a' y a'' son simétricos de a, entonces se tiene que:

$$a * a' = a' * a = e \quad \text{y} \quad a * a'' = a'' * a = e.$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} a' = a' * e &= a' * (a * a'') \quad \text{, y como } * \text{ es asociativa,} \\ &= (a' * a) * a'' \\ &= e * a'' \\ &= a'' \end{aligned}$$

Es decir que $a' = a''$. Luego, como el suponer que existen dos simétricos nos conduce a que ellos son iguales, se sigue que el simétrico de un elemento, si existe, es único.

Si un elemento $a \in E$ admite un simétrico se dice que es simetrizable.

Teorema 3.3 *Para toda ley interna $*$ en un conjunto E, asociativa y que admite un elemento neutro e, el compuesto de dos elementos simetrizables de E es simetrizable y se tiene que*

$$(a * b)' = b' * a'.$$

Demostración

Sean a' y b' los simétricos respectivos de a y b y sea c tal que:

$$c * (a * b) = e \quad \text{y} \quad (a * b) * c = e.$$

Entonces:

$$\begin{array}{c|c} [c * (a * b)] * b' = e * b' & a' * [(a * b) * c] = a' * e \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ (c * a) * (b * b') = e * b' & (a' * a) * (b * c) = a' * e \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ (c * a) * e = b' & e * (b * c) = a' \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ c * a = b' & b * c = a' \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ (c * a) * a' = b' * a' & b' * (b * c) = b' * a' \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ c * (a * a') = b' * a' & (b' * b) * c = b' * a' \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ c * e = b' * a' & e * c = b' * a' \\ \Updownarrow & \Updownarrow \\ c = b' * a' & c = b' * a' \end{array}$$

Es decir que $b' * a'$ es el simétrico de $a * b$. ■

f) **Elementos Regulares.**

Definición 3.8 *Se dice que un elemento $a \in E$ es regular a la derecha si y solamente si:*

$$\forall (x, y) \in E^2, (x * a = y * a) \Rightarrow x = y.$$

Un elemento a es regular a la izquierda si y solamente si:

$$\forall (x, y) \in E^2, (a * x = a * y) \Rightarrow x = y.$$

Un elemento es regular si es regular a la izquierda y a la derecha.

Teorema 3.4 *Si para una ley interna $*$ sobre E, asociativa, un elemento a es simetrizable, este elemento a es regular.*

Demostración. Sabemos que si a es simetrizable y si $*$ es asociativa, a' el simétrico de a es único.

Supongamos entonces que $x * a = y * a$; luego:

$$(x * a) * a' = (y * a) * a'$$

y como $*$ es asociativa se sigue,

$$x * (a * a') = y * (a * a')$$

y como $a * a' = e$ tenemos:

$$x * e = y * e;$$

de donde se sigue finalmente que $x = y$, es decir hemos demostrado que:

$$x * a = y * a \Rightarrow x = y,$$

lo que nos dice precisamente que a es regular a la derecha.

De la misma manera se demuestra que a es regular a la izquierda y se concluye finalmente que a es regular. ■

Ejercicios

1. En $\mathcal{P}(E)$ con la operación diferencia simétrica ($\triangle$); ¿de la igualdad $A \triangle X = A \triangle Y$ se deduce que $X = Y$? ¿Es A un elemento regular, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$?
2. En el mismo conjunto $\mathcal{P}(E)$ con la operación intersección, de $A \cap X = A \cap Y$ se deduce que $X = Y$? ¿Y de $A \cup X = A \cup Y$ se deduce que $X = Y$?

3.1.2. Grupo Conmutativo

Definición 3.9 *Sean, G un conjunto no vacío y $*$ una ley de composición interna en G. Se dice que G provisto de la operación $*$ es un grupo si y solamente si las siguientes propiedades se verifican:*

a) la operación o ley $*$ es asociativa.

b) la operación $*$ admite un elemento neutro e.

c) todo elemento a de G admite un simétrico para la operación $*$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Se dice también que $(G, *)$ es un grupo. Si además la operación $*$ es conmutativa, se dice que el grupo $(G, *)$ es un grupo conmutativo o abeliano.

Es decir que: $(G, *)$ es un grupo conmutativo si y solo si las siguientes proposiciones son verdaderas:

- $\forall (a, b, c) \in G^3$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.
- $(\exists e \in G)$, $(\forall a \in G,\ a * e = e * a = a)$.
- $(\forall a \in G)$, $(\exists a' \in G,\ a * a' = a' * a = e)$.
- $\forall (a, b) \in G^2$, $a * b = b * a$.

3.1.3. Cuerpo Conmutativo

Definición 3.10 *Sea K un conjunto provisto de dos operaciones internas: $*$ y $\triangle$. Se dice que K, provisto de la primera operación $*$ y de la segunda operación $\triangle$, es un cuerpo si y solamente si las siguientes propiedades se verifican:*

a) $(K, *)$ es un grupo conmutativo.

b) La operación $\triangle$ en K es asociativa.

c) La segunda operación $\triangle$ en K es distributiva con respecto a la primera operación $*$.

d) La operación $\triangle$ admite un elemento neutro e' diferente del neutro e de la primera operación $*$.

e) Todo elemento de K diferente de e admite un simétrico para la operación $\triangle$.

Observaciones

- Se dice también que $(K, *, \triangle)$ es un cuerpo.
- Podemos también decir que $(K, *, \triangle)$ es un cuerpo si y solamente si:
  1. $(K, *)$ es un grupo abeliano o conmutativo.
  2. $(K^*, \triangle)$ es un grupo, donde $K^* = K \setminus \{e\}$.
  3. La segunda operación $(\triangle)$ es distributiva con respecto a la primera operación $(*)$; es decir que:

$$\forall (a, b, c) \in K^3, \quad \begin{aligned} a \triangle (b * c) &= (a \triangle b) * (a \triangle c), \text{ y} \\ (b * c) \triangle a &= (b \triangle a) * (c \triangle a) \end{aligned}$$

- Cuando la operación $\triangle$ es conmutativa, para verificar la distributividad de la operación $\triangle$ con respecto a la operación $*$, es suficiente verificar que:

$$\forall (a, b, c) \in K^3,\ a \triangle (b * c) = (a \triangle b) * (a \triangle c).$$

Además si $\triangle$ es conmutativa, diremos que $(K, *, \triangle)$ es un cuerpo conmutativo o abeliano.

Ejercicios

1. Sea el conjunto P definido por $P = \{x : x = 2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
   a) Demostrar que el conjunto P es estable para la adición en $\mathbb{Z}$.
   b) Demostrar que $(P, +)$ es un grupo abeliano.
   c) Se considera el complementario P^c del conjunto P en $\mathbb{Z}$. ¿El conjunto P^c es estable para la adición en $\mathbb{Z}$?

2. Se considera un entero natural n dado y el conjunto de los múltiplos de n en $\mathbb{Z}$, notado $n\mathbb{Z}$; es decir que:
$$n\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} : x = kn, k \in \mathbb{Z}\}.$$
   a) Demostrar que el conjunto $n\mathbb{Z}$ es estable para la adición en $\mathbb{Z}$.
   b) Demostrar que $(n\mathbb{Z}, +)$ es un grupo abeliano.

3. Dado el conjunto $A = \{x : x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$. Demostrar que A es estable para la multiplicación en $\mathbb{Z}$.

4. Dado el conjunto $K = \{a + b\sqrt{2} : a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}\}$.
   a) Demostrar que $(K, +)$ es un grupo abeliano.
   b) Demostrar que $(K^*, \times)$ es un grupo abeliano, donde $K^* = K \setminus \{0\}$.
   c) Demostrar que $(K, +, \times)$ es un cuerpo conmutativo.

En los ejercicios del 5 al 10, se define el compuesto $a * b$ de dos elementos cualesquiera a, b de un conjunto E. Verificar que $*$ es una ley de composición interna.

5. $E = \mathbb{Z}$; $a * b = (a - b)^2$.

6. $E = \mathbb{N}$; $\begin{cases} a * b = a, \text{ si } a \leq b \\ a * b = b, \text{ si } a > b. \end{cases}$

7. $E = \mathbb{N}$; $\begin{cases} a * b = b, \text{ si } a \leq b \\ a * b = a, \text{ si } a > b. \end{cases}$

8. $E = \mathbb{Z}$; $a * b = a + b + ab$.

9. $E = \mathbb{Z}$; $a * b = a + b - ab$.

10. $E = \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a * b = \dfrac{a}{b}$.

11. Se considera el conjunto $E = \{0, 1, 2, 3\}$ provisto de la ley de composición interna, notada $*$, definida por:
$$\begin{cases} a * b = a + b, \text{ si } a + b \leq 3 \\ a * b = b - (a + b), \text{ si } a + b > 3. \end{cases}$$
   a) ¿La ley $*$ está definida en todo E?
   b) ¿La ley $*$ es conmutativa?
   c) ¿La ley $*$ es asociativa?
   d) ¿La ley $*$ admite un elemento neutro?

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST QUITO FUNDADA EN 1620

e) Encontrar todos los elementos de E que admiten un simétrico para la ley $*$.

f) ¿Existen elementos regulares para la ley $*$?

12. Dado el conjunto $E = \{a, b\}$.

a) Dar la tabla de todas las leyes de composición interna definidas en E que se pueden construir en el conjunto E.

b) Entre las leyes precedentes, indicar aquellas que son conmutativas, aquellas que son asociativas, aquellas que admiten un elemento neutro, aquellas que confieren al conjunto E una estructura de grupo.

13. Lo mismo que en el ejercicio 12 para el conjunto $E = \{a, b, c\}$.

14. Se considera el conjunto: $E = \mathbb{Q}\backslash\{-1/2\}$ provisto de la ley $*$ definida por: $a * b = a + b + 2ab$. Demostrar que $(E, *)$ es un grupo conmutativo.

15. Averiguar si $(\mathbb{Z}, *)$ es un grupo, en cada uno de los siguientes casos:

a) $a * b = 2a + b - a^2$.

b) $a * b = 2(a + b)$.

16. Verifique cuáles de las siguientes leyes son asociativas:

a) $x * y = \dfrac{x + y}{1 - xy}$ en el conjunto $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $x * y = 2xy$ en el conjunto de los números reales.

17. Encuentre los elementos identidad de la operación $*$ definida en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ respectivamente por:

a) $x * y = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

b) $x * y = \dfrac{x + y}{1 + xy}$.

18. En el conjunto de los números racionales se define la operación $*$ por $a * b = \dfrac{ab}{2}$. ¿$(\mathbb{Q}, *)$ es un grupo abeliano?

19. Sea el conjunto $A = \{0, 1\}$. Definimos la operación $*$ en $\mathcal{P}(A)$ por $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$: $X * Y = X \cup Y - X \cap Y$. ¿Es $(\mathcal{P}(A), *)$ un grupo?

20. Sea $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ y $*$ la operación interna definida por la siguiente tabla:

$*$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

Demostrar que $(G, *)$ es un grupo.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR FUNDADA EN 1620 QUITO

21. Demuestre que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ no es un cuerpo. ¿Cuáles son los elementos de $\mathbb{Z}$ que poseen un inverso en $\mathbb{Z}$ respecto a la operación de multiplicación $(\times)$.

22. Sea E un conjunto. Se considera la operación diferencia simétrica $(\triangle)$ en $\mathcal{P}(E)$.

    a) ¿La ley $\triangle$ es interna en $\mathcal{P}(E)$?

    b) Probar que $(\mathcal{P}(E), \triangle)$ es un grupo abeliano.

3.2. El Sistema de los Números Reales

Definición 3.11 *El sistema de los números reales es un conjunto que lo notaremos $\mathbb{R}$ en el que se han definido dos operaciones: la adición $(+)$ y la multiplicación $(\cdot)$ y tal que en él se satisfacen los axiomas de cuerpo, los axiomas de orden y el axioma de completez.*

Observaciones

- En esta parte, suponemos conocida la estructura de cuerpo del conjunto de los números racionales con las operaciones de adición y multiplicación y todas las propiedades que caracterizan a dicho conjunto, de tal manera que la adición y multiplicación consideradas en $\mathbb{R}$ no serán sino una extensión de la adición y multiplicación definidas en el conjunto de los números racionales.
- A los elementos de $\mathbb{R}$ se les denomina números reales y los designaremos con las letras minúsculas del alfabeto.

3.2.1. Axiomas de Cuerpo

$S_1)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$. (Propiedad Conmutativa).

$S_2)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x + (y + z) = (x + y) + z$. (Propiedad Asociativa).

$S_3)$ $(\exists 0 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}), (x + 0 = 0 + x = x)$ (Propiedad del elemento neutro o modulativa).

$S_4)$ $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists y \in \mathbb{R}), (x + y = y + x = 0)$ (Propiedad del opuesto aditivo).

$P_1)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = yx$. (Propiedad Conmutativa).

$P_2)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(yz) = (xy)z$. (Propiedad Asociativa).

$P_3)$ $(\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R})$ $(1 \times x = x \times 1 = x)$ (Propiedad Modulativa).

$P_4)$ $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0)(\exists y \in \mathbb{R})$ $(xy = yx = 1)$ (Propiedad del Inverso Multiplicativo).

$P_5)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x(y + z) = xy + xz$. (Propiedad Distributiva).

Observaciones

- De los axiomas de cuerpo S_1 a S_4 se deduce que $(\mathbb{R}, +)$ es un grupo abeliano y de los axiomas P_1 a P_4 se deduce que $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ es un grupo abeliano, donde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Luego $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo.

- El axioma S_4 dice que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = 0$ lo cual no es lo mismo que $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + y = 0$. Pues, si lo último fuese verdadero, se tendría por ejemplo que: $1 + y = 0$ y $2 + y = 0$, de lo cual se deduciría que $-1 = -2$, que es un absurdo. Una aclaración similar se tiene para el axioma P_4.

Teorema 3.5 *Los elementos "0" del axioma S_3 y "1" del axioma P_3 son únicos*

Demostracin. Probaremos únicamente que el elemento "0" del axioma S_3 es único.

Supongamos que en $\mathbb{R}$ existen dos neutros: 0 y 0'. Es decir que ellos verifican:

$$\forall x \in \mathbb{R}, : x + 0 = 0 + x = x \tag{3.5}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, : x + 0' = 0' + x = x \tag{3.6}$$

Como $0' \in \mathbb{R}$, en particular (3.5) se verifica para este elemento, es decir que:

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0'. \tag{3.7}$$

De manera similar (3.6) se verifica para $0 \in \mathbb{R}$, es decir:

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0. \tag{3.8}$$

De (3.7) y (3.8) se deduce que $0 = 0'$, esto es, los dos elementos coinciden, consecuentemente el elemento cero del axioma S_3 es único. ■

Teorema 3.6 *El elemento y de los axiomas S_4 y P_4 es único.*

Demostración

Demostremos que el elemento y del axioma S_4 es único. Para ello, supongamos que $x \in \mathbb{R}$ admite dos opuestos aditivos: y y z; es decir que ellos verifican las siguientes condiciones:

$$x + y = y + x = 0,$$

$$x + z = z + x = 0.$$

Por otra parte:

$$y = y + 0 = y + (x + z) = (y + x) + z = 0 + z = z;$$

es decir que $y = z$, consecuentemente tenemos que el opuesto aditivo de x es único. Dicho elemento se nota $-x$. ■

Se propone como ejercicio demostrar la unicidad del inverso.

Observación.- El opuesto multiplicativo de $x \neq 0$ se nota $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

Propiedades Algebraicas de los Números Reales

Teorema 3.7 *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Entonces:*

a) $x + z = y + z \Rightarrow x = y$.

b) $xz = yz$ *y* $z \neq 0 \Rightarrow x = y$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Estas leyes se conocen como leyes cancelativas.

Demostración

a) Como $z \in \mathbb{R}$, $\exists(-z) \in \mathbb{R}$ tal que: $z+(-z)=0$ y como por hipótesis tenemos que: $x+z=y+z$, sumando $-z$ a los dos miembros se sigue:

$$\begin{aligned} (x+z)+(-z) &= (y+z)+(-z) \\ x+[z+(-z)] &= y+[z+(-z)] && (\text{por } S_2) \\ x+0 &= y+0 && (\text{por } S_4) \\ x &= y. && (\text{por } S_3) \end{aligned}$$

b) Como $z \neq 0$, : $\exists z^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $zz^{-1}=1$, y como por hipótesis: $xz=yz$, se sigue:

$$\begin{aligned} (xz)z^{-1} &= (yz)z^{-1} \\ x(zz^{-1}) &= y(zz^{-1}) && (\text{por } P_2) \\ x \cdot 1 &= y \cdot 1 && (\text{por } P_4) \\ x &= y. && (\text{por } P_3) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.8 *Sean x, $y \in \mathbb{R}$, entonces:*

1. $0 \cdot x = 0$.
2. $(-x)y = -(xy)$.
3. $-(-x) = x$.
4. $(-x)(-y) = xy$.
5. *Si* $x \neq 0$, $(x^{-1})^{-1} = x$.
6. *Si* $x \neq 0$, $y \neq 0$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Demostración

1. $$\begin{aligned} 0 \cdot x &= (0+0)x, \text{ (Propiedad modulativa)} \\ &= 0x + 0x, \text{ (Propiedad distributiva),} \end{aligned}$$
y como: $0x = 0x+0$, se sigue que: $0x+0 = 0x+0x$. Aplicando la ley cancelativa se concluye que: $0 = 0x$.

2. Lo que se quiere probar en esta parte es que el opuesto aditivo de xy es $(-x)y$; por lo tanto basta probar que: $(-x)y+xy=0$. En efecto,
$$\begin{aligned} xy+(-x)y &= [x+(-x)]y \\ &= 0 \cdot y \\ &= 0, \end{aligned}$$
y por la unicidad del opuesto aditivo se deduce que:
$$(-x)y = -xy.$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

3. Puesto que $x+(-x)=0$, $-x$ es el opuesto de x y como a su vez, el opuesto aditivo de $-x$ es $-(-x)$ se sigue que:

$$-x+[-(-x)]=0.$$

Luego: $x+(-x)=[-(-x)]+(-x)$. De donde, por aplicación de la propiedad cancelativa se concluye que: $x=-(-x)$.

4. $(-x)(-y)=-[x(-y)]=-[-(xy)]=xy$.

5. Si $x\neq 0$, el opuesto multiplicativo de x es x^{-1} y de x^{-1} es $(x^{-1})^{-1}$; es decir que: $x\times x^{-1}=1$ y $(x^{-1})(x^{-1})^{-1}=1$. Se tiene entonces que: $x\times(x^{-1})=(x^{-1})^{-1}(x^{-1})$ y por la ley cancelativa se deduce finalmente que $x=(x^{-1})^{-1}$.

6. Debemos probar que $x^{-1}y^{-1}$ es el inverso multiplicativo de xy; es decir que $(xy)(x^{-1}y^{-1})=1$. En efecto:

$$\begin{aligned}(xy)(x^{-1}y^{-1}) &= (xy)(y^{-1}x^{-1}) && (\text{Por } P_1)\\ &= x(yy^{-1})x^{-1} && (\text{Por } P_2)\\ &= x\times 1\times x^{-1} && (\text{Por } P_4)\\ &= xx^{-1} && (\text{Por } P_3)\\ &= 1. && (\text{Por } P_4)\end{aligned}$$

Y como el inverso u opuesto multiplicativo de xy es $(xy)^{-1}$, por la unicidad de dicho elemento se sigue que:

$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=x^{-1}y^{-1}.\blacksquare$$

Observación.- Es inmediato que si x e y son inversibles, también lo es xy. En efecto,

$x\neq 0\wedge y\neq 0\Longrightarrow xy\neq 0$.

Teorema 3.9 *Sean a, $b\in\mathbb{R}$. Entonces: $ab=0\Leftrightarrow a=0\vee b=0$.*

Demostración

$\Leftarrow$) La demostración en este sentido no es más que una consecuencia directa del teorema que nos dice que todo número multiplicado por cero es cero ($\forall a\in\mathbb{R}, a0=0$).

$\Rightarrow$) En esta parte, probaremos que si uno de los números reales a o b es distinto de cero, el otro necesariamente es cero. En efecto, supongamos que por ejemplo $a\neq 0$; existe entonces a^{-1} tal que $a\times a^{-1}=1$.

De la hipótesis de que $ab=0$ se sigue que $a^{-1}(ab)=a^{-1}\cdot 0$; es decir: $(a^{-1}a)b=0$, de donde se obtiene finalmente que $b=0$. ■

Teorema 3.10 *Sean a, $b\in\mathbb{R}$. Entonces: $ab\neq 0\Leftrightarrow a\neq 0\wedge b\neq 0$.*

Demostración. Se propone como ejercicio.

El teorema 3.9 es útil para la resolución de ecuaciones del tipo $(x+a)(x+b)=0$, puesto que:

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)=0 &\Rightarrow x+a=0 \text{ o } x+b=0\\ &\Rightarrow x=-a \text{ o } x=-b.\blacksquare\end{aligned}$$

EJEMPLO

Hallar las raíces de la ecuación:

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

Solución.

$$x^2 + 5x - 14 = (x+7)(x-2) = 0 \Rightarrow x + 7 = 0 \text{ o } x - 2 = 0,$$

de donde se sigue finalmente que $x = -7$ o $x = 2$.

Definición 3.12 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Se define:*

a) $x - y = x + (-y)$.

b) $\dfrac{x}{y} = xy^{-1}$, $y \neq 0$.

Observaciones

1. $x - y$ es el número que sumado con y es igual a x; en efecto:

$$\begin{aligned}(x-y)+y &= [x+(-y)]+y \\ &= x+[(-y)+y] \\ &= x+0 = x.\end{aligned}$$

2. x/y es el número que multiplicado por y es igual a x. En efecto:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{y}\right)y &= (xy^{-1})y && \text{(Por definición de división)} \\ &= x(y^{-1}y) && \text{(Por } P_2\text{)} \\ &= x \times 1 && \text{(Por } P_4\text{)} \\ &= x && \text{(Por } P_3\text{)}\end{aligned}$$

3. De la definición de división se sigue que no existe división por cero.

Teorema 3.11 *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Entonces:*

a) $x(y-z) = xy - xz$.

b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{z}{u} = \dfrac{xu+yz}{yu}$; $y \neq 0$, $u \neq 0$.

c) $\dfrac{x}{y} - \dfrac{z}{u} = \dfrac{xu-yz}{yu}$; $y \neq 0$, $u \neq 0$.

d) $\left(\dfrac{x}{y}\right)\left(\dfrac{z}{u}\right) = \dfrac{xz}{yu}$; $y \neq 0$, $u \neq 0$.

e) $\left(\dfrac{x}{y}\right) \div \left(\dfrac{z}{u}\right) = \dfrac{xu}{yz}$; $y \neq 0$, $z \neq 0$, $u \neq 0$.

Demostracin.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

a)

$$\begin{aligned} x(y-z) &= x[y+(-z)] && \text{(Por definición de diferencia)} \\ &= xy+x(-z) && \text{(Por la propiedad distributiva)} \\ &= xy+[-(xz)] && \text{(Por el teorema 3.8 parte 2} \\ &= xy-xz. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{x}{y}+\frac{z}{u} &= (xy^{-1}+zu^{-1}) \\ &= (xy^{-1}+zu^{-1})\times 1 \\ &= (xy^{-1}+zu^{-1})(yu)(yu)^{-1} \\ &= [(xy^{-1}+zu^{-1})(yu)\,](yu)^{-1} \\ &= [\,(xy^{-1})(yu)+(zu^{-1})(yu)\,](yu)^{-1} \\ &= [\,x(y^{-1}y)u+z(u^{-1}u)y\,](yu)^{-1} \\ &= [\,xu+yz\,](yu)^{-1} \\ &= \frac{xu+yz}{yu}. \end{aligned}$$

c) Se propone como ejercicio.

d)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{z}{u}\right) &= (xy^{-1})(zu^{-1}) && \text{(Por definición de división)} \\ &= (xz)(y^{-1}u^{-1}) && \text{(Por } P_1 \text{ y } P_2) \\ &= (xz)(yu)^{-1}m && \text{(Por el teorema 3.8 parte 6} \\ &= \frac{xz}{yu} && \text{(Por definición de división)} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{y}\right)/\left(\frac{z}{u}\right) &= (xy^{-1})/(zu^{-1}) \\ &= (xy^{-1})(zu^{-1})^{-1} && \text{(Por definición de división)} \\ &= (xy^{-1})(z^{-1}(u^{-1})^{-1}) && \text{(Por el teorema 3.8 partes 5 y 6} \\ &= (xy^{-1})(z^{-1}u) \\ & (xu)(y^{-1}z^{-1}) \\ & (xu)(yz)^{-1} && \text{(Por el teorema 3.8, parte 6)} \\ & \frac{xu}{yz}. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Si $x \neq 0$, pruebe que $0/x = 0$.
2. Si $x \neq 0$, pruebe que $x/x = 1$.
3. Sea $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$. Pruebe que $(-x)^{-1} = -x^{-1}$.
4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$. Muestre que $-(x/y) = (-x)/y = x/(-y)$.
5. Sea $a, b, k \in \mathbb{R}$ tales que $b \neq 0$, $k \neq 0$. Probar que $ka/kb = a/b$.

6. Probar que $(-1)a = -a$.

7. Si $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Pruebe que:

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

8. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq 0$, $b \neq -c$. Probar que:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{1}{\dfrac{b+c}{a}}.$$

9. Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$. Mostrar que:

   a) $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$.

   b) $a + \dfrac{b}{c} = \dfrac{ac+b}{c}$.

10. Sean a, b, $x \in \mathbb{R}$. Probar que:

    a) $x \neq 0 \wedge x(x+a) = 0 \Rightarrow x = -a$.

    b) $(x+a)(x+b) = 0 \Rightarrow x = -a \vee x = -b$.

11. Sean a, $b \in \mathbb{R}$. Probar que:

    a) $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$.

    b) $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$.

    c) $b^3 + a^3 = (b+a)(b^2 - ab + a^2)$.

    d) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

    e) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

    f) $a^4 + b^4 = (a^2 + ab\sqrt{2} + b^2)(a^2 - ab\sqrt{2} + b^2)$.

12. ¿Para qué valores reales x están definidas las siguientes expresiones?:

    a) $\dfrac{x+1}{x^2-9} + 1$,

    b) $\dfrac{x + \dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{x}{x^2-4} + \dfrac{1}{x}}$.

13. .

    a) Calcular el número real $A = (a+b+c)^2$.

    b) Demostrar que:

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a+b+c=0) \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab+bc+ca)).$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

c) Se considera tres números reales no nulos a, b y c. Demostrar la siguiente implicación:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\right) \Rightarrow ((a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2).$$

14. ¿Qué ocurriría en el sistema de los números reales si fuese $1 = 0$?

15. Sean a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tales que el producto $bd(b+d)$ no sea nulo.

a) Demostrar la siguiente implicación:

$$\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right) \Rightarrow \left(\frac{ac}{bd}=\frac{(a+c)^2}{(b+d)^2}\right).$$

b) Demostrar que existen al menos cuatro reales a, b, c y d para los cuales:

$$\left(\frac{ac}{bd}=\frac{(a+c)^2}{(b+d)^2}\right) \text{ y } \left(\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}\right).$$

¿Qué se puede concluir?

16. Sea $x \in \mathbb{R}$. Probar que si $x^2 = 0$ entonces $x = 0$.

17. Sean x, $y \in \mathbb{R}$. Probar que: $-(x+y) = -x - y$.

18. Demuestre que, cualesquiera que sean los reales x, y, z se tiene:

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy) \\ &= \frac{(x+y+z)}{2}\left[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\right]. \end{aligned}$$

Aplicación.- Encontrar las soluciones reales de la ecuación en x:

$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0,$$

donde a y b son dos números reales cualesquiera dados.

3.2.2. Axiomas de Orden

Las propiedades de orden que a continuación se describen, surgen de un conjunto de axiomas referentes a un nuevo concepto primitivo, el de número positivo; para luego definir los conceptos de **mayor que** y **menor que** a partir del de número positivo. Así: En $\mathbb{R}$, supondremos que existe un subconjunto que lo notaremos con $\mathbb{R}^+$ y que se denomina **Conjunto de los números reales positivos** , tal que:

01. Para todo x, $y \in \mathbb{R}^+$, $x+y$ y xy son elementos de $\mathbb{R}^+$.

02. Para todo $x \in \mathbb{R}$, se satisface una y solo una de las tres condiciones siguientes:

a) $x \in \mathbb{R}^+$.

b) $-x \in \mathbb{R}^+$.

c) $x = 0$.

A partir de estos dos axiomas se deducirán todas las propiedades relativas al orden en los números reales.

Definición 3.13 *Un número real x se dice negativo si $-x$ es positivo.*

Observaciones.

- Es claro que cero no es ni positivo ni negativo.
- Si $x, y \in \mathbb{R}$, diremos "x es menor que y" y notaremos "$x < y$" si y solamente si $(y - x) \in \mathbb{R}^+$.

  Notación equivalente de la anterior es "$y > x$" que se lee "y es mayor que x".

  Se usan también las siguientes notaciones: "$x \leq y$" que se lee "x es menor o igual que y" y significa que: $x < y$ o $x = y$; notación equivalente a ella es: "$y \geq x$" que se lee "y es mayor o igual que x".
- Se tiene las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow x > 0, \\ -x \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow x < 0, \\ x > y &\Leftrightarrow x - y > 0, \\ x \geq y &\Leftrightarrow x - y > 0 \text{ o } x - y = 0, \\ x \geq y &\Leftrightarrow x - y \geq 0, \\ x > y &\Leftrightarrow y < x, \\ x \leq y &\Leftrightarrow y \geq x. \end{aligned}$$

Con estas observaciones y notaciones, los axiomas 0_1 y 0_2 se escriben:

0'1. $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0 \ \wedge \ xy > 0$

0'2. Si $x \in \mathbb{R}$, x satisface una y solo una de las tres condiciones siguientes: $x > 0$, $x < 0$, $x = 0$.

Observación. El par de desigualdades: $x < y \ \wedge \ y < z$ dan lugar a la desigualdad compuesta: $x < y < z$, que se lee: "y es mayor que x y menor que z".

De modo análogo, $x \leq y \ \wedge \ y \leq z$ es equivalente a: $x \leq y \leq z$.

Teorema 3.12 *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Entonces:*

a) $x < y \ \wedge \ y < z \Rightarrow x < z$. *(Ley transitiva).*

b) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$.

c) $x < y \ \wedge \ z > 0 \Rightarrow xz < yz$.

d) $x < y \ \wedge \ z < 0 \Rightarrow xz > yz$.

e) $x < 0 \ \wedge \ y < 0 \Rightarrow xy > 0$.

f) $x < 0 \ \wedge \ y > 0 \Rightarrow xy < 0$.

g) $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$

Demostración.-

a) Como $x < y \wedge y < z$ entonces $y - x > 0 \wedge z - y > 0$, por el axioma $0_1'$ se sigue que $(y-x)+(z-y) > 0$. Pero:

$$\begin{aligned}(y-x)+(z-y) &= [y+(-x)]+[z+(-y)] && \text{(Definición de resta)}\\ &= [y+(-y)]+[z+(-x)] && \text{(Por } S_1 \text{ y } S_2)\\ &= z+(-x) && \text{(Por } S_4 \text{ y } S_3)\\ &= z-x.\end{aligned}$$

Luego, $z - x > 0$ y por tanto $x < z$, que es lo que queríamos demostrar.

b) Basta ver que $(y+z)-(x+z) > 0$. En efecto:

$$\begin{aligned}(y+z)-(x+z) &= y+z-x-z \quad (\text{Propiedad } -(x+y) = -x-y)\\ &= y-x > 0\end{aligned}$$

Esta propiedad podemos expresarla como sigue: **Si a los dos miembros de una desigualdad se suma un mismo número, no cambia el sentido de la desigualdad.**

c)

$$\begin{aligned}x < y \wedge z > 0 &\Rightarrow y - z > 0 \wedge z > 0\\ &\Rightarrow (y-x)z > 0 \quad (\text{Por el axioma } 0_1')\\ &\Rightarrow yz - xz > 0 \quad (\text{Por teorema 3.11 parte a})\\ &\Rightarrow xz < yz\end{aligned}$$

Está propiedad se interpreta como: **Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica por un número positivo, no cambia el sentido de la desigualdad.**

d)

$$\begin{aligned}x < y \wedge z < 0 &\Rightarrow y - z > 0 \wedge -z > 0\\ &\Rightarrow (y-x)(-z) > 0 \quad (\text{Por el axioma } 0_1')\\ &\Rightarrow y(-z)+(-x)(-z) > 0 \quad (\text{Por teorema 3.11 parte a})\\ &\Rightarrow xz - yz > 0 \quad (\text{Por teorema 3.8 partes b) y d})\\ &\Rightarrow yz < xz.\end{aligned}$$

Esta propiedad nos dice que: **Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.**

e)

$$\begin{aligned}x < 0 \wedge y < 0 &\Rightarrow -x > 0 \wedge -y > 0\\ &\Rightarrow (-x)(-y) > 0 \quad (\text{Por el axioma } 0_1')\\ &\Rightarrow xy > 0 \quad (\text{Por teorema 3.8 parte d})\end{aligned}$$

Esta propiedad es un caso particular de la parte d) de este teorema.

f) Es consecuencia inmediata de la parte c).

g) $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0 \Rightarrow x > 0$ o $x < 0$.

i) Si $x > 0$ entonces por el axioma $0_1'$ se sigue que: $x \times x = x^2 > 0$.

ii) Si $x < 0$ entonces $-x > 0$, luego por el axioma $0_1'$ se tiene que: $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

Observación.

Los resultados del teorema son verdaderos si se reemplazan los símbolos: "$<$" y "$>$" por "$\leq$" y "$\geq$" respectivamente.

Teorema 3.13 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:*

a) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

b) $x < 0 \ \wedge \ y < 0 \Rightarrow x + y < 0$

c) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$.

Demostración

a) Demostraremos por reducción al absurdo:

Supongamos que $x^{-1} \leq 0$. Evidentemente x^{-1} no puede ser igual a cero (¿Por qué?); consideremos entonces el caso en el cual $x^{-1} < 0$. Tenemos por una parte, por el axioma $P_4 : xx^{-1} = 1$ y por el teorema 3.12 parte f), $xx^{-1} < 0$; es decir que $1 < 0$, lo cual evidentemente es un absurdo puesto que $1 > 0$. Este absurdo proviene de haber supuesto que $x^{-1} \leq 0$, luego nuestra suposición es falsa y lo correcto es que $x^{-1} > 0$.

Igualmente se tiene que: $x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$.

b)

$$\begin{aligned} x < 0 \ \wedge \ y < 0 \ &\Rightarrow \ -x > 0 \ \wedge \ -y > 0 \\ &\Rightarrow (-x) + (-y) > 0 \\ &\Rightarrow -(x + y) > 0 \text{ (Por el axioma } 0_1') \\ &\Rightarrow x + y < 0. \end{aligned}$$

c) De $0 < x < y$ se sigue que $x > 0 \ \wedge \ y > 0$. Por la parte a) de este teorema se sigue que $x^{-1} > 0 \ \wedge \ y^{-1} > 0$ y por lo tanto $x^{-1}y^{-1} > 0$.

Consecuentemente, si multiplicamos cada uno de los miembros de $0 < x < y$ por $x^{-1}y^{-1}$ se sigue que: $0\,(x^{-1}y^{-1}) < x\,(x^{-1}y^{-1}) < y\,(x^{-1}y^{-1})$, de donde,

$$0 < y^{-1} < x^{-1}. \blacksquare$$

Teorema 3.14 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x < y$ entonces existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$.*

Demostración

De $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$ se sigue que $(y - x)/2 > 0$. Consecuentemente:

$$x < x + \frac{y - x}{2} = \frac{x + y}{2};$$

es decir que:

$$x < \frac{x + y}{2} \tag{3.9}$$

Por otra parte: $y > y - \dfrac{y - x}{2} = \dfrac{x + y}{2}$; luego

$$\frac{x + y}{2} < y \tag{3.10}$$

De (3.9) y (3.10) se sigue que:

$$x < \frac{x + y}{2} < y.$$

Es decir, que hemos encontrado un número real entre x e y; dicho número real basta tomarlo como: $z = (x + y)/2$.

Teorema 3.15 *Si $a < b + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ entonces $a \leq b$.*

Demostración.

La demostración la realizaremos por reducción al absurdo. Supongamos que $a > b$, luego: $\frac{a-b}{2} > 0$. Tomando $\epsilon = \frac{a-b}{2}$ se sigue que:

$$b < b + \epsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < a.$$

Se tiene entonces que: $b + \epsilon < a$, lo cual contradice la hipótesis de que $a < b + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$. Esta contradicción se tiene por haber supuesto que $a > b$, luego lo correcto es que $a \leq b$.■

Teorema 3.16 *Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq x < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, probar que $x = 0$.*

Demostración.

Supongamos que $x > 0$, como $2 > 1 > 0$ se sigue que: $0 < \frac{1}{2} < 1$ y multiplicando cada miembro por x se obtiene:

$$0 < \frac{x}{2} < x.$$

Es decir, hemos encontrado un número positivo $\epsilon = \frac{x}{2}$ que es menor que x, lo cual contradice la hipótesis de que $\forall \epsilon > 0$, $0 \leq x < \epsilon$. Consecuentemente, la suposición es falsa y lo correcto es que $x = 0$.

Ejercicios

1. .
   a) Probar que $1 > 0$.
   b) Probar que si $a < b < c$ y $d > 0$ entonces $ad < bd < cd$.
   c) Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ y $c > 0$ probar que: $a < b + c$.
2. Sea $a \in \mathbb{R}$. Probar que si $a > 0$ entonces $-a < 0$.
3. Estudiar los signos de los reales x, y, en cada uno de los tres siguientes casos:
   a) El producto xy es negativo.
   b) El producto xy y la suma $x + y$ son positivos.
   c) El producto xy es positivo y la suma $x + y$ es negativa.
4. Demostrar que, cualquiera que sea el número real $x > 0$, se tiene
$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$
5. Cualesquiera que sean los reales $a > 0$ y $b > 0$, probar que
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

6. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Probar la siguiente implicación:

$$xy > 0 \Rightarrow x > 0.$$

7. Sea $x \in \mathbb{R}$. Probar las siguientes implicaciones:

   a) $x \geq 1 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 4$.

   b) $-1 < x < 0 \Rightarrow (x+1)^2 < 1$.

8. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar que:

$$(x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Leftrightarrow x = y.$$

9. Probar que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$.

10. Sean $a, x, y \in \mathbb{R}$. Probar que:

$$a < 0 \ \wedge \ x < y \Rightarrow a^{-1}x > a^{-1}y.$$

11. Sean a, $b \in \mathbb{R}$. Demostrar que:

$$(a + b > a - b) \Leftrightarrow (b > 0).$$

12. Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$. Demostrar la siguiente implicación:

$$(a < b \ \wedge \ c < d) \Rightarrow \left(\frac{a}{d} < \frac{b}{c}\right).$$

13. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Probar que:

   a) $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{b+c} < \dfrac{1}{a+c}$.

   b) $a \leq b + c \Rightarrow \dfrac{a}{1+a} \leq \dfrac{b}{1+b} + \dfrac{c}{1+c}$

14. Se consideran dos números reales x, y que verifican la condición $0 < x < 1 < y$. Comparar los reales: $0, 1, x, x, x^2, y, y^2$.

15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Probar las siguientes implicaciones:

   a) $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

   b) $a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2$.

16. Sea $x \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que:

   a) $x > 1 \Rightarrow 1 < x < x^2$.

   b) $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x < 1$.

17. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $b > 0$, $d > 0$ y $a/b < c/d$. Demostrar que:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM ANTE OMNIA RETINERE SAPIENTIAM
FUNDADA EN 1620
QUITO

18. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Pruebe que $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{R}^+$. Demostrar la implicación:

$$(a < b) \Rightarrow \left(a < \frac{ma+nb}{m+n} < b\right).$$

20. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $m, n, p \in \mathbb{R}^+$. Demostrar que

$$(a < b < c) \Rightarrow \left(a < \frac{ma+nb+pc}{m+n+p} < c\right).$$

21. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Probar que:
Si $0 < a < b < c$ entonces $0 < c^{-1} < b^{-1} < a^{-1}$.

22. Pruebe que si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces: $ac < bd$.

23. Pruebe que si $0 < b < a < c$ y $0 < d < e < f$, entonces:

$$\frac{b}{f} < \frac{a}{e} < \frac{c}{d}.$$

24. Demuestre que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en el sistema de los números reales.

25. Si a y $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$. Probar que $a - b < a$.

Observación. En adelante usaremos la representación usual de los números reales como puntos de una recta geométrica.

Intervalos

Definición 3.14 *Sean a y b números reales, con $a < b$.*

1. *Se llama intervalo cerrado de origen a y de extremo b (o simplemente de extremos a y b) el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que: $a \leq x \leq b$.*
Se nota:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Su representación en la recta real es:

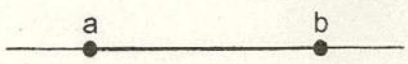


Figura 3.2:

2. *Se llama intervalo abierto de origen a y de extremo b, el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b$. Se nota:*

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Gráficamente lo representamos por:

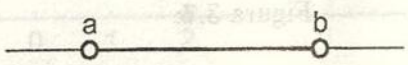


Figura 3.3:

3. *El intervalo semiabierto a derecha es definido y notado como sigue:*

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Su representación gráfica es:

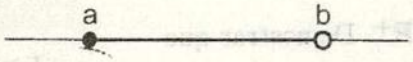


Figura 3.4:

4. *El intervalo semiabierto a izquierda es definido y notado como sigue:*

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Gráficamente:



Figura 3.5:

Observación. Los intervalos anteriores se denominan **intervalos finitos** por ser a y b números reales (No significa que tengan un número finito de elementos).

Intervalos Infinitos.

Se denominan intervalos infinitos a los siguientes conjuntos:

a) $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$. Este intervalo se denomina intervalo infinito cerrado a izquierda, cuya representación gráfica es:



Figura 3.6:

b) $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. Este intervalo se conoce como intervalo infinito abierto a izquierda y se representa por:



Figura 3.7:

c) $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$. (Intervalo infinito cerrado a derecha).

Su representación gráfica es:

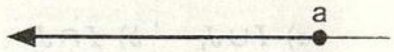


Figura 3.8:

d) $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, intervalo que lo representamos gráficamente por:

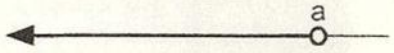


Figura 3.9:

Este intervalo se denomina intervalo infinito abierto a derecha.

Observaciones.

- $]a, a[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < a\} = \emptyset$.
- $[a, a] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq a\} = \{a\}$.
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
- Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales.

Operaciones con Intervalos.- Puesto que los intervalos no son sino conjuntos de números, entre ellos podemos realizar todas las operaciones conjuntistas antes definidas. Así, sean I y J dos intervalos cualesquiera (finitos o infinitos) de $\mathbb{R}$, se tiene entonces:

- $I \cup J = \{x \in \mathbb{R} : x \in I \vee x \in J\}$.
- $I \cap J = \{x \in \mathbb{R} : x \in I \wedge x \in J\}$.
- $I \setminus J = \{x \in \mathbb{R} : x \in I \wedge x \notin J\}$.
- $I^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin I\} = \mathbb{R} \setminus I$.
- $I \triangle J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$.

EJEMPLO

Sean los intervalos $I = [-3, 8]$ y $J = [2, +\infty[$, cuya representación en la recta real se indica en la siguiente figura.

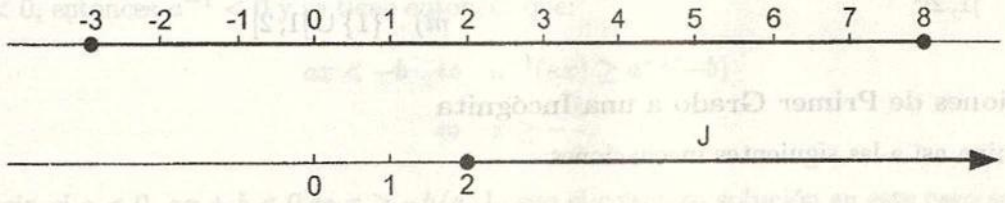


Figura 3.10:

Hallar:

$a)$ $I \cup J$, $b)$ $I \cap J$,
$c)$ $I \setminus J$, $d)$ $J \setminus I$,
$e)$ $I \triangle J$, $f)$ I^c,
$g)$ J^c,

Solución.

1. .

$a)$ $I \cup J = [-3, 8] \cup [2, +\infty[= [-3, +\infty[$.

$b)$ $I \cap J = [-3, 8] \cap [2, +\infty[= [2, 8]$.

$c)$ $I \setminus J = [-3, 8] \setminus [2, +\infty[= [-3, 2[$.

$d)$ $J \setminus I = [2, +\infty[\setminus [-3, 8] =]8, +\infty[$.

$e)$ $I \triangle J = [-3, 2[\cup]8, +\infty[$.

$f)$ $I^c = \mathbb{R} \setminus I =]-\infty, -3[\cup]8, +\infty[$.

$g)$ $J^c = \mathbb{R} \setminus J =]-\infty, 2[$.

Ejercicios

1. Sean los intervalos: $I = [-2, 5[$, $J =]4, +\infty[$ y $K =]-\infty, 5[$. Hallar:

$a)$ $(I \cup J) \cup K$
$b)$ $(I \cap J) \cup K^c$
$c)$ $I \triangle K$
$d)$ $(I \triangle K)^c$
$e)$ $I \triangle (J \cup K)$
$f)$ $I \cap (J \cup K)$
$g)$ $I \setminus (J \cup K)$
$h)$ $I \setminus (J \cap K)$

2. Hallar:

$a)$ $]1, 3[\cap]2, 5[$
$b)$ $[-1, 8[\cap]0, 7]$
$c)$ $]1, 2[\cap]2, 3[$
$d)$ $]1, 2] \cap [2, 3[$
$e)$ $[1, 2[\cap [2, 3[$
$f)$ $]1, +\infty[^c$
$g)$ $]1, 2[^c$
$h)$ $[-1, 5] \setminus]-1, 3[$
$i)$ $[0, 4] \cup]4, 5]$
$j)$ $[0, 4[\cup]4, 5]$
$k)$ $]-\infty, 1[\cap [-1, +\infty[$
$l)$ $]-\infty, -100[^c$
$m)$ $\{1\} \cup]1, 2]$

Inecuaciones de Primer Grado a una Incógnita

Se denomina así a las siguientes inecuaciones:

1. $ax + b \leq 0$.
2. $ax + b < 0$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

3. $ax + b \geq 0$.

4. $ax + b > 0$, donde $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$..

Resolver una inecuación no es sino hallar todos aquellos valores reales de x para los cuales se satisface la desigualdad. Es decir, se trata de encontrar los conjuntos:

- $S_1 = \{x \in \mathbb{R} : ax + b \leq 0\}$.
- $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : ax + b < 0\}$.
- $S_3 = \{x \in \mathbb{R} : ax + b \geq 0\}$.
- $S_4 = \{x \in \mathbb{R} : ax + b > 0\}$.

Dichos conjuntos se denominan conjuntos solución de las inecuaciones 1., 2., 3. y 4. respectivamente y resolver la inecuación es precisamente encontrar su conjunto solución.

Para resolver una inecuación utilizaremos todas las propiedades de los números reales antes estudiadas.

Solución de la Inecuación $ax + b \leq 0$

$$\begin{aligned} ax + b \leq 0 &\Leftrightarrow (ax + b) + (-b) \leq 0 + (-b) \\ &\Leftrightarrow ax \leq -b. \end{aligned}$$

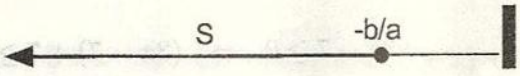
Como $a \neq 0$ entonces $a > 0$ o $a < 0$.

i) Si $a > 0$, sabemos que $a^{-1} > 0$. Luego:

$$\begin{aligned} ax \leq -b &\Leftrightarrow a^{-1}(ax) \leq (a^{-1})(-b) \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Es decir que, si $a > 0$, $ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$. Luego el conjunto solución en este caso es:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{b}{a} \right\} \\ &= \left] -\infty, -\frac{b}{a} \right]. \end{aligned}$$



ii) Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$ y se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} ax < -b &\Leftrightarrow a^{-1}(ax) \geq a^{-1}(-b) \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Es decir, si $a < 0$, $ax + b < 0 \Leftrightarrow x \geq -b/a$. Luego el conjunto solución en este caso será:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{b}{a} \right\} = \left[-\frac{b}{a}, +\infty \right[$$

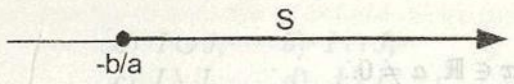


Figura 3.11:

Resumiendo:

$$ax+b\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\dfrac{b}{a} \text{ si } a>0 \\ x \geq -\dfrac{b}{a} \text{ si } a<0 \end{cases}$$

De manera similar se resuelven las inecuaciones del tipo 2., 3. y 4. y se obtienen los siguientes resultados:

$$ax+b<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{b}{a} \text{ si } a>0 \\ x > -\dfrac{b}{a} \text{ si } a<0 \end{cases}$$

$$ax+b\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{b}{a} \text{ si } a>0 \\ x \leq -\dfrac{b}{a} \text{ si } a<0 \end{cases}$$

$$ax+b>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} \text{ si } a>0 \\ x < -\dfrac{b}{a} \text{ si } a<0 \end{cases}$$

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

   a) $3x-7\geq 0$
   b) $2x+5>0$
   c) $-x+9<0$
   d) $5x-6<2+x$

   Solución.

   a)

$$\begin{aligned} 3x-7\geq 0 &\Leftrightarrow (3x-7)+7\geq 0+7 \\ &\Leftrightarrow 3x+[(-7)+7]\geq 7 \\ &\Leftrightarrow 3x\geq 7 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}(3x)\geq \frac{1}{3}(7) \\ &\Leftrightarrow x\geq \frac{7}{3} \end{aligned}$$

   Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}: x\geq \frac{7}{3}\right\}=\left[\frac{7}{3},+\infty\right[$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR ESTO
FUNDADA EN 1620
QUITO

La Figura 3.12 muestra la solución de $3x - 7 \geq 0$.

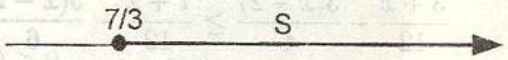


Figura 3.12: Solución de $3x - 7 \geq 0$

b)

$$\begin{aligned} 2x + 5 > 0 &\Leftrightarrow x > -5 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución es

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > -\frac{5}{2} \right\} = \left] -\frac{5}{2}, +\infty \right[$$

(Ver Figura 3.13)

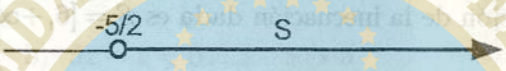


Figura 3.13:

c)

$$\begin{aligned} -x + 9 < 0 &\Leftrightarrow -x < -9 \\ &\Leftrightarrow (-1)(-x) > (-1)(-9) \\ &\Leftrightarrow x > 9 \end{aligned}$$

Es decir que el conjunto solución de la inecuación es

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x > 9\} =]9, +\infty[$$

(Ver Figura 3.14)

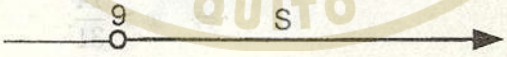


Figura 3.14:

d)

$$\begin{aligned} 5x - 6 < 2 + x &\Leftrightarrow (5x - 6) + 6 < (2 + x) + 6 \\ &\Leftrightarrow 5x < 8 + x \\ &\Leftrightarrow (5x) + (-x) < (8 + x) + (-x) \\ &\Leftrightarrow 4x < 8 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}(4x) < \frac{1}{4}(8) \\ &\Leftrightarrow x < 2 \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución es:

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} =]-\infty, 2[$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

2. Resolver la inecuación.

$$\frac{3+x}{12}-\frac{3(x-2)}{4}\geq\frac{7+x}{12}-\frac{5(x-2)}{6}.$$

Se tiene las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}\frac{3+x}{12}-\frac{3(x-2)}{4}\geq\frac{7+x}{12}-\frac{5(x-2)}{6} &\Leftrightarrow \frac{7+x}{12}-\frac{5(x-2)}{6}\leq\frac{3+x}{12}-\frac{3(x-2)}{4}\\ &\Leftrightarrow 7+x-10(x-2)\leq 3+x-9(x-2)\\ &\Leftrightarrow 7+x-10x+20\leq 3+x-9x+18\\ &\Leftrightarrow -9x+8x\leq 3+18-7-20\\ &\Leftrightarrow -x\leq -6\\ &\Leftrightarrow x\geq 6.\end{aligned}$$

Es decir que:

$$\left[\frac{3+x}{12}-\frac{3(x-2)}{4}\geq\frac{7+x}{12}-\frac{5(x-2)}{6}\right]\Leftrightarrow x\geq 6.$$

Luego el conjunto solución de la inecuación dada es $S=[6,+\infty]$.

3. Resolver la inecuación

$$x^2-\frac{3x}{7}<x\left(x-\frac{3}{14}\right)+2x-1.$$

Solución.

$$\begin{aligned}x^2-\frac{3x}{7}<x(x-\frac{3}{14})+2x-1 &\Leftrightarrow x^2-\frac{3x}{7}<x^2-\frac{3x}{14}+2x-1\\ &\Leftrightarrow -\frac{3x}{7}<\frac{-3x}{14}+2x-1\\ &\Leftrightarrow -\frac{3x}{7}<\frac{-3x}{14}+\frac{28}{14}x-1\\ &\Leftrightarrow -\frac{3x}{7}<\frac{25}{14}x-1\\ &\Leftrightarrow \frac{31}{14}x>1\\ &\Leftrightarrow x>\frac{14}{31}.\end{aligned}$$

El conjunto solución de la inecuación es $S=\left]\frac{14}{31},+\infty\right[$. (Ver Figura 3.15).

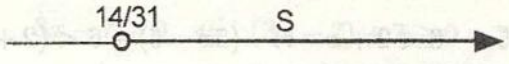


Figura 3.15:

Utilizando las propiedades de los números reales podemos resolver también inecuaciones de los siguientes tipos:

- $(ax+b)(cx+d)\geq 0$.
- $(ax+b)(cx+d)>0$.

- $(ax+b)(cx+d) \leq 0$.
- $(ax+b)(cx+d) < 0$.
- $(ax+b)(cx+d)(ex+f) \geq 0$.
- $(ax+b)/(cx+d) > 0$, etc.

EJEMPLOS

1. Resolver la inecuación $(3x-1)(2-x) < 0$.

   Solución.

   Para resolver la inecuación dada utilizaremos la siguiente propiedad de los números reales:

$$ab < 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)].$$

   Consecuentemente:

$$(3x-1)(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a)} \ 3x-1 > 0 \wedge 2-x < 0 \\ \qquad\qquad \vee \\ \text{b)} \ 3x-1 < 0 \wedge 2-x > 0 \end{cases}$$

   Veamos entonces el caso a):

$$\begin{aligned} 3x-1 > 0 \ \wedge \ 2-x < 0 \ &\Leftrightarrow \ 3x > 1 \wedge 2 < x \\ &\Leftrightarrow \ x > \frac{1}{3} \wedge x > 2 \\ &\Rightarrow \ x > 2. \end{aligned}$$

   Luego, la solución de la inecuación en el caso a) es $S_1 =]2, +\infty[$. (Ver Figura 3.16).

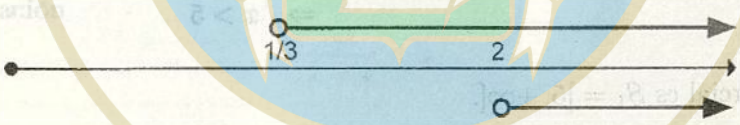


Figura 3.16:

   Estudiemos la posibilidad b)

$$\begin{aligned} 3x-1 < 0 \wedge 2-x > 0 \ &\Leftrightarrow \ x < \frac{1}{3} \wedge x < 2 \\ &\Rightarrow \ x < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   La solución de la parte b) es $S_2 = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$. (Ver Figura 3.17).

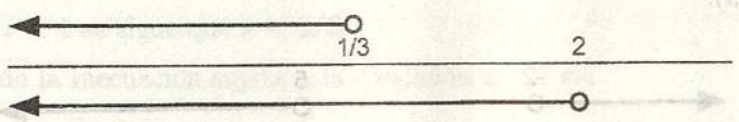


Figura 3.17:

La solución total de la inecuación dada es:

$$\begin{aligned} S_T &= S_1 \cup S_2 \\ &= \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\bigcup \ ]2, +\infty[\end{aligned}$$

(Ver Figura 3.18)



Figura 3.18:

2. Resolver la inecuación $(x-5)(x+2) > 0$.

Solución.

En este caso utilizaremos la siguiente propiedad de los números reales:

$$ab > 0 \Leftrightarrow [(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)].$$

Consecuentemente:

$$(x-5)(x+2) > 0 \Leftrightarrow [(x-5 > 0 \wedge x+2 > 0) \vee (x-5 < 0 \wedge x+2 < 0)].$$

Primera posibilidad: $x-5 > 0 \wedge x+2 > 0$

$$\begin{aligned} x-5 > 0 \wedge x+2 > 0 &\Rightarrow x > 5 \wedge x > -2 \\ &\Rightarrow x > 5 \end{aligned}$$

La solución parcial es $S_1 =]5, +\infty[$.

Para la segunda posibilidad tenemos:

$$\begin{aligned} x-5 < 0 \wedge x+2 < 0 &\Rightarrow x < 5 \ \wedge \ x < -2 \\ &\Rightarrow x < -2. \end{aligned}$$

La solución parcial es $S_2 =]-\infty, -2[$.

En consecuencia la solución de la inecuación dada será:

$$\begin{aligned} S_T &= S_1 \cup S_2 \\ &=]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[. \end{aligned}$$

(Ver Figura 3.19).

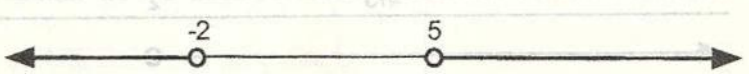


Figura 3.19:

3. Resolver la inecuación:

$$3 < \frac{1}{1-x}.$$

Solución.

Puesto que $1 > 0$ y $3 > 0$, es claro que $1 - x > 0$; es decir que estamos sujetos a la condición $x < 1$. Luego; para reducirla a una inecuación de tipo lineal debemos multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $1 - x > 0$ se tiene entonces:

$$\begin{aligned} 3 < \frac{1}{1-x} &\Leftrightarrow 3(1-x) < 1 \\ &\Leftrightarrow 3 - 3x < 1 \\ &\Leftrightarrow 2 < 3x \\ &\Leftrightarrow x > \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Pero además como x verifica la condición $x < 1$, la solución será:

$$\frac{2}{3} < x < 1 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{2}{3}, 1\right[= S$$

(Ver Figura 3.20).



Figura 3.20:

4. Resolver la inecuación

$$\frac{1}{1-x} < 3.$$

Solución.

Para reducirla a una inecuación de tipo lineal debemos multiplicar por $(1 - x)$ a ambos miembros; pero $1 - x$ puede ser positivo o negativo.

a) Si $1 - x > 0$ entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} < 3 &\Leftrightarrow 1 < 3(1-x) \\ &\Leftrightarrow 1 < 3 - 3x \\ &\Leftrightarrow 3x < 2 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Por otra parte como

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

De $x < \frac{2}{3}$ y $x < 1$ se sigue que $x < 2/3$.

La solución de la inecuación sujeta a la condición $x < 1$ es:

$$S_1 =]-\infty, 2/3[$$

(Ver Figura 3.21)

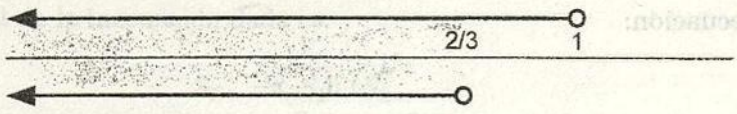


Figura 3.21:

b) Si $1-x<0$ entonces:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}<3 &\Leftrightarrow 1>3(1-x)\\ &\Leftrightarrow 1>3-3x\\ &\Leftrightarrow 3x>2\\ &\Leftrightarrow x>\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Pero como x verifica también la condición $1-x<0$ o lo que es lo mismo

$$1<x.$$

De $x>\frac{2}{3}$ y $x>1$ se sigue que $x>1$. Luego la solución en este caso es:

$$S_2=]1,+\infty[$$

(Ver Figura 3.22)



Figura 3.22:

La solución global o total de la inecuación es

$$S_T=S_1\cup S_2=]-\infty,2/3[\cup]1,+\infty[$$

(Ver Figura 3.23)

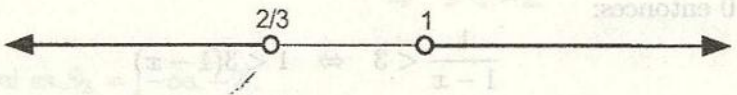


Figura 3.23:

5. Resolver la inecuación

$$(3x-2)(1-2x)(2+x)\leq 0.$$

Solución.

Para que el producto de los tres factores sea menor o igual que cero se presentan las siguientes posibilidades.

a) $3x-2\leq 0\wedge 1-2x\leq 0\wedge 2+x\leq 0.$

b) $3x-2\geq 0\wedge 1-2x\leq 0\wedge 2+x\geq 0.$

c) $3x-2\geq 0\wedge 1-2x\geq 0\wedge 2+x\leq 0.$

d) $3x-2\leq 0\wedge 1-2x\geq 0\wedge 2+x\geq 0.$

Analicemos entonces cada una de las posibilidades antes indicadas

e)

$$3x-2\leq 0\wedge 1-2x\leq 0\wedge 2+x\leq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{2}{3}\wedge x\geq \frac{1}{2}\wedge x\leq -2$$
$$\Leftrightarrow x\in\emptyset, \text{pues } x\geq \frac{1}{2}\wedge x\leq -2$$

son contradictorias. (Ver Figura 3.24).

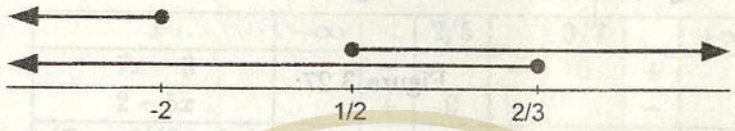


Figura 3.24:

Es decir que la solución parcial para la inecuación es en este caso $S_1=\emptyset$.

f) $3x-2\geq 0\wedge 1-2x\leq 0\wedge 2+x\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{2}{3}\wedge x\geq \frac{1}{2}\wedge x\geq -2$

$$\Rightarrow x\geq \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow x\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right[=S_2.$$

(Ver Figura 3.25).

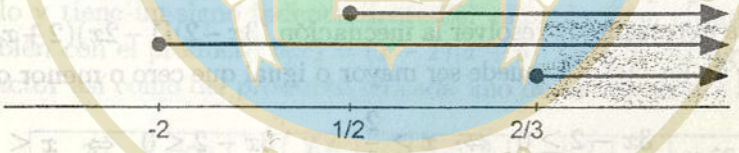


Figura 3.25:

g)

$$3x-2\geq 0\wedge 1-2x\geq 0\wedge 2+x\leq 0 \Rightarrow x\geq \frac{2}{3}\wedge x\leq \frac{1}{2}\wedge x\leq -2$$
$$\Rightarrow x\in\emptyset=S_3,$$

puesto que no es posible encontrar un número real que satisfaga las tres condiciones. (Ver Figura 3.26).

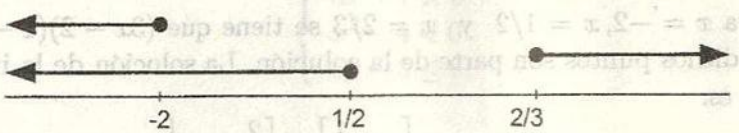


Figura 3.26:

$$h) \quad 3x-2\leq 0 \wedge 1-2x\geq 0 \wedge 2+x\geq 0 \Rightarrow x\leq \frac{2}{3}\wedge x\leq \frac{1}{2}\wedge x\geq -2$$
$$\Rightarrow -2\leq x\leq \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x\in\left[-2,\frac{1}{2}\right]=S_4$$

(Ver Figura 3.27).

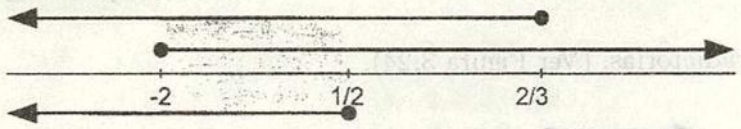


Figura 3.27:

Consecuentemente, la solución de la inecuación dada es:

$$\begin{aligned} S_T &= S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4 \\ &= \emptyset\bigcup\left[\frac{2}{3},+\infty\right[\bigcup\emptyset\bigcup\left[-2,\frac{1}{2}\right] \\ &= \left[-2,\frac{1}{2}\right]\bigcup\left[\frac{2}{3},+\infty\right[. \end{aligned}$$ (Ver Figura 3.28)



Figura 3.28:

Una forma abreviada de resolver la inecuación $(3x-2)(1-2x)(2+x)\leq 0$ es la siguiente: Cada uno de los factores puede ser mayor o igual que cero o menor o igual que cero. Así:

$$\begin{aligned} 3x-2\geq 0 &\Leftrightarrow x\geq \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad 3x-2\leq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{2}{3} \\ 1-2x\geq 0 &\Leftrightarrow x\leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad 1-2x\leq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2} \\ 2+x\geq 0 &\Leftrightarrow x\geq -2 \quad \text{y} \quad 2+x\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -2. \end{aligned}$$

Todo esto podemos esquematizarle en el siguiente cuadro:

x	$-\infty$		-2		$1/2$		$2/3$		$+\infty$
$3x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(3x-2)(1-2x)(2+x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Como para $x=-2, x=1/2$ y $x=2/3$ se tiene que $(3x-2)(1-2x)(2+x)=0$ se sigue que dichos puntos son parte de la solución. La solución de la inecuación, mirando el cuadro, es:

$$S=\left[-2,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right[,$$

que es la solución encontrada anteriormente.

6. Resolver la inecuación

$$(7x-3)(2-5x)>0.$$

Utilizando el método abreviado tenemos:

$$7x-3>0 \Leftrightarrow x>\frac{3}{7} \text{ y } 7x-3<0 \Leftrightarrow x<\frac{3}{7}.$$

$$2-5x>0 \Leftrightarrow x<\frac{2}{5} \text{ y } 2-5x<0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{5}.$$

Lo cual lo resumimos en el siguiente cuadro:

x	$-\infty$		$2/5$		$3/7$		$+\infty$
$7x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(7x-3)(2-5x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Puesto que en $x=2/5$ y en $x=3/7$ se tiene que $(7x-3)(2-5x)=0$, se sigue finalmente que la solución de la inecuación es:

$$S=\left]\frac{2}{5},\frac{3}{7}\right[.$$

7. Resolver la inecuación

$$(x-2)(x+6)(2x+5)\leq 0.$$

Solución.

El producto $(x-2)(x+6)(2x+5)$ es nulo si y solamente si $x=2$ o $x=-6$ o $x=-5/2$.

Como en cada uno de los intervalos abiertos $]-\infty,-6[$, $\left]-6,-\frac{5}{2}\right[$, $\left]-\frac{5}{2},2\right[$, $]2,+\infty[$, cada factor es no nulo y tiene un signo independiente del valor de x en el intervalo considerado; ello ocurre también con el producto $p(x)=(x-2)(x+6)(2x+5)$. El siguiente cuadro da el signo de cada factor así como del producto en cada uno de los intervalos antes indicados.

x	$-\infty$		-6		$-5/2$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x+5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

El conjunto de soluciones de la inecuación dada es entonces

$$S=]-\infty,-6]\cup\left[-\frac{5}{2},2\right].$$

8. Resolver en $\mathbb{R}$ el sistema

$$\begin{cases} 5x+7>0 \\ x^2-4<0 \\ 3x-5\leq 0. \end{cases}$$

Solución.

Resolver el sistema es encontrar el conjunto S de números reales x que verifican o que satisfacen simultáneamente las tres inecuaciones. Es decir que, si llamamos S_1, S_2 y S_3 los

conjuntos solución de $5x+7>0$, $x^2-4<0$ y de $3x-5\leq 0$ respectivamente, entonces $S=S_1\cap S_2\cap S_3$.

Determinemos el conjunto S_1, solución de $5x+7>0$.

$$\begin{aligned} 5x+7>0 &\Leftrightarrow x>-\frac{7}{5} \\ &\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{7}{5},+\infty\right[=S_1. \end{aligned}$$

Determinemos el conjunto solución S_2 de la inecuación $x^2-4<0$.

$$\begin{aligned} x^2-4<0 &\Leftrightarrow (x-2)(x+2)<0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \ \wedge \ x+2<0 \\ \vee \\ x-2<0 \ \wedge \ x+2>0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \ \wedge \ x<-2 \\ \vee \\ x<2 \ \wedge \ x>-2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\emptyset \\ \vee \\ -2<x<2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x\in\left]-2,2\right[=S_2. \end{aligned}$$

Determinemos el conjunto S_3:

$$\begin{aligned} 3x-5\leq 0 &\Leftrightarrow x\leq\frac{5}{3} \\ &\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,\frac{5}{3}\right]=S_3. \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución del sistema será:

$$\begin{aligned} S &= S_1\cap S_2\cap S_3 \\ &= \left]-\frac{7}{5},+\infty\right[\cap\left]-2,2\right[\cap\left]-\infty,\frac{5}{3}\right[\\ &= \left]-\frac{7}{5},\frac{5}{3}\right] \end{aligned}$$

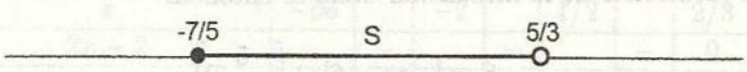


Figura 3.29:

9. Resolver el sistema

$$\begin{cases} (x-5)(x+2)>0 \\ (x-1)(x-7)<0 \\ (7x-1)(1-x)>0 \end{cases}$$

Solución.-

Como en el caso anterior, llamemos S, S_1, S_2 y S_3 a los conjuntos solución del sistema, de la inecuación $(x-5)(x+2) > 0$; de $(x-1)(x-7) < 0$; y de $(7x-1)(1-x) > 0$ respectivamente. Se tiene además que:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3.$$

Determinemos los conjuntos S_1, S_2 y S_3.

a) $(x-5)(x+2) > 0.$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-5)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

El conjunto solución $S_1 =]-\infty, -2[\cup]5, +\infty[$. (Ver Figura 3.30).



Figura 3.30:

b) $(x-1)(x-7) < 0.$

x	$-\infty$		1		7	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)(x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$

El conjunto solución es $S_2 =]1, 7[$ (Ver Figura 3.31).

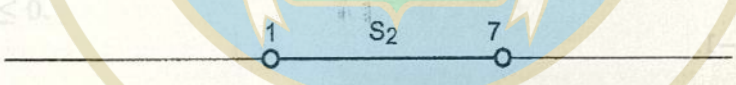


Figura 3.31:

c) $(7x-1)(1-x) > 0.$

x	$-\infty$		$1/7$		1		$+\infty$
$7x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(1-x)(7x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Luego $S_3 = \left]\frac{1}{7}, 1\right[$. (Ver Figura 3.32)

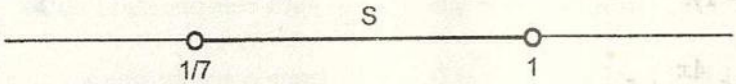


Figura 3.32:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

Consecuentemente, el conjunto solución del sistema dado es:

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cap S_2 \cap S_3 \\ &= \left(\left]-\infty,-2\right[\cup \left]5,+\infty\right[\cap \left]1,7\right[\cap \left]\frac{1}{7},1\right[\right) \\ &= \emptyset \qquad \text{(Ver figura 3.33)} \end{aligned}$$

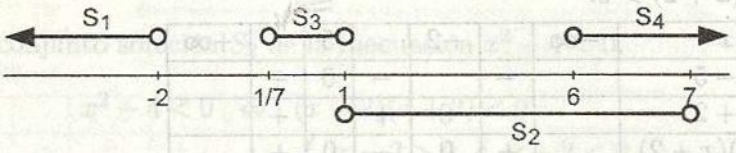


Figura 3.33:

Ejercicios

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $6x - 1 > 0$.
2. $4 - 5x \leq 9$.
3. $x - 1 > 2 + 5x$.
4. $x + \dfrac{1}{x} \leq 0$.
5. $x - \dfrac{1}{x+1} < -1$.
6. $\dfrac{x-2}{3} \geq \dfrac{1-2x}{2}$.
7. $2 < \dfrac{1}{x}$.
8. $\dfrac{1}{x} < 2$.
9. $\dfrac{1}{x-1} \geq 3$.
10. $\dfrac{1}{x-1} \leq 3$.
11. $5 \leq \dfrac{6}{x+1}(x-1)$.
12. $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{2x-1}{15} \leq \dfrac{4x}{3} + 5$.
13. $\dfrac{3(x+1)}{2} - \dfrac{2(x-3)}{5} + 2x - 1 > \dfrac{31x}{10} + 4$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

14. $\dfrac{2x-7}{5}+\dfrac{19x}{15}+\dfrac{12}{5}\leq\dfrac{5x+2}{3}+\dfrac{1}{3}$.

En los ejercicios 15 a 18, discutir y resolver en $\mathbb{R}$ las inecuaciones dadas, donde m es un parámetro real.

15. $(m-1)x\geq(m+1)$.

16. $(m+1)x-3m+\dfrac{3m+1}{2}x+\dfrac{7}{2}\geq 0$.

17. $\dfrac{m}{x-2}>\dfrac{3m-1}{x+1}$.

18. $\dfrac{mx+5}{1-m}\geq\dfrac{x-2}{3}$.

Resolver las siguientes inecuaciones:

19. $\dfrac{(3-2x)^3(x-5)}{(7x-1)(3x+4)^2}\geq 0$.

20. $\dfrac{(3-2x)^2(x-5)}{(7x-1)(3x+4)^2}\geq 0$.

21. $(3x-1)(1-2x)(3-5x)(6x+1)\geq 0$.

22. $(x^2-4x+3)^2-(x^2+5x-1)^2<0$.

23. $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x}{x-1}\leq\dfrac{1}{(x+3)(x-1)}$.

24. $(x-1)(x^2+1)\leq 0$.

25. $\dfrac{x+1}{x^2(x-2)}<0$.

26. $\dfrac{6}{(x-3)(4x+5)}>0$.

27. $\dfrac{x(x-1)}{(2x-1)(3-x)}\leq 0$.

28. $x(3x+7)(x+1)^3(x-8)^2<0$.

En los ejercicios 29 a 33, resolver los sistemas dados.

29. $\begin{cases}(x-3)(x+2)>0\\(x-1)(x-7)<0\\\dfrac{5(x-1)}{2}<\dfrac{3(x+1)}{2}+4\end{cases}$

30. $\begin{cases}x^2\leq 4\\5x+7>0\\\dfrac{x+1}{2}<2x\end{cases}$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA OMNIUM
FUNDADA EN 1620
QUITO

31. $\begin{cases} 3x - \frac{1}{3} > \frac{5x}{2} - 2 \\ x + \frac{7}{4} < \frac{x-1}{12} \\ x(x-1) \leq x(2-x) \end{cases}$

32. $\begin{cases} 10 \leq \frac{3x-1}{x+2} \\ \frac{3x-1}{x+2} < -4 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - 1 > mx + 2 \\ 2x + 1 < (m+1)x + (3m+1) \end{cases}$

donde m es un número real dado (parámetro).

34. Encontrar los valores reales de x tales que:

a) $0 < \frac{x-1}{x-3} < 2.$

b) $-2 < \frac{x-1}{x-3} < \frac{1}{2}.$

35. Sean a, b, c números reales tales que $a < b < c$, se definen: $A = (x-b)(x-c)$, $B = (x-c)(x-a)$, $C = (x-a)(x-b)$, y los sistemas.

$\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ C > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \\ C < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \\ C > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \\ C < 0 \end{cases}$

a) ¿Cuántos sistemas se pueden establecer?

b) Resolver todos esos sistemas.

36. Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que: $a < b$. Probar que:

$$\frac{2+b}{1+b} < \frac{2+a}{1+a}.$$

37. Si se tuviese que $1 = 0$, ¿Qué pasaría con el conjunto de los números reales?

38. Si a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y $d \neq 0$, demuestre que:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

39. Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $b > 0$, $d > 0$; demuestre que $\frac{(a+b)}{(b+d)}$ está comprendido entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

40. Demuestre que la ecuación $ax + b = 0$, $a \neq 0$, tiene solución única.

41. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b < 0$ y $c < d < 0$ probar que $ac > bd > 0$.

42. Sean $a, b \in \mathbb{R}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

a) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ y $b = 0$.

b) Si $a < b < 0$ entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.

c) Si $a^2 + b^2 = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

d) Si $a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

e) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $ac < bd$.

f) Si $a + a = 0$ entonces $a = 0$.

43. Pruebe que si $0 < b < a < c$ y $0 < d < e < f$, entonces

$$\frac{b}{f} < \frac{a}{e} < \frac{c}{d}.$$

44. ¿Para qué valores reales de x está definida la siguiente expresión?

$$\frac{x+3}{x+\frac{2}{x-1}}$$
$$x^2 - \frac{1}{x}$$

45. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, demuestre que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

46. Demuestre que la siguiente afirmación es falsa: Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x < \epsilon$ para todo número positivo ϵ, entonces $x = 0$.

3.2.3. Valor Absoluto

Definición 3.15 *Sea $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x que se nota por $|x|$ está definido por*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0 \\ -x, & si \quad x < 0 \end{cases}.$$

EJEMPLOS

1. $|3| = 3$.
2. $|-1| = -(-1) = 1$.
3. $|0| = 0$.
4. $|-2{,}5| = -(-2{,}5) = 2{,}5$.

Observaciones

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. En efecto, si $x \geq 0$ entonces $|x| = x \geq 0$ y si $x < 0$ entonces $|x| = -x > 0$. Además se tiene que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|x| > 0$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$. En efecto; ello es inmediato puesto que: $|x| = x$ o $|x| = -x$; en cuyo caso se sigue respectivamente que $-x \leq x \leq x$ o $-(-x) \leq x \leq -x$ según sea $x \geq 0$ o $x < 0$ respectivamente.

Teorema 3.17 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:*

a) $|x| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.

b) $|x| = |-x|$.

c) $|xy| = |x||y|$.

d) *Si $y \neq 0$; entonces* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

e) $|x + y| \leq |x| + |y|$. *(Desigualdad triangular).*

Demostración:

1. .

   a) $\Leftarrow$) Si $x = 0$ es inmediato que $|x| = 0$.
   $\Rightarrow$) Supongamos que $x \neq 0$, en ese caso, por la última parte de la primera observación se sigue que $|x| > 0$ lo cual contradice la hipótesis de que $|x| = 0$; consecuentemente debe tenerse que: $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.

   b) Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$ y como $-x \leq 0$ se sigue que $|-x| = -(-x) = x$, es decir, $|x| = |-x|$.
   Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ y como $-x > 0$ se tiene $|-x| = -x$, es decir que $|x| = |-x|$.
   Consecuentemente, $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$.

   c) Consideremos los siguientes casos:

   i. Si $x \geq 0$ y $y \geq 0$ entonces $xy \geq 0$ y en ese caso $|xy| = xy = |x||y|$.
   ii. Si $x \leq 0$ y $y \leq 0$ entonces $xy \geq 0$ y $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.
   iii. Si $x \geq 0$ y $y \leq 0$ entonces $xy \leq 0$. Luego $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.
   iv. Si $x \leq 0$ y $y \geq 0$ se tiene que $xy \leq 0$, en cuyo caso $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.

   De i), ii), iii) y iv) se concluye que: $|xy| = |x||y|$.

   d) Basta demostrar que si $y \neq 0$ entonces: $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$. En efecto, si $y > 0$ entonces $\frac{1}{y} = y^{-1} > 0$; luego:

$$\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{y} = \frac{1}{|y|}.$$

   Si $y < 0$ entonces $\frac{1}{y} = y^{-1} < 0$, luego:

$$\left|\frac{1}{y}\right| = -\frac{1}{y} = \frac{1}{-y} = \frac{1}{|y|}.$$

   Utilizando este resultado, la demostración de la propiedad iv) es inmediata. En efecto:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \frac{1}{y}\right| = |x|\left|\frac{1}{y}\right| = |x|\frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}. \blacksquare$$

Teorema 3.18 *Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Entonces:*

a) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

b) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ o } x \geq a$.

c) $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ o } x = -a$.

Demostración:

a) Probaremos que: $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$ y recíprocamente que: $-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a$. Así:

$\Rightarrow$) Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x \leq a$ y como $-a < 0$ se sigue que $-a \leq x \leq a$.

Si $x \leq 0$, $-x = |x| \leq a$; de donde se sigue que $-a \leq x$ y como $a > 0$ se tiene finalmente que $-a \leq x \leq a$.

Es decir que:

$$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a. \tag{3.11}$$

$\Leftarrow$) Si $0 \leq x \leq a$ entonces $|x| = x \leq a$; es decir que $|x| \leq a$.

Si $-a \leq x \leq 0$ entonces $|x| = -x \leq a$; es decir, $|x| \leq a$.

Hemos probado entonces que:

$$-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a. \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) se concluye que:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

b) Demostraremos la doble implicación:

$\Rightarrow$) Si $x > 0$, entonces $|x| = x \geq a$ y si $x < 0$ entonces $|x| = -x \geq a$, de donde se sigue que $x \leq -a$. Luego, $|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a \text{ o } x \geq a$.

$\Leftarrow$) Si $x \leq -a$, se tiene que $x \leq -a < 0$ puesto que $a > 0$. Luego, $|x| = -x \geq a$. (Pues $x \leq -a \Rightarrow -x \geq a$). Si $x \geq a > 0$ entonces $|x| = x \geq a$.

Como hemos probado la doble implicación, se concluye con el resultado.

c) $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ o } x = -a$.

$\Rightarrow$) Si $x > 0$ entonces $|x| = x = a$ y si $x < 0$ entonces $|x| = -x = a$, de donde, $x = -a$.

Es decir,

$$|x| = a \Rightarrow x = a \text{ o } x = -a.$$

$\Leftarrow$) $x = a > 0 \Rightarrow |x| = x = a$ o si $x = -a < 0$ entonces $|x| = -x = a$. Entonces hemos probado que:

$$(x = a \text{ o } x = -a) \Rightarrow |x| = a \quad \blacksquare$$

Observaciones

- Es obvio que si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces:
  - $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$.
  - $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ o } x > a$.

- El teorema 3.18 pone de manifiesto que el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq a$ es el intervalo $[-a, a]$ y el de la inecuación $|x| \geq a$ es el conjunto $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. (Ver Figura 3.34)

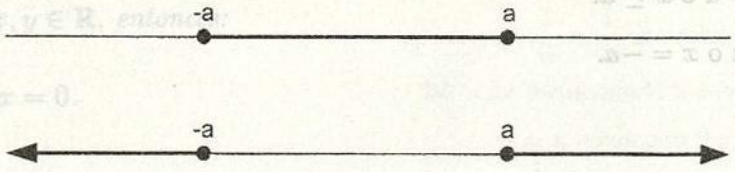


Figura 3.34:

Demostración de la desigualdad triangular.

Sabemos que:

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{3.13}$$

$$-|y| \leq y \leq |y| \tag{3.14}$$

Sumando miembro a miembro (3.13) y (3.14) se sigue que:

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

que es equivalente a

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

y por la parte a) del teorema 3.18 concluimos que:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

EJEMPLOS

1. Probar que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

   Solución.

$$\begin{aligned} |x+y+z| &= |(x+y)+z| \text{ (por el axioma } S_2) \\ &\leq |x+y| + |z| \text{ (Por la desigualdad triangular)} \\ &\leq (|x| + |y|) + |z| \text{ (Por la desigualdad triangular)} \\ &= |x| + |y| + |z| \end{aligned}$$

   Es decir que $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

2. Resolver la ecuación $|2x - 3| = 1$.

   Solución.

   Por la parte c) del teorema 3.18 se sigue que $2x - 3 = 1$ o $2x - 3 = -1$; es decir que $x = 2$ o $x = 1$.

   En consecuencia:

$$|2x - 3| = 1 \Longleftrightarrow x = 1 \vee x = 2;$$

   o lo que es lo mismo, el conjunto solución de la ecuación $|2x - 3| = 1$ es $S = \{1, 2\}$.

3. Hallar el conjunto solución de la inecuación $|3-5x| \leq 2$.

Solución.

Por el teorema 3.18 tenemos que:

$$\begin{aligned} |3-5x| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq 3-5x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -5 < -5x < -1 \\ &\Leftrightarrow 5 \geq 5x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 5x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{5}, 1\right] \end{aligned}$$

Es decir que el conjunto solución de la inecuación dada es $S = \left[\frac{1}{5}, 1\right]$. Cuya representación se indica en la Figura (3.35)



Figura 3.35:

4. Hallar el conjunto solución de la inecuación

$$|6x-4| \geq 3.$$

Solución.

Utilizando la parte b) del teorema 3.18 se sigue que:

$$\begin{aligned} |6x-4| \geq 3 &\Leftrightarrow [(6x-4 \leq -3) \vee (6x-4 \geq 3)] \\ &\Leftrightarrow [(6x \leq 1) \vee (6x \geq 7)] \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{6} \vee x \geq \frac{7}{6} \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{7}{6}, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución es

$$S = \left]-\infty, \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{7}{6}, +\infty\right[$$

y cuya representación gráfica se indica en la Figura 3.36.

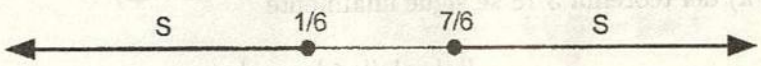


Figura 3.36:

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. ¿Existe solución de la ecuación

$$||x - b| + a| = 0?$$

Solución.

Si la respuesta fuese afirmativa, se tendría que: $|x - b| + a = 0$, de donde se sigue que: $|x - b| = -a < 0$; lo cual no es posible pues $|x - b| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.19 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:*

a) $\sqrt{x^2} = |x|$.

b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

c) $|x|^2 = x^2$.

Demostración:

a) .

i) Si $x \geq 0$ entonces $\sqrt{x^2} = x = |x|$.

ii) Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y $x^2 = (-x)^2$, luego:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|$$

De i) y ii) se concluye que $\sqrt{x^2} = |x|$

b) De $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$ se sigue que:

$$|x| - |y| \leq |x - y|. \tag{3.15}$$

Similarmente, de $|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|$ se sigue que:

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|. \tag{3.16}$$

De (3.16) se sigue que:

$$|x| - |y| \geq -|x - y|. \tag{3.17}$$

De (3.15) y (3.17) se deduce que:

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

y por la parte a) del teorema 3.18 se sigue finalmente

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

c) La demostración se propone como ejercicio. ■

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1826
QUITO

EJEMPLO

Resolver la inecuación

$$(2-3x)^2 < 1. \tag{3.18}$$

Solución.

Puesto que $\sqrt{(2-3x)^2} = |2-3x|$, extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros de (3.18) se sigue que: $|2-3x| < 1$. Se tiene entonces las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} |2-3x| < 1 &\Leftrightarrow -1 < 2-3x < 1 \\ &\Leftrightarrow -3 < -3x < -1 \\ &\Leftrightarrow 3 > 3x > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1 \\ &\Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{3}, 1\right[. \end{aligned}$$

El conjunto solución de la inecuación es $S = \left]\frac{1}{3}, 1\right[$. (Ver Figura 3.37)



Figura 3.37:

Resolución de la ecuación $x^2 = a$ y ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto

Ecuación	a	Conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$
	< 0	$\emptyset$
$x^2 = a$	$= 0$	$\{0\}$
	> 0	$\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$

EJEMPLOS

1. Hallar el conjunto solución de la ecuación $x^2 = 25$.

   Solución.

   $$\begin{aligned} x^2 = 25 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25} \\ &\Leftrightarrow |x| = 5 \\ &\Leftrightarrow x = 5 \text{ o } x = -5 \\ &\Leftrightarrow x \in \{-5, 5\}. \end{aligned}$$

2. Resolver la ecuación $(2x-3)^2 = 16$.

   Solución.

   $$\begin{aligned} (2x-3)^2 = 16 &\Leftrightarrow |2x-3| = 4 \\ &\Leftrightarrow 2x-3 = -4 \text{ o } 2x-3 = 4 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ o } x = \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA OMNIUM
FUNDADA EN 1620
QUITO

Luego, el conjunto solución de la ecuación dada es:

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right\}.$$

3. Resolver la inecuación

$$|x-1| - |x+2| < 2 \tag{3.19}$$

Solución.

Para resolver la inecuación dada debemos eliminar los valores absolutos mediante la determinación del signo de las expresiones que figuran dentro de los valores absolutos. Analicemos entonces las cuatro siguientes posibilidades:

a) Si $x-1 \geq 0$ y $x+2 \geq 0$ entonces $x \geq 1$ y $x \geq -2$; es decir que aquello se cumple si: $x \geq 1$. Además, $|x-1| = x-1$, $|x+2| = x+2$, luego:

$$\begin{aligned} |x-1| - |x+2| < 2 &\Leftrightarrow x - 1 - (x+2) < 2 \\ &\Leftrightarrow -3 < 2, \end{aligned}$$

que es siempre verdadero cualesquiera que sea $x \geq 1$. Luego la solución en este caso es $S_1 = [1, +\infty[$.

b) Si $x-1 \geq 0$ y $x+2 \leq 0$, entonces $x \geq 1$ y $x \leq -2$; pero no existen números reales que verifiquen a la vez las dos condiciones, luego la solución de (3.19) en este caso es $S_2 = \emptyset$.

c) Si $x-1 \leq 0$ y $x+2 \geq 0$ entonces $x \leq 1$ y $x \geq -2$, lo cual es equivalente a que $-2 \leq x \leq 1$. Como $|x-1| = -(x-1)$ y $|x+2| = x+2$, se sigue que:

$$\begin{aligned} |x-1| - |x+2| < 2 &\Leftrightarrow -(x-1) - (x+2) < 2 \\ &\Leftrightarrow -2x - 1 < 2 \\ &\Leftrightarrow 2x > -3 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[. \end{aligned}$$

Pero como x verifica además la condición $-2 \leq x \leq 1$, la solución parcial S_3 en este caso será:

$$\begin{aligned} S_3 &= [-2, 1] \cap \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[\\ &= \left]-\frac{3}{2}, 1\right]. \end{aligned}$$

d) Si $x-1 \leq 0$ y $x+2 \leq 0$ entonces $x \leq 1$ y $x \leq -2$; es decir que $x \leq -2$. Se tiene además que $|x-1| = -(x-1)$ y $|x+2| = -(x+2)$, con lo cual:

$$\begin{aligned} |x-1| - |x+2| < 2 &\Leftrightarrow -(x-1) - [-(x+2)] < 2 \\ &\Leftrightarrow -x + 1 + x + 2 < 2 \\ &\Leftrightarrow 3 < 2 \text{ (Absurdo)} \end{aligned}$$

Es decir que ningún número real x tal que $x \leq -2$ verifica la inecuación (3.19). Luego el conjunto solución para esta posibilidad es $S_4 = \emptyset$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR FUNDADA EN 1826 QUITO

En consecuencia, la solución S de la inecuación $|x-1|-|x+2|<2$ es:

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \\ &= [1,+\infty[\cup \emptyset \cup \left]-\frac{3}{2},1\right] \cup \emptyset \\ &= \left]-\frac{3}{2},1\right] \cup [1,+\infty[\\ &= \left]-\frac{3}{2},+\infty\right[\end{aligned}$$

cuya representación se indica en la Figura 3.38



Figura 3.38:

Otra forma de proceder (equivalente a la anterior) es la siguiente: En primer lugar determinamos los valores para los cuales se anulan las expresiones que se hallan dentro de los valores absolutos; es decir, en nuestro caso, tenemos que:

$$\begin{aligned} x-1=0 &\Rightarrow x=1 \\ x+2=0 &\Rightarrow x=-2. \end{aligned}$$

Luego ubicamos dichos valores en la recta real y ellos nos determinan 3 regiones: I, II y III.



Figura 3.39:

A continuación se procede a determinar el signo de $x-1$ y $x+2$ en cada una de las regiones. Así

a) $x \in \text{I} \Leftrightarrow x<-2$.
Pero $x<-2 \Rightarrow x+2<0$ y de $x<-2$ se sigue que $x-1<-3<0$.
Es decir que en la región I, tanto $x-1$ como $x-2$ son menores que cero.

b) $x \in \text{II} \Leftrightarrow -2<x<1$. Pero de $-2<x<1$ se sigue que:

$$-3<x-1<0 \text{ y } 0<x+2<3.$$

Es decir que en la región II, $x-1<0$ y $x+2>0$

c) $x \in \text{III} \Leftrightarrow x>1$. Si $x>1$ se sigue que

$$x+2>3>0 \text{ y } x-1>0.$$

Es decir que en la región III tanto $x+2$ como $x-1$ son positivos.
En resumen, tenemos:

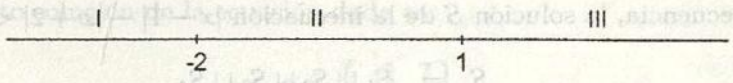


Figura 3.40:

$$\begin{array}{lll} x-1<0 & x-1<0 & x-1>0 \\ x+2<0 & x+2>0 & x+2>0 \end{array}$$

Luego, procedemos a resolver la inecuación $|x-1|-|x+2|<2$ en cada una de las regiones. Así:

En la región I.

$$\begin{aligned} |x-1|-|x+2|<2 &\Leftrightarrow -(x-1)-[-(x+2)]<2 \\ &\Leftrightarrow -x+1+x+2<2 \\ &\Leftrightarrow 3<2, \end{aligned}$$

lo cual es un absurdo. Ello significa que ningún número real de la primera región verifica la inecuación dada. Luego, la solución parcial S_1 es en este caso vacía ($S_1=\emptyset$).

En la región II.

$$\begin{aligned} |x-1|-|x+2|<2 &\Leftrightarrow -(x-1)-(x+2)<2 \\ &\Leftrightarrow -2x-1<2 \\ &\Leftrightarrow 2x>-3 \\ &\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

y como: $x\in \text{II} \Leftrightarrow -2<x<1$, se sigue que $-\frac{3}{2}<x<1$; es decir $x\in\left]-\frac{3}{2},1\right[=S_2$.

En la región III.

$$\begin{aligned} |x-1|-|x+2|<2 &\Leftrightarrow x-1-(x+2)<2 \\ &\Leftrightarrow -3<2, \end{aligned}$$

lo cual es verdadero. Ello significa que la inecuación dada se verifica para todo elemento de la tercera región. Es decir, $S_3=]1,+\infty[$.

Finalmente, veamos qué ocurre en el punto $x=1$.

$|1-1|-|1+2|<2 \Leftrightarrow -3<2$, que es verdad. Es decir que $x=1$ es parte de la solución.

Se concluye entonces que la solución de la inecuación: $|x-1|-|x+2|<2$ es

$$S=\left]-\frac{3}{2},+\infty\right[.$$

4. Hallar el conjunto solución de la inecuación $|3-2x|-|1-3x|>5$.

Solución.

Determinemos en primer lugar los valores en los cuales se anulan $3-2x$ y $1-3x$. Es decir:

$$\begin{aligned} 3-2x=0 &\Rightarrow x=\frac{3}{2}, \\ 1-3x=0 &\Rightarrow x=\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

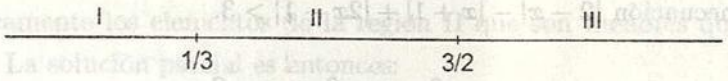


Figura 3.41:

Del siguiente cuadro:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2\pi$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$1-3x$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	

se sigue que:



Figura 3.42:

$$\begin{array}{lll} x-1<0 & x-1<0 & x-1>0 \\ x+2<0 & x+2>0 & x+2>0 \end{array}$$

Resolvamos entonces la inecuación dada en cada una de las regiones:

En la región I.

$$\begin{aligned} |3-2x|-|1-3x|>5 &\Leftrightarrow 3-2x-(1-3x)>5 \\ &\Leftrightarrow 3-2x-1+3x>5 \\ &\Leftrightarrow x>3, \end{aligned}$$

pero como los elementos de la primera región son menores que $1/3$, se sigue que ningún elemento de la primera región verifica la inecuación dada, luego la solución parcial es $S_1=\emptyset$.

En la región II.

$$\begin{aligned} |3-2x|-|1-3x|>5 &\Leftrightarrow (3-2x)-[-(1-3x)]>5 \\ &\Leftrightarrow 3-2x+1-3x>5 \\ &\Leftrightarrow -1>5x \\ &\Leftrightarrow x<-\frac{1}{5}, \end{aligned}$$

es decir que tampoco existen elementos de la región II que satisfagan la inecuación dada; es decir, $S_2=\emptyset$.

En la región III.

$$\begin{aligned} |3-2x|-|1-3x|>5 &\Leftrightarrow -(3-2x)-[-(1-3x)]>5 \\ &\Leftrightarrow -3+2x+1-3x>5 \\ &\Leftrightarrow x<-7 \end{aligned}$$

y como ningún elemento de la región III verifica esta condición se sigue que la solución parcial $S_3=\emptyset$.

Puesto que tampoco se satisface la inecuación dada para $x=1/3$ y para $x=3/2$ se concluye finalmente que la solución de la inecuación $|3-2x|-|1-3x|>5$ es el conjunto vacío.

5. Resolver la inecuación $|2-x|-|x+1|+|2x-1|>3$.

Solución.

$$2-x=0 \Rightarrow x=2,$$
$$x+1=0 \Rightarrow x=-1,$$
$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

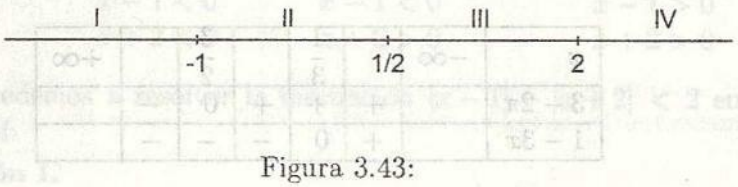


Figura 3.43:

Considerando el cuadro:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

se tiene el signo de $2-x$, $x+1$ y $2x-1$ en cada una de las cuatro regiones. Así:

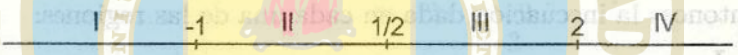


Figura 3.44:

$2-x>0$	$2-x>0$	$2-x>0$	$2-x<0$
$x+1<0$	$x+1>0$	$x+1>0$	$x+1>0$
$2x-1<0$	$2x-1<0$	$2x-1>0$	$2x-1>0$

Procedemos a resolver la inecuación dada en cada región:

En la región I.

$$\begin{aligned} |2-x|-|x+1|+|2x-1|>3 &\Leftrightarrow 2-x+x+1-2x+1>3 \\ &\Leftrightarrow 2x<1 \\ &\Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \end{aligned}$$

y como todos los elementos de la primera región son menores que -1, se sigue que la solución en este caso es:

$$S_1=\,]-\infty,-1[$$

En la región II.

$$\begin{aligned} |2-x|-|x+1|+|2x-1|>3 &\Leftrightarrow 2-x-x-1-2x+1>3 \\ &\Leftrightarrow -1>4x \\ &\Leftrightarrow x<-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

es decir que únicamente los elementos de la región II que son menores que $-\frac{1}{4}$ verifican la inecuación dada. La solución parcial es entonces:

$$S_2 = \left]-1, -\frac{1}{4}\right[.$$

En la región III.

$$\begin{aligned} |2-x| - |x+1| + |2x-1| > 3 &\Leftrightarrow 2 - x - x - 1 + 2x - 1 > 3 \\ &\Leftrightarrow 0 > 3 \text{ (absurdo)} \end{aligned}$$

Luego, ningún elemento de la región III satisface la inecuación dada; es decir que:

$$S_3 = \emptyset.$$

En la región IV.

$$\begin{aligned} |2-x| - |x+1| + |2x-1| > 3 &\Leftrightarrow -2 + x - x - 1 + 2x - 1 > 3 \\ &\Leftrightarrow 2x > 7 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{7}{2} \end{aligned}$$

y como x verifica además la condición $x \geq 2$ se sigue que:

$$S_4 = [2, +\infty[\cap \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[= \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[.$$

Como los puntos $x = \frac{1}{2}$ y $x = 2$ no verifican la inecuación dada y en cambio si se satisface para $x = -1$, se concluye que la solución de la inecuación $|2-x| - |x+1| + |2x-1| > 3$ es el conjunto:

$$S = \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{7}{2}, +\infty\right[$$

cuya representación gráfica es (Ver Figura 3.45):



Figura 3.45:

Ejercicios

1. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $z > 0$. Probar que:

   a) $|x-y| \leq |x| + |y|$.

   b) $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$.

   c) $|x-y| \leq z \Leftrightarrow y - z \leq x \leq y + z$.

   d) $xy \leq |x|\,|y|$.

2. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En cada caso razonar la decisión:

   a) $x < -7$ implica que $|x| > 7$.

   b) No existe un número real x para el que $|x-1| = |x-2|$.

   c) Para todo $x > 0$ existe un $y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.

   d) $|x-y| = |y-x|$.

3. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $|5 - x^{-1}| < 1$.
b) $|x^2 - 4| \leq 1$.
c) $\dfrac{2}{|x|} < 3$.
d) $-\dfrac{1}{|x|} < 1$.
e) $|x - 4| < -2$.
f) $\dfrac{10}{|-x|} > 3$.
g) $\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right| < 4$.
h) $2 < |x| < 3$.
i) $1 < \left|\dfrac{x}{1-x}\right| < 3$.
j) $2 < |x - 1| < 5$.
k) $||x| - 1| \leq 5$.
l) $||x| + 1| \leq 5$.
m) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$.
n) $|2x - 3| \leq 2$.
ñ) $\sqrt{(2x-1)^2} < 2$.
o) $|7 - 5x| > 3$.
p) $|3 - 2x| \geq x - 6$.
q) $|3 - 2x| \geq |x - 6|$.
r) $|x + |x|| \leq 3$.
s) $|x + |-x|| \leq 2$.
t) $|x - 2|x + 1|| \leq 3$.
u) $-3 \leq |x + |x|| \leq 2$.
v) $|x - 4| < \dfrac{1}{100}$.
w) $|2x + 5| + 6 \leq 10$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\left|3 - \dfrac{x}{2}\right| = \dfrac{x}{3} + 6$.
b) $|2x + 5|\,|-5x + 2| = 2x + 5$.
c) $\dfrac{|2x+5|}{|-3x+1|} - 7 = 0$.
d) $\dfrac{3x-4}{|x-1|} = 3$.
e) $(2x - \sqrt{5})^2 = 25$.
f) $|x^2 - 9| = 2x + 6$.
g) $|x - 1| + |x - 3| = 1$.
h) $|3x| + 5 = x - 1$.
i) $|3x + 1| + |x - 3| = 16$.

5. Se considera dos reales no nulos x e y. Demostrar las siguientes desigualdades:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ y } \left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2.$$

6. Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $|3 - 2x| \geq |x - 6|$.
b) $|x - 1| + |x + 1| < 1$.
c) $|x + 2| - 3 + |2x + 8| \leq 10$.
d) $|2x - 5| + |x + 6| > 15$.
e) $|-x + 1| - |2x + 3| < 5$.
f) $\dfrac{|3x - 2| - |6 - x|}{1 - |x - 1|} < 2$.
g) $\dfrac{|x+1| + ||x| + 3|}{|x-1| - 5} \geq 2$.
h) $\dfrac{|x+1| - ||x| + 3|}{|x-1| - 5} \geq 2$.
i) $\dfrac{||x| + |-x||}{1 - |x-1|} \leq 0$.

7. Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b < c$, estudiar la ecuación:

$$|x - a| + |x - b| = |x - c|.$$

8. Demostrar que si $|x - x_0| < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $|y - y_0| < \dfrac{\epsilon}{2}$, entonces:

$$|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \epsilon$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR ESTO
FUNDADA EN 1826
QUITO

Inecuaciones Cuadráticas

Definición 3.16 *Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Se llama inecuación de segundo grado o inecuación cuadrática a una incógnita, toda inecuación de cualesquiera de los siguientes tipos:*

- $ax^2 + bx + c \geq 0$.
- $ax^2 + bx + c > 0$.
- $ax^2 + bx + c \leq 0$.
- $ax^2 + bx + c < 0$.

Para resolver dichas inecuaciones, estudiemos antes el signo del trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

El número $b^2 - 4ac$ se denomina discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y se nota generalmente con el símbolo $\triangle$; es decir, $\triangle = b^2 - 4ac$. Estudiemos ahora los siguientes casos:

a) $\triangle = b^2 - 4ac < 0$.

Se tiene que para todo real x : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \quad y \quad -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$.

Resulta entonces que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] > 0.$$

Consecuentemente $ax^2 + bx + c$ toma el signo de a; es decir que:

Si $a > 0$ entonces $ax^2 + bx + c > 0$ para todo número real x.

Si $a < 0$ entonces $ax^2 + bx + c < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) $\triangle = b^2 - 4ac = 0$.

En este caso se tiene que:

$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ y como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, resulta que para todo $x \in \mathbb{R}$ distinto de $-\frac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c$ es del signo de a.

c) $\triangle = b^2 - 4ac > 0$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right). \end{aligned}$$

Llamando $r_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $r_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ se sigue que

$$ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2).$$

Estudiemos ahora el signo de $a(x-r_1)(x-r_2)$ con ayuda del cuadro siguiente donde x_1 y x_2 llamamos a la raíz menor y a la mayor respectivamente:

x		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x-x_1)(x-x_2)$	signo de a	0	signo de $-a$	0	signo de a	

Es decir que el real $(x-x_1)(x-x_2)$ es negativo cuando x pertenece al intervalo $]x_1,x_2[$ y positivo cuando x pertenece al conjunto $]-\infty,x_1[\cup]x_2,+\infty[$. Además:

- ax^2+bx+c es del signo contrario al signo de a cuando x pertenece al intervalo $]x_1,x_2[$.
- ax^2+bx+c es del signo de a cuando x pertenece al conjunto $]-\infty,x_1[\cup]x_2,+\infty[$.
- ax^2+bx+c es nulo cuando x pertenece al conjunto $\{x_1,x_2\}$.

Resolución de la Inecuación Cuadrática: $ax^2+bx+c>0, a\neq 0$.

De lo antes expuesto se deducen los siguientes resultados:

CUADRO 1

$\triangle=b^2-4ac$	a	Conjunto solución
<0	>0	$S=\mathbb{R}$
	<0	$S=\emptyset$
$=0$	>0	$S=\mathbb{R}:\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
	<0	$S=\emptyset$
>0	>0	$S=]-\infty,x_1[\cup]x_2+\infty[$
	<0	$S=]x_1,x_2[$

Observación. Conocida la solución de $ax^2 + bx + c > 0$ se obtiene inmediatamente la solución de la inecuación $ax^2 + bx + c < 0$, como se lo resume en el siguiente cuadro:

CUADRO 2

$\triangle = b^2 - 4ac$	a	Conjunto solución
< 0	> 0	$S = \emptyset$
	< 0	$S = \mathbb{R}$
$= 0$	> 0	$S = \emptyset$
	< 0	$S = \mathbb{R} : \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
> 0	> 0	$S =]x_1, x_2[$
	< 0	$S =]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$

Diagrama de Flujo de la Resolución de la Inecuación $ax^2 + bx + c \leq 0$ (Ver Figura 3.46)

EJEMPLOS

1. Resolver la inecuación $2x^2 + x - 1 > 0$.

   Solución.

   En este caso tenemos que $\triangle = b^2 - 4ac = 1 - 4(2)(-1) = 9 > 0$ y por lo expuesto en el cuadro 1 se sigue que la solución de la inecuación es el conjunto $S =]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

   Determinemos x_1 y x_2:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} = \frac{-1-3}{4} = -1$$
$$x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}.$$

DIAGRAMA

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

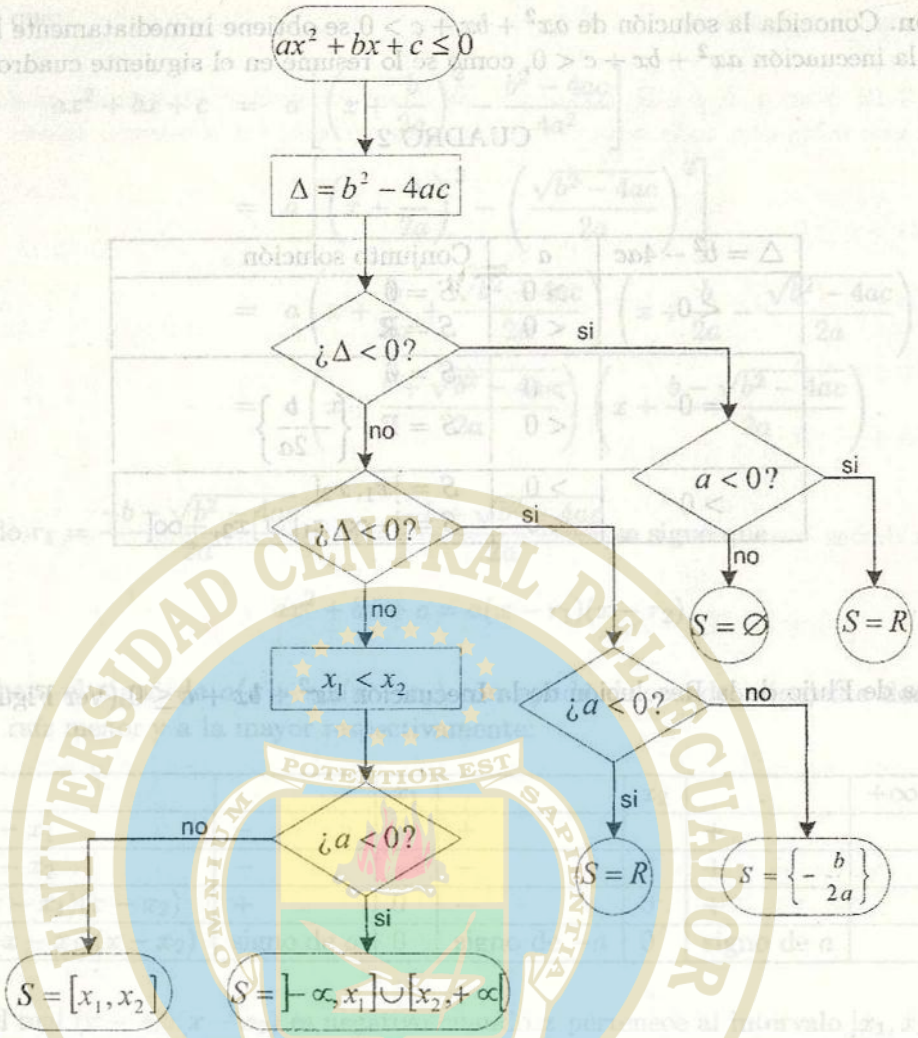


Figura 3.46:

En consecuencia, la solución de la inecuación es

$$S=]-\infty,-1[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$$

2. Hallar el conjunto solución de la inecuación: $2x^2+x-15<0$.

Solución.

$\triangle=b^2-4ac=1-4(2)(-15)=121>0$. Por lo expuesto en el cuadro 2 y considerando el hecho de que $a=2>0$ se sigue que la solución es: $S=]x_1,x_2[$ donde:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ y } x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

En este caso:

$$x_1=\frac{-1-11}{4}=-3 \text{ y } x_2=\frac{-1+11}{4}=\frac{5}{2}.$$

Consecuentemente, el conjunto solución es: $S = \left]-3, \frac{5}{2}\right[$. (Ver Figura 3.47)

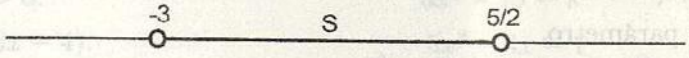


Figura 3.47:

3. Hallar el conjunto solución de la inecuación: $-2x^2 + 5x + 7 \geq 0$.

Solución.

$\triangle = b^2 - 4ac = 25 - 4(-2)(7) = 81 > 0$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{-5-9}{-4} = \frac{7}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5+9}{-4} = -1$$

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+5x+7$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Del cuadro se sigue que la solución de la inecuación propuesta está dada por $S = [-1, 7/2]$. (Ver Figura 3.48)

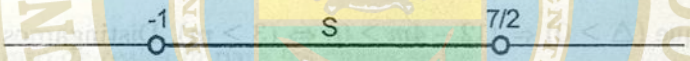


Figura 3.48:

4. Resolver la inecuación $x - 1 \geq \frac{3}{x+1}$.

Solución.

$$x - 1 \geq \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow x - 1 - \frac{3}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x+1} \geq 0.$$

Estudiemos ahora el signo del número real $(x^2-4)/(x+1)$ por medio del siguiente cuadro:

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-4}{x+1}$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

Consecuentemente el conjunto solución de la inecuación:

$$x - 1 \geq \frac{3}{x+1}$$

es el conjunto $S = [-2, -1[\cup [2, +\infty[$.

5. Resolver el sistema de inecuaciones:

$$(I)\begin{cases} -3x^2+5x-7<0 \\ x^2-4x+(m+1)>0 \end{cases}$$

donde m es un parámetro.

Solución.

Designemos por S_1, S_2 y S los conjuntos solución de $-3x^2+5x-7<0$, de $x^2-4x+(m+1)>0$ y de (I) respectivamente. Se tiene entonces que:

$$S = S_1 \cap S_2.$$

a) Estudiemos ahora la inecuación $-3x^2+5x-7<0$.

$$\Delta = b^2-4ac = 25-4(-3)(-7) = -59 < 0.$$

Como $\Delta<0$, $-3x^2+5x-7$ es del mismo signo que $a=-3<0$, es decir:

$$\forall x\in\mathbb{R}, -3x^2+5x-7<0.$$

En consecuencia; $S_1=\mathbb{R}$.

b) Pasemos a estudiar ahora la inecuación $x^2-4x+(m+1)>0$

El discriminante de la ecuación $x^2-4x+(m+1)=0$ es:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac=(-4)^2-4(1)(m+1)\\ &= 16-4m-4\\ &= 12-4m.\end{aligned}$$

Tenemos que $(\Delta\geq 0)\Leftrightarrow(12-4m\geq 0)\Leftrightarrow(3\geq m)$. Distingamos entonces tres casos:

i. $m>3$. En cuyo caso se tiene que $\Delta<0$ y como el coeficiente de x^2 es positivo, resulta que para todo $x\in\mathbb{R}$, $x^2-4x+(m+1)>0$. El conjunto S_2 de soluciones de la inecuación es $S_2=\mathbb{R}$.

ii. Si $m=3$ entonces $\Delta=0$. Luego, $x^2-4x+(m+1)>0\Leftrightarrow x^2-4x+4>0\Leftrightarrow (x-2)^2>0$. El conjunto solución S_2 de la inecuación es entonces $S_2=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

c) Si $m<3$ tenemos que $\Delta>0$; consecuentemente la ecuación $x^2-4x+(m+1)=0$ admite dos raíces reales distintas x_1 y x_2. Supongamos que $x_1<x_2$. Como el coeficiente de x^2 es positivo resulta que:

i. Para todo real x del intervalo $]x_1,x_2[$, $x^2-4x+(m+1)<0$.

ii. Para todo $x\in\mathbb{R}\setminus[x_1,x_2]$, $x^2-4x+(m+1)>0$; luego el conjunto S_2 de soluciones de la inecuación es $S_2=\mathbb{R}\setminus[x_1,x_2]$.

Estudio del sistema (I)

De los resultados anteriores, deducimos que:

- Si $m>3$ entonces $S=S_1\cap S_2=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$.

  Si $m=3$ entonces $S=S_1\cap S_2=\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}\setminus\{2\})=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

  Si $m<3$ entonces $S=S_1\cap S_2=\mathbb{R}\setminus[x_1,x_2]$.

Ejercicios

1. Resolver las siguientes inecuaciones

a) $2x^2 + x - 3 < 0$.

b) $-2x^2 + 5x - 2 > 0$.

c) $3x^2 - 5x - 2 > 0$.

d) $4(x-1) \geq x(3x-4)$.

e) $x - 1 \geq \dfrac{3}{x+1}$.

f) $x - \dfrac{1}{x} > 1$.

g) $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 3x + 1} \leq 1$.

h) $\dfrac{5x^2 + 16}{x+2} < 7$.

i) $-x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} < 0$.

j) $x^2 - 3x - 4 > 0$.

k) $x^2 - x + 1 > 0$.

l) $x^2 - 2x(1+\sqrt{2}) + 3 + 2\sqrt{2} > 0$.

m) $0 < x^2 - x - 6 < 6$.

n) $0 < -2x^2 + 7x - 5 < 9$.

ñ) $(x^2 - 7x + 6)(-2x^2 + 5x - 3) > 0$.

o) $\dfrac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 10 - 7} > 0$.

p) $\dfrac{5x^2 - 4x - 1}{4x^2 + 12x - 7} < 0$.

q) $4x^2 + 4x + 5 < 3x^2 + 3x + 3$.

r) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x+1} \geq \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x-1}$.

s) $\dfrac{x^2(2-\sqrt{3})x - 2\sqrt{3}}{2x^2\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})x - 1} > 0$.

t) $|x^2 - 3x + 2| + |x + 9| \leq 5$.

u) $|x^2 - 3| \leq 3$.

v) $||x^2 - 1| - 5| < 9$.

w) $|x^2 - 2x - 3| - 1 \leq 2$.

x) $||x^2 - 5x + 4| - |x - 4|| > 1$.

y) $|x^4 - 5x^2 + 4| < 2$.

aa. $||x^4 - 5x^2 + 4| - |x^2 - 4|| \geq 1$.

bb. $|x^4 - 2x^2 - 3 + |x^2 - 1|| \leq 1$.

2. Determinar el conjunto de reales m para los cuales se tiene:

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ mx^2 + 2x + m < 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ (2m+3)x^2 + 4x + 2m + 6 > 0$.

3. Resolver en $\mathbb{R}$ los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 18 < 0 \\ -x^2 - 8x + 9 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x^2 + 5x - 1 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} |x^2 + x - 2| < 2 - x \\ 2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -4x^2 + 5x - 1 < 0 \\ |3x - 2| < 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x^2 + 7x + 3 < 0 \\ 7x^2 - 13x - 2 < 0 \end{cases}$

4. Sea m un número real. Resolver en $\mathbb{R}$ los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^3 - 1 < 0 \\ x^2 - mx + \dfrac{m^2}{4} > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2 + 4x + m^2 - 4 < 0 \\ 6x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x^2 + 4x + m^2 - 4 > 0 \\ 6x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 + mx + \dfrac{m^2}{4} > 0 \end{cases}$

5. Para qué valores de λ es:

a) $x^2 - \lambda x + 3 < 0$
b) $|2x^2 - 5x + \lambda| > 5$
c) $|\lambda x^2 + 2x + 1| \leq 4$
d) $|4 - \lambda x - x^2| \leq 8$
e) $x^2 + 3x + \lambda < 0$

6. Probar que:

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1.$

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x^2}{1+x^4} \leq \dfrac{1}{2}.$

7. Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{(3-2x)^3(x-5)^5}{(7x-1)(3x+4)^2} \geq 0.$
b) $\dfrac{(3-2x)^3(x-5)^5}{(7x-1)(3x+4)^2} \geq 0.$
c) $(9x^2-25) - 3(3x-5) + x(3x-5) \leq 0.$
d) $(x^2-4x+3)^2 - (x^2+5x-1)^2 < 0.$

8. Discutir y resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones; en las cuales m es parámetro.

a) $(m^2+m)x \leq m^2 - 1.$
b) $(m+1)x - 3m + \dfrac{3m+1}{2}x + \dfrac{7}{2} \geq 0.$

9. Los parámetros reales a y b verifican la condición $0 < a < b$, demostrar que la ecuación:

$$6(x-a)(x-b) + 3a(x-b) + 2b(x-a) = 0$$

tiene siempre raíces distintas. Ubicarlas respecto a los números 0, a y b.

3.2.4. Subconjuntos Importantes de $\mathbb{R}$

Por el axioma de cuerpo P_3 de los números reales, está garantizado que $1 \in \mathbb{R}$, podemos entonces construir los números:

$$\begin{array}{l} 1+1 \\ 1+1+1 \\ 1+1+1+1 \quad \ldots, \text{etc, etc.} \end{array}$$

que los notaremos respectivamente por 2, 3, 4, etc.; es decir que:

$$\begin{aligned} 1+1 &= 2 \\ 2+1 &= 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Los números 1, 2, 3, 4, etc, obtenidos en la forma antes indicada son todos positivos y se denominan *enteros positivos*. Pero esta descripción de los números enteros positivos no es muy precisa, razón por la cual se hace imprescindible dar una definición más exacta y para ello introduciremos la definición de conjunto inductivo.

Conjunto Inductivo

Definición 3.17 *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice que es inductivo si:*

a) $1 \in A$

b) *Si* $x \in A$ *entonces* $(x+1) \in A$.

Ejemplos de conjuntos inductivos son $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, etc.

Ejercicio

Probar que la intersección de conjuntos inductivos es un conjunto inductivo.

Definición 3.18 *Un entero positivo es un número real que pertenece a todo conjunto inductivo. Al conjunto de los enteros positivos lo notaremos por $\mathbb{Z}^+$.*
Es decir que si denotamos por S a la familia de todos los conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{Z}^+ = \bigcap_{A \in S} A, \text{ donde } S = \{A : A \subset \mathbb{R} \text{ y } A \text{ es inductivo}\}$$

Además, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

El conjunto $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ se denomina el conjunto de los números naturales y lo notaremos por $\mathbb{N}$; es decir que:

$$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Introduciremos además el conjunto de los enteros negativos, como el conjunto $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{Z}^+\} = \{-1, -2, -3, -4, \ldots,\}$; es decir que $\mathbb{Z}^-$ es el conjunto de los opuestos aditivos de los elementos de $\mathbb{Z}^+$.

Finalmente, se denomina conjunto de los números enteros y lo notaremos por $\mathbb{Z}$ al conjunto:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \\ &= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}. \end{aligned}$$

Veamos a continuación algunas propiedades de $\mathbb{Z}^+$.

Teorema 3.20 *(Principio de inducción).- Si $A \subset \mathbb{Z}^+$ y A es inductivo entonces $A = \mathbb{Z}^+$.*

Demostración.

Si A es inductivo entonces $\mathbb{Z}^+ \subset A$ (Por definición de $\mathbb{Z}^+$) y como por hipótesis $A \subset \mathbb{Z}^+$ entonces se sigue que $A = \mathbb{Z}^+$. ■

Teorema 3.21 *Si $n \in \mathbb{Z}^+$ y $n \neq 1$ entonces $(n-1) \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Se propone como ejercicio.

Teorema 3.22 *Si $m, n \in \mathbb{Z}^+$, entonces*

a) $(m+n) \in \mathbb{Z}^+$

b) $mn \in \mathbb{Z}^+$

c) $m \geq 1$

d) *Si* $m > n$ *entonces* $(m-n) \in \mathbb{Z}^+$

Demostración.

a) Supongamos que $m \in \mathbb{Z}^+$ y sea $A = \{r : r \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } (m+r) \in \mathbb{Z}^+\}$. Es claro que basta probar que $A = \mathbb{Z}^+$y como $A \subset \mathbb{Z}^+$, es suficiente, por el principio de inducción, demostrar que A es inductivo.

En efecto, como $m \in \mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{Z}^+$ es inductivo, $(m+1) \in \mathbb{Z}^+$, luego $1 \in A$. Si $r \in A$ entonces $(m+r) \in \mathbb{Z}^+$, luego $m+(r+1) = [(m+r)+1] \in \mathbb{Z}^+$ y por lo tanto $(r+1) \in A$.■

Se propone como ejercicio demostrar las partes b), c) y d).

Teorema 3.23 *Sea* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $x \in \mathbb{R}$. *Si* $n < x < n+1$ *entonces* $x \notin \mathbb{Z}^+$.

Demostración.

La demostración la realizaremos por reducción al absurdo. Supongamos entonces que $x \in \mathbb{Z}^+$. Por la parte d) del teorema anterior se sigue que $x - n \in \mathbb{Z}^+$ y por la parte c) del mismo teorema se sigue que $x - n \geq 1$; es decir, $x \geq n+1$, lo cual contradice la hipótesis de que $x < n+1$. Consecuentemente nuestra suposición de que $x \in \mathbb{Z}^+$ es falsa y lo correcto es que $x \notin \mathbb{Z}^+$. ■

Teorema 3.24 *(Principio de buena ordenación). Si A es un subconjunto de* $\mathbb{Z}^+$, *no vacío, entonces A contiene un elemento que es el menor o lo que es lo mismo, A contiene un primer elemento.*

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$, debemos probar que existe un elemento n_0 de A tal que $\forall p \in A$, $n_0 \leq p$.

Supongamos lo contrario; es decir que A no tiene un primer elemento. Entonces, $1 \notin A$, porque de ser así, 1 sería el elemento menor o mínimo de A.

Sea $H = \{n \in \mathbb{Z}^+ : \forall p \in A, n < p\}$ y mostremos que H es un conjunto inductivo.

En efecto, de la definición de H se tiene que $1 \in H$, pues $\forall p \in A$, $1 < p$.

Sea $k \in H$, entonces $\forall p \in A$, $k < p$. Probemos que $(k+1) \in H$.

Si $(k+1) \notin H$, existe $p_1 \in A$ tal que $p_1 \leq k+1$ y como A no tiene primer elemento, existe $p_2 \in A$ tal que $p_2 < p_1$ y por tanto $p_2 < k+1$; de modo que $p_2 \leq k$, en contradicción con el hecho de que $\forall p \in A$, $k < p$. Por consiguiente $(k+1) \in H$, luego H es un conjunto inductivo y por el principio de inducción se concluye que $H = \mathbb{Z}^+$.

Por hipótesis A es no vacío, entonces existe $p \in A$ tal que $p \in H$ y de la definición de H resulta que $p < p$, que es un absurdo.

En resumen, suponer que A no posee un primer elemento nos conduce a un absurdo, luego lo correcto es que A posee elemento mínimo o primer elemento. ■

Algo relacionado con los números enteros es el problema de la divisibilidad.

Definición 3.19 *Sean* $a, b \in \mathbb{Z}$ *se dice que a es divisible por b,* $b \neq 0$, *si existe un entero n tal que* $a = bn$.

Observación.- Cero es divisible por cualquier número distinto de cero.

Definición 3.20 *Un número entero se dice par si es divisible por 2 y se dice impar si no es par.*

Observaciones

- Si $a \in \mathbb{Z}$ es par entonces a es de la forma $2n$ para algún entero n.
- Si $a \in \mathbb{Z}$ es impar entonces a es de la forma $2n+1$ para algún entero n.
- "a es divisible por b" $\Leftrightarrow$ "a es múltiplo de b" $\Leftrightarrow$ "b es factor de a".
- Hemos demostrado antes que si $a \in \mathbb{Z}$, entonces
  - a^2 es par $\Leftrightarrow$ a es par.
  - a^2 es impar $\Leftrightarrow$ a es impar.

Números Racionales.

Se denomina conjunto de los números racionales al conjunto notado por $\mathbb{Q}$ y definido de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

Observación.- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Definición 3.21 *Sean a/b y c/d números racionales. Se define la suma y multiplicación de dos números racionales de la siguiente manera:*

a) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

b) $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{db}$

Observaciones

- Hemos demostrado que:

$$\forall x; y \in \mathbb{R}, x < y \Leftrightarrow x < \frac{x+y}{2} < y.$$

  Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; si $x, y \in \mathbb{Q}$ resulta que $(x+y)/2 \in \mathbb{Q}$; es decir que entre dos números racionales siempre existe un número racional; en realidad, existen infinitos números racionales. Resulta entonces que si representamos los números reales como puntos de una recta, en base a esta propiedad de los números racionales podríamos pensar que los números racionales llenan todos los puntos de la recta real, pero veremos que aquello no ocurre; que existen otros números que no son racionales; es decir, que no se pueden representar bajo la forma a/b, con a y b números enteros.

- Se puede ver fácilmente que en $\mathbb{Q}$ se satisfacen todos los axiomas de cuerpo y de orden; con lo cual se tiene que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado.

Definición 3.22 *Un número racional a/b se dice irreducible si a y b no tienen factores comunes diferentes de 1 y -1.*

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST QUAM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Teorema 3.25 *No existe un número racional r tal que $r^2 = 2$.*

Demostración. La demostración la realizaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$. Como $r \in \mathbb{Q}$, r es de la forma $r = a/b$ con a, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Supondremos además que a/b es irreducible. Se tiene entonces que: $r^2 = (a/b)^2 = 2$, de donde $a^2 = 2b^2$, lo que implica a su vez que a^2 es par y en consecuencia que a es par; es decir que a es de la forma $a = 2k$ para algún entero k. Pero si $a = 2k$; de la igualdad $a^2 = 2b^2$ se sigue que $(2k)^2 = 2b^2$; luego $b^2 = 2k^2$, es decir que b^2 es par, consecuentemente b es par.

Resulta entonces que tanto a como b son números pares; es decir, divisibles por 2; lo cual contradice la hipótesis de que a/b es irreducible. Esta contradicción surge por haber supuesto que existe un número racional r tal que $r^2 = 2$; por lo tanto esta suposición es falsa y lo correcto es que no existe un número racional r tal que $r^2 = 2$. ■

Observación. El número real b tal que $b^2 = 2$ se nota $\sqrt{2}$.

Los números reales que no son racionales se denominan *irracionales*, entre estos tenemos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e, $\sqrt[3]{2}$, etc.

Ejercicios

1. Demuestre o refute:
   a) La suma de dos números irracionales es un número irracional.
   b) El producto de dos números irracionales es un número irracional.
   c) La suma de un número racional con un número irracional es un número irracional.
2. Demuestre que $1 + \sqrt{2}$ es un número irracional.
3. Demuestre que $\sqrt{3}$ es un número irracional.
4. Sabiendo que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$ son números irracionales, demuestre que $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ es un número irracional.
5. Si $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, y si y es un número irracional, probar que $(x + y)$ y xy son números irracionales.
6. Demuestre que entre dos números racionales existe un número irracional.
7. Pruebe que $(\sqrt{2}/n) \notin \mathbb{Q}$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Axioma de Completez

Definiciones previas. Conjuntos Acotados

Definición 3.23 *Sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Un número $\beta \in \mathbb{R}$ se dice una cota superior de C, si $\forall x \in C$, $\beta \geq x$.*

C C

Figura 3.49:

Cualquier número real c que verifique $c \geq \beta$ es también una cota superior de C, pues este verifica que $\forall x \in C,\ c \geq x$.

El conjunto $A = \{y \in \mathbb{R} : y \geq x,\ \forall x \in C\}$ se llama conjunto de las cotas superiores de C.

Definición 3.24 *Sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y A el conjunto de cotas superiores de C, si $A \neq \emptyset$, C se dice acotado superiormente.*

Si el conjunto de las cotas superiores es vacío significa que C no posee cotas superiores, en tal caso se dice que C no es acotado superiormente, en otros términos, un conjunto C sin cotas superiores se dice no acotado superiormente.

Observaciones

- En forma semejante se definen los conjuntos acotados inferiormente y el conjunto de cotas inferiores. Así, sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$; C es acotado inferiormente si $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in C,\ t \leq x$. El conjunto de cotas inferiores de C es $A = \{t \in \mathbb{R} : t \leq x, \forall x \in C\}$.
- Un conjunto C que es acotado superior e inferiormente se dice acotado. (Ver Figura 3.49)

EJEMPLOS

1. El conjunto $C = \{-3, 1/2, 4, 2\}$ es acotado, pues es acotado superior e inferiormente.
2. Sea $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 2\} = [0, 2[$; C es acotado superiormente, pues cualquier $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \geq 2$ es una cota superior de C.

   El conjunto de las cotas superiores de C es $A = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\} = [2, +\infty[$.

   Observamos además que C es acotado inferiormente y que el conjunto de cotas inferiores es el intervalo $]-\infty, 0]$.
3. Sea $C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} =]-\infty, 1]$, C es un conjunto acotado superiormente pero no inferiormente, una cota superior de C es 1. El conjunto de cotas superiores de C es el intervalo $[1, +\infty[$. (Ver Figura 3.50).



Figura 3.50:

4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$; los intervalos $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ son conjuntos acotados.
5. Sea $a \in \mathbb{R}$, los intervalos de la forma $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$ no son acotados superiormente. Mostremos que efectivamente es así:

   Consideremos el intervalo $]a, +\infty[$ y llamemos $C = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} =]a, +\infty[$. Supongamos que C es acotado superiormente, entonces existe un elemento z en $\mathbb{R}$ tal que $\forall x \in C,\ z \geq x$; pero como $z \geq x > a$, entonces $z > a$, es decir que $z \in C$ y como $z + 1 > z$ resulta también que $z + 1 \in C$ en contradicción con el hecho que z es cota superior de C, consecuentemente C no es acotado superiormente.
6. Los intervalos de la forma $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$ para cada $a \in \mathbb{R}$ no son acotados inferiormente pero si superiormente.

7. El conjunto $C = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1^n}{2}\right\}$ es acotado.

Extremo superior e inferior

Definición 3.25 *Sea C un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Un número $\beta \in \mathbb{R}$ se llama extremo superior de C si verifica las siguientes condiciones.*

a) *β es una cota superior de C.*

b) *Si c es cota superior de C entonces $c \geq \beta$*

Notación. El extremo superior de un conjunto C, si existe, lo notaremos con $\sup C$. Si $\sup C = \beta \in C$ entonces β se llama elemento máximo de C y escribiremos $\beta = \text{máx}\, C$.

Nótese que si $\beta = \text{máx}\, C$, β es el extremo superior de C, pero el recíproco, en general, no es cierto.

Aclaremos la definición de extremo superior, decir que $\beta = \sup C$ significa:

a) $\forall x \in C,\ x \leq \beta$

b) Ningún número menor que β es una cota superior C; es decir que $\beta = \sup C$ es la menor de las cotas superiores de C.

$\beta = \text{máx}\, C \Rightarrow \beta = \sup C$ (la recíproca en general no es cierta).

Observación. De manera similar se define el extremo inferior de C, esto es, $\beta \in \mathbb{R}$ se llama extremo inferior de C si:

a) $\forall x \in C,\ \beta \leq x$.

b) Si y es cota inferior de C, $y \leq \beta$.

Al extremo inferior de C, si existe, lo notaremos con $\inf C$. Si $\beta = \inf C$ y $\beta \in C$, entonces β se llama elemento mínimo y lo notaremos con $\text{mín}\, C$ es decir que si el extremo inferior pertenece al conjunto, éste se denomina mínimo.

$$\beta = \text{mín}\, C \Longrightarrow \beta = \inf C.$$

EJEMPLOS

1. Sea $C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$. El conjunto C es acotado superiormente y $\sup C = 2$ y como $2 \in C$ entonces 2 es el elemento máximo de C, es decir, $2 = \text{máx}\, C$.
2. $\mathbb{R}^+$ es acotado inferiormente, $\inf \mathbb{R}^+ = 0$ y como $0 \notin \mathbb{R}^+$ entonces cero no es elemento mínimo de $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^+$ no es acotado superiormente, luego no existe el extremo superior de $\mathbb{R}^+$.
3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $A =]a, b]$, $\inf A = a$, $\sup A = b = \text{máx}\, A$.

Teorema 3.26 *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Si existe $\sup A$, éste es único.*

Demostración. Sea $\beta = \sup A$.

Supongamos que el extremo superior no es único; es decir, que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = \sup A$.

Entonces como $\alpha \neq \beta$, se presentan dos posibilidades: $\alpha > \beta$ o $\alpha < \beta$. Veamos que ninguna de ellas es posible:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM SCIENTIARUM PRINCIPIUM FUNDADA EN 1826 QUITO

a) Si $\alpha > \beta$, esto es una contradicción pues $\alpha = \sup A$ y ningún número menor que α puede ser cota superior de A.

b) Si $\alpha < \beta$ se tiene igualmente una contradicción ya que $\beta = \sup A$ y α no puede ser cota superior de A.

Consecuentemente no puede darse que $\alpha \neq \beta$, lo correcto es que $\alpha \neq \beta$; es decir, $\beta = \sup A$ es único.

De manera análoga puede demostrarse que si un conjunto A posee elemento máximo, éste es único. Así mismo, si existe $\inf A$ (resp. mín A), éste es único. ■

Axioma de Completez

Axioma de Completez. Todo subconjunto no vacío de números reales y acotado superiormente posee extremo superior.

Observación.- Este axioma es el que permite asegurar que existen números reales que no son racionales. Así, si consideramos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 \leq 2\}$. Demostraremos que $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente, de lo cual se sigue que A tiene extremo superior.

En efecto:

a) $1 \in A$, pues $1^2 = 1 \leq 2$, luego $A \neq \emptyset$.

b) Sea $x \in A$. Supongamos que $x > 1$, porque si $x < 1$, entonces 1 ya sería una cota superior.

Entonces, de $x > 1$ se sigue que $x < x^2 \leq 2$; es decir que cualquier elemento de A es menor que 2. Luego, A es acotado superiormente.

De a) y b) por el axioma de completez se sigue que A tiene extremo superior. LLamemos $b = \sup A$, se puede demostrar que $b^2 = 2$ y ya sabemos que $b \notin \mathbb{Q}$.

De aquí surge la prueba de que existen números que no son racionales y esos números son los denominados **números irracionales**; es decir que si $b \in \mathbb{R}$ y $b \notin \mathbb{Q}$, se dice que b es un número irracional (por ejemplo $\sqrt{2}$).

Teorema 3.27 *Todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene extremo inferior.*

Demostración.

Sea A el conjunto de las cotas inferiores de B, es decir,

$$A = \{y \in \mathbb{R} : y \leq x,\ \forall x \in B\} \qquad \text{(Ver Figura 3.51)}$$

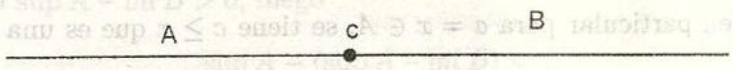


Figura 3.51:

$A \neq \emptyset$ puesto que por hipótesis B es acotado inferiormente. Por otra parte A es acotado superiormente puesto que por ser $B \neq \emptyset$ existe $b \in B$ y por definición de cota superior, $b \geq a$, $\forall a \in A$. Además, por el axioma de completez, existe el extremo superior de A ($\sup A = c$).

Probaremos que $\inf B = c$. En efecto:

1. c es cota inferior de B; puesto que si $c > b$ para algún $b \in B$, se tendría que b es cota superior de A y $b < c$, lo cual contradice el hecho de que $c = \sup A$. Por lo tanto $c \leq b$ para todo $b \in B$.

2. Sea d cota inferior de B, entonces $d \in A$, lo que implica a su vez que $d \leq c$ (lo que prueba que c es la mayor de las cotas inferiores).■

Teorema 3.28 *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente y sea $b = \sup A$. Entonces $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $b - \epsilon < x$.*

Demostración.

Debemos probar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $b - \epsilon < x$. Supongamos entonces que $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que $\forall x \in A$, $x \leq b - \epsilon_0$. Puesto que $\forall x \in A$, $x \leq b - \epsilon_0$, entonces $b - \epsilon_0$ es una cota superior de A. (Ver Figura 3.52)



Figura 3.52:

Además $b = \sup A$ y como $b - \epsilon_0 < b$ esto es una contradicción ya que $b - \epsilon_0$ es una cota superior de A y no puede ser menor que $\sup A$.

Por tanto, no existe ningún $\epsilon_0 > 0$ tal que $\forall x \in A$, $x \leq b - \epsilon_0$. Lo correcto es que si $b = \sup A$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $b - \epsilon < x$.■

Teorema 3.29 *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, b una cota superior de A y si $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $b - \epsilon < x$, entonces $b = \sup A$.*

Demostración.

Por hipótesis b es una cota superior de A. Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $\forall a \in A$, $c \geq a$, entonces c es una cota superior de A, debemos verificar que $b \leq c$.

Supongamos que $b > c$, entonces $b - c > 0$. Además, por hipótesis $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $b - \epsilon < x$, en particular ello se cumple para $\epsilon = b - c > 0$, luego $x > b - \epsilon = b - (b - c) = c$, es decir:

$$x > c. \tag{3.20}$$

Como $\forall a \in A$, $c \geq a$, en particular para $a = x \in A$, se tiene $c \geq x$ que es una contradicción con (3.20).

Por tanto $b \leq c$ y de la definición de extremo superior se concluye que $b = \sup A$. ■

De manera análoga, puede demostrarse los dos resultados siguientes:

Teorema 3.30 *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, si A es acotado inferiormente y si $c = \inf A$, entonces $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $x < c + \epsilon$.*

Teorema 3.31 *Si c es cota inferior de A y si $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $x < c + \epsilon$, entonces $c = \inf A$.*

EJEMPLOS

1. Sean A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente. Si $C = \{x + y : x \in A,\ y \in B\}$, entonces existe $\sup C$ y además:

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

Solución

La demostración consta de dos partes:

a) Verificar que C es acotado superiormente, y

b) Probar que $\sup C = \sup A + \sup B$.

Así:

a) Sean $a = \sup A$, $b = \sup B$, entonces

$$\forall x \in A, \quad x \leq a \tag{3.21}$$

$$\forall y \in B, \quad y \leq b \tag{3.22}$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades (3.21) y (3.22) se tiene que $x + y \leq a + b$. Como $x + y \in C$, entonces $a + b$ es una cota superior de C es decir, C es acotado superiormente y por el axioma de completez, existe el extremo superior de C.

b) Probemos que $\sup C = \sup A + \sup B$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $a = \sup A$, $\exists x \in A$ tal que $x > a - \dfrac{\varepsilon}{2}$ y dado que $b = \sup B$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists y \in B$ tal que $y > b - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se sigue entonces que $x + y > a + b - \varepsilon$ y como $a + b$ es cota superior de C, por el teorema precedente se tiene que $\sup C = a + b$; es decir que, $\sup C = \sup A + \sup B$.

2. Sean A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$, entonces existen $\sup A$ e $\inf B$ y verifican la condición $\sup A \leq \inf B$.

Solución

Por hipótesis $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ y como $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$ entonces B es un conjunto de cotas superiores de A. Por el axioma de completez, A posee extremo superior, $\sup A$; además A es el conjunto de cotas inferiores de B, entonces existe $\inf B$.

Probemos que $\sup A \leq \inf B$. Procederemos para ello por reducción al absurdo. Así, supongamos que $\sup A > \inf B$. Puesto que $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $\sup A - \epsilon < x$, en particular se cumple para $\epsilon = \sup A - \inf B > 0$, luego

$$\sup A - (\sup A - \inf B) < x,$$

de donde $\inf B < x$, pero esto es una contradicción ya que ninguna cota inferior de B puede ser mayor que $\inf B$. Por tanto $\sup A \leq \inf B$.

3. Probar que $\mathbb{Z}^+$ no es acotado superiormente.

Solución

Supongamos que $\mathbb{Z}^+$ es acotado superiormente, es decir que existe $b = \sup \mathbb{Z}^+$.

Tomemos $\epsilon = 1 > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $b - 1 < n$ o lo que es lo mismo $b < n + 1$, pero como $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$, se obtiene una contradicción, pues un elemento de $\mathbb{Z}^+$ no puede ser mayor que $b = \sup \mathbb{Z}^+$. Por tanto $\mathbb{Z}^+$ no es acotado superiormente.

4. Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Demostrar que $\inf A \leq \sup A$.

Solución

Si A es acotado, entonces A lo es tanto superior como inferiormente; luego existen $\sup A$ e $\inf A$. Y como $\forall x \in A$, se tiene $\inf A \leq x \leq \sup A$, consecuentemente se sigue que $\inf A \leq \sup A$.

Si $A = \{a\}$, es claro que $\inf A = \sup A$ y si $A \neq \{a\}$ $(A \neq \emptyset)$, entonces $\inf A < \sup A$.

5. Sean A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subset B$ y B acotado, entonces A es acotado.

Solución

Puesto que B es acotado, entonces existen $\inf B$ y $\sup B$, además $\forall x \in B$, $\inf B \leq x \leq \sup B$. Como $A \subset B$, se sigue que $\forall x \in A$, $\inf B \leq x \leq \sup B$ lo que muestra que A está acotado, pues $\inf B$ es cota inferior de A y $\sup B$ es cota superior de A.

6. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, tales que $\forall i \in I$, A_i es acotado superiormente. Sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ y $B = \{a_i \in \mathbb{R} : a_i = \sup A_i,\ i \in I\}$.

La condición necesaria y suficiente para que A sea acotado superiormente es que B sea acotado superiormente, y entonces $\sup A = \sup B$.

Solución

La conclusión de este ejercicio puede escribirse, A es acotado superiormente si, y solo si, B es acotado superiormente.

$\Rightarrow$) Supongamos que A es acotado superiormente; por el axioma de completez, existe $\sup A = \alpha$.

Como $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces $\forall i \in A_i$; $A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$; además por hipótesis A_i es acotado superiormente y si $a_i = \sup A_i$ se verifica que $a_i \leq \alpha$, $\forall i \in I$.

Puesto que $B = \{a_i \in \mathbb{R} : a_i = \sup A_i, i \in I\}$ y como $\forall i \in I$, $a_i \leq \alpha$; entonces B es acotado superiormente (α es una cota superior), luego existe $\sup B = b$.

Probemos que $\alpha = b$, es decir, $\sup A = \sup B$.

a) Supongamos que $\alpha < b$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_j \in B \text{ tal que } b - \varepsilon < a_j.$$

Tomando $\varepsilon = b - \alpha > 0$, se sigue que:

$$b - \varepsilon = b - (b - \alpha) = \alpha < a_j,$$

resulta entonces una contradicción, pues $a_j < \alpha$, $\forall j \in I$. Luego $\alpha < b$ es imposible.

b) Supongamos que $\alpha > b$; entonces:

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists x \in A \text{ tal que: } \alpha - \varepsilon' < x.$$

En particular, para $\varepsilon' = \alpha - b > 0$, se sigue

$$\alpha - \varepsilon' = \alpha - (\alpha - b) = b < x; \text{ es decir, } b < x.$$

Como $x \in A$, $\exists j \in I$ tal que $x \in A_j$, luego $x \leq a_j$.
De $b < x \leq a_j$ se sigue que $b < a_j$; lo cual está en contradicción con el hecho que $b = \sup B$. Consecuentemente $\alpha > b$

De a) y b) resulta que $\alpha = b$ o lo que es lo mismo $\sup A = \sup B$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que B es acotado superiormente, entonces $\exists b = \sup B$ y $\forall i \in I$, $a_i \leq b$. Como $\forall i \in I$, A_i es acotado superiormente, $\forall x \in A_i$, $x \leq a_i$ y $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Se tiene entonces $x \leq a_i \leq b$, $\forall x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, luego b es una cota superior de $\bigcup_{i \in I} A_i$. Por el axioma de completez, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup A$.
Tenemos además que $\sup A = \sup B$.

Aplicación.- Sean $A =]-5, 0]$, $B = [1, 3]$, $C = [4, 5[$ y $D = A \cup B \cup C$. Hallar $\sup D$.

Solución.

Puesto que $\sup A = 0$, $\sup B = 3$, $\sup C = 5$, sea $T = \{0, 3, 5\}$, T es acotado superiormente y $\sup T = 5$. Luego $\sup D = 5$.

7. Sean $a = \sup A$ y $b < a$, entonces, $\exists x \in A$ tal que $b < x \leq a$.

Solución

Dado $\epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $a - \epsilon < x$ y como por hipótesis $b < a$ se tiene $a - b > 0$.

Si tomamos $\epsilon = a - b > 0$, entonces: $a - \epsilon = a - (a - b) = b < x$, de donde, $b < x \leq a$, ya que $x \in A$.

8. Sea $E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x - \dfrac{1}{x-1} < 1,\ x \neq 1 \right\}$. Estudiar si E es acotado superior e inferiormente.

Solución.

Para $x \neq 1$, $x - \dfrac{1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x-1} - 1 < 0$. Efectuando operaciones se tiene:

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 1} < 0.$$

a) Supongamos que: $x^2 - 2x > 0$ y $x - 1 < 0$. Como $x^2 - 2x = x(x-2) > 0$, el conjunto solución de esta inecuación es $S_1 =]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$. El conjunto solución de la inecuación $x - 1 < 0$ es $S_1' =]-\infty, 1[$
Luego:

$$\begin{aligned} S_p &= S_1 \cap S_1' \\ &= (]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[) \cap]-\infty, 1[\\ &=]-\infty, 0[\end{aligned}$$

b) Supongamos que: $x^2 - 2x < 0 \wedge x - 1 > 0$
El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 1} < 0, \quad x \neq 1,$$

es $S =]-\infty, 0[\cup]1, 2[$, de donde se concluye que:

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{R} : x - \frac{1}{x-1} < 1,\ x \neq 1\} \\ &=]-\infty, 0[\cup]1, 2[\end{aligned}$$

Luego E es acotado superiormente, $\sup E = 2$ y E no es acotado inferiormente.

9. Sea $A = \left\{1 - \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$. Demostrar que $\sup A = 1$.

Solución.

a) Mostremos que 1 es cota superior de A. En efecto, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $2^n > 0$, luego: $-\frac{1}{2^n} < 0$; sumando 1 en los dos miembros de la última desigualdad se tiene: $1 - \frac{1}{2^n} < 1$. Como $1 - \frac{1}{2^n} \in A$, entonces 1 es cota superior de A.

b) Probemos que $\sup A = 1$. Puesto que $\forall m \in \mathbb{Z}^+$, $2^m > 0$ y

$$\frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^m} < 1.$$

Tomemos $\varepsilon = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} > 0$, entonces

$$1 - \varepsilon = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right) = \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{1}{2^m}.$$

De donde se concluye que: $\sup A = 1$.

Ejercicios

1. Supongamos que A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, sea $B = \{-x : x \in A\}$. Demostrar que B es acotado y que $\sup B = -\inf A$, $\inf B = -\sup A$.

2. Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y $B = \{3x : x \in A\}$. Demostrar que B es acotado y

$$\sup B = 3(\sup A), \quad \inf B = 3(\inf A).$$

3. Considere el conjunto A de los números reales que satisfacen la condición dada. Estudiar si tal conjunto es acotado superiormente (inferiormente) y en caso afirmativo hallar el supremo (ínfimo) de dicho conjunto.

a) $x - \frac{1}{x} > 0,\ x \neq 0$

b) $1 - \frac{1}{x} < 0,\ x \neq 0$

c) $x^2 - 2 > 0$

d) $(x+2)(x-3) < 0$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM LUMINA FUNDADA EN 1620 QUITO

e) $1+\dfrac{3}{x^2-1}\geq 0,\ |x|\neq 1$

f) $\dfrac{x(x+2)}{x^2+1}\leq 0$

g) $x(x+2)(x-1)>0.$

4. Demostrar que todo conjunto finito de números reales es acotado.

5. Sea $A=\left\{\dfrac{n}{n+1}:n\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}\right\}$. Pruebe que $\inf A=0$, $\sup A=1$.

6. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, acotado superiormente.

   a) Sea $\alpha<0$ y $B=\{\alpha x:x\in A\}$. Probar que B es acotado inferiormente y que $\inf B=\alpha\sup A$.

   b) Sea $\alpha>0$ y $B=\{\alpha x:x\in A\}$. Probar que B es acotado superiormente y que $\sup B=\alpha\sup A$.

7. Demuestre que $\mathbb{Z}^-$ no es acotado inferiormente.

8. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados inferiormente y sea $C=\{x+y:x\in A,\ y\in B\}$. Demostrar que C es acotado inferiormente y que $\inf C=\inf A+\inf B$.

9. Sean A, B subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ y $C=\{xy:x\in A, y\in B\}$. Demostrar que en general $\sup C\neq\sup A\sup B$.

10. .

    a) Sea $A\subset\mathbb{R}^+$, no vacío y acotado superiormente y $B=\{x^2:x\in A\}$. Muestre que B es acotado superiormente y que $\sup B=(\sup A)^2$.

    b) Sea $A\subset\mathbb{R}^-$, no vacío y acotado superiormente. Si $B=\{x^2:x\in A\}$, pruebe que B es acotado inferiormente y que $\inf B=(\sup A)^2$

11. .

    a) Si A y B son conjuntos acotados de números positivos, ¿existe alguna relación entre C y $[(\sup A)(\sup B)]$, si $c=\sup\{xy:x\in A\wedge y\in B\}$?

    b) Si A y B son conjuntos acotados de números negativos, entonces, ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

       i. $\sup\{xy:x\in A\wedge y\in B\}=(\sup A)(\sup B)$

       ii. $\sup\{xy:x\in A\wedge y\in B\}=(\inf A)(\inf B)$

12. Sea $S\subset\mathbb{R}$, $S\neq\emptyset$ y $c\in\mathbb{R}$. Indique si las siguientes afirmaciones son o no equivalentes:

    a) c es el extremo superior de $S(c=\sup S)$

    b) c es el supremo de $S(c=\sup S)$.

    c) c es la mínima cota superior de S

    d) .

       i. c es una cota superior de S.

       ii. c es la mínima cota superior de S.

    e) .

i. c es una cota superior

ii. Todo número menor que c no es cota superior de S.

f) .

i. Para todo $x \in S$, $x \leq c$.

ii. Si $\alpha < c$ entonces α no es cota superior de S.

g) .

i. Para todo $x \in S$, $x \leq c$.

ii. Si $\alpha < c$ entonces existe un $x \in S$ tal que $\alpha < x$.

h) .

i. Para todo $x \in S$, $x \leq c$.

ii. Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $x \in S$ tal que $c - \varepsilon < x$.

13. .

a) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, dar un ejemplo para probar que la siguiente afirmación es falsa: "Si A no es acotado superiormente ni inferiomente, entonces A^c es acotado".

b) Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son acotados superiormente, cuáles acotados inferiormente y cuando existan, determine el extremo superior y el extremo inferior.

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}\frac{6}{5}, \frac{1}{5}, \frac{7}{6}\cdots\right\} \\
B &= \left[-5, \frac{1}{2}\right] \\
C &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\} \\
D &= \{x \in \mathbb{R} : x > 5 \text{ y } x^2 - 1 > 0\} \\
E &= \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 - 10x + 3 < 0\} \\
F &= \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}
\end{aligned}
$$

siendo $a < b < c < d$

$$
\begin{aligned}
G &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 2 > 0\} \\
H &= \left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\} \\
I &= \left\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\} \\
J &= \{x \in \mathbb{Q} : x > 2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K &= \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^* \\
L &= \left\{1, \frac{1}{2}, 5, \frac{29}{3}, 12\right\} \\
M &= \mathbb{R}^+ \\
N &= \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} \\
O &= \{x \in \mathbb{R} : x^3 < 4\}
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SCIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

14. Sea $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$. Pruebe que $\inf A = \frac{1}{2}$.

15. Sea A un conjunto inductivo, pruebe que A no es acotado superiormente.

16. Sean A y B subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$ tales que $A \subset B$. Pruebe que:

$$\sup A \leq \sup B;$$
$$\inf B \leq \inf A$$

17. Sea $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$. Pruebe que A no es acotado superiormente.

18. Sea $A = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = \frac{x+1}{x-1} \text{ y } x < 1 \right\}$ $\forall \epsilon > 0, \exists y < 1$ tal que $y > 1 - \epsilon$. ¿Qué puede deducirse? Demostrar que 1 es una cota superior de A. ¿Es $1 \in A$? Establecer la proposición:

19. Si A y B son conjuntos acotados y, $x < y$, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$. Demuestre que $\sup A \leq \sup B$.

20. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Probar que: Si $A \subset B$ y B es acotado entonces A es acotado.

21. Pruebe que: "Si A y B son conjuntos acotados entonces $A \cup B$ es acotado".

22. Sea A un conjunto acotado de números reales y $B = \{|x| : x \in A\}$. Probar que B es acotado y que $\sup B \geq \sup A$. ($\sup B = \text{máx}\{|\sup A|, |\inf A|\}$).

23. Sea A un conjunto de números positivos. Si $b = \inf A > 0$, demostrar que:

$$\sup \left\{ \frac{1}{x} : x \in A \right\} = \frac{1}{b}.$$

24. Demostrar que existe un único número real positivo b tal que $b^2 = 2$.

25. Si $B = [-1, 1[$. Demuestre que $\sup B = 1$ e $\inf B = -1$.

26. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente, λ y μ constantes reales con $\lambda > 0$.

    a) Sea $B = \{\mu - \lambda x : x \in A\}$. Probar que B es acotado inferiormente e $\inf B = \mu - \lambda \sup A$.

    b) Sea $B = \{\mu + \lambda x : x \in A\}$. Demostrar que B es acotado superiormente y que $\sup B = \mu + \lambda \sup A$

27. Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente y sea
$B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n : \alpha_i = \sup A_i, i = 1, \ldots, n\}$.
Demostrar que:

    a) $\sup \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{máx } B$

    b) $\sup \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \text{mín } B$.

Si $A_1, \ldots, A_n$ son acotados inferiormente y si

$$B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n : \beta_i = \inf A_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

¿A qué es igual $\inf \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e $\inf \bigcap_{i=1}^{n} A_i$?. Ponga ejemplos y verifique su respuesta.

Propiedad Arquimediana de los Números Reales

Teorema 3.32 *Sean x, $y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nx > y$.*

Demostración.

Sea $z = y/x \in \mathbb{R}$, número real que está definido por ser $x \neq 0$ (puesto que por hipótesis $x > 0$). Debido a que $\mathbb{Z}^+$ no es acotado superiormente, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $z < n$, es decir, $y/x < n$ o bien $nx > y$. ■

Corolario 3.33 *Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n > x$.*

Demostración.

Por la propiedad arquimediana: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $an > b$. En particular, para $a = 1$ y $b = x$, resulta que $n > x$. ■

Corolario 3.34 *Demuestre que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $1/n < \varepsilon$.*

Demostración.

Tomando $x = \epsilon$ y $y = 1$ en la propiedad arquimediana, se sigue que $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n\epsilon > 1$, de donde se sigue que $\epsilon > 1/n$. ■

EJEMPLOS

1. Sean $y = -5$, $x = 1/2$, entonces $n(1/2) > -5$ implica $n > -10$. Por tanto $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $nx > -5$.
2. Sean $y = 10^5$, $x = 10^3$. De la propiedad arquimediana se sigue que: $10^3 n > 10^5$, es decir que $n > 10^2$.
3. Sea $\epsilon = 10^{-3}$, sabemos que $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $1/n < 10^{-3}$; es decir que la última desigualdad se cumple si: $n > 10^3$.

Teorema 3.35 *Sean a, x, $y \in \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a \leq x \leq a + \dfrac{y}{n}$, entonces $x = a$*

Demostración.- Supongamos que $x \neq a$.

a) Si $x > a$ entonces $x - a > 0$ y como $y \in \mathbb{R}$, de la propiedad arquimediana de los números reales se sigue que $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n(x - a) > y$ o lo que es lo mismo $x > a + \dfrac{y}{n}$ en contradicción con la hipótesis de que $x \leq a + \dfrac{y}{n}$.

b) Si $x < a$, se tiene también un absurdo, pues por hipótesis $a \leq x \leq a + y/n$.

Por consiguiente de a) y b) se concluye que $x = a$. ■

EJEMPLOS

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM CONSILIO SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

1. Sea $x \in \mathbb{R}$, probar que existen enteros m y n tales que $m < x < n$.

   Solución

   Para la demostración utilizaremos el hecho de que $\mathbb{Z}^-$ no es acotado inferiormente y que $\mathbb{Z}^+$ no lo es superiormente. Luego:

   Dado $x \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n > x$ y $\exists m \in \mathbb{Z}^-$ tal que $m < x$; es decir que $m < x < n$.

2. Sea $x \in \mathbb{R}$. Probar que existe un único entero n tal que $n \leq x < n + 1$.

   Solución

   Si $x \in \mathbb{R}$, por el ejemplo 1, existen m, $n \in \mathbb{Z}$ tales que $m < x < n$.

   Sea $A = \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x < n\}$. A es acotado superiormente, pues n es una cota superior de A; por el axioma de completez, existe el extremo superior de A, tal elemento pertenece a A, sea $m_0 = \text{máx}\, A$; m_0 es el mayor entero menor o igual que x.

   Sea $B = \{n \in \mathbb{Z} : x < n\}$, B es acotado inferiormente, sea $n_0 = \text{mín}\, B$; n_0 es el menor entero mayor que x.

   Puesto que $\forall m \in A$, $\forall n \in B$, $m \leq x < n$ resulta que: $m_0 \leq x < n_0$.

   Debemos notar que si $x \leq n_0$ entonces $x < n_0$ o $x = n_0$; en el caso en que $x = n_0$ se tiene que $n_0 = \text{máx}\, A$, lo que contradice el hecho que $m_0 = \text{máx}\, A$; luego $x < n_0$. Por consiguiente,

   $$m_0 \leq x < n_0. \tag{3.23}$$

   Por otra parte, $m_0 < m_0 + 1$, entonces $m_0 \leq x < m_0 + 1$, de donde

   $$n_0 = m_0 + 1 \tag{3.24}$$

   lo que reemplazando en (3.23), resulta

   $$m_0 \leq x < m_0 + 1. \tag{3.25}$$

   Dicho en palabras, x se encuentra entre dos enteros consecutivos. Veamos que m_0 es único:

   Supongamos que existe $m \in \mathbb{Z}$ que verifica (3.25), es decir,

   $$m \leq x < m + 1. \tag{3.26}$$

   De (3.25) resulta que $m_0 \leq x$ y de (3.26), $x < m + 1$ luego:

   $$m_0 < m + 1 \text{ y por tanto } m_0 \leq m$$

   y de (3.26): $m \leq x$ y de (3.25), $x < m_0 + 1$, entonces:

   $$m < m_0 + 1 \Longrightarrow m \leq m_0.$$

   Por consiguiente, $m_0 \leq m$ y $m \leq m_0$ de lo cual se sigue que $m = m_0$, lo que muestra que m_0 es único.

   Observación. El número entero n tal que $n \leq x < n + 1$, se denomina el mayor entero menor o igual que x y se nota con $[x]$ que se lee: "parte entera de x", así por ejemplo:

   $$[3{,}5] = 3 \qquad [0{,}2] = 0$$
   $$[-5] = -5 \qquad [-2 \cdot 9] = -3$$
   $$[4] = 4$$

   Note además que $[x] \leq x < [x] + 1$.

3. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x \neq y$. Probar que existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$.

Solución

a) Si $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $x < n < y$, el teorema está probado, pues $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

b) Si no existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x < n < y$, entonces x y y están comprendidos entre dos enteros consecutivos. Sea $m \in \mathbb{Z}$ el entero que verifica: $m \leq x < y \leq m + 1$.

Puesto que $y - x > 0$, para $\epsilon = y - x$, por la propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$\frac{1}{n} < y - x \tag{3.27}$$

o también $x + \frac{1}{n} < y$; es decir que: $x < x + \frac{1}{n} < y$.

Los números m, $m + \frac{1}{n}$, $m + \frac{2}{n}, \ldots, m + \frac{k}{n}, \ldots, m + 1 - \frac{1}{n}$ son racionales.

Afirmamos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq k \leq n - 1$ para el cual: $x < m + \frac{k}{n} < y$.

De no existir k, x y y se encontrarían entre dos subdivisiones consecutivas, es decir,

$$m + \frac{k}{n} < x < y < m + \frac{k+1}{n}$$

de donde $m + \frac{k+1}{n} - \left(m + \frac{k}{n}\right) > y - x > 0$; pero $m + \frac{k+1}{n} - \left(m + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} > y - x$, que está en contradicción con (3.27).

Esto prueba que efectivamente existe $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n - 1$ tal que $x < m + k/n < y$, donde $m + k/n \in \mathbb{Q}$, como queríamos demostrar.

4. Si $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$. Demostrar que $\inf A = 0$.

Solución

5. Supongamos que $\inf A = b \neq 0$, entonces existen dos posibilidades:

a) Si $b < 0$ se sigue que $b/2 > b$ y como $b/2 < 0$, él es una cota inferior del conjunto A. Es decir que $b/2$ debería verificar la condición $b/2 \leq b$, lo cual no es posible. Por lo tanto $b \not< 0$.

b) $b > 0$, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nb > 1$ o lo que es lo mismo, que $b > 1/n$, lo cual no es posible puesto que $b = \inf A$ y hemos encontrado un elemento de A. Consecuentemente: $b \not> 0$.

De a) y b) se sigue que $\inf A = b = 0$.

Ejercicios

1. Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $x < y$. Probar que existe un número irracional t tal que $x < t < y$. [Sugerencia: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$]

2. .

a) Si $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$. Demuestre que $\sup A = 1$ y que $\inf A = \frac{1}{2}$.

b) Si $B = \{n \in \mathbb{Z}^+\}$. Demuestre que $\inf B = 1$ y que $\sup B = 2$.

3.2.5. Raíces Enésimas

El axioma de completez nos permite definir de manera sencilla las raíces enésimas de números reales.

Pero antes recordemos que si $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, se define: $x^0 = 1$, $x^1 = x$, $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$, etc; y de manera general: $x^{n+1} = x^n \cdot x$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Si $n \in \mathbb{Z}^+$ se define $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

Observación.- En virtud de la asociatividad de la multiplicación, se sigue que: $x^{n_1}x^{n_2}\cdot\cdots\cdot x^{n_m} = x^{n_1+n_2+\cdots+n_m}$.

Si los exponentes $n_i \in \mathbb{Z}^+$ son iguales; es decir $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n$ se obtiene de la expresión anterior que:

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}.$$

Más generalmente, se tiene,

$$(x^p \cdot y^q)^n = x^{p \cdot n} y^{q \cdot n}.$$

Además $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$. En efecto:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = (xy^{-1})^n = x^n(y^{-1})^n = x^n y^{-n} = \frac{x^n}{y^n}.$$

EJEMPLO

Si $k \in \mathbb{Z}^+$, demostrar que:

$$(-x)^{2k} = x^{2k}, \quad (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}.$$

Solución.- En efecto:

$$(-x)^{2k} = ((-1)x)^{2k} = ((-1)^2)^k x^{2k} = 1^k x^{2k} = x^{2k}$$

$$(-x)^{2k+1} = (-x)(-x)^{2k} = (-x)x^{2k} = -(x \cdot x^{2k}) = -x^{2k+1}.$$

A partir de la definición de x^{-n} y utilizando las propiedades de los exponentes enteros positivos, se verifican fácilmente las siguientes propiedades:

Sean: $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$$\begin{aligned}
(x^{-m})^n &= (x^m)^{-n} = x^{-(mn)} \\
(x^{-m})^{-n} &= x^{mn} \\
x^m \cdot x^{-n} &= x^{m-n} \\
x^{-m} \cdot x^{-n} &= x^{-(m+n)}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.36 *Para todo número real $x > 0$ y cada entero $n > 0$ existe un único número real $y > 0$ tal que $y^n = x$. Este número y se escribe $\sqrt[n]{x}$ o $x^{1/n}$ y se define como la* ***raíz enésima de*** *x.*

Demostración.

Veamos en primer lugar su unicidad.

En efecto, si $y^n = z^n = x$, por diferencia se sigue que:

$$y^n - z^n = 0. \tag{3.28}$$

A partir de la identidad:

$$a^n - b^n = (a-b)\underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}_{n \text{ términos}},$$

se sigue que:

$$0 = y^n - z^n = (y-z)(y^{n-1} + y^{n-2}z + y^{n-3}z^2 + \cdots + z^{n-1}). \tag{3.29}$$

Como y y z son positivos se tiene que: $y^{n-1} + y^{n-2}z + y^{n-3}z^2 + \cdots + z^{n-1} > 0$; consecuentemente debe verificarse que $y - z = 0$, es decir, que $y = z$ (Con lo cual queda probada la unicidad).

Veamos ahora su existencia.- Sea $E = \{t \in \mathbb{R}^+ : t^n < x\}$.

Si $t = \dfrac{x}{x+1} < x$ se sigue que $0 < t < 1$ y por tanto: $t^n \leq t < x$; es decir que $t \in E$, con lo cual se sigue que $E \neq \emptyset$. Veamos ahora que E es acotado superiormente:

Consideraremos $t_0 = 1 + x$. Si $z > t_0$ se sigue que $z^n \geq z > t_0 > x$; de modo que $z \notin E$ y además t_0 es una cota superior de E. Luego E es acotado superiormente.

Como $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ y acotado superiormente, por el axioma de completez, existe el extremo superior de E. Sea $y = \sup E$.

Pasemos ahora a demostrar que $y^n = x$. En esta parte haremos uso del siguiente resultado:

Si $x > y > 0$,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) < (x-y)nx^{n-1}.$$

Demostremos que $y^n = x$.

a) Supongamos que $y^n < x$. Sea el número real ε tal que $0 < \varepsilon < 1$ y $\varepsilon < \dfrac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$ entonces

$$(y+\varepsilon)^n - y^n < \varepsilon n(y+\varepsilon)^{n-1} < \varepsilon(y+1)^{n-1} < x - y^n;$$

es decir que $(y+\varepsilon)^n - y^n < x - y^n$ lo que es equivalente a $(y+\varepsilon)^n < x$, lo que implica a su vez que $y + \varepsilon \in E$ y como $y + \varepsilon > y = \sup E$, se tiene una contradicción. Es decir, no es posible que $y^n < x$.

b) Supongamos que $y^n > x$. Sea $0 < \varepsilon < 1$ con $\varepsilon < y$, y tal que $\varepsilon < \dfrac{y^2 - x}{n - y^{n-1}}$. Entonces: $y^n - (y-\varepsilon)^n < \varepsilon n y^{n-1} < y^n - x$; es decir que:

$$y^n - (y-\varepsilon)^n < y^n - x \Rightarrow -(y-\varepsilon)^n < -x \Rightarrow (y-\varepsilon)^n > x.$$

Luego $y - \varepsilon$ es una cota superior de E y como $y - \varepsilon < y = \sup E$ se obtiene una contradicción; por lo tanto, no es posible que $y^n > x$

De a) y b) concluimos que: $y^n = x$.■

Observaciones

- La raíz n-ésima de x es única, pues es el sup de un conjunto de números reales positivos y además es positiva.

  Decir que $\sqrt{4} = \pm 2$ es incorrecto; pues $\sqrt{4} = 2$. Es cosa muy diferente que existan dos números cuyo cuadrado sea 4.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM CONSILIO QUITO FUNDADA EN 1620

- Salvo otra convención $\sqrt[n]{a}$ tiene sentido solamente cuando $a \geq 0$. Si $a = 0$ por supuesto que $\sqrt[n]{a} = 0$ y consecuentemente $\sqrt[n]{a} \geq 0$ siempre. Luego, en los números reales la discusión y resolución de ecuaciones del tipo $x^n = a$ puede hacerse de la siguiente manera:

  a) Si n es par $n = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$, y la ecuación se escribe, $(x^2)^p = a$. De donde se sigue que no hay solución si $a < 0$; cuando $a \geq 0$, obviamente $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$ son soluciones y no existe otra.
  La forma $x^2 = a^{1/p}$ muestra claramente que hay solamente 2 soluciones.

  b) Si n es impar, cuando $a \geq 0$ la ecuación tiene la solución $\sqrt[n]{a}$ y es la única. Cuando $a < 0$, escribiendo la ecuación $(-x)^n = -a$ se ve que tiene la única solución $-\sqrt[n]{(-a)}$.
  Esto muestra que no hay mayor peligro de extender la definición de $\sqrt[n]{x}$ a números negativos para n impar. Y es así como: si $a < 0$ y n es impar, se define: $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

EJEMPLOS

$\sqrt[3]{-8} = -2$; pues $(-2)^3 = -8$.

$(-\sqrt[5]{-a})^5 = -(-a) = a$.

Definición 3.26 (de a^r para $a > 0$ y $r \in \mathbb{Q}^+$) *Sea $r = p/q$ un número racional positivo (p, $q > 0$); por definición $a^r = (a^p)^{1/q}$ o en otras palabras: $x = a^r \Leftrightarrow x^q = a^p$.*

Como un mismo número racional r puede escribirse de varias formas p/q; entonces debemos comprobar que cada escritura de la forma $r = p/q$ conduce al mismo valor para $(a^p)^{1/q}$.

Sean $x = (a^p)^{1/q}$ y $y = (a^{p'})^{1/q'}$, aplicando la propiedad $(a^m)^{n'} = a^{mn'}$ con exponentes enteros q y q' se tiene:

$$x^{qq'} = (x^q)^{q'} = (a^p)^{q'} = a^{pq'},$$
$$y^{qq'} = (y^{q'})^q = (a^{p'})^q = a^{p'q}.$$

Por otra parte, $x = y \Leftrightarrow x^{qq'} = y^{qq'}$, entonces, $x = y \Leftrightarrow a^{pq'} = a^{p'q}$, lo cual equivale a $pq' = p'q$; es decir, $p/q = p'/q'$.

Hemos demostrado que: $a^r = a^{r'} \Rightarrow r = r'$.

Teorema 3.37 *Si $r = p/q$ entonces $a^r = \left(a^{1/q}\right)^p$.*

*Demostración.*Sea $u = \left(a^{1/q}\right)^p$, u^q se transforma en:

$$u^q = \left(a^{1/q}\right)^{pq} = \left\{\left(a^{1/q}\right)^q\right\}^p = a^p, \blacksquare$$

luego $u = a^r$.

Propiedades

1. $a^{r+r'} = a^r a^{r'}$.

   Podemos suponer r y r' reducidos al mismo denominador q, es decir: $r = p/q$, $r' = p'/q$, $a^r = (a^{1/q})^p$; $a^{r'} = \left(a^{1/q}\right)^{p'}$.

   Por el teorema, aplicando a $\left(a^{1/q}\right)$ con los exponentes enteros p y p' se tiene $\left(a^{1/q}\right)^{p+p'} = \left(a^{1/q}\right)^p \left(a^{1/q}\right)^{p'} = a^{r/q} a^{p'/q} = a^r a^{r'}$; es decir que: $a^{r+r'} = a^r a^{r'}$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR FUNDADA EN 1620 QUITO

2. $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$.

   $a^{rr'}$ se puede expresar como: $(a^r)^{r'} = \left\{\left[\left(a^{1/q}\right)^p\right]^{p'}\right\}^{1/q'}$, que se transforma en $\left\{\left(a^{1/q}\right)^{pp'}\right\}^{1/q'}$ y nuevamente se transforma en $\left\{\left(a^{pp'}\right)^{1/q}\right\}^{1/q'} = x$. Calculemos $x^{qq'}$ elevando primero x a la q': $x^{q'} = (a^{pp'})^{1/q}$, y luego el resultado a la q, es decir, $(x^{q'})^q$, obtenemos entonces $x^{qq'} = a^{pp'}$; es decir, $x = \left(a^{pp'}\right)^{1/qq'} = a^{rr'}$.

3. $a^r b^r = (ab)^r$. Su demostración se la deja como ejercicio.

Definición 3.27 *Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Para todo $r \in \mathbb{Q}$,*

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Observación. Si $a \in \mathbb{R}$ cualquiera, se define $a^{n/m} = a^r = (a^n)^{1/m}$ siempre y cuando $(a^n)^{1/m}$ tenga sentido.

Así por ejemplo $(-2)^{3/2} = \left[(-2)^3\right]^{1/2} = (-8)^{1/2}$ no tiene sentido.

3.2.6. Aproximación Decimal de un Número Real

Definición 3.28 *Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Si $a = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$, donde a_0 es un entero no negativo y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números enteros que satisfacen la condición $0 \leq a_i \leq 9$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. El número real a se suele notar en la forma:*

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \tag{3.30}$$

*y se dice que (3.30) es la **representación decimal (finita) del número real** a.*

EJEMPLOS

1. Si $a = \frac{4}{5}$ entonces $a = 0{,}8 = 0 + \frac{8}{10}$; 0.8 es la representación decimal finita de $\frac{4}{5}$.
2. Si $a = \frac{3}{4}$ entonces $a = 0{,}75 = 0 + \frac{7}{10} + \frac{5}{10^2}$; 0.75 es la representación decimal finita de $\frac{3}{4}$.
3. $a = \frac{111}{32} = 3{,}46875 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{5}{10^5}$; 3, 46875 es la representación decimal finita de $\frac{111}{32}$.

Los números reales que tienen representación decimal finita son necesariamente números racionales y todos ellos son de la forma: $r = a/10^n$, donde a es un número entero ($a = a_0(10)^n + a_1(10)^{n-1} + a_2(10)^{n-2} + \cdots + a_n$).

Sin embargo, no todo número racional puede expresarse por medio de una representación decimal finita o lo que es lo mismo en la forma $\frac{m}{(10)^n}$ con $m \in \mathbb{Z}^+$; así por ejemplo, los números racionales: $\frac{1}{3}, \frac{4}{11}, \frac{1}{7}, \frac{24}{13}$, etc, no tienen representación decimal finita. Notemos que:

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots \qquad \frac{4}{11} = 0{,}363636\ldots$$
$$\frac{1}{7} = 0{,}1428571\ldots \qquad \frac{24}{13} = 1{,}8461538\ldots$$

Veamos que no es posible por ejemplo que 1/3 tenga representación decimal finita. Supongamos que fuese posible tal representación; es decir que:

$$\frac{1}{3} = \frac{m}{(10)^n}, \quad m \in \mathbb{Z}^+.$$

Se tendría entonces que $(10)^n = 3m$; con lo cual se deduciría que 3 divide a 10^n, pero esto no es posible ya que 3 y 10^n son primos entre sí, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.

Aproximación decimal finita de los números reales.- Cualquier número real x positivo puede aproximarse, con un error tan pequeño como se desee, por medio de una expresión del tipo (3.30) tomando n suficientemente grande.

Su razón puede verse en el siguiente argumento geométrico:

Sea $x \in \mathbb{R}^+$, hemos demostrado que existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a_0 \leq x < a_0 + 1$. Si $x = a_0$, no hay nada por hacer; supongamos que $a_0 < x < a_0 + 1$. Dividamos al intervalo $[a_0, a_0 + 1]$ en diez partes iguales, entonces:

a) Si $x = a_0 + \frac{a_1}{10}$ con a_1 entero tal que $0 < a_1 \leq 9$, es decir, x coincide con una división del intervalo $[a_0, a_0 + 1]$; se sigue que la representación decimal de x es a_0, a_1 o lo que es lo mismo $a_0 + \frac{a_1}{10}$

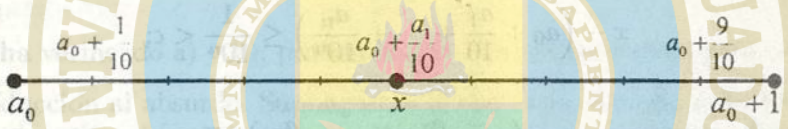


Figura 3.53:

b) Si x no coincide con ninguna subdivisión, x debe estar comprendida entre dos de ellas, es decir,

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10},$$

donde a_1 es un entero tal que $0 \leq a_1 \leq 9$.

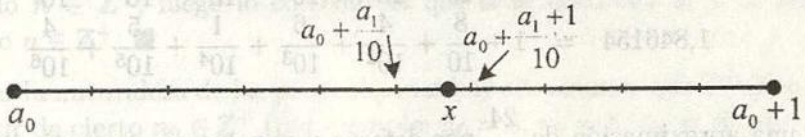


Figura 3.54:

El intervalo $\left[a_0 + \frac{a_1}{10}, a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}\right]$ volvemos a dividirlo en 10 partes y se repite el proceso descrito en los puntos a) y b).

Si después de un número finito de subdivisiones, uno de los puntos coincide con x, entonces x es un número de la forma (3.30). Si no es así, el proceso se continua indefinidamente y se engendra

un conjunto infinito de enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots$. En este caso se dice que x tiene una representación decimal infinita; es decir,

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Después de n pasos tenemos que x satisface la siguiente relación:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}. \tag{3.31}$$

La suma del lado izquierdo de (3.31) es una aproximación de x por defecto con un error menor a 10^{-n}, mientras que la suma del lado derecho de (3.31) da una aproximación de x por exceso con un error menor que 10^{-n}.

Sea A el conjunto de todos los números de la forma $a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, obtenidos según el proceso anterior, es decir tales que:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

Como $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente, se tiene entonces que existe el sup A; además, sup $A = x$. En efecto:

Sea $\epsilon > 0$, tomando $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{1}{10^n} < \epsilon$, se tiene:

$$x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right) \leq \frac{1}{10^n} < \epsilon;$$

es decir,

$$x < \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right) + \epsilon$$

o lo que es lo mismo:

$$x - \epsilon < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

EJEMPLOS

1. Las representaciones decimales finitas que se indican a continuación

$$\begin{aligned} 1{,}846153 &= 1 + \frac{8}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{3}{10^6} \\ 1{,}846154 &= 1 + \frac{8}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{4}{10^6} \end{aligned}$$

constituyen una aproximación de $\frac{24}{13}$ por defecto y por exceso, respectivamente. En los dos casos el error es menor a 10^{-6}.

2. Los siguientes números no tienen representación decimal finita:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1{,}414\ldots \\ \pi &= 3{,}1415\ldots \\ \frac{1}{3} &= 0{,}333\ldots \\ e &= 2{,}718\ldots \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SALUS
FUNDADA EN 1620 QUITO

3.2.7. Principio de Inducción

En esta parte formularemos otro método de demostración, el mismo que está íntimamente ligado con el conjunto de los números enteros positivos, denominado método de demostración por inducción.

Teorema 3.38 (Principio de inducción) *Sea A un subconjunto de $\mathbb{Z}^+$. Si:*

a) $1 \in A$

b) *Si $k \in A$ entonces $(k+1) \in A$, entonces $A = \mathbb{Z}^+$.*

El principio de inducción se enuncia en forma más práctica para las demostraciones de la siguiente manera (equivalente a la anterior):

Teorema 3.39 *Sea $P(n)$ una proposición definida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Si:*

a) *$P(1)$ es verdadera,*

b) *$P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $\forall k \geq 1$ es verdadera; supuesto que $P(k)$ es verdadera, entonces la proposición $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración.

Supongamos que se ha verificado a) y b); probemos que $P(n)$ es verdadera para cualquier $n \geq 1$.

Demostremos por reducción al absurdo. Supongamos lo contrario, esto es, que existe $n \in \mathbb{Z}^+$ para el cual $P(n)$ es falsa. Sea $M = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n > 1 \text{ y } P(n) \text{ es falsa}\}$; entonces $M \neq \emptyset$ y por el principio de buena ordenación M posee un elemento mínimo m y para tal m se tiene que $P(m)$ es falsa. Resulta entonces que:

a) $m \neq 1$ ya que por hipótesis $P(1)$ es verdadera.

b) Como m es el mínimo de M, entonces $(m-1) \notin M$; luego $P(m-1)$ es verdadera y debido a la parte b) se deduce que $P(m)$ es verdadera, lo cual está en contradicción con la afirmación hecha anteriormente.

A esta contradicción llegamos por suponer que cumpliéndose a) y b) la proposición $P(n)$ no es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$; luego lo correcto es que si se cumplen a) y b) entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. ■

Observación.- Por la naturaleza de las proposiciones hay situaciones que $P(n)$ no se cumple para $n = 1$ pero si a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ (por ejemplo: $n_0 = 3$, $n_0 = 5$, $n_0 = 10$, etc.). En este caso, la proposición $P(n)$ será verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n \geq n_0$. Es por ello que el principio de inducción podemos enunciarlo de la siguiente manera:

Teorema 3.40 *Sea $P(n)$ una proposición referente a $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que:*

a) *$P(n_0)$ es verdadera para algún $n_0 \in \mathbb{Z}^+$.*

b) *Si $P(k)$ verdadera implica $P(k+1)$ verdadera, para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $k \geq n_0$ entonces, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.*

Observaciones

- La condición a) del principio de inducción se denomina *base de la inducción* y la suposición de que $P(k)$ es verdadera se conoce como hipótesis de la inducción.
- La condición b) da derecho a extender automáticamente sin límite dicha base de la inducción, da derecho al paso de un caso particular n al siguiente $n+1$.
- Si no se demuestra la parte a) pero ha sido demostrada la parte b) entonces no ha sido formada la base para la construcción de la inducción y por lo tanto carece de sentido aplicar la parte b) puesto que no hay nada que extender.

  Igualmente si no está demostrada la parte b) y solo se ha demostrado la parte a) no obstante tener la base para efectuar la inducción, no se tiene derecho para extender dicha base.

EJEMPLOS

1. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $4^n - 1$ es divisible por 3.

   Solución.

   Designemos con $P(n)$ la condición referente a n; esto es: $P(n)$: $4^n - 1$ es divisible por 3.

   a) Mostremos que $P(1)$ es verdadera. En efecto, $4^1 - 1 = 3$ es verdadera; pues 3 es divisible por 3.
   Hipótesis de Inducción: $4^k - 1$ es divisible por 3; es decir, $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $4^k - 1 = 3m$.

   b) Demostremos que $P(k+1)$ es verdadero; es decir que $4^{k+1} - 1$ es divisible por 3.
   Como $4^{k+1} - 1 = 4^k 4 - 1$, por la hipótesis inductiva se tiene que: $4^k = 3m + 1$, luego:

$$\begin{aligned} 4^{k+1} - 1 &= (3m+1)4 - 1 \\ &= 12m + 3 \\ &= 3(4m+1). \end{aligned}$$

   Sea $p = 4m + 1$, entonces $4^{k+1} - 1 = 3p$, $p \in \mathbb{Z}$, que nos dice que $4^{k+1} - 1$ es divisible por 3, y consecuentemente que, $P(k+1)$ es verdadera.

   El principio de inducción nos asegura entonces que $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

2. Hallar el valor n_0 para el cual vale la desigualdad

$$(1+x)^n > 1 + nx + nx^2$$

   para todo $x > 0$ y demostrar que la desigualdad es cierta $\forall n \geq n_0$.

   Solución.

   Para $n = 1$, es obvio que: $1 + x < 1 + x + x^2$.

   Si $n = 2$, $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 < 1 + 2x + 2x^2$.

   Si $n = 3$, $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 > 1 + 3x + 3x^2$. Luego $n_0 = 3$.

   Sea $P(n)$ la condición en n; $P(n) : (1+x)^n > 1 + nx + nx^2$, $\forall n \geq 3$.

   Ya verificamos que $P(3)$ es verdadera.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST FUNDADA EN 1620 QUITO

Supongamos que para $k \geq 3$, $P(k)$ es verdadera y probemos que $P(k+1)$ es verdadera. Es decir; vamos a probar que $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x+(n+1)x^2$. En efecto,

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) = (1+x)^k + x(1+x)^k.$$

Por la hipótesis inductiva $(1+x)^k > 1+kx+kx^2$, luego

$$(1+x)^{k+1} > 1+kx+kx^2+x(1+kx+kx^2) = 1+(k+1)x+2kx^2+kx^3.$$

Como $k \geq 3$, entonces $2k > k+1$, de donde

$$2kx^2+kx^3 = x^2(2k+kx) > x^2(k+1).$$

Luego: $(1+x)^{k+1} > 1+(k+1)x+(k+1)x^2$; es decir, $P(k+1)$ es verdadera; consecuentemente el principio de inducción nos garantiza que: $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq 3$.

3. Demostrar que $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Solución.

Sea $P(n): 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

a) $P(1)$ es verdadera, pues

$$2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

b) Sea $k \geq 1$, demostremos que la proposición $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es verdadera supuesto que $P(k)$ es verdadera.
En efecto:

$$\begin{aligned} 1+3+\cdots+(2k-1)+(2k+1) &= [1+3+\cdots+(2k-1)]+(2k+1) \\ &= k^2+(2k+1) = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Deducimos entonces que $P(k+1)$ es verdadera y de a) y b), $P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

4. **Contraejemplo.-** Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ y $P(n)$ la condición $(2n+1)^2 = 8n+1$. Verificar que $P(n)$ no es verdadero para todo $n > 1$.

Solución.

a) $P(1)$ verdadero, pues $(2 \cdot 1+1)^2 = 3^2 = 9 = 8 \cdot 1+1$

b) Veamos si $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ es verdadera supuesto que $P(k)$ es verdadero.

$$\begin{aligned} [2(k+1)+1]^2 &= [(2k+1)+2]^2 = (2k+1)^2+4(2k+1)+4 \\ &= 8k+1+4(2k+1)+4 \text{ Por hipótesis de inducción} \\ &= 16k+9 \\ &= 8(2k+1)+1 \neq 8(k+1)+1. \end{aligned}$$

Luego $P(k) \not\Rightarrow P(k+1)$.

Observación.- Este ejemplo pone de manifiesto la necesidad de aplicar cuidadosamente el Principio de Inducción a fin de no establecer resultados falsos.

Note que $P(1)$ es verdadera, pero $P(2)$ es falsa ya que: $(2 \cdot 2+1)^2 = 25 \neq 8 \cdot 2+1$.

5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que:

a) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

b) $(a^m)^n = a^{mn}$

Demostración.

1. *a)* Sea $P(n) : (ab)^n = a^n \cdot b^n$

   i. $P(1)$ verdadero, pues: $(a \cdot b)^1 = ab = a^1 \cdot b^1$

   ii. Supongamos que $(ab)^k = a^k b^k$ para $k \geq 1$, y demostremos que: $P(k+1)$ es verdadera

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^{k+1} &= (a \cdot b)^k (ab) \\ &= (a^k b^k)(ab) \text{ (hipótesis de inducción)} \\ &= (a^k \cdot a)(b^k \cdot b) \text{ (conmutado y asociado)} \\ &= a^{k+1} \cdot b^{k+1}\end{aligned}$$

   Luego $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

   b) Sea $P(n) : (a^m)^n = a^{mn}$; donde m es fijo

   i. Para $n = 1$, $(a^m)^1 = a^m = a^{m \cdot 1}$, luego $P(1)$ es verdadero.

   ii. Hipótesis de inducción: $(a^m)^k = a^{mk}$;

$$\begin{aligned}(a^m)^{k+1} &= (a^m)^k \cdot a^m \\ &= a^{mk} \cdot a^m \text{ (por la hipótesis de inducción)} \\ &= a^{mk+m} \\ &= a^{m(k+1)} \text{ (propiedad distributiva)}\end{aligned}$$

   luego $P(k+1)$ es verdadera.

En esta parte, hemos utilizado el siguiente resultado

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

el mismo que se propone como ejercicio.

Ejercicios

1. Donde está el error en la "demostración" de la siguiente afirmación:

   Todo número natural es igual a su siguiente número natural.

   Demostración.- La demostración la haremos por el método de inducción matemática.

   Supongamos que: $k = k + 1$, y demostremos que $k + 1 = k + 2$.

   En efecto, sumando 1 a los dos miembros de la igualdad $k = k + 1$, se sigue directamente el resultado.

   Resulta entonces que si la afirmación es verdadera para $n = k$, entonces también lo es para $n = k + 1$. La afirmación queda demostrada.

2. Descubrir el error en la "demostración" de la siguiente afirmación:

   "Todos los seres humanos son del mismo sexo".

   Demostración.- Sea $P(n)$: Todos los conjuntos de n seres humanos son del mismo sexo.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTEARUM EST SCIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

$P(1)$ es evidente.

Supongamos $P(n)$ verdadera y demostremos $P(n+1)$.

Sea A un conjunto de $(n+1)$ seres humanos y sean: $a, b, c \in A$, $B = A \setminus \{b\} C = A \setminus \{c\}$; es decir que B y C son conjuntos de n elementos.

Como $a \in B$ y B tiene n elementos, entonces por la hipótesis de inducción se sigue que todos los elementos de B son del mismo sexo de a; pero como $a \in C$ y C tiene n elementos, entonces por la hipótesis de inducción se sigue que todos los elementos de C tienen el mismo sexo que a. Pero $B \cup C = A$; en consecuencia, todos los elementos de A son del mismo sexo que a.

3. Sean a, $b \in \mathbb{R}$; n, $m \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que:

   a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

   b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $b \neq 0$.

   c) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

   d) $(a^{-n})^m = a^{-nm}$

4. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales. Probar que:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

5. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que:

   a) $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x \geq -1$. Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Bernoulli.

   b) $(1+x)^n > 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, $x \geq 0$.

   c) $(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, $0 \leq x < 1$.

6. Probar que:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

   b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

   c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

   d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. Demostrar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$:

   a) $n(n+1)(n+2)$ (o también que $(n-1)n(n+1)$) es divisible por 6.

   b) $n^2 - n$ es divisible por 2.

   c) $n^4 + 2n^3 + n^2$ es divisible por 4.

8. Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales no negativos. Demostrar que:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

9. Probar que: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

   a) $1-4+9-16+\cdots+(-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2}$

   b) $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}$

   c) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$

   d) $2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

   e) $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2 < \dfrac{n^3}{3}$.

10. Demostrar por inducción que:

   a) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $3^{2n}-2^n$ es divisible por 7.

   b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n}+2^{6n-5}$ es divisible por 11.

   c) $4^{n+1}-(n+1)4^n+1$ es divisible por 9.

   d) 4^n+6n-1 es divisible por 9.

   e) $(a+1)^{n+1}-a(n+1)-1$ es divisible por a^2; donde a es un entero natural cualquiera.

   f) n^3-n es divisible por 6.

   g) n^5-n es divisible por 30.

   h) n^3+11n es divisible por 6.

   i) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $(11)^{n+2}+(12)^{2n+1}$ es divisible por 133.

11. Demostrar que: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $n < n! \leq n^n$.

12. Demostrar que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.

13. Demostrar que para todo número natural $n > 1$,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

14. Hallar el error en la "demostración" dada a la siguiente proposición. Para todo número natural n se cumple la desigualdad.

$$2^n > 2n+1.$$

Demostración.- Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$, donde k es cierto número natural, o sea

$$2^k > 2k+1.$$

Demostremos que entonces la desigualdad también se cumple para $n = k+1$; en efecto, como $2^k \geq 2$, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ entonces $2^k+2^k > 2k+1+2$; es decir que: $2^{k+1} > 2(k+1)+1$; luego la proposición es verdadera para $n = k+1$.

Consecuentemente, la proposición queda demostrada.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
QUITO

15. Demostrar que:

$$1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

16. Demostrar que

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},\quad x\neq 1.$$

17. Demostrar que:

a) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3};\ \forall n\in\mathbb{Z}^+.$

b) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1},\ \forall n\in\mathbb{Z}^+$

c) $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\dfrac{n}{a(a+n)}$

18. Determine para qué valores de n, $2^n<n!$

19. Sea m un entero positivo. Demuestre que para todo entero $n\geq 1$ existen enteros q y r tales que $n=qm+r$, $0\leq r<m$.

20. Pruebe que: $\forall n\geq 2$, $x^n>x$ si $x>1$ y $x^n<x$ si $0<x<1$.

3.2.8. El Símbolo de Sumatoria $\sum$

El símbolo de sumatoria $\sum$ se utiliza para describir sumas en forma abreviada; tiene la forma $\sum_{k=n_0}^{n}A(k)$, donde:

a) $A(k)$ es una expresión que depende de $k\in\mathbb{Z}$ y es el objeto a ser sumado.

b) k se denomina índice de sumación y, $n_0\leq k\leq n$

c) n_0 es el límite inferior de sumación y n el límite superior de sumación.

La expresión $\sum_{k=n_0}^{n}A(k)$ se lee "sumatoria de los $A(k)$ desde $k=n_0$ hasta $k=n$".
Generalmente se usan las letras minúsculas i, j, k, l, m, n como índices de sumación.

EJEMPLOS

1. $1+2+3+\cdots+15=\sum_{i=1}^{15}i.$

2. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{20}=\sum_{i=1}^{20}\dfrac{1}{i}.$

3. $2+4+\cdots+100=\sum_{k=1}^{50}2k.$

4. $a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k.$

5. $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 = \sum_{k=1}^{m} a_k^2$.

Propiedades.

a) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

b) $\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$

c) $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$ (propiedad telescópica)

Demostración.

a) Por definición

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n)\\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i) &= \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_n\\ &= \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\\ &= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots +\\ &\quad (a_{n-1} - a_{n-2}) + a_n - a_{n-1})\\ &= a_n - a_0.\end{aligned}$$

EJEMPLOS

1. Probar que $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

   Solución.- Como $1 = k - (k-1)$, utilizando la propiedad telescópica,

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n}[k - (k-1)] = n - 0 = n.$$

2. Probar que $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solución.- De la igualdad $(k-1)^2 = k^2 - 2k + 1$, obtenemos: $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$, o bien, $k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left[k^2 - (k-1)^2\right]$. Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(k^2 - (k-1)^2)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[k^2 - (k-1)^2] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \left[k^2 - (k-1)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}(n^2 - 0) \\
&= \frac{1}{2}n(n+1).
\end{aligned}$$

3. Probar que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solución.- En efecto, como $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$, entonces: $k^2 = k - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\left[k^3 - (k-1)^3\right]$. Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left[k - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(k^3 - (k-1)^3)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left[k^3 - (k-1)^3\right] \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{3}n + \frac{1}{3}(n^3 - 0) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).
\end{aligned}$$

4. Probar que $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$.

Solución.- Sea $m = k + 1$ entonces $k = m - 1$.

Para $k = 0$, $m = 1$ y para $k = n$, $m = n + 1$.

Resulta entonces que $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{m=1}^{n+1} a_{(m-1)}$ y cambiando nuevamente el índice m por k, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}.$$

5. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, hallar $\sum_{k=0}^{n} x^k$.

Solución.-

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM TENTORIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Puesto que: $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{x-1}(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k$. Calculemos $(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k$. Así:

$$\begin{aligned}(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k &= x\sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(x^{k+1} - x^k) = \sum_{k=1}^{n+1}(x^k - x^{k-1}) \\ &= x^{n+1} - x^0 = x^{n+1} - 1.\end{aligned}$$

Luego $(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} - 1$. De donde

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k &= \frac{1}{x-1}(x-1)\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{x-1}(x^{n+1}-1) \\ &= \frac{x^{n+1}-1}{x-1};\end{aligned}$$

o también, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Así, si $x = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Si $x = \frac{1}{5}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{5^k} &= \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{5}{4}\left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right).\end{aligned}$$

Si $x = 3$, $\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1}-1}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$.

6. Sean $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\{y_1, \ldots, y_n\}$ conjuntos de números reales. Demostrar que:

a) $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| < \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz)

b) $\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$ (desigualdad triangular).

Demostración.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA NUM
FUNDADA EN 1620
QUITO

a) Para todo $t \in \mathbb{R}$, para cada $i = 1, \ldots, n$, se tiene $(x_i - ty_i)^2 \geq 0$, de donde:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - ty_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2tx_iy_i + t^2y_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + t^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2. \end{aligned}$$

Sean $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_iy_iy_i^2$, reemplazado, tenemos $A - 2Bt + t^2C \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, con lo cual el discriminante $\triangle = (-2B)^2 - 4AC \leq 0$, esto es $4B^2 - 4AC \leq 0$ de donde obtenemos que:

$$B^2 \leq AC.$$

Tomando en cuenta que $\sqrt{B^2} = |B|$ y que A y C son no negativos; extrayendo la raíz cuadrada miembro a miembro tenemos:

$$|B| \leq A^{1/2}C^{1/2}$$

y reemplazando A, B y C, obtenemos finalmente,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

b)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2},$$

resulta que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}\right]^2 \end{aligned}$$

y como $\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \geq 0$, extrayendo la raíz cuadrada tenemos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right|^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Ejercicios

1. Probar por inducción que:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

2. Demostrar que: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = 1 - \frac{1}{n+1}$. [**Sugerencia:** $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$].

3. .

   a) Probar que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

   b) Hallar $\sum_{k=1}^{n} k^4$

4. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales. Demostrar que:

   a) $n \min_{i=1,n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq n \max_{i=1,n} |x_i|$.

5. Si $x_1, \ldots, x_n$ son números positivos y si $y_i = 1/x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Pruebe que:
$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right).$$

6. Probar por inducción que:

   a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

   b) $\sum_{i=1}^{n} (2k-1) = n^2$

   c) $\sum_{i=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

   d) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

   e) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   f) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$

   g) $\sum_{i=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}(n^3 - n)$

   h) $\sum_{i=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n$

   i) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = 2n^4 - n^2$

7. Sean $a, b_1, \ldots, b_n$ enteros tales que $\forall i = 1, \ldots, n$, $a|b_i$ (a divide b_i), entonces $a \left|\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\right|$.

8. Sea n un entero tal que $n > 1$. Probar que: $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ y $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1}$ no son enteros.

9. Demostrar que $\prod_{j=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n}$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST AURORA
FUNDADA EN 1620
QUITO

10. Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$, $\forall n \geq 2$.

11. .

a) Uilizando la propiedad telescópica demostrar que:

i. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

ii. $\sum_{i=1}^{n} \frac{10(2k+1)}{k^2(k+1)^2} = 10 - \frac{10}{(n+1)^2}$

iii. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

iv. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(4n+3)}$.

b) Pruebe también por inducción las fórmulas dadas en la parte a)

3.2.9. Factorial y Coeficiente Binomial

Definición 3.29 *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define $n!$, que se lee "n factorial", como sigue:*

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ n! &= (n-1)!\, n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

De la definición, se tiene que:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= (1-1)!\, 1 = 0!\, 1 = 1 \cdot 1 = 1 \\ 2! &= (2-1)!\, 2 = 1!\, 2 = 2 \\ 3! &= (3-1)!\, 3 = 2!\, 3 = 6 \\ &\vdots \\ n! &= (n-1)!\, n = (n-2)!\, (n-1)n \\ &= \ldots = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1)n. \end{aligned}$$

Definición 3.30 *Sean k, $n \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq k \leq n$; el coeficiente binomial denotado por C_n^k se define como*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

EJEMPLOS

1. $C_0^0 = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1.$

2. $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3!4 \cdot 5}{3!2!} = 10.$

3. $C_3^0 = \dfrac{3!}{0!(3-0)!} = \dfrac{3!}{1 \cdot 3!} = 1.$

4. C_2^{-1}, C_3^4 no están definidos.

Propiedades

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$.

b) Si $0 \leq k \leq n$, $C_n^k = C_n^{n-k}$

c) Si $1 \leq k \leq n$, $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$

Demostracin.

a) $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{1 \cdot n!} = 1$; $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{1}{0!} = 1.$

b) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Puesto que $k = n - (n-k)$, entonces

$$C_n^k = \frac{n!}{[n-(n-k)]!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}$$

c)

$$\begin{aligned} C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= n!\left[\frac{1}{(k-1)![n-(k-1)]!} + \frac{1}{k!(n-k)!}\right] \\ &= n!\left[\frac{k+n-(k-1)}{k![n-(k-1)]!}\right] = n!\left[\frac{n+1}{k!(n-k+1)!}\right] \\ &= \frac{(n+1)!}{k![(n+1)-k]!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

Ejercicios

1. Demostrar que:
   a) $n! + (n+1)! = n!(n+2)$
   b) $(n+1)! - n! = n!n.$
   c) Si $m, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(m+n)!}{m!n!} \in \mathbb{Z}^+$
2. Calcular C_6^2, C_{2k}^k, C_8^7, C_5^1.
3. ¿Existe n tal que $C_n^4 = C_n^6$?
4. Probar que:

a) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

b) $C_n^p = \frac{n}{p} \times C_{n-1}^{p-1}$.

5. De la relación: $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$, demostrar que se tiene:

a) $C_{n+1}^p = C_n^p + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2} + \cdots + C_{n-p+1}^1 + 1$

b) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \cdots + C_{p-1}^{p-1}$.

6. Observe que:

$$\begin{aligned} C_1^0 + C_1^1 &= 2 = 2^1 \\ C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 &= 4 = 2^2 \\ C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 &= 8 = 2^3 \end{aligned}$$

Demuestre por inducción que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

3.2.10. Binomio de Newton

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Entonces

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1 \\ (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

En general, para $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Desarrollando el sumatorio, se escribe:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Demostremos por inducción que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^{1-0} b^0 + C_1^1 a^{1-1} b^1 \\ &= 1ab^0 + 1a^0 b^1 = a + b, \end{aligned}$$

luego $P(1)$ es verdadera.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

Supongamos que se cumple para $j \in \mathbb{Z}^+$, es decir:

$$(a+b)^j = \sum_{k=0}^{j} C_j^k a^{j-k} b^k$$

y probemos que:

$$(a+b)^{j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} C_{j+1}^k a^{j+1-k} b^k.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{j+1} &= (a+b)^j (a+b) && \text{definición} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{j} C_j^k a^{j-k} b^k \right) (a+b) && \text{(hipótesis de inducción)} \\
&= \sum_{k=0}^{j} C_j^k \left[a^{j+1-k} b^k + a^{j-k} b^{k+1} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{j} C_j^k a^{j+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{j} C_j^k a^{j-k} b^{k+1}.
\end{aligned}$$

Puesto que $C_j^0 = 1$, $C_{j+1}^0 = 1$, $C_j^j = 1$, $C_{j+1}^{j+1} = 1$,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{j+1} &= C_j^0 a^{j+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^{j} C_j^k a^{j-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{j} C_j^k a^{j-k} b^{k+1} \\
&= C_{j+1}^0 a^{j+1} b^0 + \sum_{k=1}^{j} C_j^k a^{j-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{j+1} C_j^{k-1} a^{j-(k-1)} b^k \\
&= C_{j+1}^0 a^{j+1} b^0 + \sum_{k=1}^{j} \left[C_j^k + C_j^{k-1} \right] a^{j-k+1} b^k + C_j^j a^0 b^{j+1} \\
&= C_{j+1}^0 a^{j+1} b^0 + \sum_{k=1}^{j} C_{j+1}^k a^{j-k+1} b^k + C_{j+1}^{j+1} a^0 b^{j+1} \\
&= \sum_{k=0}^{j+1} C_{j+1}^k a^{j+1-k} b^k.
\end{aligned}$$

Consecuentemente $P(j+1)$ es verdadera y por tanto $P(n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$.

En particular, si $a = 1$, $b = 1$, se tiene:

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k;$$

es decir, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Asímismo, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$, pues

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k(-1)^k 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k}(-1)^k \\ &= [1+(-1)]^n = 0.\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Utilizando el binomio de Newton probar que si un conjunto A tiene n elementos entonces el conjunto partes de A, notado $\mathcal{P}(A)$, tiene 2^n elementos; o lo que es lo mismo, de A se pueden extraer 2^n subconjuntos.

2. Probar que:

   a) $C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^{2p} + \cdots = 2^{n-1} - 1$

   b) $C_n^1 + C_n^3 + \cdots + C_n^{2p+1} + \cdots = 2^{n-1}$.

3. Probar que:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^p)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

4. Probar que se tiene el siguiente resultado para el producto de los coeficientes C_n^p del binomio de Newton:

$$\prod_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{(n!)^{n-1}}{[1!\,2!\cdots(n-1)!]^2}.$$

5. .

   a) Escribir el desarrollo de $(1+x)^n$ por la fórmula del binomio.Se notará C_n^q el coeficiente de x^q, $(q = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

   b) Calcular el coeficiente de $x^q (q \leq n$ y $q \leq p)$ en el desarrollo de cada uno de los miembros de la identidad:

$$(1+x)^n(1+x)^p = (1+x)^{n+p}.$$

   Deducir además la fórmula:

$$C_n^0 C_p^q + C_n^1 C_p^{q-1} + \cdots + C_n^q C_p^0 = C_{n+p}^q. \tag{3.32}$$

   c) Haciendo $n = p = q$ en (3.32), deducir que se tiene:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

6. Demostrar que, cualesquiera que sean los enteros naturales n y p, tales que $p \leq n$, se tiene:

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \cdots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}.$$

   a) Por inducción

   b) Escribiendo $C_{k+1}^{p+1} = C_k^{p+1} + C_k^p$ para $p+1 \leq k \leq n$.

7. Demostrar que, $\forall n \geq 2$, se tiene:

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}.$$

8. Calcular $S = \frac{1}{1}C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n$. (Recordar que $C_{n+1}^p = \frac{n+1}{p}C_n^{p-1}$).

9. Calcular $S = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n$. (Recordar que: $C_n^p = \frac{n}{p}C_{n-1}^{p-1}$).

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo 4

Funciones Reales

4.1. Definición de Función

Definición 4.1 *Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función o aplicación f de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ con las propiedades siguientes:*

i) $\forall x \in A,\ \exists y \in B$ *tal que* $(x, y) \in f$

ii) Si $(x, y),\ (x, z)$ *son elementos de* f, *entonces* $y = z$.

Analicemos la definición de función:

La propiedad i) nos dice que todo elemento de A debe estar en correspondencia con al menos un elemento de B; la propiedad ii) afirma que cada elemento del conjunto A no puede estar en correspondencia con dos o más elementos del conjunto B; o lo que es lo mismo, a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B o también que no pueden existir dos parejas ordenadas en f que tengan iguales las primeras componentes y sean diferentes las segundas. Podemos decir entonces que:

Una función f de A en B es una correspondencia que asocia a cada elemento del conjunto A uno y solo un elemento del conjunto B.

El dominio de f, lo notaremos con $\mathrm{Dom}(f)$; el conjunto B se denomina conjunto de llegada de f.

Si (x, y) es un elemento de f, diremos que y es la imagen de x por f y escribiremos $y = f(x)$ en vez de $(x, y) \in f$. Cuando se escribe $y = f(x)$ se lee "y es igual a f calculado en x" o también que: "x es un antecedente por f de y" o que "y es la imagen de x por f".

Observe que si $x \in A$ entonces $f(x) \in B$.

Para indicar que f es una aplicación de A en B se usan las notaciones:

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{rcl} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

El conjunto formado por todos los elementos de B que están asociados con los elementos de A se denomina recorrido o rango de la función f.

Escribiremos $\mathrm{Rec}(f)$ para indicar el recorrido de f; es decir,

$$\mathrm{Rec}(f) = \{y \in B : y = f(x),\ x \in A\}.$$

Note que $\mathrm{Rec}(f) \subset B$.

EJEMPLOS

1. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$.

   a) Una función f de A en B está dada por:

   $$f = \{(a, 3), (b, 6), (c, 9)\}.$$

   Esta correspondencia puede verse en el siguiente diagrama de Venn.

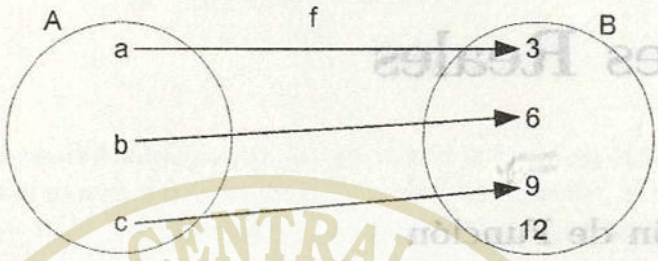


Figura 4.1:

De la definición de la sucesión f, podemos escribir: $f(a) = 3$, $f(b) = 6$, $f(c) = 9$ o también

$$\begin{aligned} a &\mapsto f(a) = 3 \\ b &\mapsto f(b) = 6 \\ c &\mapsto f(c) = 9. \end{aligned}$$

Observe que a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B. El dominio de f es A, el recorrido o rango de f es el conjunto $\{3, 6, 9\}$.

b) Una función g de A en B está dada por:

$$g = \{(a, 12), (b, 6), (c, 3)\}.$$

Ilustramos esta aplicación g en la siguiente figura.

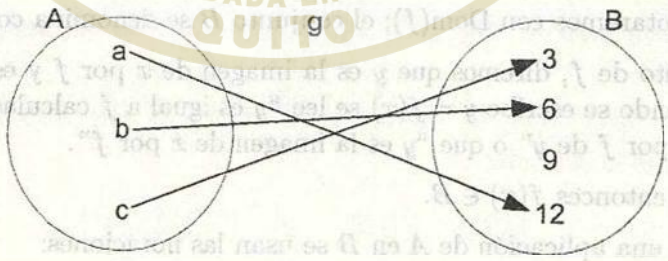


Figura 4.2:

En este caso $g(a) = 12$, $g(b) = 6$, $g(c) = 3$. O también:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ a & \longrightarrow & 12 \\ b & \longrightarrow & 6 \\ c & \longrightarrow & 3 \end{array} \quad \text{o} \quad \begin{array}{ccc} g: A & \longrightarrow & B \\ a & \longrightarrow & 12 \\ b & \longrightarrow & 6 \\ c & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

Además $\text{Dom}(g) = A$, $\text{Rec}(g) = \{3, 6, 12\}$.

c) Sea h el subconjunto de $A \times B$ dado por: $h = \{(a,6),(a,9),(b,3),(c,12)\}$.
La regla de correspondencia h es la siguiente: $h(a) = 6$, $h(a) = 9$, $h(b) = 3$, $h(c) = 12$.
Observamos que para el elemento a vienen asignados dos valores del conjunto B, este hecho nos dice que h no es función.

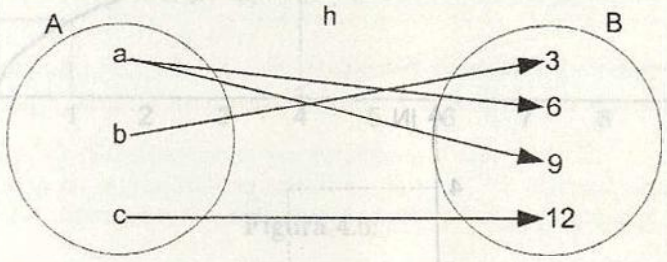


Figura 4.3:

Para que h sea función debería el elemento a estar en correspondencia con un solo elemento de B, situación que no sucede en nuestro ejemplo.

d) En el diagrama de Venn señalado a continuación se ilustra la correspondencia u dada por $u(a) = 3$, $u(b) = 9$. Es claro que u no es función ya que el elemento c no está asociado con ningún elemento de B.

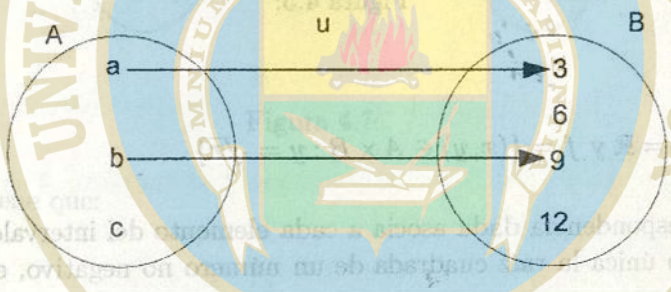


Figura 4.4:

2. Sea $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$ y $f = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x^2\}$.

La correspondencia f es la regla que asocia a cada número natural su cuadrado; f es efectivamente una función pues a cada elemento del conjunto $\mathbb{N}$ le corresponde un único elemento del conjunto $\mathbb{N}$.

Escribimos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = x^2. \end{aligned}$$

Veamos algunos valores que toma la función f:

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$f(2) = 4$

$\vdots$

$f(n) = n^2$

Tenemos que: $\text{Dom}(f) = \mathbb{N}$, $\text{Rec}(f) = \{0, 1, 4, 9, \ldots\} = \{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$, conjunto de los cuadrados de los números naturales.

La función f la podemos representar en el plano cartesiano, para ello, representamos gráficamente el conjunto $\{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), \ldots, (x, x^2), \ldots\}$, como se indica en la siguiente figura.

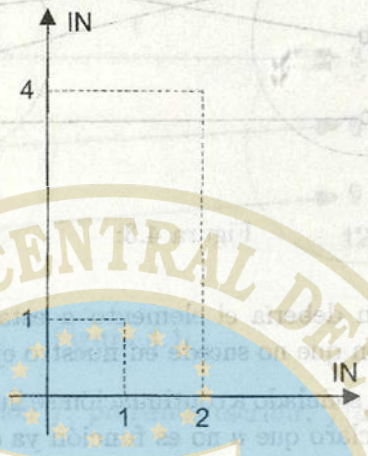


Figura 4.5:

3. Sea $A = [0, 4]$, $B = \mathbb{R}$ y $f = \{(x, y) \in A \times B : y = \sqrt{x}\}$.

La regla de correspondencia dada asocia a cada elemento del intervalo cerrado $[0, 4]$ su raíz cuadrada. Siendo única la raíz cuadrada de un número no negativo, entonces resulta que f es una función.

Calculemos algunos valores de f.

$$\begin{aligned}
0 &\mapsto f(0) = 0 \\
\frac{1}{2} &\mapsto f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,707... \\
1 &\mapsto f(1) = \sqrt{1} = 1 \\
2 &\mapsto f(2) = \sqrt{2} \\
3 &\mapsto f(3) = \sqrt{3} \\
3,5 &\mapsto f(3,5) = \sqrt{3,5} \approx 1,871 \\
4 &\mapsto f(4) = \sqrt{4} = 2
\end{aligned}$$

$\text{Dom}(f) = [0, 4]$, $\text{Rec}(f) = [0, 2]$.

En el plano cartesiano, la representación de f se indica en la Figura 4.6.

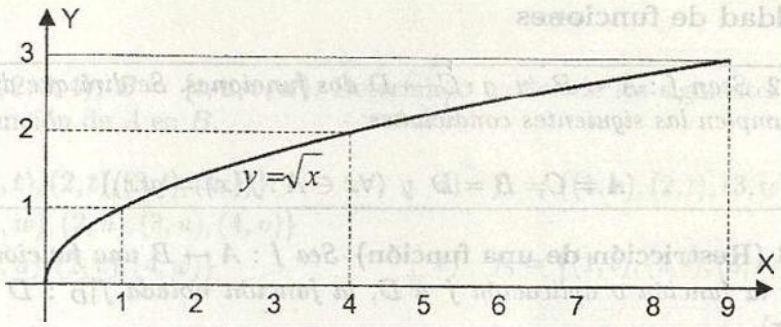


Figura 4.6:

4. Sea $A = \{(a,a),(a,b),(b,b)\}$, $B = \{1,2,3\}$ y $f = \{((a,a),((a,b),2),((b,b),3)\}$ cuya representación se indica en la Figura 4.7



Figura 4.7:

En este caso, se tiene que:

$f((a,a)) = 1$, $f((a,b)) = 2$, $f((b,b)) = 3$.

Note que a cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B, luego f es una función.

5. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2-25}. \end{aligned}$$

¿Es f una función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$?

Solución.

Escribamos $f(x) = \dfrac{1}{x^2-25}$, $x \in \mathbb{Z}$.

Notemos que $f(-5)$ y $f(5)$ no están definidos; este hecho hace que los elementos -5 y 5 no estén en correspondencia con ningún elemento de $\mathbb{R}$, por lo cual f no es función.

Si consideramos como conjunto de partida el conjunto $A = \mathbb{Z} \setminus \{-5,5\}$, entonces:

$$\begin{aligned} g : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2-25} \end{aligned}$$

es una función.

4.1.1. Igualdad de funciones

Definición 4.2 *Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se dirá que dichas funciones son iguales si se cumplen las siguientes condiciones:*

$$A = C,\ B = D\ y\ (\forall x \in A : f(x) = g(x))$$

Definición 4.3 (Restricción de una función) *Sea $f : A \to B$ una función y $D \subset A$. Se llama* ***restricción*** *de la función o aplicación f a D, la función notada $f|_D : D \to B$ tal que $(\forall x \in D, f|_D(x) = f(x)$.*

Inversamente, dada una función $f : A \to B$, se llama prolongación de esta función a S, con $S \subset A$, toda función $g : S \to B$ tal que $\forall x \in A, f(x) = g(x)$.

EJEMPLOS

1. Sea la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \setminus \{-5, 5\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{x^2 - 25} \end{aligned}$$

La restricción de la función f al conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2p,\ p \in \mathbb{Z}\}$ es la función:

$$\begin{aligned} f|_A : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f|_A(x) = \frac{1}{x^2 - 25}. \end{aligned}$$

2. Sea la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Si $A = [1, \hat{3}]$, entonces la restricción de la función f al conjunto A es la función

$$\begin{aligned} f|_A : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f|_A(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

En la Figura 4.8 representamos tanto la función f como $f|_A$ y en el cual la parte más acentuada corresponde a la gráfica de la función $f|_A$.

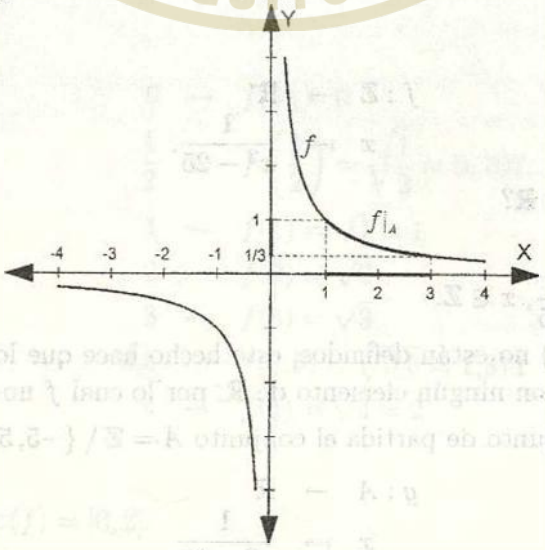


Figura 4.8:

Ejercicios

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{t, u, v, w\}$. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos representan una función de A en B.

   a) $f_1 = \{(1, t), (2, t), (3, t), (4, t)\}$
   b) $f_2 = \{(1, w), (2, u), (3, u), (4, v)\}$
   c) $f_3 = \{(1, u), (2, v), (4, w)\}$
   d) $f_4 = \{(1, v), (2, t), (3, w), (4, u)\}$
   e) $f_5 = \{(1, t), (2, t), (3, v), (4, w)\}$

2. Sean $A = B = \{a, b, c\}$. Escriba todas las funciones f de A en B.

3. Indique cuáles de las siguientes expresiones representan funciones:

   a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 1 + x + x^2$
   b) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$
   d) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$
   e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4 - 3x$
   f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \pm\sqrt{4x^2 - 9}$
   g) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x}$
   h) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4$

4. Decir cuáles de los siguientes conjuntos representan una función

   a) $f = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : x = y^2\}$
   b) $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + x\}$
   c) $h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$
   d) $u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$
   e) $v = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$
   f) $w = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$
   g) $z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$
   h) $p = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = (x - 8)^{\frac{1}{3}}\right\}$

5. Nota.- Una función $f : A \to B$, donde A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ se denomina función real. Indicar el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones reales definidas por:

   a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$
   b) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 3}$
   c) $f(x) = \dfrac{5x - 1}{(x - 3)(x + 7)}$
   d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x - 6}}{2 + |x|}$
   e) $f(x) = \sqrt{2x + 3} - \sqrt{2x - 3}$
   f) $f(x) = \sqrt{-6x^2 + 12x - 20}$
   g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2(3x - 2)^2}{2x - 5}}$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
FUNDADA EN 1826
QUITO

$h)$ $f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+3)^2}$

$i)$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x| + 1} - \sqrt{x^2 - 2|x| + 1}$

$j)$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 6\sqrt{x^2} + 9} + \sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2} + 9}$

$k)$ $f(x) = \sqrt{6x^2 + 13x - 18} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$l)$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5} - \dfrac{1}{|x^2 + 2x - 3|}$

$m)$ $f(x) = \sqrt{|1 + x| - |2x - 4|}$

$n)$ $f(x) = \dfrac{1}{|x - 3| - |x + 4|}$

Observaciones.

- Cuando se pide encontrar el dominio de definición de una función real, lo que se pide es, hallar el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ en el cual está definida la función.
- Algunos autores hacen una distinción entre función y aplicación, así, definen función y aplicación de la siguiente manera:

Definición 4.4 *(Función). Una función f de A en B es una correspondencia que a cada elemento de A asocia a lo más un elemento de B (es decir que pueden existir elementos de A que no tiene imagen).*

Ejemplo de función es

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x}. \end{array}$$

Definición 4.5 *(Aplicación) Una función f de A en B se dice que es una aplicación si* $\mathrm{Dom}(f) = A$*; es decir que todo elemento de A tiene una única imagen en B.*

Ejemplo de una aplicación es

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, es una función pero no una aplicación.

Convención.- Puesto que lo que interesa es el dominio, nosotros no haremos tal distinción y consideraremos las funciones en el sentido de las aplicaciones, es decir que para que $f : A \to B$ sea función *todo* elemento de A debe tener una única *imagen* en B.

4.2. Imagen Directa

Definición 4.6 *Sea $f : A \to B$ una función y $C \subset A$. La imagen directa de C por f es el subconjunto de B de elementos que son imágenes de los elementos de C.*

La imagen directa de un conjunto C mediante f notaremos con $f(C)$ y según la definición se tiene que:

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}.$$

En particular si $C = A$, $f(A)$ es el recorrido de la función f.

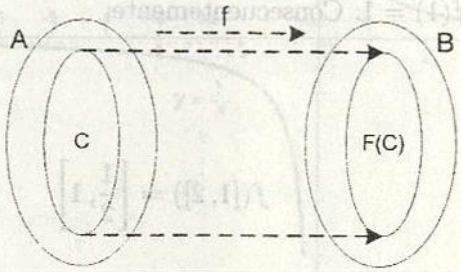


Figura 4.9:

Observe que: $\forall C$ tal que $C \subset A$, $f(C) \subset B$. En particular $f(A) \subset B$ y además $f(A)$ es el recorrido de la función f.

Observemos que un elemento $y \in B$ pertenece a $f(C)$ si y solo si, existe $x \in C$ tal que $y = f(x)$. En otras palabras, $f(C)$ es el subconjunto de B constituido por todos aquellos elementos que son imagen de elementos del conjunto C.

EJEMPLOS

1. Si $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{m, n, o, p\}$ entonces el conjunto $f = \{(a, m), (b, n), (c, o), (d, p), (e, p)\}$ es una función.

   Si $C = \{a, b\}$ entonces $f(C) = \{m, n\}$ ya que $f(a) = m$, $f(b) = n$.

   Si $D = \{a, c, e\}$, entonces $f(D) = \{m, o, p\}$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x + 1$. Entonces:

   a) Si $C = \mathbb{N}$, $f(\mathbb{N}) = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Note que $f(\mathbb{N})$ es el conjunto de los números naturales impares.

   b) Si $C = \mathbb{Z}$, $f(\mathbb{Z})$ es el conjunto de los números enteros impares.

   c) Si $C = \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$, resulta que $f(C) = \mathbb{Z}$, pues si $x \in C$, $x = \frac{n}{2}$ para algún entero n, y entonces

   $$f(x) = f\left(\frac{n}{2}\right) = 2\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = n + 1 \in \mathbb{Z}.$$

   d) Si $C = [0, 1]$, entonces $f(C) = [1, 3]$.

3. Sea la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Determinar:

   a) $f([1, 2])$

   b) $f([-10, -3])$

   c) $f([-1, 1] \setminus \{0\})$

   d) $f(\mathbb{R}^*)$

   Solución.

a) $x \in [1,2] \Rightarrow 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Además $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 1$. Consecuentemente:

$$f([1,2]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

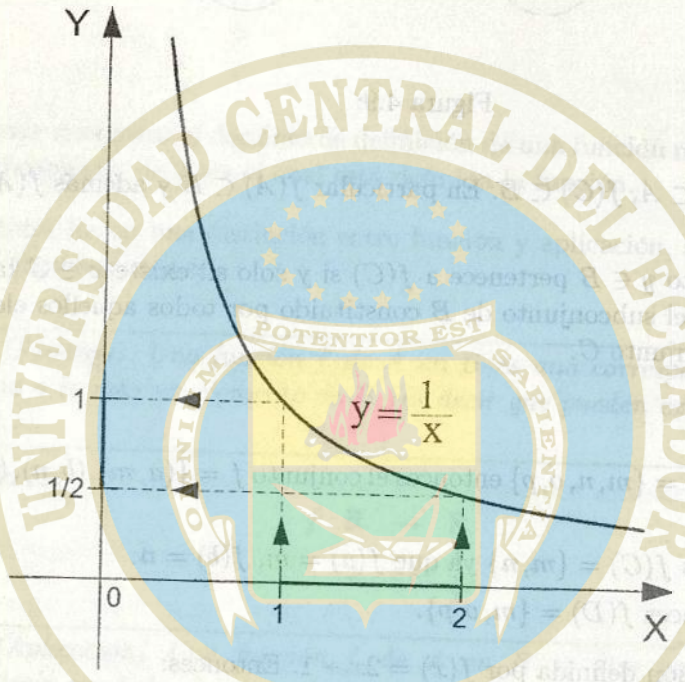


Figura 4.10:

b) $x \in [-10,-3] \Rightarrow -10 \leq x \leq -3$

$\Rightarrow 10 \geq -x \geq 3$

$\Rightarrow \frac{1}{10} \leq -\frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{10} \geq \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq f(x) \leq -\frac{1}{10}$

$\Rightarrow f(x) \in \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{10}\right]$.

Además $f(3) = -\frac{1}{3}$, $f(10) = -\frac{1}{10}$. Luego $f([-10,3]) = \left[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{10}\right]$. (Ver Figura 4.11).

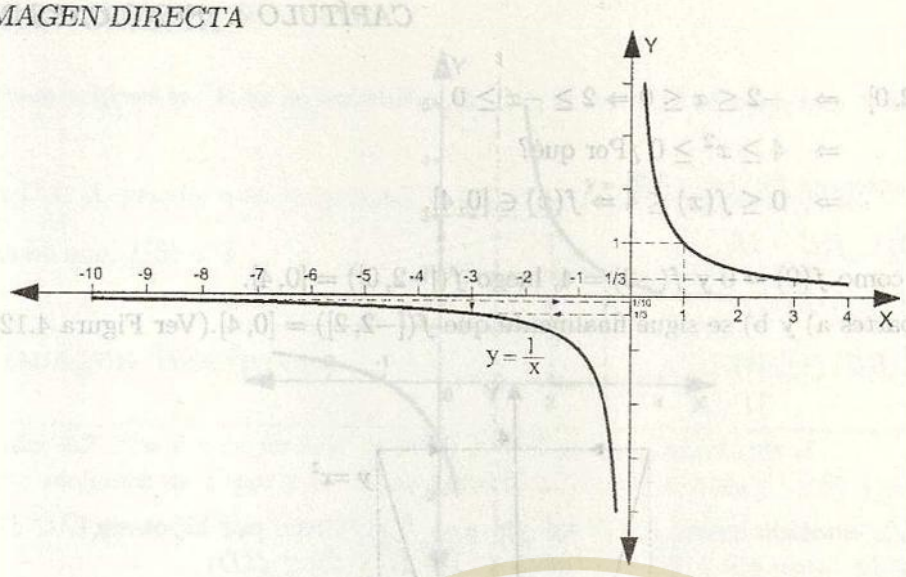


Figura 4.11:

c) $x \in [-1,1] \setminus \{0\} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ y $x \neq 0$.

i. $x < 0 \Rightarrow -1 \leq x < 0$

$\Rightarrow 1 \geq -x > 0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{x} \geq 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x} \leq -1$

$\Rightarrow f(x) \leq -1$

ii. $x > 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1.$

Es decir que: $\begin{cases} x < 0 \Rightarrow f(x) \leq -1 \\ \text{o} \\ x > 0 \Rightarrow f(x) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \Rightarrow f(x) \in]-\infty, -1] \\ \text{o} \\ x > 0 \Rightarrow f(x) \in [1, +\infty[\end{cases}$.

Consecuentemente:

$$x \in [-1,1] \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

d) Como $f(\mathbb{R}^*) = \text{Rec}(f)$ entonces, hallemos el recorrido de la función f.
De $y = \dfrac{1}{x}$ se sigue que $x = \dfrac{1}{y}$, donde y tiene que ser distinto de 0. Por lo tanto $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Determinar:

a) $f([0,2])$
b) $f([-2,0])$
c. $f([-2,2])$
c) $f([1,3])$

Solución.

a) $x \in [0,2] \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow f(x) \in [0,4]$.
Consecuentemente: $f([0,2]) = [0,4]$.

b) $x \in [-2,0] \Rightarrow -2 \leq x \leq 0 \Rightarrow 2 \geq -x \geq 0$

$\Rightarrow 4 \geq x^2 \geq 0$ ¿Por qué?

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow f(x) \in [0,4]$.

Además como $f(0) = 0$ y $f(-2) = 4$, luego $f([-2,0]) = [0,4]$.

c) Por las partes a) y b) se sigue finalmente que $f([-2,2]) = [0,4]$.(Ver Figura 4.12).

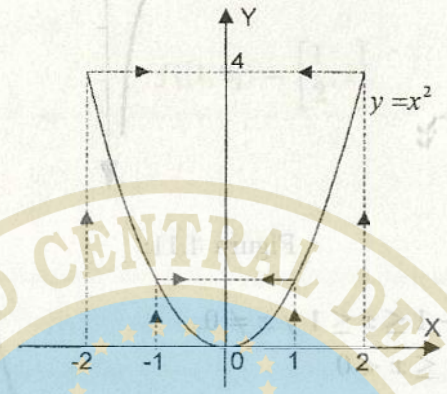


Figura 4.12:

d) $x \in [1,3] \Rightarrow 1 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 9$ ¿Por qué?

$\Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 9 \Rightarrow f(x) \in [1,9]$.

Además $f(1) = 1$ y $f(3) = 9$. Consecuentemente $f([1,3]) = [1,9]$.

5. Sea la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Hallar:

a) $f([2,3])$

b) $f([-2,-1])$

Solución.

Notemos en primer lugar que:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

a) $x \in [2,3] \Rightarrow 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq x-1 \leq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x-1} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{2}{x-1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 2 \leq 1 + \frac{2}{x-1} \leq 3 \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 3$$

$\Rightarrow f(x) \in [2,3]$.

Consecuentemente $f([2,3]) = [2,3]$.(Ver Figura 4.13).

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1620
QUITO

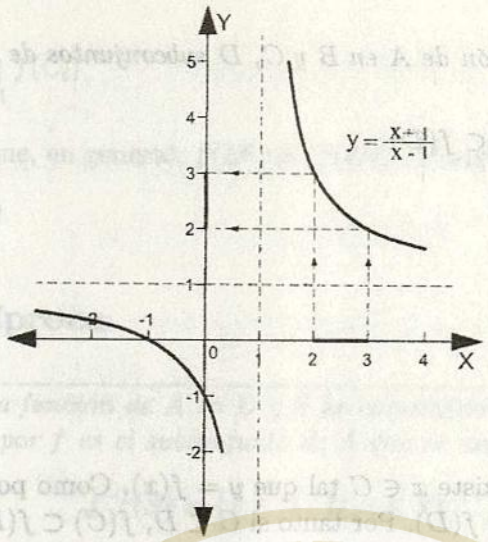


Figura 4.13:

$$b) \quad x \in [-2,-1] \Rightarrow -2 \leq x \leq -1 \Rightarrow -3 \leq x-1 \leq -2$$

$$\Rightarrow 3 \geq -(x-1) \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{-1}{x-1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x-1} \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2}{3} \geq \frac{2}{x-1} \geq -1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 + \frac{2}{x-1} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) \in \left[0, \frac{1}{3}\right].$$

Consecuentemente, $f([-2,-1]) = \left[0, \frac{1}{3}\right]$. (Ver Figura 4.14)

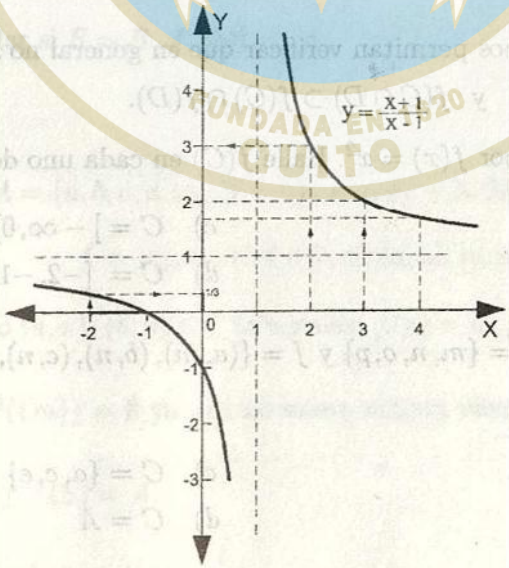


Figura 4.14:

Ejercicio

Si S es una parte propia de A, ¿la imagen $f(S)$ es una parte propia de $f(A)$?

Teorema 4.1 *Sea f una función de A en B y C, D subconjuntos de A, se verifica que:*

i) $C \subset D$, *entonces* $f(C) \subset f(D)$

ii) $f(C) - f(D) \subset f(C - D)$

iii) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$

iv) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.

Demostración

i) Sea $y \in f(C)$, entonces existe $x \in C$ tal que $y = f(x)$. Como por hipótesis $C \subset D$ y $x \in C$ entonces $x \in D$, luego $y \in f(D)$. Por tanto si $C \subset D$, $f(C) \subset f(D)$.

iii) .

- $f(C \cup D) \subset f(C) \cup f(D)$.

  Sea $y \in f(C \cup D)$, entonces existe $x \in C \cup D$ tal que $y = f(x)$. Puesto que $x \in C \cup D \Rightarrow x \in C$ o $x \in D$, de donde se sigue que $y \in f(C)$ o $y \in f(D)$; en consecuencia $y \in f(C) \cup f(D)$.

- $f(C) \cup f(D) \subset f(C \cup B)$.

  Puesto que $C \subset C \cup D$, $D \subset C \cup D$; por la parte i) se tiene que $f(C) \subset f(C \cup D)$ y $f(D) \subset F(C \cup D)$, de donde se sigue el resultado.

iv) Sea $y \in f(C \cap D)$, entonces existe $x \in C \cap D$ tal que $y = f(x)$. Puesto que $x \in C \cap D$, se tiene que, $x \in C$ y $x \in D$, y por tanto $y \in f(C)$ y $y \in F(D)$, esto es $y \in f(C) \cap f(D)$.

Ejercicios

1. Construir ejemplos que nos permitan verificar que en general no se tiene:
   $f(C) \setminus f(D) \supset f(C \setminus D)$ y $f(C \cap D) \supset f(C) \cap f(D)$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Halle $f(C)$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $C = \{-1, 0, 1, 2\}$
   b) $C =]-1, 1[$.
   c) $C =]-\infty, 0]$
   d) $C = [-2, -1[\cup]0, 1]$

3. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{m, n, o, p\}$ y $f = \{(a, m), (b, n), (c, n), (d, o), (e, p)\}$.
   Halle $f(C)$ si

   a) $C = \{a\}$
   b) $C = \{b, c\}$
   c) $C = \{a, c, e\}$
   d) $C = A$

4. Demuestre la propiedad ii).

5. Sean $C_1, \ldots, C_n$ subconjuntos de A. Pruebe que:

   a) $f\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(C_i)$

b) $f\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f(C_i)$

6. Sea $D \subset A$, pruebe que, en general, $f(D^c) \neq (f(D))^c$. Ponga ejemplos.

7. Pruebe que, $f(\emptyset) = \emptyset$.

4.3. Imagen Recíproca

Definición 4.7 *Sea f una función de A en B y S un subconjunto de B.*
La imagen recíproca de S por f es el subconjunto de A que se nota $f^{-1}(S)$ y está definido por:

$$f^{-1}(S) = \{x \in A : f(x) \in S\}.$$

Es decir que la imagen recíproca de S por la función f es el conjunto constituido por las preimágenes de los elementos del conjunto S.

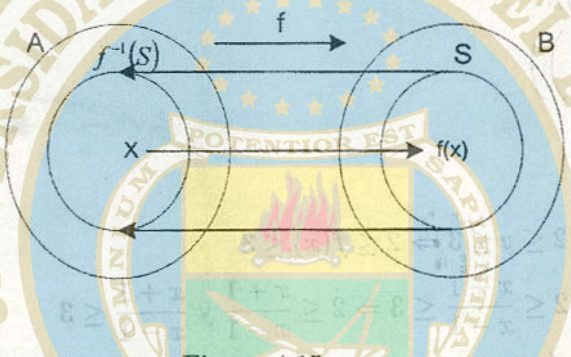


Figura 4.15:

Observación.- En particular si $S = B$, $f^{-1}(B) = A$.

EJEMPLOS

1. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{m, n, o, p\}$ y la función f de A en E dada por

$$f = \{(a, n), (b, n), (c, o), (d, p), (e, p)\}.$$

   a) Si $S = \{n\}$, como $(a, n), (b, n) \in f$ (o también $f(a) = n$, $f(b) = n$) entonces $f^{-1}(\{n\}) = \{a, b\}$.

   b) Si $S = \{m\}$, $f^{-1}(\{m\}) = \emptyset$ ya que no existe ningún elemento de A cuya imagen por f sea igual a m.

   c) Si $S = \{n, o, p\}$, $f^{-1}(S) = A$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   a) Si $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $f^{-1}(S) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ pues $f(1) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$.

b) Si $S=[1,2]$, $f^{-1}(S)=\{x\in\mathbb{R}^+ : f(x)\in[1,2]\}=\left[\frac{1}{2};1\right]$.

En efecto: $f(x)\in[1,2]\Rightarrow 1\leq f(x)\leq 2\Rightarrow 1\leq\frac{1}{x}\leq 2\Rightarrow\frac{1}{2}\leq x\leq 1\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

c) Si $S=\mathbb{R}^+$, entonces $f^{-1}(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$.

3. Dada la función

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}-\{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)=\frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Determinar:

a) $f^{-1}([2,3])$,

b) $f^{-1}([-3,-2])$,

c) $f(f^{-1}([-3,-2]))$,

d) $f^{-1}\left(f\left(\left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]\right)\right)$

Solución.

a) $y\in[2,3] \Rightarrow 2\leq y\leq 3\Rightarrow 2\leq f(x)\leq 3$

$$\Rightarrow 2\leq\frac{x+1}{x-1}\leq 3\Rightarrow 2\leq\frac{x+1}{x-1}\ \text{y}\ \frac{x+1}{x-1}\leq 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } x-1>0 \text{ entonces } 2\leq x\leq 3 \\ \text{o} \\ \text{si } x-1<0 \text{ entonces } x\in\varnothing \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\leq x\leq 3$$

Consecuentemente, $f^{-1}([2,3])=[2,3]$.

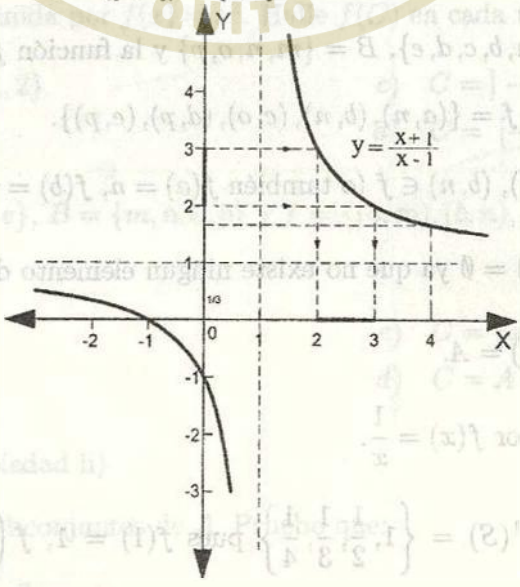


Figura 4.16:

b) $y \in [-3,-2] \Rightarrow -3 \leq y \leq -2$

$$\Rightarrow -3 \leq f(x) \leq -2$$

$$\Rightarrow -3 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } x-1>0 \text{ entonces } x \in \phi \\ \text{o} \\ \text{si } x-1<0 \text{ entonces } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

Luego $f^{-1}([-3,-2]) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

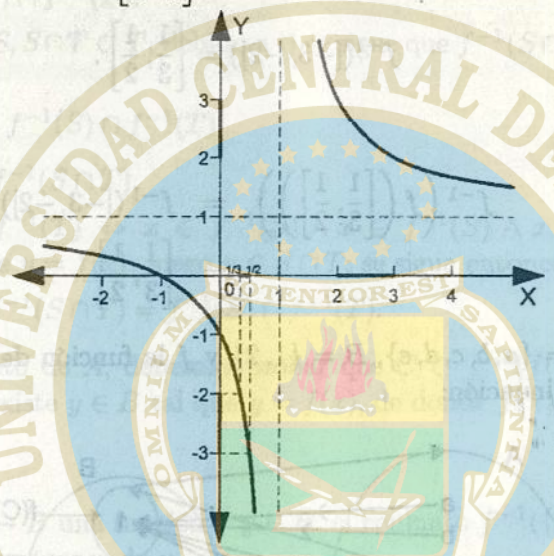


Figura 4.17:

c) $f(f^{-1}([-3,-2])) = ?$

Por la parte b) tenemos que:

$$f^{-1}([-3,-2]) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Calculemos ahora $f(f^{-1}([-3,-2])) = f\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right)$.

Así:

$$x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x-1 \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \geq 1-x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{1}{1-x} \leq 2$$

$$\Rightarrow 3 \leq \frac{2}{1-x} \leq 4 \Rightarrow -4 \leq \frac{2}{x-1} \leq -3$$

$$\Rightarrow -3 \leq 1 + \frac{2}{x-1} \leq -2 \Rightarrow -3 \leq f(x) \leq -2$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM INTENTORES SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$ y $f\left(\frac{1}{3}\right) = -2$ se sigue que:

$$f\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right) = [-3, -2] = f\left(f^{-1}([-3, -2])\right).$$

d) $f^{-1}\left(f\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right)\right)$.

Por los resultados obtenidos en la parte c) tenemos que:

$$f\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right) = [-3, -2].$$

Por la parte b) tenemos en cambio que:

$$f^{-1}([-3, -2]) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Consecuentemente:

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(f\left(\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]\right)\right) &= f^{-1}([-3, -2]) \\ &= \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

4. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2\}$ y f la función de A en B cuyo diagrama de Venn se indica a continuación:

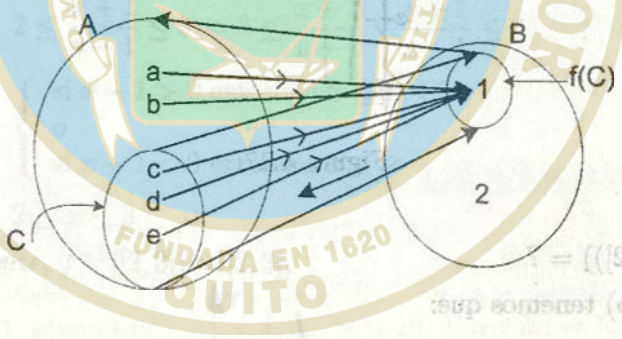


Figura 4.18:

Si $C = \{c, d, e\}$, determinar el conjunto $f^{-1}(f(C))$.

Solución.

$f(C) = \{1\}$ y $f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(\{1\}) = A$. Se observa en este caso que: $C \subset f^{-1}(f(C))$.

Teorema 4.2 *Sea f una función de A en B y S, T subconjuntos de B.*

Se verifica las siguientes propiedades:

i) Si $S \subset T$ entonces $f^{-1}(S) \subset f^{-1}(T)$

ii) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$

iii) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

iv) $f^{-1}(S \setminus T) = f^{-1}(S) \setminus f^{-1}(T)$ y en particular $f^{-1}(S^c) = (f^{-1}(S))^c$.

Entre la imagen directa y la imagen recíproca se tienen las siguientes relaciones:

v) $C \subset f^{-1}(f(C))$ para cada subconjunto C de A

vi) $f(f^{-1}(S)) \subset S$

Demostración

i) Sea $x \in f^{-1}(S)$, entonces existe $y \in S$ tal que $y = f(x)$. Por hipótesis tenemos que $S \subset T$ y como $y \in S$, entonces $y \in T$, es decir, $x \in f^{-1}(T)$.

ii) .

a) $f^{-1}(S \cap T) \subset f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

Puesto que $S \cap T \subset S$, $S \cap T \subset T$, debido a i) se sigue que $f^{-1}(S \cap T) \subset f^{-1}(S)$, $f^{-1}(S \cap T) \subset f^{-1}(T)$.

Luego $f^{-1}(S \cap T) \subset f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

b) $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \subset f^{-1}(S \cap T)$.

Sea $x \in f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(S) \wedge x \in f^{-1}(S) \wedge x \in f^{-1}(T)$, entonces existe $y \in S \wedge y \in T$ tal que $y = f(x)$, luego $y \in S \cap T$; se sigue entonces que $x \in f^{-1}(S \cap T)$.

De a) y b) se tiene $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$.

iv) Sea C un subconjunto de A; debemos probar que $C \subset f^{-1}(f(C))$. En efecto, sea $x \in C$, como f es función, existe $y \in B$ tal que $y = f(x)$, de donde $f(x) = y \in f(C)$; pero entonces, $x \in f^{-1}(f(C))$. ■

Observación. Sea $f : A \to B$ una función y $y \in B$, el conjunto $f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A : f(x) = y\}$ se denomina conjunto de preimágenes de y.

Ejercicios

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ y $f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, d), (5, e)\}$. Hallar $f^{-1}(S)$ si:

   a) $S = \{c\}$
   b) $S = \{b, c\}$
   c) $S = \{a, b, d\}$
   d) $S = B$.

2. Sea $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 1 + x^3$. Hallar $f^{-1}(S)$ en los siguientes casos:

   a) $S = \{-1, 0, 1\}$
   b) $S = [0, 1]$
   c) $S =]-1, 1[\cup \{2\}$
   d) $S =]-\infty, -1]$
   e) $S =]0, +\infty[$
   f) $S = \mathbb{R}$

3. Demuestre las partes b), d) y f) del teorema anterior.

4. Sea C subconjunto de A y T subconjunto de B, pruebe que: $f\left[C \cap f^{-1}(T)\right] = f(C) \cap T$.

5. Sean $T_1, \ldots, T_n$ subconjuntos de B. Pruebe que:

$a)\quad f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(T_i)$

$b)\quad f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}(T_i)$

$c)\quad f(f^{-1}(T)) = T \text{ si } T \subset f(B)$

$d)\quad f^{-1}\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_i\right)^c\right] = \bigcup_{i=1}^{n} (f^{-1}(T_i))^c$

$e)\quad f^{-1}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right)^c\right] = \bigcap_{i=1}^{n} (f^{-1}(T_i))^c$

4.4. Funciones Biyectivas e Inversas

4.4.1. Funciones Inyectivas.

Definición 4.8 *Sea f una función de A en B. Se dice que f es una función inyectiva si verifica la siguiente condición:*

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Recordando que: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$; la definición de función inyectiva puede expresarse entonces como sigue:

$$f \text{ es inyectiva si } \forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Es decir, una función f es inyectiva si a elementos diferentes de A corresponden imágenes diferentes.

De la definición de función inyectiva se sigue que:

$$f : A \to B \text{ no es inyectiva} \Leftrightarrow (\exists x_1, x_2, \in A; x_1 \neq x_2 \neq f(x_1) \neq f(x_2))$$
$$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \text{ y } f(x_1) = f(x_2).$$

EJEMPLOS

1. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 6, 9, 12\}$.

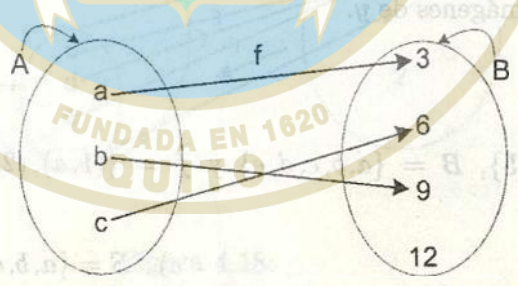


Figura 4.19:

La función f es inyectiva.

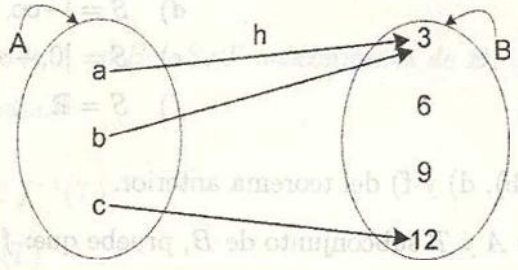


Figura 4.20:

La aplicación h no es inyectiva ya que a los elementos distintos a, b, no les corresponden imágenes distintas, $(a \neq b \not\Rightarrow h(a) \neq h(b))$.

2. Sea la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 2x - 3. \end{aligned}$$

Mostremos que f es inyectiva.

En efecto, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. De $f(x_1) = f(x_2)$ debemos deducir que $x_1 = x_2$. En efecto:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Por tanto f es inyectiva.

Observe que toda recta paralela al eje x corta a la gráfica de f en un solo punto.

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. ¿Es f inyectiva?

Veamos si cumple la condición: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{1}{x_1^2+1} = \dfrac{1}{x_2^2+1} \Rightarrow x_2^2 + 1 - x_1^2 + 1 \Rightarrow x_2^2 = x_1^2 \Leftrightarrow |x_2| = |x_1| \Rightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2)$.

Este último resultado nos dice que las preimágenes, en general, no coinciden. Luego f no es inyectiva.

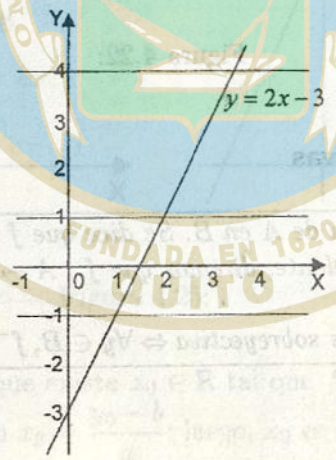


Figura 4.21:

Nótese que trazada una recta paralela al eje x que corte a la gráfica de f, ésta lo hace en dos puntos distintos a menos que sea en $y = 1$.

De los ejemplos 2) y 3) podemos concluir que una función f es inyectiva si toda recta paralela al eje x corta a la gráfica de f en un solo punto.

6. Sea la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. ¿Es la función f inyectiva en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$?

Solución.

Veamos si se tiene la siguiente implicación:

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Así:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \\ &\Rightarrow x_1x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_1x_2 - x_2 + x_1 - 1 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Consecuentemente la función f es inyectiva.

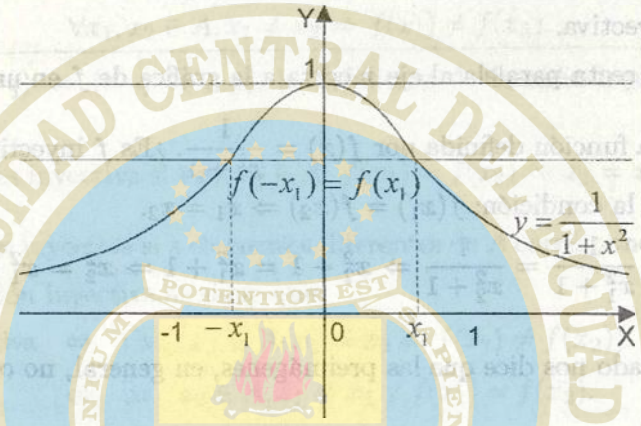


Figura 4.22:

4.4.2. Funciones Sobreyectivas

Definición 4.9 *Sea f una función de A en B. Se dice que f es sobreyectiva si $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$. De manera equivalente, diremos que $f : A \to B$ es sobreyectiva si $f(A) = B$, o también,*

$$f : A \to B \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset.$$

EJEMPLOS

1. Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 6, 9\}$. Consideremos las funciones f y g de A en B cuyos diagramas de Venn se indican a continuación.

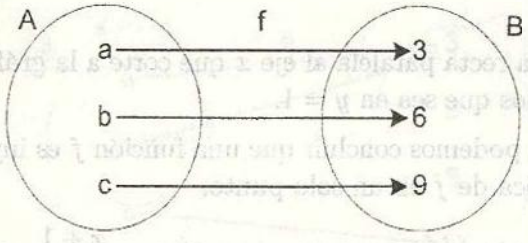


Figura 4.23:

a) En este caso, $\text{Rec}(f) = B = f(A)$, por lo tanto f es sobreyectiva.

b) Como $h(A) = \{3, 6\} = \text{Rec}(h)$, se sigue que $h(A) \neq B$, en consecuencia h no es sobreyectiva puesto que $9 \in B$ no es imagen de ningún elemento del conjunto A o también $h^{-1}(\{9\}) = \varnothing$.

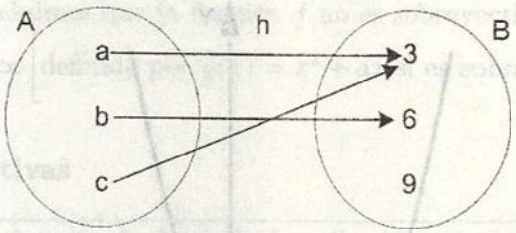


Figura 4.24:

2. Sea la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

donde a, b son números reales con $a \neq 0$. La función f es una función sobreyectiva.

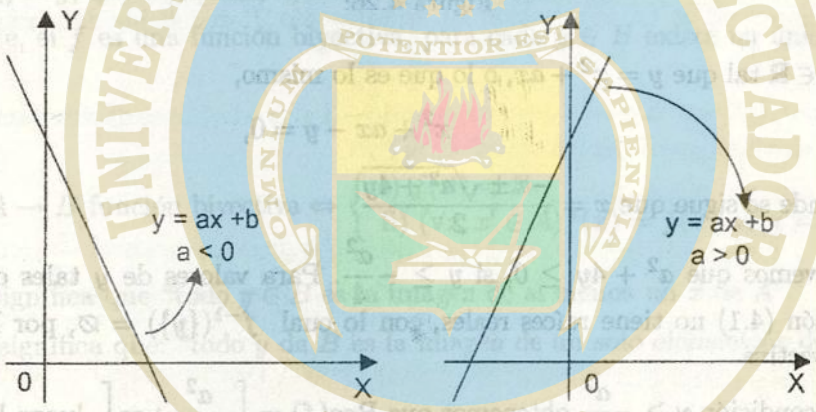


Figura 4.25:

En efecto, sea $y_0 \in \mathbb{R}$, veamos que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = y_0$. Pero si $y_0 = f(x_0)$ se tiene que $y_0 = ax_0 + b$ o también $x_0 = \dfrac{y_0 - b}{a}$; luego, x_0 es la preimagen de y_0, o lo que es lo mismo, $f^{-1}(\{y_0\}) = \left\{\dfrac{y_0 - b}{a}\right\}$.

Verifiquemos que $f(x_0) = y_0$. En efecto $f(x_0) = f\left(\dfrac{y_0 - b}{a}\right) = a\left(\dfrac{y_0 - b}{a}\right) + b = y_0 - b + b = y_0$. Consecuentemente f es sobreyectiva.

3. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + ax$ ¿Es f sobreyectiva? ¿Cuál debe ser el conjunto de llegada para que una nueva función g definida a partir de f en $\mathbb{R}$ sea sobreyectiva?

a) Si $a = 0$, entonces $f(x) = x^2$. Puesto que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, entonces $f(x) \geq 0$.
Si $y \in \mathbb{R}$ es tal que $y < 0$, $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$, con lo cual f no es sobreyectiva.

De lo antes dicho, $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty[$, entonces la función $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ definida por $g(x) = x^2$ es sobreyectiva.
Note que si $y \in [0, +\infty[$, $f^{-1}(\{y\}) = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$, pues $f(-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 = y$, $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.

b) Si $a > 0$.

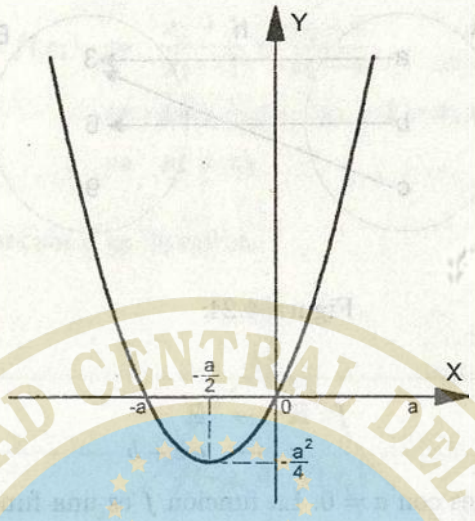


Figura 4.26:

Sea $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = x^2 + ax$, o lo que es lo mismo,

$$x^2 + ax - y = 0, \tag{4.1}$$

de donde se sigue que $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4y}}{2}$.

Observemos que $a^2 + 4y \geq 0$, si $y \geq -\dfrac{a^2}{4}$. Para valores de y tales que $y < -\dfrac{a^2}{4}$ la ecuación (4.1) no tiene raíces reales, con lo cual $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$, por lo tanto f no es sobreyectiva.

De la condición $y \geq -\dfrac{a^2}{4}$ obtenemos que $\text{Rec}(f) = \left[-\dfrac{a^2}{4}, +\infty\right[$, luego la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\dfrac{a^2}{4}, +\infty\right[$ definida por $g(x) = x^2 + ax$ es sobreyectiva. (Ver figura 4.26)

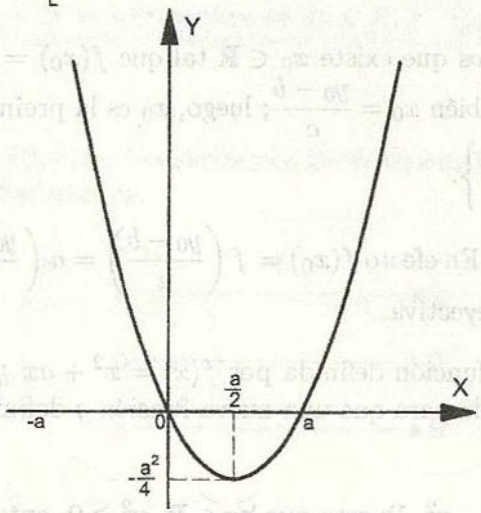


Figura 4.27:

c) Si $a < 0$.

Razonando de manera análoga deducimos que f no es sobreyectiva, sin embargo si definimos la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{a^2}{4}, +\infty\right[$ mediante $g(x) = x^2 + ax$ obtenemos que g es sobreyectiva.

De a), b) y c) concluimos que la función f no es sobreyectiva. Sin embargo, la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{a^2}{4}, +\infty\right[$ definida por $g(x) = x^2 + ax$ si es sobreyectiva.

4.4.3. Funciones Biyectivas

Definición 4.10 *Sea f una función de A en B, f se dice biyectiva si se cumplen las siguientes condiciones:*

i) f es inyectiva

ii) f es sobreyectiva.

La condición ii) afirma que $\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ y de i) existe un único $x \in A$ tal que $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$; de no serlo así, esto es, si existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2\}$ se sigue que $f(x_1) = f(x_2) = y$, que contradice el hecho que f es inyectiva.

Consecuentemente, si f es una función biyectiva, para cada $y \in B$ existe un único $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Observación.

$$f : A \to B \text{ función biyectiva} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } f(A) = B \\ \text{ii) } (\forall x, x' \in A) f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' \end{cases}$$

La propiedad i) significa que "todo $y \in B$ es la imagen de al menos un x de A".

La propiedad ii) significa que: "todo y de B es la imagen de un solo elemento x de A".

EJEMPLOS

1. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 6, 9\}$.

   En los siguientes diagramas se ilustran algunas funciones biyectivas de A en B.

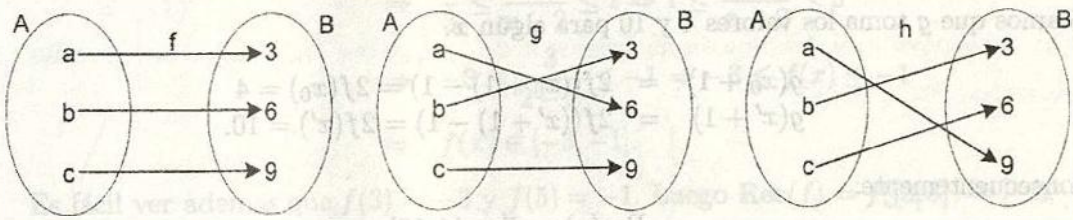


Figura 4.29:

Mientras que la función u cuya correspondencia se ilustra en el diagrama siguiente no es biyectiva ya que no es sobreyectiva.

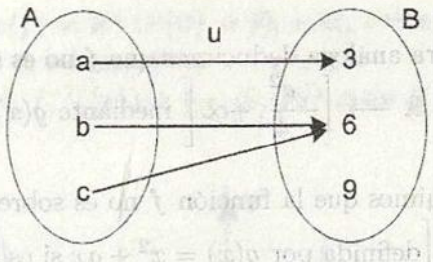


Figura 4.30:

2. Sea

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax + b, \end{cases}$$

donde a y b son números reales, con $a \neq 0$.

Habíamos verificado que f es sobreyectiva; comprobemos que es inyectiva. En efecto, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $ax_1 + b = ax_2 + b$, y como $a \neq 0$, se sigue que $x_1 = x_2$. Luego f es inyectiva y siendo sobreyectiva, f es biyectiva.

3. Sea $f : [-3; 3] \to [2; 5]$ una función biyectiva. Demostrar que la función $g : x \mapsto 2f(x-1)$ es una función biyectiva de un intervalo I' en un intervalo J' que se los determinará.

Solución.

En primer lugar, la función g está definida cuando $-3 \leq x-1 \leq 3$; es decir cuando $-2 \leq x \leq 4$. Por lo tanto tenemos que $\text{Dom}(g) = [-2, 4] = I'$.

Veamos ahora que g es una función inyectiva:

$$\begin{aligned} g(x) = g(x') &\Leftrightarrow 2f(x-1) = 2f(x'-1) \\ &\Leftrightarrow x - 1 = x' - 1, \text{ pues } f \text{ es inyectiva} \\ &\Leftrightarrow x = x'; \end{aligned}$$

es decir que g es inyectiva.

Nos falta probar que g es sobreyectiva. Determinemos en primer lugar el intervalo J'.

Como $f : [-3, 3] \to [2, 5]$ es biyectiva, $\exists x_0 \in [-3, 3]$ tal que $f(x_0) = 2$ y además, $\forall x \in [-3, 3]$, $f(x) \geq 2$. Igualmente, existe $x' \in [-3, 3]$ tal que $f(x') = 5$ y $\forall x \in [-3, 3]$, $f(x) \leq 5$. Consecuentemente:

$$g(x) = 2f(x-1) \leq 10 \quad \text{y} \quad g(x) = 2f(x-1) \geq 4.$$

Veamos que g toma los valores 4 y 10 para algún x.

$$\begin{aligned} g(x_0 + 1) &= 2f((x_0 + 1) - 1) = 2f(x_0) = 4 \\ g(x' + 1) &= 2f((x' + 1) - 1) = 2f(x') = 10. \end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$\text{Rec}(g) = J' = [4, 10].$$

Finalmente, sea $y_0 \in [4, 10]$, entonces $\dfrac{y_0}{2} \in [2, 5]$ y como f es sobreyectiva se sigue que $\exists x_0 \in [-3, 3]$ tal que $f(x_0) = \dfrac{y_0}{2}$. Como $x_0 + 1 \in [-2, 4]$ entonces:

$$g(x_0 + 1) = 2f((x_0 + 1) - 1) = 2f(x_0) = y_0.$$

Luego g es sobreyectiva y como g es inyectiva, se sigue que:

$$\begin{aligned} g : [-2,4] &\to [4,10] \\ x &\mapsto g(x) = 2f(x-1) \end{aligned}$$

es una biyección.

4. Sea $f : [3,5] \to [-3,-1]$ una función definida por $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$. Probar que f es biyectiva.

Solución

a) f es inyectiva. En efecto $\forall x, x' \in [3,5]$, $f(x) = f(x')$ se sigue que $\dfrac{3}{2-x} = \dfrac{3}{2-x'}$, o también $6 - 3x' = 6 - 3x$ y finalmente que $x = x'$.

b) f es sobreyectiva. En efecto: $\forall y_0 \in [-3,-1]$ veamos que existe un $x_0 \in [3,5]$ tal que $f(x_0) = y_0$. Notemos primero que si existe tal x_0 debe verificar la ecuación $y_0 = \dfrac{3}{2-x_0}$; de donde se sigue que: $x_0 = \dfrac{2y_0 - 3}{y_0} = 2 - \dfrac{3}{y_0}$.

Veamos ahora que $x_0 = 2 - 3/40 \in [3,5]$. En efecto

$$\begin{aligned} y_0 \in [-3,-1] &\Rightarrow -3 \le y_0 \le -1 \Rightarrow 3 \ge -y_0 \ge 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \le -\frac{1}{y_0} \le 1 \Rightarrow 1 \le -\frac{3}{y_0} \le 3 \\ &\Rightarrow 3 \le 2 - \frac{3}{y_0} \le 5 \end{aligned}$$

como $2 - \dfrac{3}{y_0} = x_0$ se sigue que $3 \le x_0 \le 5$. Es decir que dado $y_0 \in [-3,-1]$ podemos encontrar $x_0 = 2 - \dfrac{3}{y_0} \in [3,5]$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Otra manera de probar que f es sobreyectiva es verificando que:

$$\mathrm{Rec}(f) = f([3,5]) = [-3,-1].$$

En efecto:

$$\begin{aligned} x \in [3;5] &\Rightarrow 3 \le x \le 5 \Rightarrow -3 \ge -x \ge -5 \\ &\Rightarrow -1 \ge 2 - x \ge -3 \Rightarrow 1 \le x - 2 \le 3 \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{x-2} \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{3}{x-2} \le 3 \\ &\Rightarrow -3 \le \frac{3}{2-x} \le -1 \Rightarrow -3 \le f(x) \le -1 \\ &\Rightarrow f(x) \in [-3,-1]. \end{aligned}$$

Es fácil ver además que $f(3) = -3$ y $f(5) = -1$. Luego $\mathrm{Rec}(f) = f([3,5]) = [-3,-1]$ y en consecuencia f es sobreyectiva.

Como f es inyectiva y sobreyectiva, se concluye que f es biyectiva.

5. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + ax$. Tenemos que f no es inyectiva ni sobreyectiva; sin embargo, podemos construir en este caso a partir de f una nueva función que sea biyectiva.

Solución. En efecto, hemos visto que la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \left[-\frac{a^2}{2}, +\infty\right[$ definida por $g(x) = x^2 + ax$ es sobreyectiva. Pero esta función g tampoco es biyectiva, pues no es inyectiva ya que si $y \in \left[-\frac{a^2}{4}, +\infty\right[$ es tal que $y = x^2 + ax$ entonces:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4y}}{2}$$

que nos dice que el elemento y tiene dos preimágenes; éstas son:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4y}}{2}, \quad x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4y}}{2}.$$

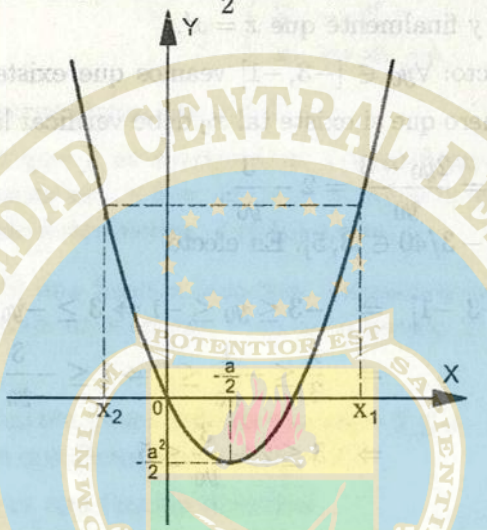


Figura 4.31:

Para obtener una nueva función que sea inyectiva hemos de restringir el conjunto de partida. Sea $y = g(x)$, con $y = x^2 + ax$ entonces:

Para $y = -\frac{a^2}{4}$ obtenemos $x = -\frac{a}{2}$ y para cualquier $y > -\frac{a^2}{4}$ obtenemos dos raíces distintas x_1,x_2 de la ecuación $y + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$; esta situación sugiere que consideremos los intervalos $\left]-\infty, -\frac{a}{2}\right]$ y $\left[-\frac{a}{2}, +\infty\right[$ en cada uno de los cuales hay exactamente una raíz de la ecuación.

Por consiguiente, si definimos una función h de $\left[-\frac{a}{2}, +\infty\right[$ en $\left[-\frac{a^2}{4}, +\infty\right[$, resulta que h es inyectiva. Es decir que:

$$h : \begin{cases} \left[-\frac{a}{2}, +\infty\right[& \to & \left[-\frac{a^2}{4}, +\infty\right[\\ x & \mapsto & x^2 + ax. \end{cases}$$

es una función biyectiva.

Asímismo, la función.

$$j : \begin{cases} \left]-\infty, -\frac{a}{2}\right] & \to & \left[-\frac{a^2}{4}, +\infty\right[, \\ x & \mapsto & x^2 + ax \end{cases}$$

es también biyectiva.

Note que a partir de la función

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2+ax\end{cases}$$

hemos definido[1] dos nuevas funciones que son biyectivas.

6. Dada la función

$$f:\begin{cases}[0,1[& \to & [0,1]\\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

¿Es f biyectiva?

Solución.

Para responder a la pregunta hemos de comprobar si f es inyectiva y sobreyectiva.

Escribamos $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

a) Sean $x_1,x_2\in[0,1[$ tales que $f(x_1)=f(x_2)$, esto es tales que:

$$\sqrt{1-x_1^2}=\sqrt{1-x_2^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos: $1-x_1^2=1-x_2^2$, de donde $x_1^2=x_2^2$. Puesto que $x_1,x_2\in[0,1[$, entonces $x_1=x_2$. Luego f es inyectiva.

b) Sea $y\in[0,1]$, supongamos que $f(x)=y=\sqrt{1-x^2}$ entonces $y^2=1-x^2$ o bien $x^2=1-y^2$ con lo cual $x=\pm\sqrt{1-y^2}$. Como $x\in[0,1]$, entonces $x=\sqrt{1-y^2}$. Consecuentemente $f^{-1}(\{y\})=\left\{\sqrt{1-y^2}\right\}$ que nos dice que f es sobreyectiva.

De a) y b) se concluye que f es biyectiva.

Ejercicios

1. Demostrar que las funciones o aplicaciones siguientes son biyectivas.

a) $f:[-3;1]\to[-1;1]$, $x\mapsto f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$

b) $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $x\mapsto f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

c) $f:[-3,-1]\to[3,5]$, $x\mapsto f(x)=\dfrac{2x-3}{x}$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=2x+|x|+1$

e) $f:\mathbb{R}\to]-1,1[$, $x\mapsto f(x)=\dfrac{-x}{|x|+1}$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto f(x)=\dfrac{x}{|x|+1}$

g) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $x\mapsto f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$

2. Sea f una función biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que $g:x\to f(x-a)$, donde a es un número real, es una función biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

[1] Hemos considerado los subconjuntos de $\mathbf{R}$ "más grandes" en los que estas funciones sean biyectivas

3. Sea f una biyección de $]-1,1[$ en $\mathbb{R}$. Determinar a y b tales que la función $g: x \to f(ax+b)$ sea una biyección de I en $\mathbb{R}$ con:

   a) $I =]0;4[$,

   b) $I =]-1000;1000[$,

   c) $I =]\alpha;\beta[$.

4. Sea f una función biyectiva del intervalo I en el intervalo J. Demostrar entonces que la función g es una biyección del intervalo I' en un intervalo J' que se determinarán en cada uno de los siguientes casos:

   a) $I = [0;2]$; $J = [-3,3]$ y $g(x) \mapsto -f(2x)$

   b) $I =]-1;1[$; $J = \mathbb{R}$ y $g: x \mapsto f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ donde $\lambda > 0$.

5. Una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice que es una dilatación si es biyectiva y dados dos puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2) de $\mathbb{R}^2$, entonces la recta que pasa por las imágenes de dichos puntos es paralela a la recta que contiene los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

   a) ¿Para qué valores de k la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (kx + \alpha, ky + \beta)$ donde k, α, β son constantes, es una dilatación?

   b) Si (x,y) verifica la relación $f(x,y) = (x,y)$, se dice que (x,y) es un punto fijo de la función f. Considerando la parte a) determinar las condiciones para que la dilatación f admita: un punto fijo; ningún punto fijo.

   c) Dado un punto $A = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, si $f(A) \neq A$ se define la traza del punto A que se nota $Tr(A)$ como la recta que pasa por los puntos A y $f(A)$; es decir que $Tr(A) = \overleftrightarrow{Af(A)}$.

   Para la dilatación de la parte a) y de acuerdo a los resultados de la parte b), probar que:

   i. Si f admite un punto fijo, las trazas de todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ (distintos al punto fijo) pasan por dicho punto fijo.

   ii. Si f no admite puntos fijos, entonces, todas las trazas son paralelas.

   d) Por la parte a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (2x+1, 2y+1)$ es una dilatación.

   i. Probar que la imagen del círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ por la dilatación f es otro círculo cuya ecuación se determinará.

   ii. Probar que la imagen de la parábola de ecuación $y = x^2$ es otra parábola cuya ecuación se determinará.

6. Se considera el conjunto $E = \{a, b, c\}$ y la función f de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ definida por: $f(A) = A \cup \{c\}$. Es decir que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ & A & \mapsto & f(A) = A \cup \{c\} \end{array}$$

   a) ¿Es f inyectiva?

   b) ¿Es f sobreyectiva?

4.4.4. Función Inversa

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Hemos visto que en este caso para cada $y \in B$ existe un único $x \in A$ tal que $y = f(x)$; esta situación permite definir una nueva función g de B en A del siguiente modo:

$$\forall y \in B, g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Con mayor precisión tenemos:

Definición 4.11 *Sea f una función biyectiva de A en B. El conjunto $g = \{(y, x) : y = f(x), x \in A\}$ es una función de B en A y se denomina función inversa de la función f. Dicha función la notaremos f^{-1}; es decir que $g = f^{-1}$.*

Observación.-

- De la definición de la función g se sigue que:

$$(y, x) \in g \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f.$$

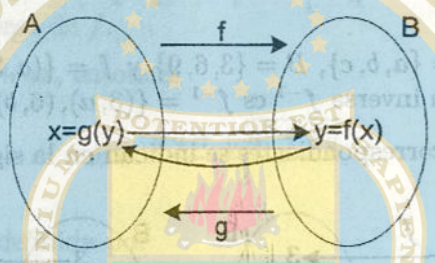


Figura 4.32:

- Debe quedar claro que la notación f^{-1} no significa $\frac{1}{f}$, designa una nueva función cuyo conjunto de salida es B y el conjunto de llegada es A.

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} f^{-1} : B & \longrightarrow & A \\ y & \longrightarrow & f^{-1}(y) = x \end{array}$$

Teorema 4.3 *Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ y f una biyección de A en B, entonces, en un mismo sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, las curvas*

$$\mathcal{C} : y = f(x) \;\; y \;\; \mathcal{C}' : y = f^{-1}(x)$$

son simétricas con respecto a la recta de ecuación $y = x$.

Demostración. Por definición: $\mathcal{C} = \{M = (x, f(x)) : x \in A\}$ y $\mathcal{C}' = \{M' = (y, f^{-1}(y)) : y \in B\}$. Como $\forall y \in B$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, se tiene que: $\mathcal{C}' = \{M' = (f(x), x) : x \in A\}$; lo cual establece el resultado, puesto que; los puntos $M = (x, f(x))$ y $M' = (f(x), x)$ son simétricos con respecto a la recta de ecuación $y = x$. El punto medio del segmento de extremos MM' tiene por coordenadas

$$\left(\frac{x + f(x)}{2}, \frac{x + f(x)}{2}\right)$$

que pertenece a la recta de ecuación $y = x$.

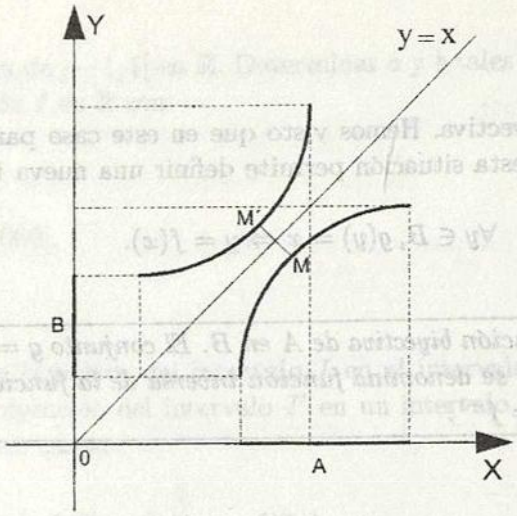


Figura 4.33:

EJEMPLOS

1. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 6, 9\}$ y $f = \{(a, 3), (b, 6), (c, 9)\}$, es claro que f es una función biyectiva. Su inversa f^{-1} es $f^{-1} = \{(3, a), (6, b), (9, c)\}$.

   Los diagramas de Venn correspondientes se indican en la siguiente figura.



Figura 4.34:

   Se tienen las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} f^{-1}(3) = a &\Leftrightarrow f(a) = 3 \\ f^{-1}(6) = b &\Leftrightarrow f(b) = 6 \\ f^{-1}(9) = c &\Leftrightarrow f(c) = 9. \end{aligned}$$

2. Sea f la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. La función f es biyectiva, hallemos su inversa.

   Sea $y \in \mathbb{R}$, si $y = ax + b$ entonces $x = \dfrac{y - b}{a}$. La función inversa de f está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y - b}{a}$.

   Se acostumbra a designar el argumento de la función inversa con el mismo argumento que es utilizado en la función directa, entendiéndose por función directa la función f. Según este convenio, $f^{-1}(y) = \dfrac{y - b}{a}$ puede escribirse $f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a}$.

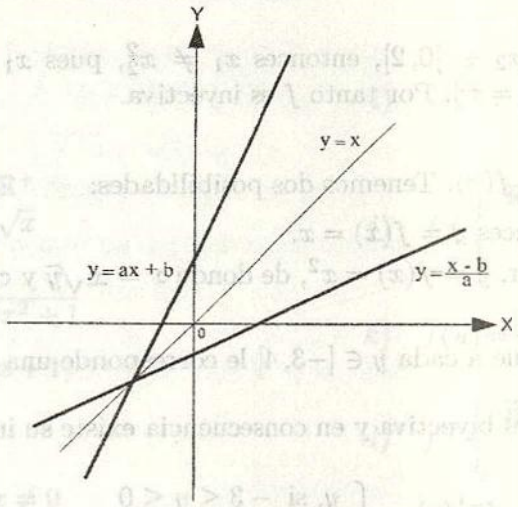


Figura 4.35:

3. Consideremos la función biyectiva $f : \left[-\frac{a}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \left[-\frac{a^2}{4}, +\infty\right[$ definida por $f(x) = x^2 + ax$, $a \in \mathbb{R}$. Determinemos la inversa de f.

   Sea $y \in \mathbb{R}$, si $y = f(x) = x^2 + ax$, entonces

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4y}}{2}.$$

   La función inversa f^{-1} está definida por

$$f^{-1}(y) = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4y}}{2},$$

   o lo que es lo mismo, cambiando la variable y por x,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4x}}{2}\right),$$

   donde $x \in \left[-\frac{a^2}{4}, +\infty\right[$ y $f^{-1}(x) \in \left[-\frac{a}{2}, +\infty\right[$.

4. Sea $f : [-3, 2] \to [-3, 4]$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } -3 \leq x \leq 0 \\ x^2, \text{ si } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

   ¿Existe la función inversa f^{-1}?

   Solución.

   Para determinar si f^{-1} existe, debemos analizar a la función f, esto es, debemos comprobar si f es biyectiva.

   a) ¿f es inyectiva? Así:

   Sean $x_1, x_2 \in [-3, 2]$ tales que $x_1 \neq x_2$; tres son las posibilidades que se presentan:

   i. Si $x_1, x_2 \in [-3, 0]$ entonces $x_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = x_2$.

   ii. Si $x_1, x_2 \in]0, 2]$, entonces $x_1^2 \neq x_2^2$. Luego $f(x_1) \neq f(x_2)$.

iii. Si $x_1 \in [-3,0]$ y $x_2 \in]0,2]$, entonces $x_1 \neq x_2^2$, pues $x_1 \leq 0$ y $x_2^2 > 0$, luego $x_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = x_2^2$. Por tanto f es inyectiva.

b) ¿f es sobreyectiva?

Sea $y \in [-3,4]$, con $y = f(x)$. Tenemos dos posibilidades:

i. Si $y \in [-3,0]$, entonces $y = f(x) = x$.

ii. Si $y \in]0,4]$, es decir, $y = f(x) = x^2$, de donde $x = \pm\sqrt{y}$ y como $x \in]0,2]$ entonces $x = \sqrt{y}$.

De i) y ii) se concluye que a cada $y \in [-3,4]$ le corresponde una sola preimagen.

De a) y b) deducimos que f es biyectiva y en consecuencia existe su inversa f^{-1}; la cual está definida por

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, \text{ si } -3 \leq y \leq 0 \\ \sqrt{y}, \text{ si } 0 < y \leq 4 \end{cases}$$

o también

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, \text{ si } -3 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x}, \text{ si } 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

La representación gráfica de las funciones f y f^{-1} se indican en la siguiente figura.



Figura 4.36:

Ejercicios

1. Dados los conjuntos $A = \{a,b,c,d,e\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$. Indicar cuáles de los siguientes subconjuntos de $A \times B$ representan una función biyectiva.

   a) $\{(a,1),(b,2),(c,3),(d,3),(e,1)\}$
   b) $\{(a,2),(b,1),(c,3),(d,5),(e,4)\}$
   c) $\{(a,5),(b,1),(c,3),(d,5),(e,2)\}$
   d) $\{(a,3),(b,5),(c,2),(d,4),(e,1)\}$
   e) $\{(a,4),(b,3),(c,5),(d,1),(e,2)\}$

2. Indicar cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, cuáles sobreyectivas y cuáles biyectivas y en este último caso, determinar su inversa. (En aquellos casos en que no se indica el conjunto de llegada, tomar dicho conjunto igual a $\mathbb{R}$).

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

b) $f(x) = x\,|x|$

c) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$

d) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$

e) $f(x) = x^2 - |x+1|$

f) $f(x) = x^3$

g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

h) $f : \begin{array}{ccc}]-2,2[& \to & [2,\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \end{array}$

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2}, & x \neq -2 \\ 0, & x = -2 \end{cases}$

j) $f : \begin{cases} \mathbb{R}-\{2\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x+2}{x-2} \end{cases}$

k) $f(u) = \begin{cases} u, & u \in \mathbb{Q} \\ 1-u, & u \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$

l) $f : \begin{cases} \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x}{x+1} \end{cases}$

m) $f(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|v|}, \text{ si } |v| \neq 1 \\ -1, \text{ si } v = -1 \\ 1, \text{ si } v = 1 \end{cases}$

n) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

3. Para qué valores de $n \in \mathbb{Z}^+$, la función f definida por $f(x) = x\,|x|^n$ es inyectiva?

4. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{Z}^+$, la función f definida por $f(x) = x|x|^n$ es inyectiva?

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva. Definimos $(-f)(x) = -f(x)$ y $(f^2)(x) = [f(x)]^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

   a) Demuestre que $(-f)$ es biyectiva.

   b) Pruebe que f^2 no es biyectiva.

6. Demuestre que las funciones siguientes son biyectivas y además halle su inversa.

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{cases}$

b) $f : \begin{cases}]0,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{cases}$

c) $g : \begin{cases} [-3,5] & \to & \left[-1, \dfrac{8}{3}\right] \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{3}x + 1 \end{cases}$

d) $h : \begin{cases} [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ x & \mapsto & x + \dfrac{1}{x} \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} -(t-2), \text{ si } t \leq 2 \\ -t^2 + t + 2, \text{ si } t > 2 \end{cases}$

f) $f(t) = \begin{cases} -t^2, \text{ si } t \leq 0 \\ -t^3, \text{ si } t > 0 \end{cases}$

g) $f(u) = \begin{cases} u^2 + 2u, \text{ si } u \leq -1 \\ \dfrac{1}{u}, \text{ si } -1 < u < 0 \end{cases}$

h) $f(v) = \begin{cases} -v^2, \text{ si } v < -1 \\ v, \text{ si } -1 \leq v \leq 0 \\ \sqrt{v}, \text{ si } v > 0 \end{cases}$

i) $f(v) = \begin{cases} -\sqrt{-(v+4)}, \text{ si } v \leq -4 \\ \dfrac{1}{2}v + 2, \text{ si } -4 < v \leq 0 \\ v^2 + 2, \text{ si } v > 0 \end{cases}$

j) $f(x) = x^3 + a,\ a \in \mathbb{R}$

7. Sea f una función biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define $(f^n)(x) = [f(x)]^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que f^n es biyectiva si y solo si n es impar; y que f^n no es biyectiva si n es par.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN QUITO

8. Las siguientes funciones no son sobreyectivas. En cada caso, calcule $\text{Rec}(f)$, halle un subconjunto A de $\mathbb{R}$ tal que $f(A) = \text{Rec}(f)$ y tal que f sea inyectiva en A.

   a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
   b) $f(x) = x^2 + 2x + a,\ a \in \mathbb{R}$
   c) $f(t) = 4t^2 - t^4$
   d) $h(u) = \dfrac{2}{u^2},\ u \neq 0$
   e) $g(v) = \sqrt{v^2 + 1}$
   f) $f(x) = \sqrt{ax + 1},\ a \in \mathbb{R}$
   g) $h(x) = ax^{2n},\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}^+$
   h) $g(t) = at^{2n},\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}^-$ y $t \neq 0$

9. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Sean M y N subconjuntos de A. Demuestre que

   a) $f^{-1}(f(M)) = M$
   b) $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$
   c) $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$
   d) Si $M \subset N$ entonces $f(N \setminus M) = f(N) \setminus f(M)$.
   e) Si f verifica una de las propiedades a) a d), ¿se deduce que f es inyectiva?

10. Sea $f : A \to B$ una aplicación biyectiva.

    a) Sean M y N subconjuntos de A. Demuestre que
       i. $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$
       ii. $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$
       iii. $f(M \setminus N) = f(M) \setminus f(N)$
       iv. $f(M \triangle N) = f(M) \triangle f(N)$
    b) Si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son subconjuntos de A. Demuestre que:
       i. $f\left(\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(M_i)$
       ii. $f\left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} f(M_i)$.

4.5. Composición de Funciones

Definición 4.12 *Sean A, B, C conjuntos, f una función de A en B y g una función de B en C. La función $h : A \to C$ definida por $h(x) = g(f(x))$ se denomina función compuesta de f y g. Notaremos a la función h con $g \circ f$, es decir, $h = g \circ f$ ("que se lee g compuesto con f").*

Observemos el siguiente diagrama.

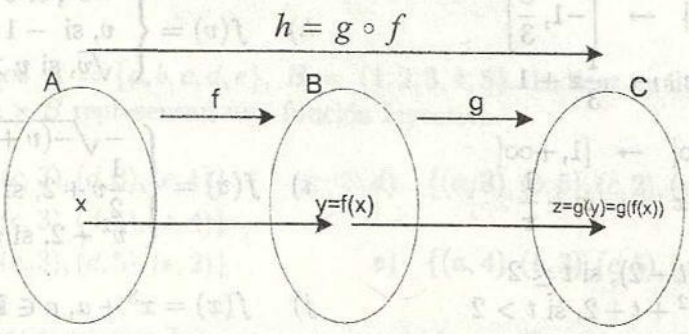


Figura 4.37:

Sea $x \in A$, la función f aplicada en x lo transforma en $f(x) = y \in B$ y la función g transforma a y en $z = g(y) = g(f(x)) \in C$; este hecho podemos expresarlo del siguiente modo: $g \circ f$ transforma a $x \in A$ en $g(f(x)) \in C$.

De la definición de función compuesta tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para cada $x \in A$.

Se debe tener presente que para definir la función compuesta, el conjunto de llegada de f tiene que ser el mismo que el conjunto de salida de g.

Observación.- $(x, z) \in g \circ f \Leftrightarrow \exists y \in B$ tal que $y = f(x)$ y $z = g(y)$.

EJEMPLOS

1. Sean
$$\begin{array}{ccccc} f : \mathbb{Z}^+ & \longrightarrow & \mathbb{Z}^+ & \quad g : \mathbb{Z}^- & \longrightarrow & \mathbb{Z}^+ \\ n & \longrightarrow & 2n & ; \quad n & \longrightarrow & -n. \end{array}$$
Es claro que en este caso no es posible definir la función compuesta $g \circ f$ ya que el conjunto de llegada de f es diferente del conjunto de salida de g. En cambio, si es posible definir $f \circ g$. En efecto:
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^- & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}^+ \\ n & \longmapsto & g(n) = -n & \longmapsto & f(g(n)) = -2n. \end{array}$$

2. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{p, q, r\}$. Determinar $g \circ f$, función compuesta de f y g si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ están definidas por:

   a) $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$, $g = \{(1, p), (2, q), (3, r), (4, r)\}$. (Ver Figura 4.38).

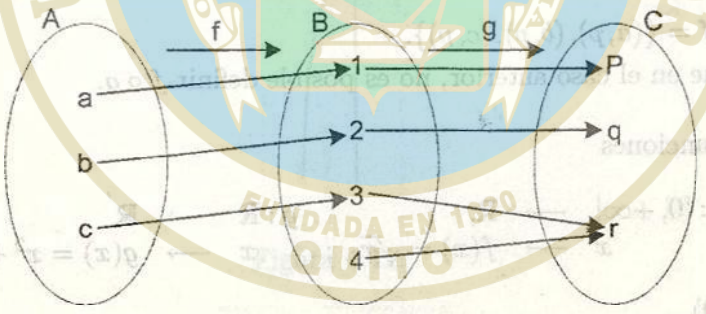


Figura 4.38:

En este caso se tiene que:

$$\begin{array}{lll} f(a) = 1, & g(1) = p, & g(f(a)) = p \\ f(b) = 2 & g(2) = q & g(f(b)) = q \\ f(c) = 3 & g(3) = r & g(f(c)) = r \\ & g(4) = r & \end{array}$$

Observe que $(4, r) \in g$ pero no existe ningún elemento de A cuya imagen mediante f sea igual a 4, entonces $g \circ f$ es la aplicación de A en C dada por

$$g \circ f = \{(a, p), (b, q), (c, r)\}.$$

Observe que en este caso no es posible definir $f \circ g$.

b) $f = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$, $g = \{(1,p),(2,p),(3,r),(4,r)\}$. (Ver Figura 4.39).

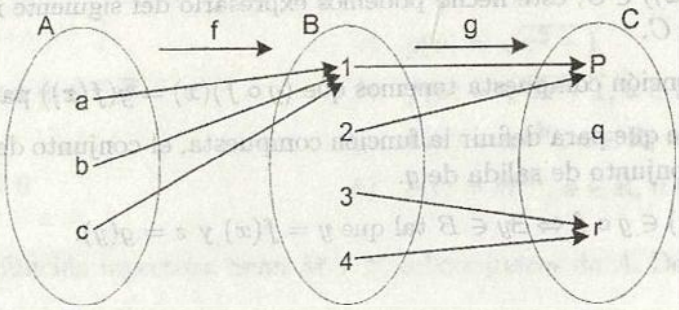


Figura 4.39:

Note que los elementos 2, 3 y 4 de B, no son imágenes de ningún elemento de A.

Como:

$$\begin{aligned} f(a) &= 1 & g(1) &= p \\ f(b) &= 1 & g(2) &= p \\ f(c) &= 1 & g(3) &= r \\ & & g(4) &= r, \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} g(f(a)) &= p \\ g(f(b)) &= p \\ g(f(c)) &= p \end{aligned}$$

o bien $g \circ f = \{(a,p),(b,p),(c,p)\}$.

Al igual que en el caso anterior, no es posible definir $f \circ g$.

3. Sean f y g las funciones

$$\begin{array}{rcl} f : [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longrightarrow & f(x) = \sqrt{x}; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & g(x) = x^2 + x - 1 \end{array}$$

(Ver Figura 4.40).

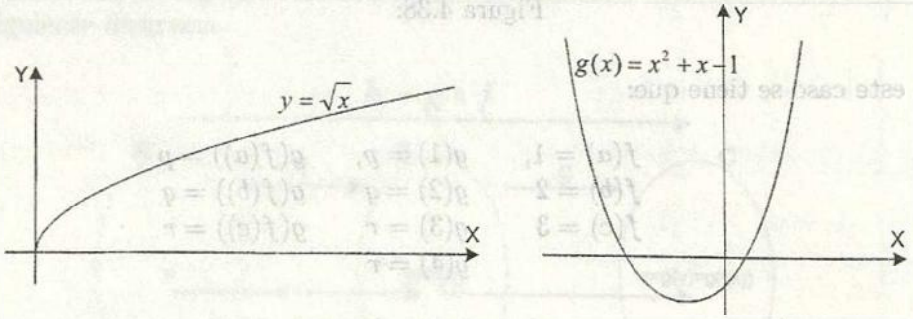


Figura 4.40:

Es claro que podemos determinar únicamente $g \circ f$.

Como $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 1 = x + \sqrt{x} - 1$, la función $h = g \circ f$ está definida por: $h(x) = x + \sqrt{x} - 1$, $\forall x \in [0, +\infty[$; es decir que h es la función

$$\begin{aligned} h : [0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = x + \sqrt{x} - 1. \end{aligned}$$

Ejercicios Resueltos

1. Sean f y g las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = ax + b$, $g(x) = (x - b)^3$, donde a y b son constantes reales no nulas. Calcular $g \circ f$, $f \circ g$ y $f \circ f$.

   Solución

   a)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

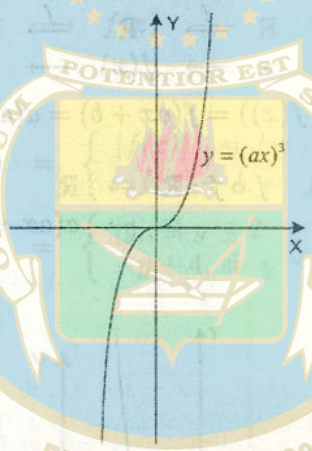


Figura 4.41:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA OMNIUM
FUNDADA EN 1620
QUITO

De acuerdo a la definición de composición de funciones, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (ax + b - b)^3 = (ax)^3$, es decir, $(g \circ f)(x) = (ax)^3$ con lo cual

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (ax)^3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x - b)^3) = a(x - b)^3 + b$ y de donde,

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a(x - b)^3 + b. \end{aligned}$$

(Ver Figura 4.42).

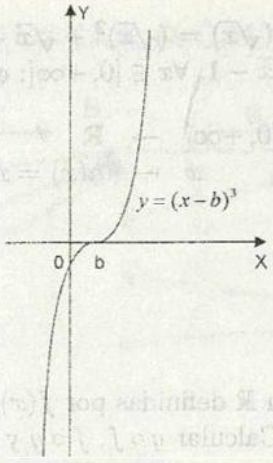


Figura 4.42:

Observe que $f \circ g \neq g \circ f$, más adelante haremos referencia a este ejemplo ya que por lo general $f \circ g \neq g \circ f$.

c)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & f(f(x)). \end{array}$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b)+b$.
Luego:

$$\begin{array}{rcl} f \circ f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a(ax-b)+b. \end{array}$$

(Ver Figura 4.43).

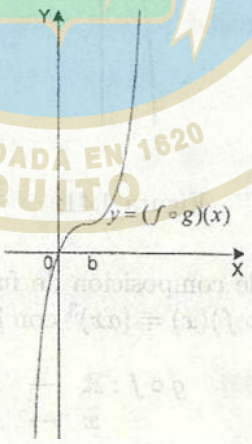


Figura 4.43:

2. Dadas las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq -1 \\ -1+\sqrt{x+1}, & \text{si } x > -1; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \leq 2 \\ -x+4, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y cuyas representaciones gráficas se indican en la siguiente figura. Hallar $g \circ f$.

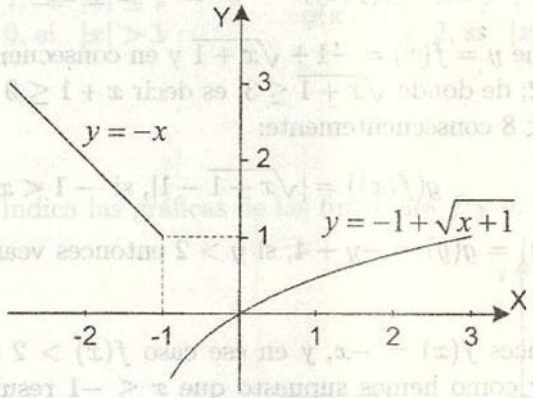


Figura 4.44:

Solución

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)). \end{array}$$

Sea $y = f(x)$, entonces

$$g(f(x)) = \begin{cases} |f(x)|, & \text{si } f(x) \leq 2 \\ -f(x) + 4, & \text{si } f(x) > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |y|, & \text{si } y \leq 2 \\ -y + 4, & \text{si } y > 2 \end{cases}$$



Figura 4.45:

Puesto que $g(y) = |y|$ si $y \leq 2$, entonces determinemos los valores de x para los cuales $f(x) \leq 2$. Así:

a) Si $x \leq -1$, $f(x) = -x$ y en ese caso $f(x) \leq 2$ es equivalente a $-x \leq 2$, de donde se sigue que $x \geq -2$ y como $x \leq -1$, entonces $-2 \leq x \leq -1$, con lo cual $g(f(x)) = g(y) = |y| =$

$|-x| = -x$; esto es: $g(f(x)) = -x$ si $-2 \leq x \leq -1$.

$$g(f(x)) = -x \text{ si } -2 \leq x \leq -1.$$

b) Si $x > -1$ se tiene $y = f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$ y en consecuencia $f(x) \leq 2$ es equivalente a $-1 + \sqrt{x+1} \leq 2$; de donde $\sqrt{x+1} \leq 3$, es decir $x + 1 \leq 9$ o bien $x \leq 8$ y como $x > -1$, resulta $-1 < x < 8$ consecuentemente:

$$g(f(x)) = |\sqrt{x+1} - 1|, \text{ si } -1 < x \leq 8.$$

Además, como $g(f(x)) = g(y) = -y + 4$, si $y > 2$ entonces veamos para qué valores de x se verfica que $f(x) > 2$.

a) Si $x \leq -1$ entonces $f(x) = -x$, y en ese caso $f(x) > 2$ es equivalente a $-x > 2$, de donde $x < -2$ y como hemos supuesto que $x \leq -1$ resulta que $x < -2$, con lo cual $g(y) = g(f(x)) = g(-x) = -(-x) + 4 = x + 4$. Es decir:

$$g(f(x)) = x + 4, \text{ si } x < -2.$$

b) Si $x > -1$ es $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ y la inecuación $f(x) > 2$ es equivalente a $\sqrt{x+1} - 1 > 2$ o lo que es lo mismo $\sqrt{x+1} > 3$ de donde $x > 8$ y teniendo además en cuenta que $x > -1$, resulta que $x > 8$. Luego:

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x+1} - 1) = -(-1 + \sqrt{x+1}) + 4 = -\sqrt{x+1} + 5, \text{ si } x > 8.$$

Es decir que:

$$g(f(x)) = -\sqrt{x+1} + 5, \text{ si } x > 8.$$

De los resultados anteriores se sigue que $g \circ f$ es la función definida por:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{si } x < -2 \\ -x, & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ |\sqrt{x+1} - 1|, & \text{si } -1 < x \leq 8 \\ -\sqrt{x+1} + 5, & \text{si } x > 8. \end{cases}$$

(Ver Figura 4.46).

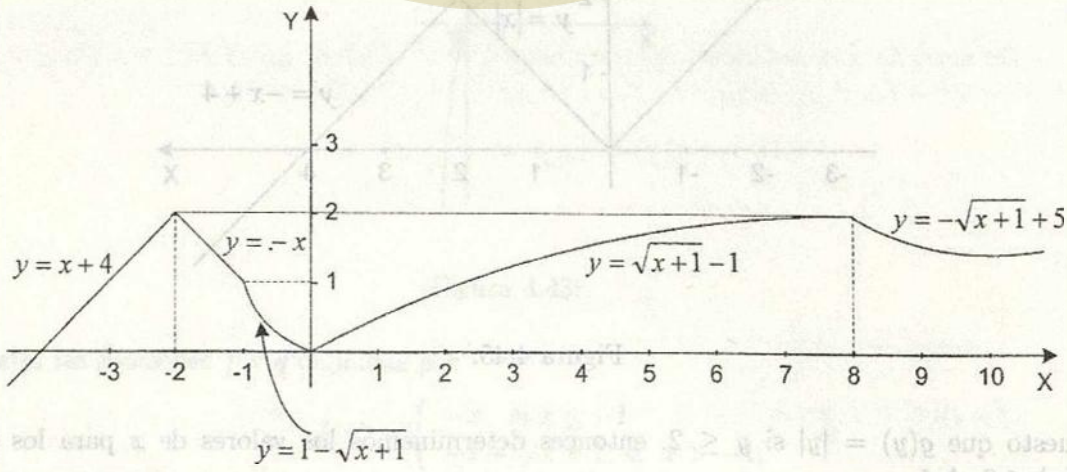


Figura 4.46:

3. Sean f y g las funciones reales definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{si } |x| < 2 \\ 2, & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución.

En la figura siguiente se indica las gráficas de las funciones f y g. Determinemos $f \circ g$.

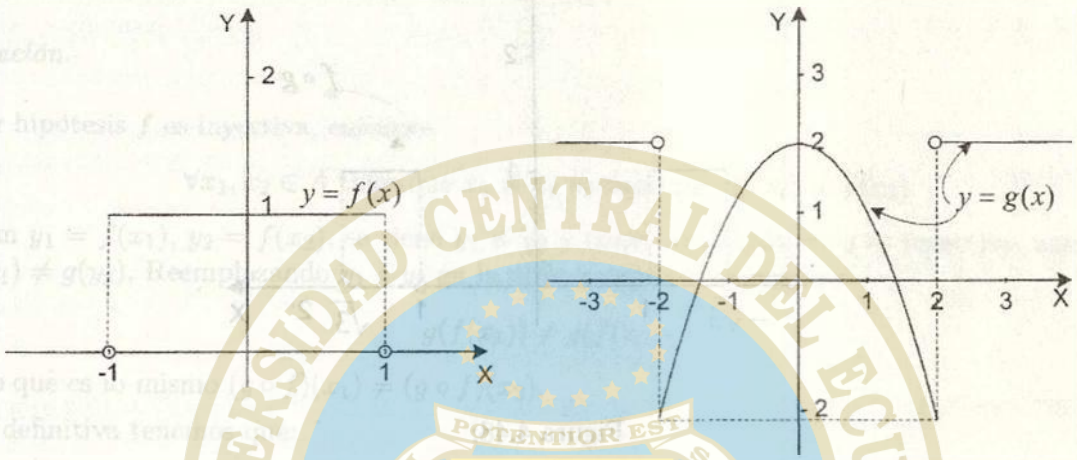


Figura 4.47:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{si } |g(x)| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |g(x)| > 1 \end{cases}$$

Veamos entonces para qué valores de x, se tiene $|g(x)| > 1$ y para qué valores de x, $|g(x)| \leq 1$.

De acuerdo a la definición de la función g, se tiene que si $|x| > 2$ entonces $g(x) = 2$ y en ese caso $|g(x)| = 2 > 1$. Consecuentemente, $\forall x$, tal que $|x| > 2$, $f(g(x)) = 0$, puesto que $|g(x)| > 1$.

Analicemos ahora lo que pasa en el intervalo $[-2, 2]$, en donde g está definida como una rama de parábola.

Es claro que si $x \in [-2, 2]$, $g(x) \in [-2, 2]$, veamos entonces en este intervalo para qué valores de x, se tiene que $|g(x)| \leq 1$. Así:

$$\begin{aligned} |g(x)| \leq 1 &\Leftrightarrow |2 - x^2| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 2 - x^2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq -x^2 \leq -1 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Es decir que: $|g(x)| \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$, en cuyo caso $f(g(x)) = 1$; es decir que $f(g(x)) = 1$ si $1 \leq |x| \leq \sqrt{3}$.

Se tiene inmediatamente que si $x \in [-2, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2]\cup]-1, 1[$, $|g(x)| > 1$, luego $f(g(x)) = 0$.

Resumiendo tenemos que:

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [-\sqrt{3}, 1] \cup [1, \sqrt{3}] \\ 0, \text{ si } x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[. \end{cases}$$

La representación gráfica de $f \circ g$ se indica en la figura siguiente.

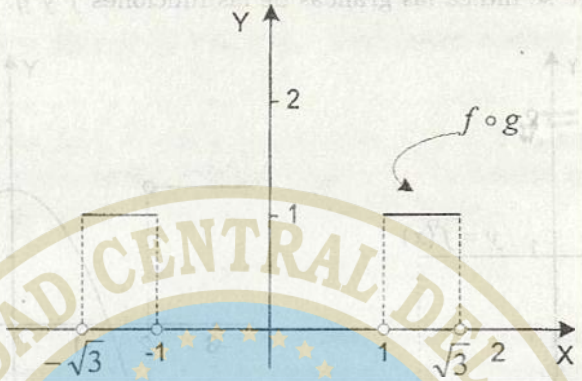


Figura 4.48:

Determinemos ahora $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2 - (f(x))^2, \text{ si } |f(x)| \leq 2 \\ 2, \text{ si } |f(x)| > 2 \end{cases}$$

Como $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1$ y $1 \leq 2$, se sigue que:

$$g(f(x)) = 2 - (f(x))^2$$

y como $f(x)$ toma únicamente los valores 0 y 1 se sigue que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2 - 1, \text{ si } |x| \leq 1 \\ 2 - 0, \text{ si } |x| > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ si } |x| \leq 1 \\ 2, \text{ si } |x| > 1 \end{cases}$$

La representación gráfica de $g \circ f$ se indica en la figura siguiente:

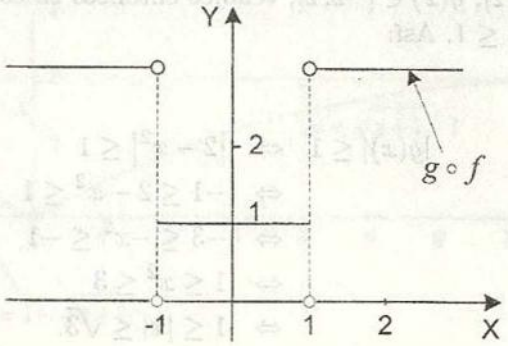


Figura 4.49:

Teorema 4.4 *Sean $f : A \rightarrowtail B$ y $g : B \to C$ funciones.*

i. Si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.

ii. Si f y g son sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

iii. Si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ es biyectiva y además $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

iv. Si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

v. Si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

Demostración.-

i. Por hipótesis f es inyectiva, entonces

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ tales que } x_1 \neq x_2 \text{ se tiene que } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Sean $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, se tiene $y_1 \neq y_2$ y como por hipótesis g es inyectiva, entonces $g(y_1) \neq g(y_2)$. Reemplazando y_1 e y_2 en la última expresión, tenemos

$$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$$

o lo que es lo mismo $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$.

En definitiva tenemos que:

$$\forall x_1, x_2 \in A. x_1 \neq x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$$

que nos dice precisamente que $g \circ f$ es inyectiva.

ii. Sea $z \in C$, como g es sobreyectiva, entonces existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$ y siendo f sobreyectiva, para el elemento y, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Reemplazando $y = f(x)$ en $g(y) = z$ resulta $g(f(x)) = z$; así, si $z \in C$, $\exists x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$, lo que muestra que $g \circ f$ es sobreyectiva.

iii. Si f y g son biyectivas, entonces f y g son inyectivas y de i) se sigue que $g \circ f$ es inyectiva; así mismo f y g son sobreyectivas y por la parte ii) resulta que $g \circ f$ es sobreyectiva. Tenemos entonces que $g \circ f$ es inyectiva y sobreyectiva y por tanto $g \circ f$ es biyectiva, en consecuencia existe $(g \circ f)^{-1}$.

Demostremos que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Para tal propósito, probemos que: $\forall x \in C$, $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$. En efecto, dado $x \in C$, $\exists y \in A$ tal que

$$(g \circ f)^{-1}(x) = y.$$

Por definición,

$$(g \circ f)^{-1}(x) = y \Leftrightarrow (g \circ f)(y) = x \Leftrightarrow g(f(y)) = x.$$

Como g tiene inversa, $f(y) = g^{-1}(x)$ y nuevamente aplicando la definición de función inversa a f se tiene $y = f^{-1}(g^{-1}(x))$ que es lo mismo que

$$y = (f^{-1} \circ g^{-1})(x).$$

De $(g \circ f)^{-1}(x) = y$ y $y = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ tenemos:

$$\forall x \in C, (g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$

como queríamos probar

Las partes iv) y v) se proponen como ejercicio.

Definición 4.13 *Sea A un conjunto no vacío, la función $I : A \to A$ definida por $I(x) = x$ se llama función idéntica o simplemente identidad sobre A. Se nota con I_A para indicar la función identidad.*

Sea f una función de A en B; I_A e I_B; las funciones identidad, entonces se verifica que

$$f \circ I_A = I_B \circ f = f$$

cuya demostración se propone como ejercicio.

Teorema 4.5 *Sean A, B, C, D conjuntos, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ funciones, entonces:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Demostración

En efecto, $\forall x \in A$ se tiene:

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h\,[(g \circ f)(x)] = h\,[g(f(x))]$$

y en consecuencia, $\forall x \in A$, $[h \circ (g \circ f)](x) = [(h \circ g) \circ f](x)$; es decir: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Conclusión: La composición de funciones es asociativa.

Teorema 4.6 *Sea $f : A \to B$ una función biyectiva, entonces*

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad y \quad f \circ f^{-1} = I_B.$$

Demostración.- Probemos que $f^{-1} \circ f = I_A$. Para ello demostremos que $\forall x \in A$, $(f^{-1} \circ f) = x = I_A(x)$. En efecto, sea $x \in A$ entonces:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x)$$

luego $(f^{-1} \circ f)(x) = x = I_A(x)$.

La segunda parte proponemos como ejercicio.

Definición 4.14 *Sea A un conjunto, denotamos con $L(A, A)$ el conjunto de todas las aplicaciones $f : A \to A$*

A continuación vamos a probar que $L(A, A)$ es un conjunto cerrado para la operación de composición de funciones; dicha operación es asociativa y tiene elemento neutro. Así:

1. Demostremos que $\forall f, g \in L(A, A)$ se tiene $f \circ g \in L(A, A)$.

   En efecto: $\forall x \in A$, sea $t = g(x) \in A$ y como f es función de A en A entonces $z = f(t) \in A$, es decir, $\forall x \in A$, $z = f\,[g(x)] \in A$. Luego $f \circ g$ es una función de A en A, esto es, $f \circ g \in L(A, A)$; en otros términos, la operación "$\circ$" (composición de funciones) es una operación binaria interna en $L(A, A)$. Es decir:

$$\begin{array}{rcl} \circ : L(A,A) \times L(A,A) & \to & L(A,A) \\ (f, g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

2. $\forall f, g, h \in L(A, A)$,
$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$$
pues la composición de funciones es asociativa.

3. La función identidad I_A pertenece a $L(A, A)$ y se verifica que $\forall f \in L(A, A)$,
$$f \circ I_A = I_A \circ f = f$$
es decir, I_A es el elemento neutro respecto de la operación de composición de funciones.

4. Si $f, g \in L(A, A)$, en general $f \circ g \neq g \circ f$.
Exhibimos antes un ejemplo en el que $A = \mathbb{R}$ y $f \circ g \neq g \circ f$ que nos dice que la operación de composición de funciones en general no es conmutativa.

5. $\forall f \in L(A, A)$ en general, no existe $g \in L(A, A)$ tal que $f \circ g = I_A$, es decir que no todo elemento de $L(A, A)$ es inversible respecto a "$\circ$" o en otros términos, no siempre admite elemento simétrico para la ley de composición de funciones.

Consideremos el subconjunto de $L(A, A)$ constituido por funciones que son biyectivas, denotemos a este conjunto con $L(A)$, es decir,
$$L(A) = \{f : A \to A \text{ tales que } f \text{ es función biyectiva}\}.$$

4.5.1. Estructura Algebraica de $(L(A), \circ)$

Demostremos que $(L(A), \circ)$ es un grupo no conmutativo.

1. $\forall f, g \in L(A)$ se tiene $f \circ g \in L(A)$.
En efecto, si f y g son funciones biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva.

2. Demostramos ya que "$\circ$" es asociativa, es decir $\forall f, g, h \in L(A)$, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

3. Existe $I_A \in L(A)$ tal que $\forall f \in L(A)$
$$I_A \circ f = f \circ I_A = f.$$
Demostremos que I_A es biyectiva.
Por definición I_A es sobreyectiva y como $\forall x_1, x_2 \in A$ tal que $x_1 \neq x_2$ se tiene $I_A(x_1) \neq I_A(x_2)$ entonces I_A es inyectiva; luego $I_A \in L(A)$. Consecuentemente $L(A)$ posee elemento neutro I_A con respecto a la operación de composición de funciones.
Queda por demostrar la existencia de inversos respecto de la operación de composición de funciones.

4. Sea $f \in L(A)$, entonces f es biyectiva y por tanto existe f^{-1} tal que para cada $x \in A$, $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$. Siendo f biyectiva, resulta fácil verificar que f^{-1} es biyectiva, es decir $f^{-1} \in L(A)$.
Puesto que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$ resulta que cada $f \in L(A)$ es inversible.

5. Hay elementos $f, g \in L(A)$ tales que $f \circ g \neq g \circ f$.
Así por ejemplo, sea $A = [0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x$. Es inmediato que $f, g \in L(A)$. Luego, $\forall x \in [0, +\infty[$,
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = \sqrt{2x}$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$$
con lo cual $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ si $x \neq 0$.

Ejercicios

1. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $= \{m, n, o, p\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; f y g funciones de A en B y de B en C respectivamente. Hallar $g \circ f$ en cada uno de los siguientes casos.

   a) $f = \{(a, m), (b, m), (c, m), (d, o)\}$
   $g = \{(m, 1), (n, 2), (o, 3), (p, 5)\}$

   b) $f = \{(a, p), (b, o), (c, n), (d, m)\}$
   $g = \{(m, 3), (n, 2), (o, 1), (p, 4)\}$

   c) $f = \{(a, n), (b, p), (c, m), (d, o)\}$
   $g = \{(m, 2), (n, 1), (o, 3), (p, 5)\}$

   d) $f = \{(a, o), (b, n), (c, p), (d, m)\}$
   $g = \{(m, 5), (n, 4), (o, 2), (p, 3)\}$

2. Calcular en cada caso $(g \circ f)(x)$ cuando la composición tenga sentido.

   a) $f(x) = x^2 + x - 2$; $g(x) = 3x + 6$

   b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$; $g(x) = 4x^2 - 25$

   c) $f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$; $g(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$

   d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + x}, x \neq -1$; $g(x) = x^2$

   e) $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}, x > 0$; $g(x) = 3x^2 - 10$

   f) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x < 0$; $g(x) = x^2 - \frac{1}{x}, x \neq 0$

   g) $f(x) = \sqrt{ax + 1}, a \in \mathbb{R}$; $g(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{Z}^+$

   h) $f(x) = x(1 - |x|)$; $g(x) = \sqrt{x + 2}, x \geq -2$

   i) $f(x) = x^2 + x$; $g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \leq -1 \\ 1, \text{ si } & x > 1 \end{cases}$

   j) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x < -1 \\ -\frac{1}{x^2}, \text{ si } & -1 \leq x < 0 \end{cases}$; $g(x) = 3x + 1$

   k) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0 \\ x^3, \text{ si } & x > 0 \end{cases}$; $g(v) = \begin{cases} \frac{1}{v}, & \text{si } v < -1 \\ v, \text{ si } & -1 \leq v \end{cases}$

   l) $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ si } x < -1 \\ x, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{x}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$; $g(u) = \begin{cases} u^2 + 2u, & \text{si } u \leq -1 \\ \frac{1}{u}, \text{ si } & -1 < u < 0 \end{cases}$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1620
QUITO

$m)$ $f(x) = \begin{cases} -(x-2), & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + x + 2, & \text{si } x > 2 \end{cases}$; $g(v) = \begin{cases} -\sqrt{-(v+4)}, & \text{si } v \leq -4 \\ \frac{1}{2}v + 2, & \text{si } -4 < v \leq 0 \\ v^2 + 2, & \text{si } v > 2 \end{cases}$

$n)$ $f(x) = |4x^2 - 4x - 3|$, $g(t) = |3t - 2|$

$\tilde{n})$ $f(x) = |x-1| + |x+1|$, $g(t) = |2t-1| - |t-3|$.

3. Demuestre las partes iv) y v) del teorema 4.4

4. Si f y g son las funciones reales definidas por:

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.

5. Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$ en los siguientes casos:

$a)$ $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x > 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2, & \text{si } |x| > 2 \\ x^2 - 2, & \text{si } |x| \leq 2 \end{cases}$

$b)$ $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} & \text{si } x < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \\ x - \frac{15}{4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$ $g(x) = -f(x)$

6. .

$a)$ Mostrar que las funciones definidas de $R \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ en $R \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ por $i(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{2 - 4x}$, $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x}$ forman un grupo para la composición de funciones. Construir la tabla.

$b)$ En R^* se consideran las cuatro biyecciones siguientes:

$$\begin{aligned} e : x &\to x \\ f : x &\to -x \\ g : x &\to \frac{1}{x} \\ h : x &\to -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Probar que ellas forman un grupo con respecto a la composición de funciones.

7. Sea $f : A \to B$ una función biyectiva, g una función tal que $g \circ f = f$, probar que $g = I_B$.

8. Sea $f : A \to B$ una función inyectiva, $g : B \to A$ una función tal que $g \circ f = I_A$. Probar que $g = f^{-1}$. Análogamente, si $f \circ g = I_B$, entonces $g = f^{-1}$.

9. Sea A un conjunto con al menos dos elementos. Exhibir dos funciones f y g de A en si mismo tales que $f \circ g \neq g \circ f$.

10. Sea f una aplicación de M en N, I_M, I_N las aplicaciones identidad. Demostrar que $f \circ I_M = f = I_N \circ f$.

11. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones.

    a) Si f es inyectiva pero no g, ¿$g \circ f$ es inyectiva?, ¿es sobreyectiva?

    b) Si f es sobreyectiva pero no g, ¿$g \circ f$ es inyectiva?, ¿es sobreyectiva?

    c) Si f no es sobreyectiva pero g si lo es, ¿$g \circ f$ es inyectiva?, ¿es sobreyectiva?

12. Sean f, g, h, funciones definidas de A en si mismo con f biyectiva.

    a) Si $g \circ f = h \circ f$, demostrar que $g = h$.

    b) Si $f \circ g = f \circ h$, probar que $g = h$

    c) Supóngase que g y h son sobreyectivas pero no inyectivas,

    i. Si $g \circ f = h \circ f$, ¿se deduce $g = h$?

    ii. Si $f \circ g = f \circ h$, ¿es $g = h$?

13. Sea f una función o aplicación de E en F y g una función de F en G. Probar que:

    a) $(g \circ f)$ inyectiva y f sobreyectiva $\Rightarrow$ g inyectiva.

    b) $(g \circ f)$ sobreyectiva y g inyectiva $\Rightarrow$ f sobreyectiva.

14. Sea f una aplicación de E en F, g una aplicación de F en G, h una aplicación de G en E.

$$E \xrightarrow{f} F;\ F \xrightarrow{g} G;\ G \xrightarrow{h} E.$$

    Se considera las composiciones: $h \circ g \circ f$; $g \circ f \circ h$; $f \circ h \circ g$.

    a) Si dos de esas dos composiciones son inyectivas y la tercera sobreyectiva, probar que f, g y h son biyectivas.

    b) Si dos de esas composiciones son sobreyectivas y la tercera inyectiva, probar que f, g y h son biyectivas.

15. Sea f una función cualquiera de E en F. Probar que:

$$f(x) \neq f(x') \Rightarrow x \neq x'.$$

16. Sea $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

    a) Demostrar que, cualesquiera que sean los reales a y b, se tiene:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f(a) + f(b)\right].$$

    Interpretar geométricamente esta propiedad, haciendo intervenir los puntos $A = (a, a^2)$ y $B = (b, b^2)$.

    b) Sea $g(x) = f(f(x))$. Deducir de la parte a) que:

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f\left[\frac{1}{2}[f(a) + f(b)]\right]$$

    y luego que:

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[g(a) + g(b)].$$

17. Sean f, g y h funciones definidas de A en si mismo, con f biyectiva. En el caso en que g y h sean inyectivas pero no sobreyectivas,

    a) ¿$g \circ f = h \circ f$, implica $g = h$?

    b) ¿$f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$?

18. Sea $f \in L(A)$. Definimos $\begin{cases} f^{\circ} = I_A = I \\ f^n = f \circ f^{n-1}, \ n \geq 1. \end{cases}$

    Demostrar que:

    a) $f^m \circ f^n = f^{m+n}$

    b) $(f^m)^n = f^{mn}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$

19. Sea f una función de A en B. Una función g de B en A tal que $g \circ f = I_A$ se dice inversa a la izquierda de f. Una función h de B en A tal que $f \circ h = I_B$ se dice inversa a la derecha de f.

    Si f es biyectiva, demostrar que f^{-1} es la única inversa a la izquierda y a la derecha de f respectivamente.

20. Sea f una función de A en B biyectiva. Demostrar que $(f^{-1})^{-1} = f$.

21. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ una función biyectiva. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se definen las funciones $g(x) = [f(x)]^n$, $h(x) = [f(x)]^{1/n}$, $u(x) = \dfrac{1}{[f(x)]^n}, \forall x \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que tales aplicaciones son biyectivas.

4.6. Funciones Reales

Definición 4.15 *Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Una función f de A en B se llama función real.*

Todas las funciones que consideraremos en lo sucesivo serán funciones reales.

Al conjunto de funciones reales definidas sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ lo notaremos con $\mathcal{F}(A)$, es decir,

$$\mathcal{F}(A) = \{f : f \text{ es función real definida sobre } A\}.$$

En la práctica se dice: sea la función $f(x) = \cdots$ o también $y = \cdots$; esta manera de expresar las funciones reales es incorrecta pues debe decirse: sea f la función de A en B definida por $f(x) = \cdots$, o bien, sea f la función definida por $f(x) = \cdots$. Naturalmente en esta última formulación a de especificarse su dominio, es decir, el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ para los que f esté bien definida o lo que es lo mismo, $f(x)$ tenga sentido. En la práctica este último detalle es omitido siempre y cuando no haya peligro de confusión.

A las funciones reales las representaremos gráficamente en el plano cartesiano y tal subconjunto de $\mathbb{R}^2$ la llamaremos gráfica de f que notaremos con $G(f)$, esto es,

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in \text{Dom}(f)\}.$$

EJEMPLOS

1. Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$. Hallar el dominio y recorrido de f.

Solución.

Para que f esté bien definida debemos tener que $1-|x| \neq 0$ ya que no está definida la división por 0; consecuentemente $|x| \neq 1$.

Luego f está bien definida si $|x| \neq 1$, o lo que es lo mismo, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Para $x \in \text{Dom}(f)$ tal que $|x| > 1$, se tiene que $f(x) < 0$ y para $x \in]-1, 1[$, $f(x) > 0$.

Haciendo $y = f(x) = \dfrac{1}{1-|x|}$, se tiene $|x| = \dfrac{y-1}{y}$, de donde $y \neq 0$ y como $|x| \geq 0$ se sigue que $\dfrac{y-1}{y} \geq 0$.

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y		$-$	0	$+$		$+$	
$y-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{y}{y-1}$		$+$	0	$-$	no definida	$+$	

Con lo cual obtenemos que $\text{Rec}(f) =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$. A continuación se indica la representación gráfica de la función f.

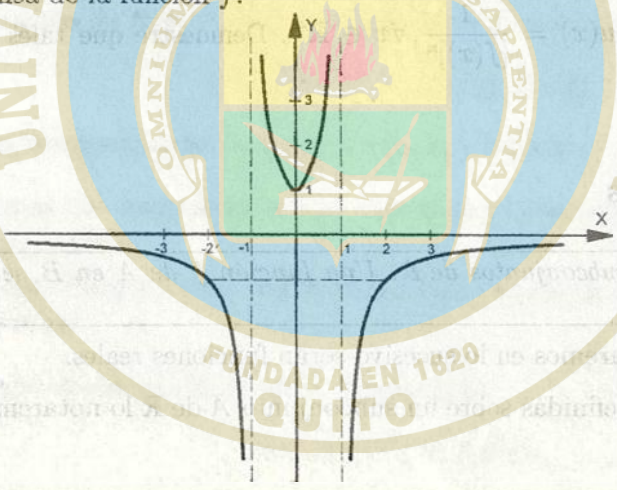


Figura 4.50:

2. Sea f la función definida por $f(x) = \sqrt{ax+b}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$. Hallar el dominio y recorrido de f.

Solución

a) Si $a = 0$, entonces $f(x) = \sqrt{b}$ y como $b > 0$, f está definida $\forall x \in \mathbb{R}$, es decir, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Rec}(f) = \{\sqrt{b}\}$.

b) Si $a > 0$.

Para que f esté definida debemos tener que $ax + b \geq 0$, de donde $x \geq -\dfrac{b}{a}$. Luego $\text{Dom}(f) = \left[-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$. Además $\forall x \in \text{Dom}(f)$, $y = \sqrt{ax+b} \geq 0$ lo que implica que $\text{Rec}(f) = [0; +\infty[$.

c) Si $a < 0$, f está definida si $ax + b \geq 0$; es decir si: $ax \geq -b$ y como $a < 0$ se sigue que $x \leq -\frac{b}{a}$. Luego $\text{Dom}(f) = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right]$.

Por otra parte, $\forall x \in \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right]$ se tiene que $ax + b \geq 0$ de donde $f(x) \geq 0$, es decir, $\text{Rec}(f) = [0, +\infty[$.

A continuación se señala los gráficos correspondientes a los casos $a = 0$, $a > 0$ y $a < 0$.

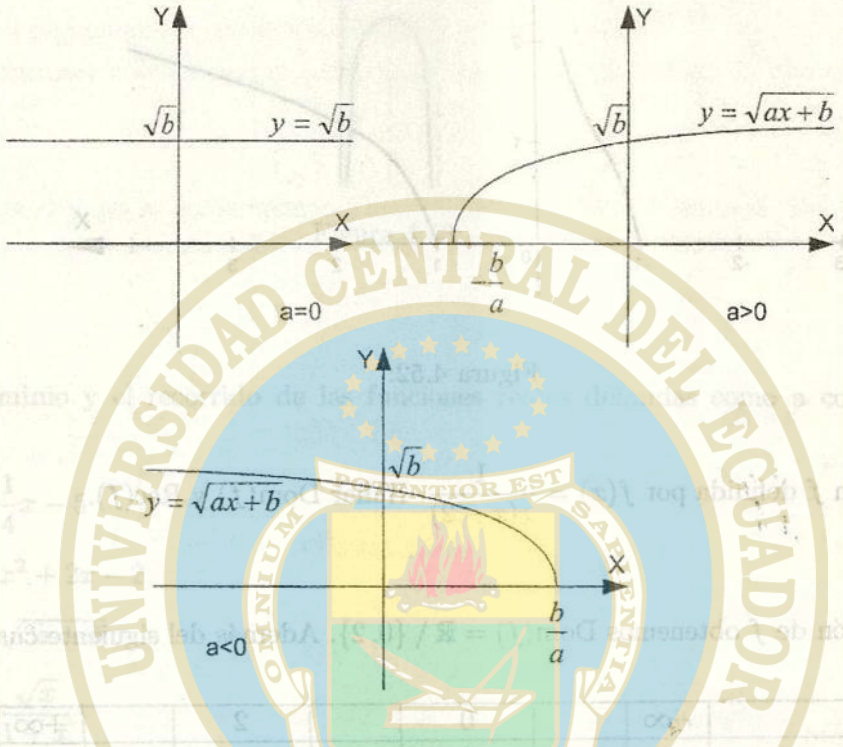


Figura 4.51:

3. Hallar el dominio y el recorrido de la función f definida por $f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$.

Solución

Notemos primeramente que $x \neq 0$, además f está definida si $x - \frac{1}{x} \geq 0$ o lo que es lo mismo si $\frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$.

Resolvamos la inecuación $\frac{x^2 - 1}{x} \geq 0$:

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	no definida	$-$	0	$+$	

De la tabla obtenemos que $\text{Dom}(f) = [-1; 0[\cup [1; +\infty[$ Por otra parte, sea $y = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$,

$x \in \text{Dom}(f)$, entonces $y \geq 0$, con lo cual $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}^+$.

La representación gráfica de la función f se indica en la siguiente figura.

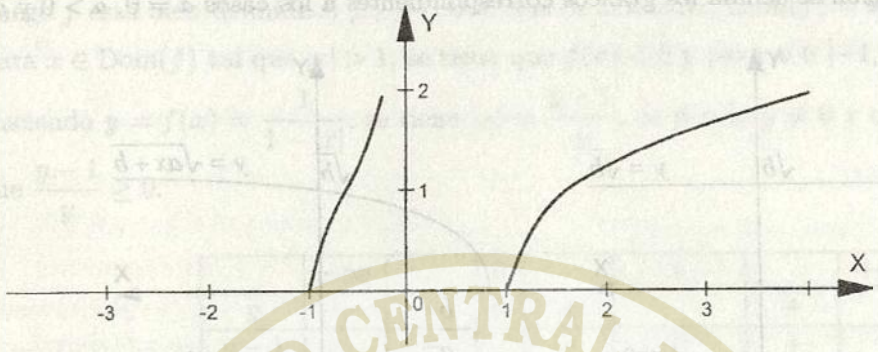


Figura 4.52:

4. Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x(x-2)}$. Hallar $\text{Dom}(f)$ y $\text{Rec}(f)$.

Solución.

De la definición de f obtenemos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Además del siguiente cuadro:

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\dfrac{1}{x(x-2)}$		$+$	no definida	$-$	no definida	$+$	

obtenemos que $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y $f(x) < 0$ si $x \in]0, 2[$.

Por otra parte, de $y = \dfrac{1}{x(x-2)}$ se sigue que $x^2 - 2x - \dfrac{1}{y} = 0$, de donde

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + \dfrac{4}{y}}}{2}.$$

Debemos tener entonces que $4 + \dfrac{4}{y} \geq 0$, lo que se verifica si $y \in]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$. Consecuentemente $\text{Rec}(f) =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$.

La figura siguiente nos muestra la representación gráfica de la función f.

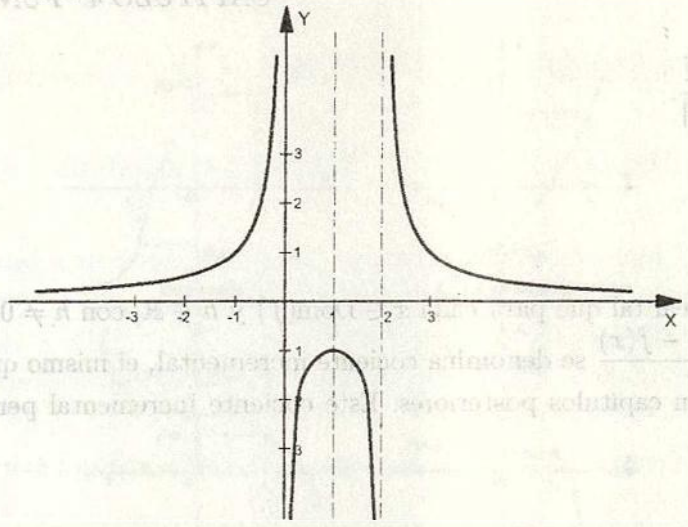


Figura 4.53:

Ejercicios

1. Hallar el dominio y el recorrido de las funciones reales definidas como a continuación se indican.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{4}x - 5$

   b) $f(x) = x^2 + 2x - 2$

   c) $f(x) = \sqrt{3x - 5}$

   d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

   e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4 - |x|}{x+1}}$

   f) $g(x) = \begin{cases} |x|, \text{ si } x \leq 0 \\ 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

   g) $h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}, \text{ si } t < -1 \\ -\dfrac{1}{t^2}, \text{ si } -1 \leq t < 0 \end{cases}$

   h) $u(x) = \begin{cases} 4 - x^2, \text{ si } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ si } x > 2 \end{cases}$

   i) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

   j) $f(x) = \sqrt{x(x-a)(x-b)}$ donde a y b$\in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$

   k) $f(v) = \dfrac{1}{(v-a)(v-b)}$, donde a y b son reales no nulos, con $a < b$

   l) $f(t) = t + |3t - 1|$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

$m)\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{|3x-2|}$.

2. Sea f una función real tal que para cada $x\in \mathrm{Dom}(f)$ y $h\in\mathbb{R}$, con $h\neq 0$, $x+h\in\mathrm{Dom}(f)$; el cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se denomina cociente incremental, el mismo que lo estudiaremos con mayor detalle en capítulos posteriores. Este cociente incremental permite el cálculo de derivadas.

   Hallar el cociente incremental de las funciones que a continuación se especifican. El resultado debe darse de modo que no aparezca h como factor en el denominador.

   $a)\quad f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$
   $b)\quad f(x)=2x-1$
   $c)\quad f(x)=ax^2+bx+c$
   $d)\quad f(x)=x^3+2$
   $e)\quad f(x)=\sqrt{x}$
   $f)\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$
   $g)\quad f(x)=\begin{cases}2x, \text{ si } x\leq 0\\ x^2, \text{ si } x>0\end{cases}$
   $h)\quad f(x)=\begin{cases}3x+4, \text{ si } x<-1\\ 1+\sqrt{x+1}, \text{ si } x\geq -1\end{cases}$
   $i)\quad f(x)=x^3-x^2$
   $j)\quad f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ si } x\leq -2\\ 2x+8, \text{ si } x>-2\end{cases}$
   $k)\quad f(x)=|2x-1|$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

4.6.1. Funciones Monótonas

Definición 4.16 *Sea f una función real definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$.*

1. *f se dice creciente si: $\forall x_1, x_2\in A,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$.*
2. *f se dice estrictamente creciente si: $\forall x_1, x_2\in A,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.*
3. *f se dice decreciente si: $\forall x_1, x_2\in A,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$ y estrictamente decreciente si $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.*

Una función que es creciente o decreciente en A se denomina función monótona en A.

A continuación se muestra gráficos de funciones monótonas así como un contraejemplo.

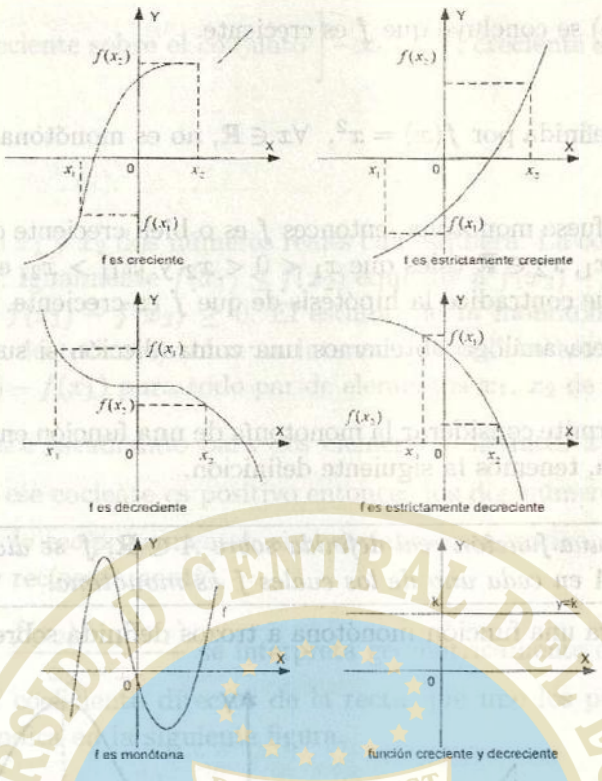


Figura 4.54:

EJEMPLOS

1. La función f definida por $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ es estrictamente creciente. En efecto, $\forall x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $x_1 < x_2$ se tiene $x_1^2 < x_2^2$ lo que es lo mismo $f(x_1) < f(x_2)$.

2. La función real f definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ es estrictamente decreciente; pues $\forall x_1$, $x_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $x_1 < x_2$ se sigue que $\dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1}$; es decir que: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

3. Sea f la función real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } x \leq 0 \\ 1, \text{ si } 0 < x < 1 \\ x^2, \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

Probar que la función f es creciente.

Solución.

Debemos analizar varios casos:

a) Si $x_1 < x_2 \leq 0$, entonces $x_1 = f(x_1) < f(x_2) = x_2$.

b) Si $x_1 \leq 0$ y $0 < x_2 < 1$, entonces $x_1 = f(x_1) < f(x_2) = 1$.

c) Si $0 < x_1 < x_2 < 1$, entonces $f(x_1) = f(x_2) = 1$.

d) Si $0 < x_1 < 1 \leq x_2$, entonces $1 = f(x_1) \leq f(x_2) = x_2^2$.

e) Si $x_1 < 0$ y $x_2 \geq 1$, entonces $x_1 = f(x_1) < f(x_2) = x_2^2$.

De las partes a) a e) se concluye que f es creciente.

4. **Contraejemplo**

   La función real f definida por $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, no es monótona.

   Solución.

   Supongamos que f fuese monótona, entonces f es o bien creciente o bien decreciente. Si f es creciente, elijamos x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < 0 < x_2$ y $|x_1| > x_2$, entonces $x_1^2 > x_2^2$, es decir $f(x_1) > f(x_2)$, lo que contradice la hipótesis de que f es creciente.

   Razonando de manera análoga obtenemos una contradicción si suponemos que f es decreciente.

   Este ejemplo nos permite considerar la monotonía de una función en una parte de su dominio. Con mayor precisión, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.17 *Sea f una función real definida sobre $A \subset \mathbb{R}$; f se dice monótona a trozos si existen subconjuntos de A en cada uno de los cuales f es monótona.*

La figura siguiente muestra una función monótona a trozos definida sobre $\mathbb{R}$.

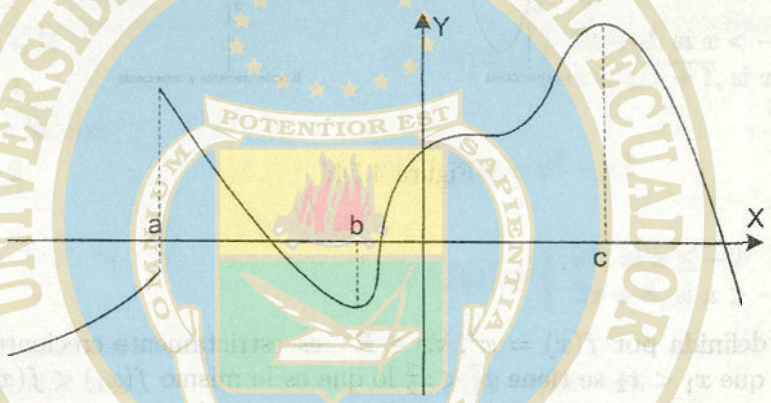


Figura 4.55:

- En $]-\infty, a]$, f es estrictamente creciente.
- En $]a, b]$, f es estrictamente decreciente
- En $]b, c]$, f es estrictamente creciente.
- En $]c, +\infty[$, f es estrictamente decreciente.

EJEMPLOS

1. La función real f definida por $f(x) = x^2$ es monótona a trozos, pues $\forall x \in]-\infty, 0]$, f es decreciente y $\forall x \in [0, +\infty[$, f es creciente (en realidad estrictamente creciente).

2. Sea f la función definida por $f(x) = x(1 - |x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   La función f podemos definirla como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, \text{ si } x < 0 \\ x - x^2, \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

La función f es decreciente sobre el conjunto $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, creciente en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y decreciente en $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Tasa de Variación.- Sean x_1 y x_2 dos números reales cualesquiera. La condición $x_1 < x_2$ equivale a la condición $x_2 - x_1 > 0$. Igualmente $f(x_1) \leq f(x_2)$ equivale a $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ y la condición $f(x_1) \geq f(x_2)$ equivale a $f(x_1) - f(x_2) \geq 0$. El estudio de la monotonía de una función f (es decir, si es creciente o si es decreciente) sobre un intervalo I conlleva a comparar los signos de las diferencias $x_2 - x_1$ y $f(x_2) - f(x_1)$ para todo par de elementos x_1, x_2 de I.

Esta comparación se la hace estudiando para dos elementos distintos x_1 y x_2 de I el signo del cociente $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Si ese cociente es positivo entonces los dos números reales $f(x_2) - f(x_1)$ y $x_2 - x_1$ son de igual signo (y recíprocamente); si el cociente es negativo, $f(x_2) - f(x_1)$ y $x_2 - x_1$ son de signos contrarios (y recíprocamente).

Nótese además que el real $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ se interpreta geométricamente en un sistema de coordenadas cartesianas como el coeficiente director de la recta que une los puntos $P = (x_1, f(x_1))$ y $Q = (x_2, f(x_2))$, como se indica en la siguiente figura.

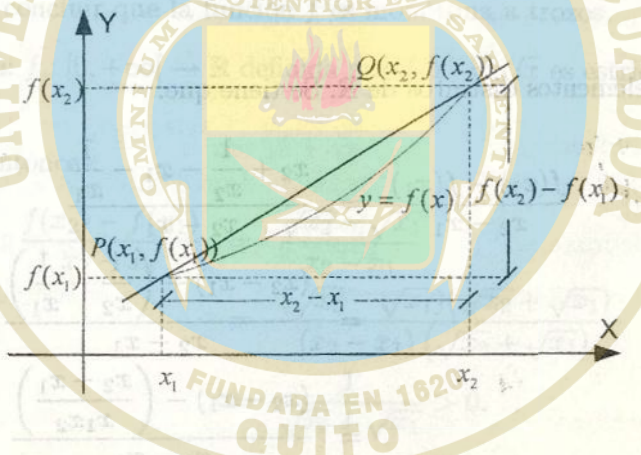


Figura 4.56:

Definición 4.18 *Sea f una función real definida sobre un intervalo I y sean x_1 y x_2 dos elementos distintos de I. El cociente* $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ *es la* tasa de variación *de f entre x_1 y x_2 (se dice también tasa de crecimiento). La función f es creciente sobre I si y solamente si, su tasa de variación es positiva cualquiera que sea la elección de los elementos distintos x_1 y x_2 de I. La función f es decreciente sobre I, si y solamente si, su tasa de variación es negativa cualquiera que sea la elección de los elementos distintos x_1 y x_2 de I.*

EJEMPLOS

1. Estudiar la variación de la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

   Solución

Dados dos números reales distintos x_1 y x_2, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &= \frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}\\ &= \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1}\\ &= x_1+x_2.\end{aligned}$$

Si x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces la tasa de variación es positiva. Es decir que la función f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.

Si x_1 y $x_2 \in \mathbb{R}^-$, entonces la tasa de variación es negativa. Consecuentemente, la función f es decreciente en $\mathbb{R}^-$.

Si x_1 y x_2 no son de igual signo, la tasa de variación puede ser positiva o negativa.

Consecuentemente la función f no es ni creciente, ni decreciente sobre $\mathbb{R}$. La función f definida por $f(x)=x^2$ es monótona a trozos sobre $\mathbb{R}$.

2. Estudiar la monotonía de la función:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x)=x+\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Solución.

Sean x_1 y x_2 dos elementos distintos de $\mathbb{R}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &= \frac{x_2+\frac{1}{x_2}-x_1-\frac{1}{x_1}}{x_2-x_1}\\ &= \frac{(x_2-x_1)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)}{x_2-x_1}\\ &= \frac{(x_2-x_1)-\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right)}{x_2-x_1}\\ &= 1-\frac{1}{x_1x_2}.\end{aligned}$$

Para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $x_1 < x_2$. Se tiene que:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1x_2 < x_2^2 \Rightarrow \frac{1}{x_2^2} < \frac{1}{x_1x_2} \tag{4.2}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_1x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1x_2} < \frac{1}{x_1^2} \tag{4.3}$$

Multiplicando (4.3) por (-1) se obtiene que: $-\frac{1}{x_1^2} < -\frac{1}{x_1x_2}$, y sumando uno a ambos miembros se tiene:

$$1-\frac{1}{x_1^2} < 1-\frac{1}{x_1x_2}. \tag{4.4}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
MINUM
FUNDADA EN 1620
QUITO

Procediendo de manera análoga de (4.2) se obtiene,

$$1-\frac{1}{x_1x_2}<1-\frac{1}{x_2^2}. \tag{4.5}$$

De (4.4) y (4.5) se sigue que:

$$1-\frac{1}{x_1^2}<1-\frac{1}{x_1x_2}<1-\frac{1}{x_2^2}$$

o lo que es lo mismo

$$1-\frac{1}{x_1^2}<\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<1-\frac{1}{x_2^2}.$$

Para que: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$ es suficiente que $1-\dfrac{1}{x_1^2}\geq 0$; es decir que: $|x_1|\geq 1$ o lo que es lo mismo $x_1\geq 1$ pues $x_1\in\mathbb{R}^+$. Consecuentemente x_1 y $x_2\in[1;+\infty[$. Es decir que f es creciente en dicho intervalo.

Para que: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq 0$ es suficiente que $1-\dfrac{1}{x_2^2}\leq 0$; es decir que $x_2^2\leq 1$ o lo que es lo mismo que $0<x_2\leq 1$ pues $x_2\in\mathbb{R}^+$. Consecuentemente $\forall x_1,\ x_2\in\,]0;1]$ se tiene que f es decreciente.

De manera análoga puede probarse que f es creciente en $]-\infty;-1]$ y decreciente en $[-1;0[$. Finalmente podemos concluir que la función f es monótona a trozos.

3. Probar que la función: $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{x}$ es estrictamente creciente.

Solución.

Sean x_1 y $x_2\in\mathbb{R}^+$, entonces:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &= \frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}\\ &= \frac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}{(x_2-x_1)(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}>0.\end{aligned}$$

Luego la función f es estrictamente creciente en $[0;+\infty[$.

Teorema 4.7 *Sea f una función real de A en B.*

1. *Si f es estrictamente creciente (respectivamente estrictamente decreciente) entonces f es inyectiva.*
2. *Si f es biyectiva y estrictamente creciente (respectivamente estrictamente decreciente) entonces f^{-1} es estrictamente creciente (respectivamente estrictamente decreciente).*

Demostración.

1. Por hipótesis f es estrictamente creciente. Sean $x_1,\ x_2\in A$ tales que $x_1\neq x_2$, entonces:

   a) Si $x_1<x_2$ entonces $f(x_1)<f(x_2)$.

b) Si $x_1 > x_2$ entonces tiene $f(x_1) > f(x_2)$.

De a) y b) se tiene que $f(x_1) \neq f(x_2)$, es decir, f es inyectiva.

De manera análoga se demuestra que f es inyectiva si f es estrictamente decreciente.

2. Sean $y_1, y_2 \in B$ tales que $y_1 < y_2$. Por hipótesis f es biyectiva, entonces existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, es decir que $f(x_1) < f(x_2)$ y como además f es estrictamente creciente, entonces $x_1 < x_2$. De no ser así, tendríamos $x_1 \geq x_2$ y entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$ en contradicción con $f(x_1) < f(x_2)$. Luego $x_1 < x_2$ o lo que es lo mismo. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ lo que muestra que f^{-1} es creciente. ■

Teorema 4.8 *Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ funciones reales. Entonces,*

1. *Si f es creciente y g creciente entonces $g \circ f$ es creciente.*
2. *Si f es creciente y g decreciente entonces $g \circ f$ es decreciente.*
3. *Si f es decreciente y g creciente entonces $g \circ f$ es decreciente.*
4. *Si f es decreciente y g decreciente entonces $g \circ f$ es creciente.*

Demostración.- Se propone como ejercicio ■

Ejercicios

1. Sea f la función definida por $f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Demostrar que f es estrictamente creciente si $a > 0$ y estrictamente decreciente si $a < 0$.
2. Sea f la función definida por $f(x) = \sqrt{ax + b}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b > 0$. Demostrar que, cuando $a > 0$, f es estrictamente creciente si $x \geq -\frac{b}{a}$ y que cuando $a < 0$, f es estrictamente decreciente si $x \leq -\frac{b}{a}$.
3. Demuestre el teorema 4.8.
4. Si f y g son funciones monótonas a trozos, ¿es verdad que $g \circ f$ es monótona a trozos? Si la respuesta es negativa dé un contraejemplo.
5. En cada caso, determinar los intervalos en los que f es creciente así como en los que f es decreciente.

   a) $f(x) = -x^2 + a$, con $a \in \mathbb{R}$.
   b) $f(x) = |2x + 1|$
   c) $f(x) = |x + 2| - |2x - 1|$
   d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $|x| \geq 2$
   e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

   Nota.- Si $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$

   f) $f(x) = 2x^2 + x - 3$
   g) $f(x) = \frac{1}{9 + x^2}$
   h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$, $|x| < 3$
   i) $f(x) = ax^2 + 2x - a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^n$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Muestre que:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

a) f es estrictamente creciente si y solo si $a > 0$ y n impar.

b) f es estrictamente decreciente si y solo si $a < 0$ y n impar.

c) f es monótona a trozos si y solo si n es par.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función creciente, $n \in \mathbb{Z}^+$.

   Pongamos $u(x) = (f(x))^n$, $v(x) = (f(x))^{1/n}$, $w(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Demostrar que las funciones u y v son crecientes y que w es decreciente.

8. Sea f una función decreciente (resp. creciente) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Probar que la función h definida por $h(x) = -f(x)$ es una función creciente (resp. decreciente).
   ¿Qué puede decirse de la función g definida por $g(x) = |f(x)|$?

4.6.2. Funciones Pares e Impares

Definición 4.19 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que si $x \in A$, $-x \in A$ y f una función real definida en A. Se dice que:*

1. *f es una función par si y solo si $\forall x \in A$, $f(-x) = f(x)$.*
2. *f es una función impar si y solo si $\forall x \in A$, $f(-x) = -f(x)$.*

Interpretación gráfica.- La curva representativa de una función par en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares es simétrica con respecto al eje Y. (Ver Figura 4.50). En efecto: Sean los puntos $M = (x, f(x))$ y $M' = (-x, f(x))$ de la curva representativa de f. Veamos que el punto medio I del segmento que une los puntos M y M' está en el eje Y.

Las coordenadas del punto medio I son:

$$x_I = \frac{x + (-x)}{2} = 0, \quad y_I = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = f(x).$$

Luego, $I = (0, f(x))$, el punto que se encuentra en el eje Y.

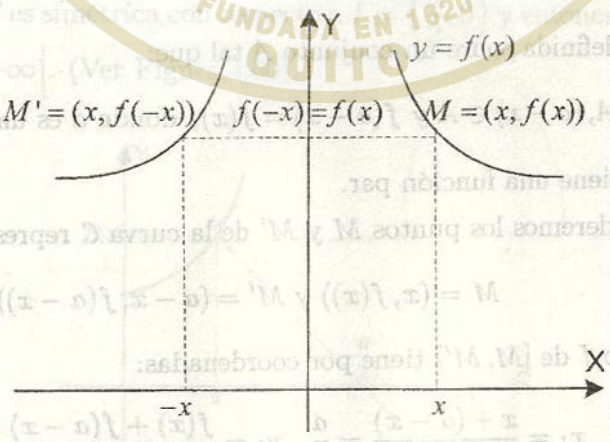


Figura 4.57:

Consecuencia.- Si f es par en un conjunto A, es suficiente estudiar la función sobre $A^+ = A \cap [0, +\infty[$ y completar la representación gráfica mediante una simetría con respecto al eje Y.

En cambio; si la función f es impar, la curva $\mathcal{C}$ representativa de f en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares admite el origen como centro de simetría. (Ver Figura 4.57). En efecto:

Sean los puntos $M = (x, f(x))$ y $M' = (-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ en la curva $\mathcal{C}$. Determinemos el punto medio I de $[M, M']$. Las coordenadas de dicho punto son:

$$x_I = \frac{x + (-x)}{2} = 0, \quad y_I = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = 0$$

es decir que:

$$I = (0, 0).$$

Consecuentemente, la curva $\mathcal{C}$ es entonces simétrica con respecto al origen y en ese caso es suficiente estudiar la función sobre $A^+ = A \cap [0; +\infty[$ y completar su gráfica mediante una simetría respecto al origen.

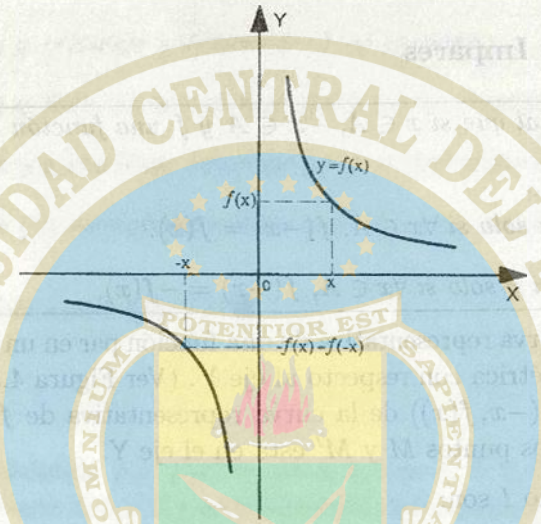


Figura 4.58:

Generalización.-

1. Sea f una función definida sobre un conjunto A tal que:

$$\forall x \in A, (a - x) \in A \text{ y } f(a - x) = f(x), \text{ donde } a \text{ es un real dado.}$$

   a) Si $a = 0$ se obtiene una función par.

   b) Si $a \neq 0$, consideremos los puntos M y M' de la curva $\mathcal{C}$ representativa de f tales que

$$M = (x, f(x)) \text{ y } M' = (a - x, f(a - x)).$$

   El punto medio I de $[M, M']$ tiene por coordenadas:

$$x_I = \frac{x + (a - x)}{2} = \frac{a}{2}, \quad y_I = \frac{f(x) + f(a - x)}{2} = f(x).$$

   Luego el punto $I = \left(\frac{a}{2}, f(x)\right)$ pertenece a la recta Δ de ecuación $x = \frac{a}{2}$; la curva $\mathcal{C}$ es entonces simétrica con respecto a la recta Δ de ecuación $x = \frac{a}{2}$, es suficiente entonces estudiar f sobre $A \cap \left[\frac{a}{2}; +\infty\right[$. (Ver Figura 4.59).

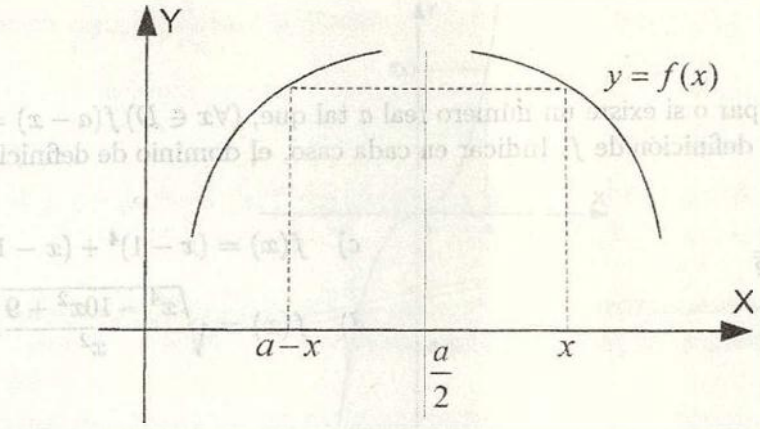


Figura 4.59:

2. Sea f definida sobre un conjunto A, tal que:

$$\forall x \in A, a - x \in A \text{ y } f(a-x) = -f(x),$$

donde a es un número real dado.

a) Si $a = 0$, se obtiene una función impar.

b) Si $a \neq 0$, consideremos los puntos M y M' de C tal que

$$M = (x, f(x)) \text{ y } M' = (a - x, f(a - x)).$$

El punto medio I de $[M, M']$ tiene por coordenadas:

$$x_I = \frac{x + (a-x)}{2} = \frac{a}{2}, \quad y_I = \frac{f(x) + f(a-x)}{2} = 0.$$

Luego I es fijo y C es simétrica con respecto a $I = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$ y entonces es suficiente estudiar f sobre $A \cap \left[\frac{a}{2}; +\infty\right[$. (Ver Figura 4.60).

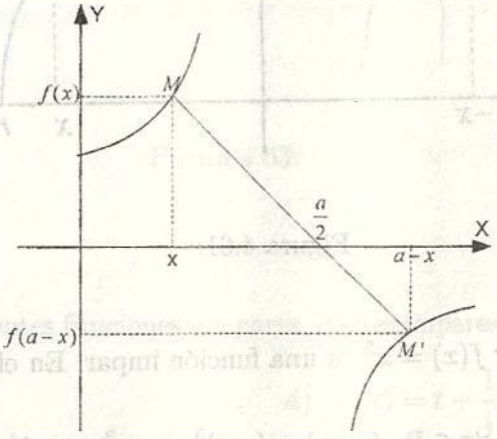


Figura 4.60:

Ejercicios

1. Estudiar si f es par o si existe un número real a tal que; $(\forall x \in D)\, f(a-x) = f(x)$, donde D es el dominio de definición de f. Indicar en cada caso, el dominio de definición.

   a) $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2}}$

   b) $f(x) = \sqrt{x^4}$

   c) $f(x) = (x-1)^4 + (x-1)^2 + 2$

   d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2}}$.

2. Estudiar si f es impar o si existe un número real a tal que $(\forall x \in D)(f(a-x)) = -f(x)$, donde D es el dominio de definición de f. Indicar en cada caso el dominio de definición:

   a) $f(x) = \dfrac{|x|+1}{x}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}{x^3}$.

EJEMPLOS

1. La función definida por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $r \in \mathbb{R}^+$ es una función par.

   Observemos que $\text{Dom}(f) = [-r, r]$ y como $\forall x \in [-r, r]$, $f(-x) = \sqrt{r^2 - (-x)^2} = \sqrt{r^2 - x^2} = f(x)$, se sigue que f es una función par. Su gráfica se indica a continuación.

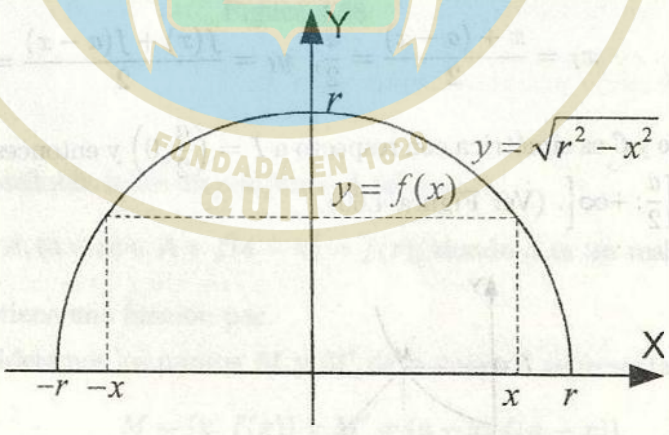


Figura 4.61:

2. La función f definida por $f(x) = x^3$ es una función impar. En efecto,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

A continuación se muestra la representación gráfica de dicha función.

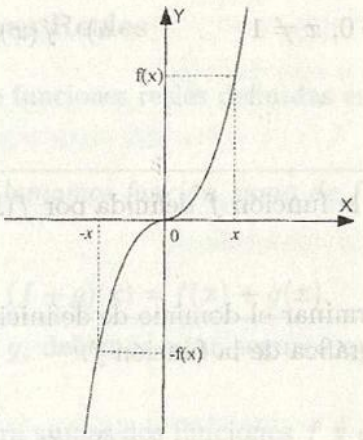


Figura 4.62:

3. Sea f la función definida por $f(x) = x^3 + x^2$. Probar que f no es ni par ni impar.

Solución.

Supongamos que f sea una función par, se sigue entonces que,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 \neq f(x) \text{ si } x \neq 0.$$

Por consiguiente, si $x \neq 0$, $f(-x) \neq f(x)$ que nos dice que f no es par.

De manera análoga deducimos que f no es impar.



Figura 4.63:

Ejercicios

1. Indicar cuáles de las siguientes funciones son pares, cuáles impares y cuáles ni pares ni impares.

   a) $f(x) = |x|$

   b) $g(x) = 2x^2 + 5$

   c) $h(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$

   d) $u(t) = t + \dfrac{1}{t},\ t \neq 0$

   e) $v(t) = t + t^2$

f) $w(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x \neq 0$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, $x \neq 0$.

2. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Demostrar que la función f definida por $f(x) = x^n$ es par si n es par, impar si n es impar.

3. En los siguientes casos, determinar el dominio de definición de la función real f así como su paridad y además trazar la gráfica de la función f.

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = x^3 + x + 1$

c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x^4+x^2+1}$

f) $f(x) = \dfrac{|1+x| - |1-x|}{|1+x| + |1-x|}$

g) $f(x) = |x^3 + 2|$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-1}}$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{-x}}$.

4. Se considera una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, tal que:

$$3f(-x) + f(x) = 4x^3 + 2x.$$

Probar que f es impar. Deducir además el valor de $f(x)$.

5. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define sobre $\mathbb{R}$ dos funciones p y q por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ y } \forall x \in \mathbb{R},\ q(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

a) Verificar que p es una función par y que q es una función impar. Calcular $f(x)$ en función de $p(x)$ y de $q(x)$. Deducir entonces que toda función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se escribe de manera única como suma de una función par y de una función impar.

b) Determinar p y q en los siguientes casos:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1,\ f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1},\ f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2+1}.$$

6. Se considera una función f y la función g definida por:

$$g(x) = \frac{|f(x)|}{f(|x|)}.$$

Estudiar la paridad de la función g, cuando f es par y cuando f es impar.

7. Sea $g : x \to f(|x|)$, donde $f : x \to 2(x-1)^2 - 3$. Verificar que g es una función par.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

4.6.3. Operaciones con Funciones Reales

Recordemos que $\mathcal{F}(A)$ es el conjunto de funciones reales definidas en un subconjunto A de $\mathbb{R}$.

Adición de Funciones

Definición 4.20 *Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$. Llamamos función suma de f con g a la función de A en $\mathbb{R}$ notada con $f+g$ y definida por*

$$\forall x \in A,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Para definir la suma de funciones, $f+g$, debemos estar seguros que f y g estén definidos en el mismo conjunto de salida A.

La definición nos indica además que para sumar dos funciones f y g, a de sumarse f y g en cada punto $x \in A$.

EJEMPLOS

1. Sean las funciones:

$$\begin{array}{ccccc} f:[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \quad g:[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & -x & ; & x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

La función suma de f con g está definida por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -x + x^2.$$

Así:

$$\begin{aligned} (f+g)(-1) &= f(-1) + g(-1) = 1 + 1 = 2 \\ (f+g)(0) &= f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0 \\ (f+g)\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ (f+g)(1) &= f(1) + g(1) = -1 + 1 = 0, \text{ etc., etc.} \end{aligned}$$

En la siguiente figura se indica la representación de las funciones f, g y $f+g$.

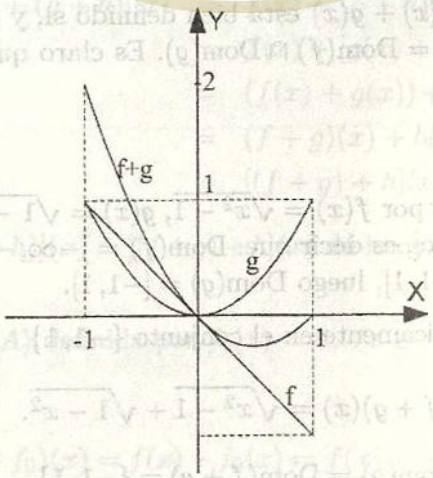


Figura 4.64:

2. Sean f, g las funciones definidas por: $f(x) = x$; $g(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   La función suma de f con g está dada por

$$(f+g)(x) = x + |x|.$$

   Note que si $x < 0$, $|x| = -x$, con lo cual $(f+g)(x) = x + (-x) = 0$. Si $x \geq 0$, $|x| = x$ y $(f+g)(x) = x + x = 2x$. En consecuencia:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ 2x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

   A continuación se muestra la representación gráfica de las funciones f, g y $f+g$.

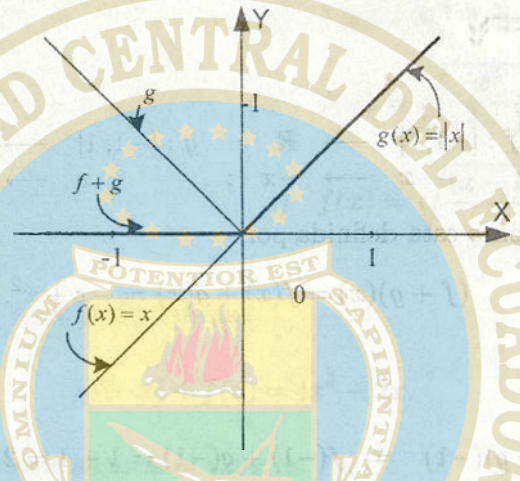


Figura 4.65:

Observación Sean f y g funciones reales definidas en A y A' respectivamente. Podemos definir la suma de f con g mediante $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ siempre que el segundo miembro tenga sentido; es decir, para aquellos valores de x para los cuales f y g están definidos a la vez.

En consecuencia, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ está bien definido si, y solo si, $x \in A \cap A'$, o lo que es lo mismo: $\text{Dom}(f+g) = A \cap A' = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Es claro que si $A \cap A' = \emptyset$, $f+g$ no está definida.

EJEMPLO

Sean f y g las funciones definidas por $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$. La función f está definida en el conjunto $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, es decir que: $\text{Dom}(f) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Por otra parte, g está definida sobre el conjunto $[-1, 1]$, luego $\text{Dom}(g) = [-1, 1]$.

La función $f+g$ está definida únicamente en el conjunto $\{-1, 1\}$.

$$(f+g)(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}.$$

Observe además que $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \text{Dom}(f+g) = \{-1, 1\}$.

Si en cambio $h(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$, $\text{Dom}(h) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y en ese caso $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(h) = \varnothing$.

Escribir $(f+h)(x) = f(x) + h(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}$ carece de sentido, pues $f+g$ no está definido para ningún punto $x \in \mathbb{R}$.

Definición 4.21 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$. Definimos la función $(-f) \in \mathcal{F}(A)$ por:*

$$(-f)(x) = -f(x), \forall x \in A.$$

Si $f \in \mathcal{F}(A)$, definimos la función $f-g \in \mathcal{F}(A)$ por:

$$\forall x \in A,\ (f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

Estructura Algebraica de $(\mathcal{F}(A), +)$.

Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$, hemos definido $f+g$ mediante

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in A$$

con lo cual $f+g \in \mathcal{F}(A)$ y en consecuencia la adición de funciones es una operación interna; en otros términos:

$$\begin{array}{rcl} +: \mathcal{F}(A) \times \mathcal{F}(A) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A) \\ (f,g) & \longmapsto & f+g \end{array}$$

es una operación interna.

Teorema 4.9 *$(\mathcal{F}(A), +)$ es un grupo abeliano.*

Demostración.

1. $\forall f, g \in \mathcal{F}(A),\ f+g = g+f$.

   En efecto, $\forall x \in A$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Como $f(x)$ y $g(x)$ son números reales, se tiene entonces que: $f(x)+g(x) = g(x)+f(x)$, con lo cual $(f+g)(x) = g(x)+f(x)$ y por definición de adición de funciones, $g(x)+f(x) = (g+f)(x)$.

   Se concluye finalmente que: $\forall x \in A$, $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ y por tanto $f+g = g+f$.

2. $\forall f, g, h \in \mathcal{F}(A),\ f+(g+h) = (f+g)+h$.

   En efecto $\forall x \in A$,

$$\begin{array}{rcl} [f+(g+h)](x) & = & f(x) + (g+h)(x) \\ & = & f(x) + [g(x) + h(x)] \\ & = & (f(x) + g(x)) + h(x) \\ & = & (f+g)(x) + h(x) \\ & = & [(f+g)+h](x). \end{array}$$

   Por tanto, $\forall x \in A$, $[f+(g+h)](x) = [(f+g)+h](x)$ de lo cual se concluye que $f+(g+h) = (f+g)+h$.

3. Existe una función $f_0 \in \mathcal{F}(A)$ definida por $f_0(x) = 0$, $\forall x \in A$, denominada función nula tal que $\forall f \in \mathcal{F}(A)$, $f + f_0 = f$.

   En efecto, $\forall x \in A$

$$(f+f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

   o sea: $\forall x \in A$, $(f+f_0)(x) = f(x)$, de donde $f + f_0 = f$.

   Como la suma de funciones es conmutativa, resulta que: $f + f_0 = f_0 + f = f$.

4. $\forall f \in \mathcal{F}(A)$, $\exists g \in \mathcal{F}(A)$ tal que $f + g = f_0$.

   Si $\forall x \in A$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = f_0(x) = 0$, siendo $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ tales que $f(x)+g(x) = 0$ entonces $g(x) = -f(x)$. Por consiguiente, $\forall x \in A$, $g(x) = -f(x)$, lo cual nos permite concluir que $g = -f$.

   En síntesis, para cada $f \in \mathcal{F}(A)$, existe $-f \in \mathcal{F}(A)$ tal que $f + (-f) = f_0$.

   Las propiedades 1), 2), 3) y 4) muestran que $(\mathcal{F}(A), +)$ es un grupo conmutativo.

Ejercicios

1. Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$

   a) Si f, g son crecientes (respectivamente decrecientes), entonces $f+g$ es creciente (respectivamente decreciente).

   b) Si f, g son pares (respectivamente impares), entonces $f + g$ es par (respectivamente impar).

2. Sea $f \in \mathcal{F}(A)$

   a) Si f es creciente (respectivamente decreciente), entonces $-f$ es decreciente (respectivamente creciente).

   b) Si $\forall x \in A$, $-x \in A$ y f es par (respectivamente impar). Pruebe que $-f$ es par (respectivamente impar).

3. Sean f y g funciones reales definidas de A en sí mismo. ¿Son verdaderas las siguientes proposiciones?

   a) Si f y g son inyectivas, $f + g$ es inyectiva.

   b) Si f y g son sobreyectivas, $f + g$ es sobreyectiva.

   c) Si f y g son biyectivas, $f + g$ es biyectiva.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM CONSILIO SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

4.6.4. Producto de Números Reales por Funciones

Definición 4.22 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define el producto de λ por la función f del siguiente modo:*

$$\forall x \in A, (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

EJEMPLO

1. Dada la función:

$$\begin{aligned} f : [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x^2 - 2. \end{aligned}$$

   a) Sea $\lambda = -1$ entonces $(\lambda f)(x) = (-1f)(x) = (-1)f(x) = (-1)(x^2 - 2) = -x^2 + 2$.

   b) Si $\lambda = \frac{1}{2}$; entonces $\left(\frac{1}{2}f\right)(x) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2) = \frac{1}{2}x^2 - 1$.

   c) Si $\lambda = 2$, entonces $(2f)(x) = 2f(x) = 2(x^2 - 2) = 2x^2 - 4$

d) Si $\lambda = 0$, entonces $(0 \cdot f)(x) = 0f(x) = 0$.

A continuación se muestra la representación gráfica de λf, para los valores de λ indicados en las partes a), b), c) y d).

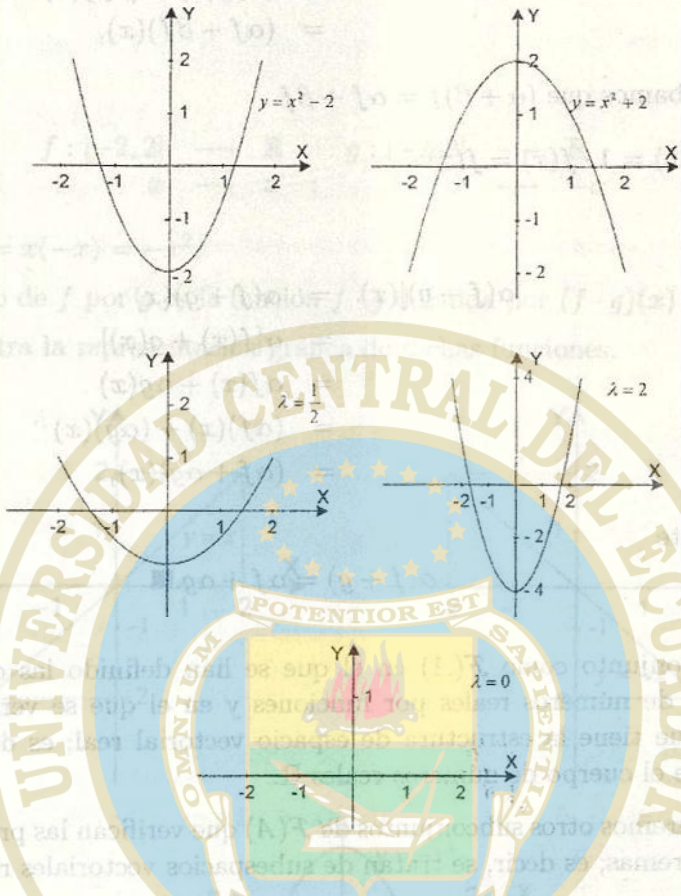


Figura 4.66:

Teorema 4.10 *Cualesquiera que sean f, $g \in \mathcal{F}(A)$ y para todo α, $\beta \in \mathbb{R}$, se verifica:*

i) $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$

ii) $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$

iii) $1 \cdot f = f$

iv) $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$

Demostración.

i) Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(A)$, entonces

$$\begin{aligned} \forall x \in A, [(\alpha\beta)f](x) &= (\alpha\beta)f(x) \\ &= \alpha\,[\beta f(x)] \\ &= \alpha\,[(\beta f)(x)] \\ &= [\alpha\,(\beta f)](x). \end{aligned}$$

Luego $[(\alpha\beta)f](x) = [\alpha(\beta f)](x)$ y en consecuencia $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$.

ii) $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned}[(\alpha+\beta)f](x) &= (\alpha+\beta)f(x)\\ &= \alpha f(x)+\beta f(x)\\ &= (\alpha f)(x)+(\beta f)(x)\\ &= (\alpha f+\beta f)(x),\end{aligned}$$

con lo cual probamos que $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$.

iii) $\forall x \in A$, $(1\cdot f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x)$.

iv) $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned}[\alpha(f+g)](x) &= \alpha(f+g)(x)\\ &= \alpha[f(x)+g(x)]\\ &= \alpha f(x)+\alpha g(x)\\ &= (\alpha f)(x)+(\alpha g)(x)\\ &= (\alpha f+\alpha g)(x),\end{aligned}$$

consecuentemente

$$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g.\blacksquare$$

Observación.- Un conjunto como $\mathcal{F}(A)$ en el que se han definido las operaciones: adición de funciones y producto de números reales por funciones y en el que se verifican los dos teoremas precedentes se dice que tiene la estructura de espacio vectorial real; es decir, $(\mathcal{F}(A), +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de números reales $\mathbb{R}$.

Más adelante encontraremos otros subconjuntos de $\mathcal{F}(A)$ que verifican las propiedades mencionadas en los dos últimos teoremas; es decir, se tratan de subespacios vectoriales reales.

Note que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, esto es, verifica propiedades análogas a las dadas en los dos teoremas precedentes. Asimismo, $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre sí mismo.

Ejercicios

1. Sean $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Probar que:

   a) Si f es creciente, entonces λf es creciente si $\lambda > 0$ y λf es decreciente si $\lambda < 0$.

   b) Si f es biyectiva, λf es biyectiva siempre que $\lambda \neq 0$.

   c) Si f es par (resp. impar), λf es par (resp. impar) si $\lambda \neq 0$.

2. Probar que:

   a) Si f es una función monótona sobre un intervalo I, entonces la función: $g = af + b$, donde $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, es monótona sobre I, con el mismo sentido de variación si $a > 0$ y sentido contrario si $a < 0$.

   b) Si f es monótona sobre I y verifica que $(\forall x \in I)(f(x)) \geq 0)$, entonces la función $g : x \longrightarrow \sqrt{f(x)}$ es monótona sobre I con el mismo sentido de variación.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

4.6.5. Producto de funciones

Definición 4.23 *Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$. El producto de f con g se nota por $f \cdot g$ y se define por*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in A.$$

EJEMPLO

Sean las funciones:

$$\begin{array}{ccccc} f : [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} & \quad g : [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & x & ; & x & \longrightarrow & -x \end{array}$$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x(-x) = -x^2$.

Es decir que el producto de f por g es la función $f \cdot g$ definida por $(f \cdot g)(x) = -x^2$.

A continuación se muestra la representación gráfica de dichas funciones.

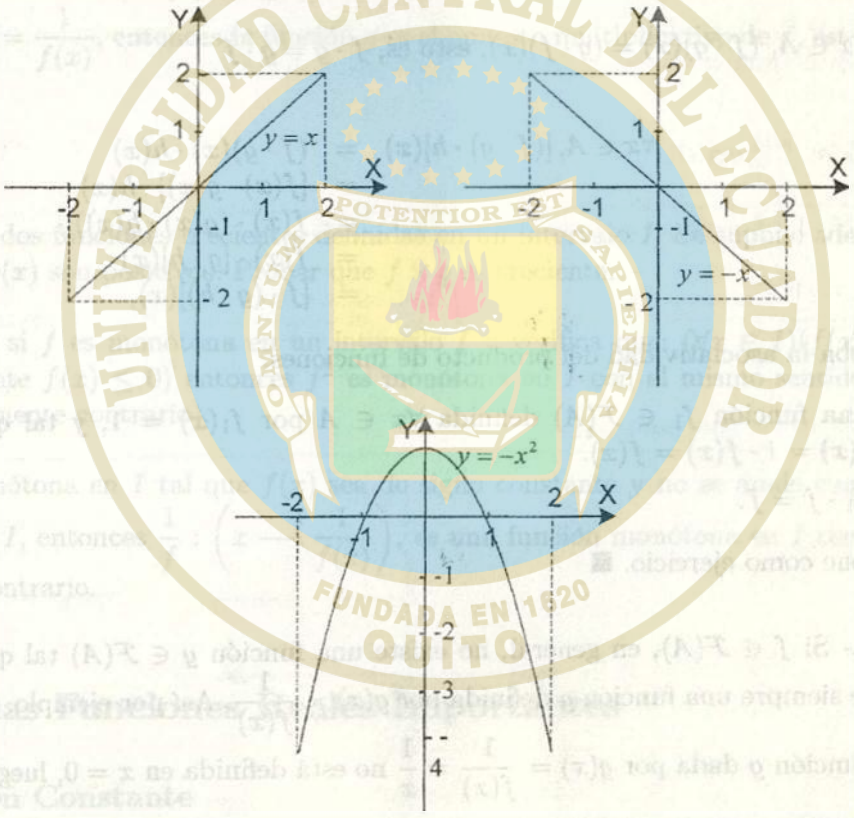


Figura 4.67:

Observación Sean f y g funciones definidas en A y A' respectivamente; el producto de f por g está definido si y solo si, $A \cap A' \neq \varnothing$, es decir, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, tiene sentido $\forall x \in A \cap A'$.

Es obvio que si $A \cap A' = \varnothing$ entonces $f \cdot g$ no está definida.

Estructura Algebraica de $(\mathcal{F}(A), \cdot)$.

Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$, la definición de $f \cdot g$ implica que $f \cdot g \in \mathcal{F}(A)$, en otros términos, el producto de funciones es una operación binaria interna en $\mathcal{F}(A)$.

Teorema 4.11 *Cualesquiera que sean las funciones f, g, $h \in \mathcal{F}(A)$, se verifica:*

i) $f \cdot g = g \cdot f$

ii) $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$

iii) $\exists\, f_1 \in \mathcal{F}(A)$ *tal que* $f_1 \cdot f = f$

iv) $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h$

Demostración.

i)

$$\begin{aligned} \forall x \in A, (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= g(x) \cdot f(x) \\ &= (g \cdot f)(x). \end{aligned}$$

Luego $\forall x \in A$, $(f \cdot g)(x) = (g \cdot f)(x)$, esto es, $f \cdot g = g \cdot f$.

ii)

$$\begin{aligned} \forall x \in A, [(f \cdot g) \cdot h](x) &= (f \cdot g)(x) \cdot h(x) \\ &= [f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) \\ &= f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x)) \\ &= f(x) \cdot [g \cdot h](x) \\ &= [f \cdot (g \cdot h)](x), \end{aligned}$$

que prueba la asociatividad del producto de funciones.

iii) Existe una función $f_1 \in \mathcal{F}(A)$ definida $\forall x \in A$ por $f_1(x) = 1$, y tal que $(f_1 \cdot f)(x) = f_1(x) \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$.

Luego: $f_1 \cdot f = f$.

iv) Se propone como ejercicio. ■

Observación.- Si $f \in \mathcal{F}(A)$, en general, no existe una función $g \in \mathcal{F}(A)$ tal que $f \cdot g = f_1$; es decir, no existe siempre una función g definida por $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Así por ejemplo, sea $A = [-1, 1]$ y $f(x) = x$. La función g dada por $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{x}$ no está definida en $x = 0$, luego $g \notin \mathcal{F}([-1, 1])$. Debido a esta última situación, $(\mathcal{F}(A), \cdot)$, no es grupo conmutativo.

Definición 4.24 *Sean f y g funciones reales definidas en un subconjunto A de $\mathbb{R}$ en A; definimos la función $\dfrac{f}{g}$ por:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in A \text{ tal que } g(x) \neq 0.$$

En particular, si $f(x) = 1, \forall x \in A$, definimos $\dfrac{1}{g}$ por:

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)}, \forall x \in A \text{ tal que } g(x) \neq 0$$

Observación.- Sean f y g funciones definidas en los conjuntos sobre A y A_1 respectivamente y sea $B = \{x \in A_1 : g(x) = 0\}$. La función $\frac{f}{g}$ está bien definida si, y solo si, $(A \cap A_1) \setminus B \neq \varnothing$, es decir $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene sentido si, y solo si, $x \in A \cap A_1$ y $g(x) \neq 0$.

Estructura Algebraica de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^+)$.- El conjunto

$$\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^+) = \{f : A \longrightarrow \mathbb{R}^+ : f \text{ es una función } \}$$

es un grupo conmutativo respecto al producto de funciones.

Del teorema precedente, la operación producto de funciones es asociativa, conmutativa, existe un elemento neutro $f_1 \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^+)$, quedando por verificar que es simetrizable.

En efecto, $\forall f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^+)$, $\forall x \in A$, $f(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > 0$ y $f(x) \cdot \frac{1}{f(x)} = 1$.

Si definimos $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, entonces la función g es el opuesto multiplicativo de f, esto es, $f \cdot g = f_1$.

Ejercicios

1. Sean f y g dos funciones crecientes definidas en un intervalo I. Se supone además que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ y $g(x)$ son positivos. Probar que $f \times g$ es creciente.
2. Probar que si f es monótona en un intervalo I y verifica que: $(\forall x \in I)(f(x) \geq 0)$ (respectivamente $f(x) \leq 0$) entonces f^2 es monótona en I con el mismo sentido de variación (respectivamente contrario).
3. Si f es monótona en I tal que $f(x)$ sea de signo constante y no se anule cuando x recorre el intervalo I, entonces $\frac{1}{f} : \left(x \longrightarrow \frac{1}{f(x)}\right)$, es una función monótona en I con el sentido de variación contrario.

4.7. Algunas Funciones Reales Importantes

4.7.1. Función Constante

Definición 4.25 *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$. La función f de A en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = k$ se llama función constante.*

En el caso de la función constante se tiene que $\text{Dom}(f) = A$, $\text{Rec}(f) = \{k\}$.

EJEMPLO

Sea $A = [-1, 2]$ y $f(x) = 1$, $\forall x \in [-1, 2]$. Se tiene entonces que f es una función constante. Observemos que en particular $f(-1) = 1$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(0) = 1$, $f(2) = 1$.

La gráfica de dicha función se indica a continuación.

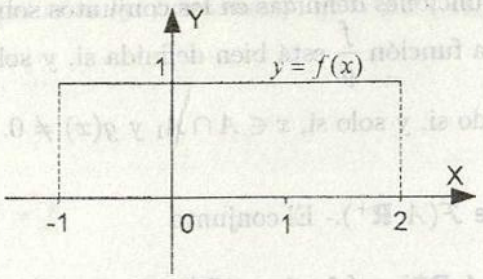


Figura 4.68:

Sean $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ y $x \in [-1, 2]$ tal que $x + h \in [-1, 2]$, entonces $f(x + h) = 1$ con lo cual

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Si $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = k$, la gráfica de f es una recta paralela al eje X que corta al eje Y en el punto k; f es par; no es inyectiva ni sobreyectiva, es creciente y decreciente.

4.7.2. Función Signo de x

Definición 4.26 *La función signo de x se denota por $Sign(x)$ y está definida por*

$$Sign(x) = \begin{cases} -1, & si\ x < 0 \\ 0, & si\ x = 0 \\ 1, & si\ x > 0 \end{cases}$$

Su gráfica se muestra a continuación.

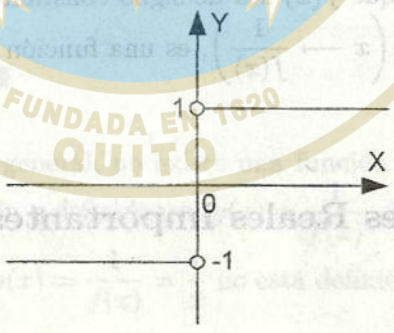


Figura 4.69:

4.7.3. Función Característica o indicatriz

Definición 4.27 *Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, si\ x \in A \\ 0, \ si\ x \in \mathbb{R} \backslash A \end{cases}$$

se llama función característica de A. Se suele notar con 1_A o con $\mathcal{X}_A$.

De acuerdo a la definición de la función característica, se sigue que: $\text{Dom}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{R}$ y $\text{Rec}(\mathbf{1}_A) = \{0, 1\}$; $\mathbf{1}_A$ no es par ni impar, tampoco es monótona.

EJEMPLOS

1. Sea $A = [-1; 1]$, la función característica de A es

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x \in A \\ 0, \text{ si } x \in \mathbb{R} \backslash A \end{cases}$$

2. Para $n \in \mathbb{Z}$ sea $A_n = [n; n+1]$. Entonces

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } n \leq x \leq n+1 \\ 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \backslash [n; n+1] \end{cases}$$



Figura 4.70:

3. Dadas las funciones:

$$\begin{array}{rccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = x^2 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{1}_{[0;+\infty[}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Determinar la función: $f \times \mathbf{1}_{[0;+\infty[}$ y representarla gráficamente.

Solución

$$\begin{aligned} (f \times \mathbf{1}_{[0,+\infty[})(x) &= f(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \\ &= \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in [0; +\infty[\\ 0, \text{ si } x \notin [0; +\infty[\end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2, \text{ si } x \in [0; +\infty[\\ 0, \text{si } x \notin [0; +\infty[. \end{cases} \end{aligned}$$

Su representación gráfica se indica en la siguiente figura.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

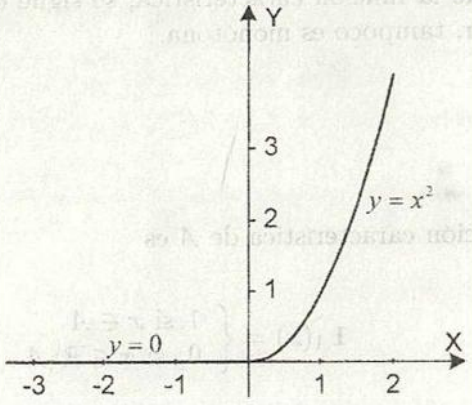


Figura 4.71:

4. Sean $A_n =]0, n]$ y $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Representar gráficamente las funciones:

   a) $\mathbf{1}_{A_1} \times f$,

   b) $\mathbf{1}_{A_2} \times f$,

   c) $\mathbf{1}_{A_3} \times f$,

   d) $\mathbf{1}_{A_{10}} \times f$,

Solución

a) $(\mathbf{1}_{A_1} \times f)(x) = \mathbf{1}_{]0;1]}(x) \cdot f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in]0;1] \\ 0, \text{ si } x \notin]0;1] \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \in]0;1] \\ 0, \text{ si } x \notin]0;1] \end{cases}$

b) $(\mathbf{1}_{A_2} \times f)(x) = \mathbf{1}_{]0;2]}(x) \cdot f(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } x \in]0;2] \\ 0, \text{ si } x \notin]0;2] \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \in]0;2] \\ 0, \text{ si } x \notin]0;2] \end{cases}$

c) $(\mathbf{1}_{A_3} \times f)(x) = \mathbf{1}_{]0;3]}(x) \cdot f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \in]0;3] \\ 0, \text{ si } x \notin]0;3] \end{cases}$

A continuación se muestra la representación gráfica de cada una de las funciones obtenidas en las partes a), b), c) y d).

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

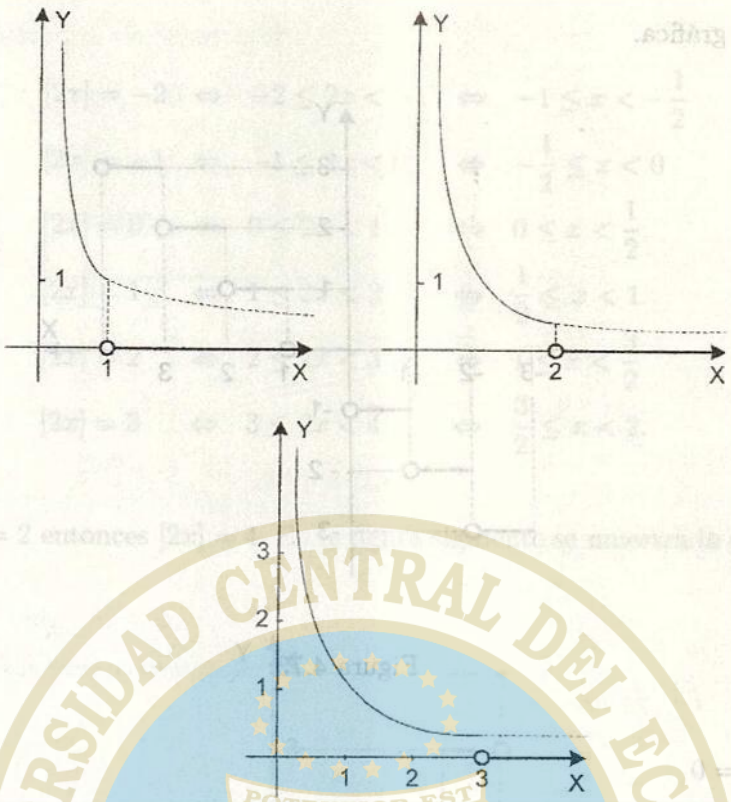


Figura 4.72:

Ejercicios

Sea E un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

1. Sean A y B subconjuntos de E. Demuestre que:

   a) $\mathcal{X}_{A\cap B} = \mathcal{X}_A \cdot \mathcal{X}_B$

   b) $\mathcal{X}_{A\setminus B} = \mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B$, con $B \subset A$.

   c) $\mathcal{X}_{E\setminus A} = 1 - \mathcal{X}_A$

   d) $\mathcal{X}_{\varnothing} = 0$

2. Sean $A_1, \cdots A_n$ subconjuntos disjuntos dos a dos tales que: $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Probar que $\mathcal{X}_E = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{A_i}$ ¿Es verdadero si $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ para algún i y algún j?

4.7.4. Función parte entera de x

Sea $x \in \mathbb{R}$, hemos visto anteriormente que el entero n tal que $n \leq x < n+1$, se denomina el mayor entero menor o igual que x y se nota con $[x]$ que se lee "parte entera de x". Se tiene además que $[x] \leq x < [x] + 1$. Esto motiva dar la siguiente definición.

Definición 4.28 *La función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ se denomina función parte entera de x.*

De la definición se sigue que f es una función creciente, no es inyectiva ni sobreyectiva, $\text{Rec}(f) = \mathbb{Z}$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Construyamos su gráfica.

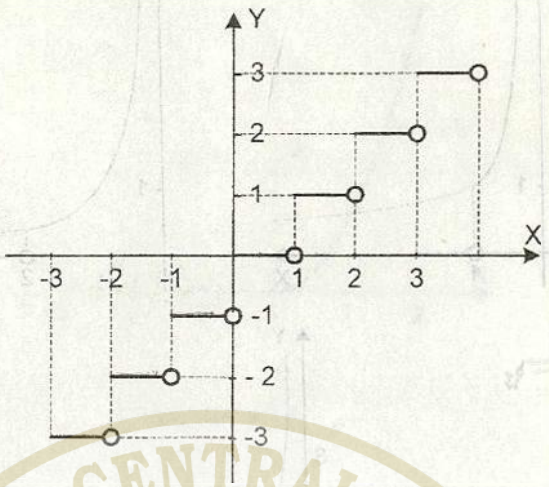


Figura 4.73:

Si $0 \leq x < 1$, $[x] = 0$

Si $1 \leq x < 2$, $[x] = 1$

Si $2 \leq x < 3$, $[x] = 2$

$\vdots$

Si $-1 \leq x < 0$, $[x] = -1$

Si $-2 \leq x < -1$, $[x] = -2$

Si $-3 \leq x < -2$, $[x] = -3$

$\vdots$

EJEMPLOS

Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo I que se indica en cada uno de los siguientes casos:

1. $f(x) = [2x]$; $I = [-1, 2]$

2. $f(x) = \left[\frac{1}{3}x\right]$; $I = [-3, 3]$

3. $f(x) = [\sqrt{x}]$; $I = [0, 16[$

4. $f(x) = [x^2]$; $I = [-2, 2]$

Solución

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

1. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
[2x] = -2 &\Leftrightarrow -2 \leq 2x < -1 \Leftrightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\
[2x] = -1 &\Leftrightarrow -1 \leq 2x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\
[2x] = 0 &\Leftrightarrow 0 \leq 2x < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \\
[2x] = 1 &\Leftrightarrow 1 \leq 2x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1 \\
[2x] = 2 &\Leftrightarrow 2 \leq 2x < 3 \Leftrightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2} \\
[2x] = 3 &\Leftrightarrow 3 \leq 2x < 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2.
\end{aligned}$$

Finalmente, si $x = 2$ entonces $[2x] = 4$. En la figura siguiente se muestra la representación de esta función.

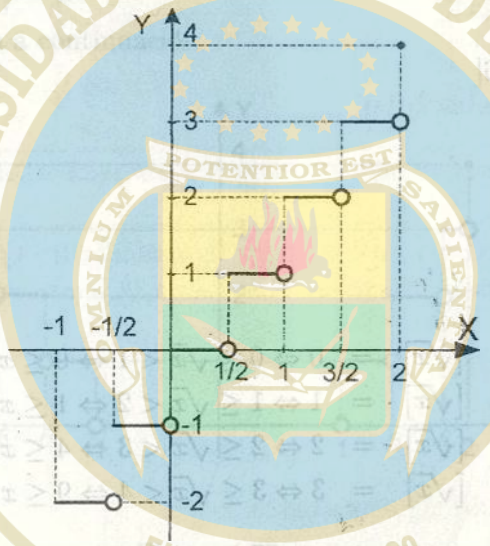


Figura 4.74:

2. Tenemos por definición de parte entera de x que:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x}{3}\right] = 0 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{3} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 3 \\
\left[\frac{x}{3}\right] = -1 &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{3} < 0 \Leftrightarrow -3 \leq x < 0,
\end{aligned}$$

finalmente, si $x = 3$ entonces $\left[\frac{x}{3}\right] = 1$.

La gráfica de la función f definida por $f(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$ en el intervalo $[-3, 3]$ se indica a continuación.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

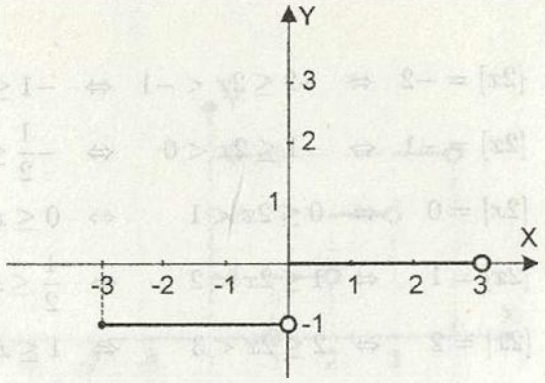


Figura 4.75:

3. $f(x) = [\sqrt{x}]$, $I = [0; 16[$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
[\sqrt{x}] &= 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \\
[\sqrt{x}] &= 1 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 \leq x < 4 \\
[\sqrt{x}] &= 2 \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow 4 \leq x < 9 \\
[\sqrt{x}] &= 3 \Leftrightarrow 3 \leq \sqrt{x} < 4 \Leftrightarrow 9 \leq x < 16
\end{aligned}$$

La gráfica de f se muestra a continuación.

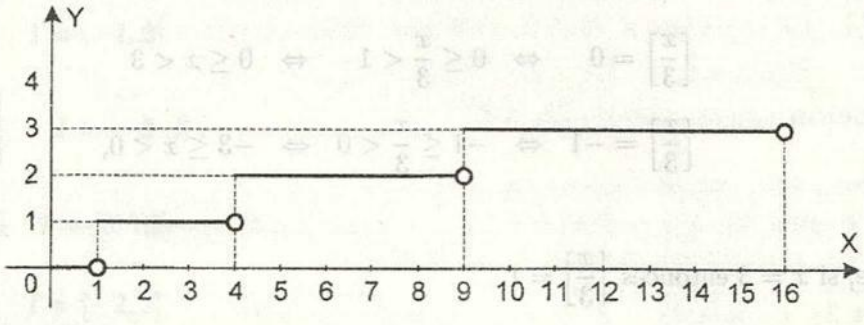


Figura 4.76:

4. De acuerdo a la definición de $[x]$ se tiene:

$$\begin{aligned}
[x^2] = 0 &\Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow 0 \leq |x| < 1 \\
&\Leftrightarrow x \in]-1;1[\\
[x^2] = 1 &\Leftrightarrow 1 \leq x^2 < 2 \\
&\Leftrightarrow 1 \leq |x| < \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{2};-1[\cup [1;\sqrt{2}[\\
[x^2] = 2 &\Leftrightarrow 2 \leq x^2 < 3 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{2} \leq |x| < \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3};-\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2};\sqrt{3}[\\
[x^2] = 3 &\Leftrightarrow 3 \leq x^2 < 4 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq |x| < 2 \\
&\Leftrightarrow x \in]-2;-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3};2[
\end{aligned}$$

Finalmente, si $x = \pm 2$, $[x^2] = 4$.

La gráfica de f se muestra a continuación.

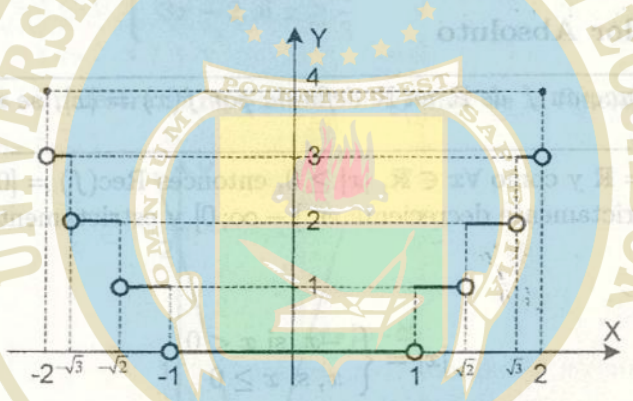


Figura 4.77:

Ejercicios

1. Probar que: $[x+k] = [x] + k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
2. Dibujar la gráfica de la función f definida por $f(x) = \sqrt{[x]}$ para $0 \leq x \leq 5$.
3. Se considera la función f definida por $f(x) = 1 - x[x]$.

   a) Sea n un entero natural. Expresar, sin utilizar la función parte entera, el valor de $f(x)$ para todo real x en el intervalo $[n, n+1[$.

   b) Completar, con ayuda de los resultados de la parte a) el siguiente cuadro:

x	-3	-2	-1		0	1	2	3	4	5
$f(x)$				$1+x$						

   c) La restricción de la función f a cada uno de los intervalos $[n, n+1[$ es una función afín, cuya representación gráfica se la realizará.

d) En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, representar gráficamente la restricción de la función f al intervalo $[-3;5]$.

4. Representar gráficamente la restricción de f al intervalo $[-3,5]$ en los siguientes casos:

   a) $f(x) = [x] + x[x]$;
   b) $f(x) = [x] - 2x$;
   c) $f(x) = (2[x]+1)x - [x]([x]-1)$;
   d) $f(x) = 1 - \dfrac{[x]}{x}, x \neq 0$;
   e) $f(x) = \left(x - 2\left[\dfrac{x}{2}\right] - 1\right)\left(x - 2\left[\dfrac{x}{2}\right] + 1\right)$.

5. Precisar el dominio de definición, el recorrido y además, construir en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, la representación gráfica de las siguientes funciones:

   a) $x \longrightarrow f(x) = x - [x]$
   b) $x \longrightarrow f(x) = (-1)^{[x]}(x - [x])$
   c) $x \longrightarrow f(x) = (-1)^{[x]}x$

4.7.5. Función Valor Absoluto

Definición 4.29 *La función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, se denomina función valor absoluto.*

Tenemos que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y como $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$, entonces $\text{Rec}(f) = [0;+\infty[$. Además f es par. Por otra parte, f es estrictamente decreciente en $]-\infty;0]$ y estrictamente creciente en $[0;+\infty[$.

Puesto que

$$|x| = \begin{cases} -x, \text{ si } x < 0 \\ x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

la función f puede escribirse del siguiente modo.

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x, \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

A continuación se indica el gráfico que representa la función valor absoluto.

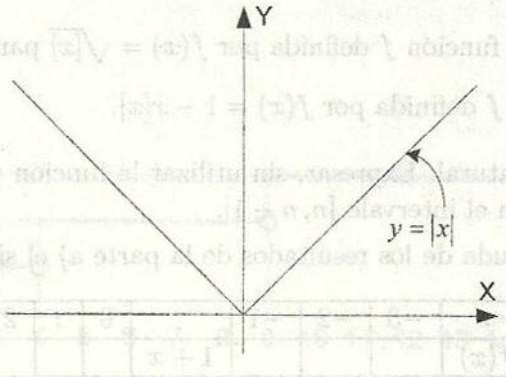


Figura 4.78:

Si g es una función real definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$, a partir de la función valor absoluto se puede obtener otra función h poniendo

$$\forall x \in A,\ h(x) = |g(x)|.$$

EJEMPLOS

1. Sea g la función real definida por $g(x) = 3x-2$. Se tiene entonces que: $h(x) = |g(x)| = |3x-2|$. Como:

$$\begin{aligned} 3x-2 &\geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[\\ 3x-2 &< 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; \frac{2}{3}\right[\end{aligned}$$

y la función h podemos definirla como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} -(3x-2), \text{si } x < \dfrac{2}{3} \\ 3x-2, \text{si } x \geq \dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \text{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+.$$

En la siguiente figura se muestra la representación gráfica de la función h.

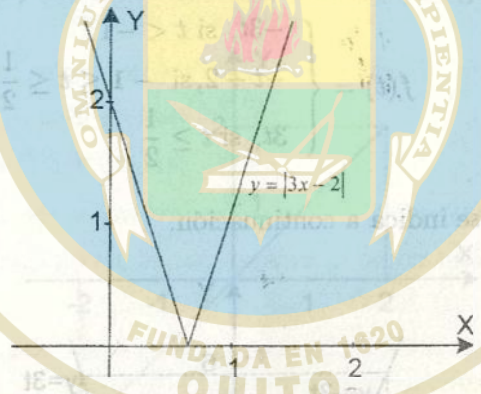


Figura 4.79:

2. Sea f la función real definida por $f(x) = |x^2 + x|$. Construir la gráfica de la función f.

Solución.- Tenemos que:

$$\begin{aligned} x^2+x &\geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[\\ x^2+x &< 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 0[\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2+x), \text{ si } x \in]-1, 0[\\ x^2+x, \text{ si } x \in]-\infty; -1] \cup [0; \infty[\end{cases} \quad \text{Además,} \quad \text{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$$

La gráfica de esta función se indica a continuación.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

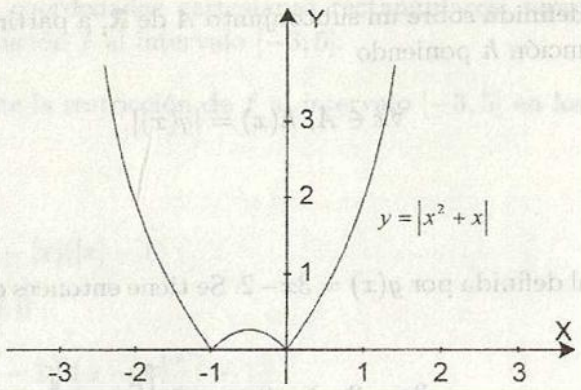


Figura 4.80:

3. Sea f la función dada por $f(t) = |2t-1| + |t+1|$. Dibujar la gráfica de la función f.

Solución.- Puesto que:

$$\begin{aligned} 2t-1 \geq 0 &\Leftrightarrow t \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad 2t-1 < 0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{2}, \\ t+1 \geq 0 &\Leftrightarrow t \geq -1 \quad \text{y} \quad t+1 < 0 \Leftrightarrow t < -1. \end{aligned}$$

La función f puede escribirse como sigue:

$$f(t) = \begin{cases} -3t, & \text{si } t < -1 \\ -t+2, & \text{si } -1 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 3t, & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

La gráfica de la función se indica a continuación.

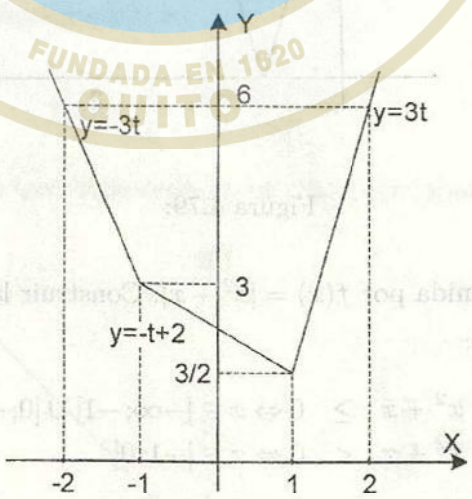


Figura 4.81:

El recorrido de la función f es el conjunto $\text{Rec}(f) = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

Observación.- Si g es una función creciente en A y f la función definida por $f(x) = |g(x)|$; por lo general, f no es creciente. Así mismo, si g es inyectiva, f en general, no lo es. Así por ejemplo, si g es la función real definida por $g(x) = x + 1$ que es estrictamente creciente, se tiene que la función real f definida por $f(x) = |g(x)|$ no es estrictamente creciente, ni siquiera es monótona, ella es monótona a trozos.

Además, la función g es inyectiva, pero en cambio la función f no lo es. En efecto; se tiene por ejemplo que:

$$f(-4) = f(2) \text{ y } -4 \neq 2.$$

4.7.6. · Función Identidad

Definición 4.30 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, a la función*

$$\begin{aligned} i_d : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto i_d(x) = x \end{aligned}$$

se le denomina función identidad.

Tenemos que $\text{Dom}(i_d) = \text{Rec}(i_d) = A$; obviamente i_d es inyectiva y creciente.

Si A es tal que $\forall x \in A$, $-x \in A$ entonces i_d es impar.

EJEMPLO

Sea el conjunto $A = [-2, 2]$ e $i_d(x) = x$ la función identidad en A. Su gráfica se indica a continuación.

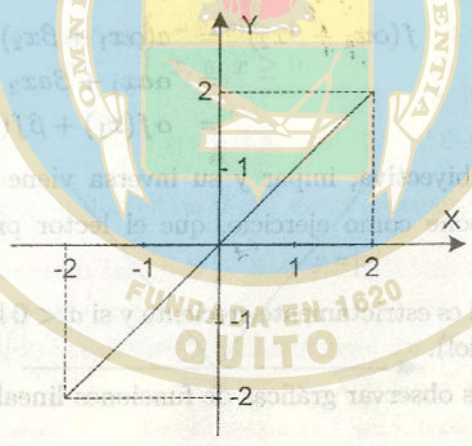


Figura 4.82:

4.7.7. Función Afín y Lineal

Definición 4.31 *La función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, se denomina función afín.*

Observaciones:

1. Si $a > 0$, la función f es estrictamente creciente y biyectiva, su inversa viene definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{x - b}{a}$, función que es también creciente.

2. Si $a < 0$, f es estrictamente decreciente al igual que su inversa. A continuación se muestra la representación gráfica de algunas funciones afines.

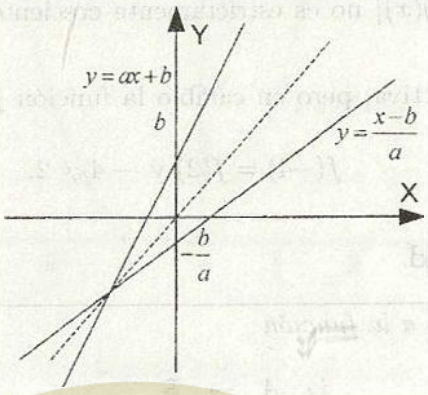


Figura 4.83:

3. Si $b = 0$, la función definida por $f(x) = ax$ se llama función lineal. Decimos que f es lineal por verificar la siguiente propiedad:

   $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

   En efecto, puesto que $f(x_1) = ax_1$, $f(x_2) = ax_2$, entonces

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= a(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha a x_1 + \beta a x_2 \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \end{aligned}$$

   La función lineal f es biyectiva, impar y su inversa viene definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x$. Se propone como ejercicio, que el lector pruebe que f^{-1} también es una aplicación lineal.

   Si $a > 0$ la función lineal es estrictamente creciente y si $a < 0$ la función lineal es estrictamente decreciente (¡demuéstrelo!).

   A continuación podemos observar gráficas de funciones lineales.

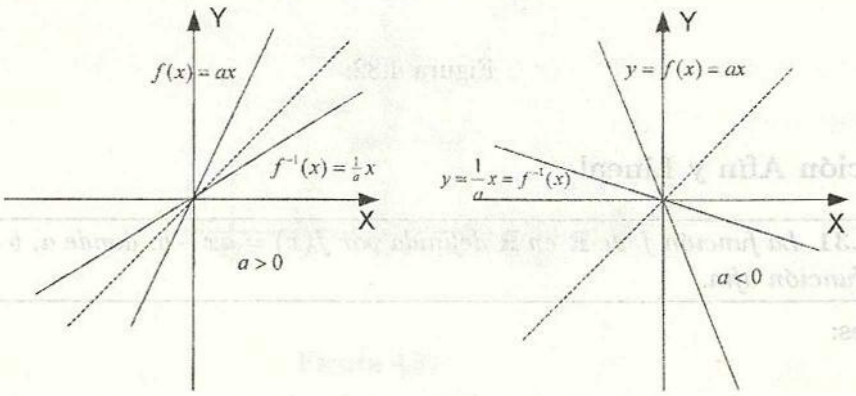


Figura 4.84:

EJEMPLOS

Sean f, g, u y v las funciones definidas por: $f(x) = 2x + 3; \forall x \in \mathbb{R}$; $g(t) = -\frac{1}{2}t - 1, \forall t \in \mathbb{R}$; $u(x) = -\frac{1}{3}x, \forall x \in \mathbb{R}$; $v(x) = \pi x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Las funciones f y g son funciones afines, u y v son lineales; f y v son estrictamente crecientes; g y u son estrictamente decrecientes.

Note que f y g no son lineales. Veamos por ejemplo que f no lo es. En efecto:

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1) = 2x_1 + 3, \quad f(x_2) = 2x_2 + 3$$

y

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 3 \\ &= \alpha(2x_1) + \beta(2x_2) + 3 \neq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \end{aligned}$$

Función afín por intervalos

Definición 4.32 *Diremos que f es una función afín por intervalos definida en R, si existen números reales $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tales que f coincide con una función afín en cada uno de los intervalos $]-\infty, a_1]$, $]a_i, a_{i+1}[$ y $]a_n, +\infty[$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.*

EJEMPLOS

1. La función f definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = |x|$ es una función afín por intervalos. Se tiene:

$$\begin{cases} -x, \text{ si } x < 0 \\ x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$



Figura 4.85:

2. Sea la función g definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{2}$$

Se tiene que:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$x-1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Luego: Para $x \leq -1$, se tiene que $g(x) = \dfrac{-(x+1) - (x-1)}{2} = -x$.

Para $-1 < x \leq 1$, se tiene que $g(x) = \dfrac{x+1-(x-1)}{2} = 1$.

Para $1 < x$ se tiene que $g(x) = \dfrac{x+1+x-1}{2} = x$.

Es decir que:

$$g(x) = \begin{cases} -x, \text{ si } x \leq -1 \\ 1, \text{ si } -1 < x \leq 1 \\ x, \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

cuya representación gráfica se indica a continuación.



Figura 4.86:

Ejercicios

1. Representar gráficamente, la función f definida como a continuación se indica:
   a) $f(x) = |x| + |x-1| - |2x-1|$
   b) $f(x) = -2|x+1| + 3|x-2| + 2x$.

2. Se da las aplicaciones o funciones afines (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) definidas por $f(x) = ax+b$, $g(x) = cx+d$.
   a) Encontrar una relación $\mathcal{R}$ entre a, b, c, d de tal manera que $g \circ f = f \circ g$. Mostrar que $\mathcal{R}$ se verifica si $a = c = 1$.
   b) Mostrar que f admite un elemento invariante único si y solamente si $a \neq 1$. Interpretar la relación $\mathcal{R}$ si $a \neq 1$ y $c \neq 1$.
   c) Mostrar que el conjunto de funciones afines f no constantes teniendo al menos un elemento invariante (punto fijo) α común, forman para la composición de funciones un grupo conmutativo.

3. ¿Bajo qué condiciones existe una función afín única f tal que $f(\alpha) = \alpha'$ y $f(\beta) = \beta'$ siendo α, β, α'y β' reales dados? Verificándose dicha condición, escribir $f(x)$bajo la forma $ax + b$

4.7.8. Función potencia positiva

Definición 4.33 *Sean $n \in \mathbb{Z}^+$ y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$. La función f se llama función potencia positiva.*

Para $n = 1$, $f(x) = x$, que es la función identidad.

Para el estudio de la función potencia positiva, consideramos dos casos: cuando n es par y cuando n es impar.

1. Si n es par

   La función f es par y monótona a trozos; pues f es estrictamente decreciente en el intervalo $]-\infty;0]$ y estrictamente creciente en $[0,+\infty[$.

   No es inyectiva ni sobreyectiva. Puesto que si n es par, la función potencia positiva no es biyectiva entonces no existe la inversa. Si consideramos para n par la función

$$\begin{array}{rcl} g:[0;+\infty[& \to & [0;+\infty[\\ x & \mapsto & g(x)=x^n \end{array}$$

   es fácil probar que g es biyectiva. La inversa de g se denomina función raíz n-ésima; es decir que g^{-1} está definida por: $g^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$, $\forall x\in[0,+\infty[$. La representación gráfica de g y g^{-1} se muestra a continuación.

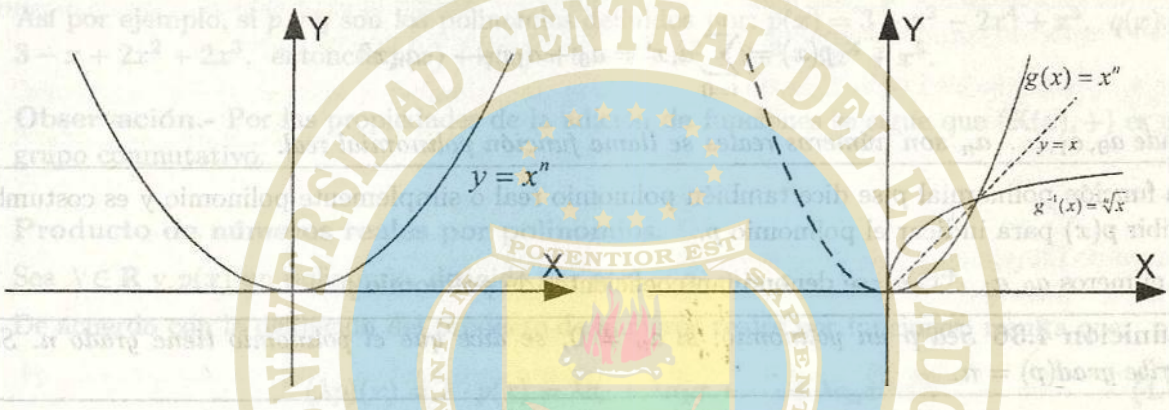


Figura 4.87:

2. Si n es impar.

   La función f es impar, estrictamente creciente y biyectiva. Su inversa está definida por $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ y se denomina la función raíz n-ésima. Su representación gráfica se indica en la siguiente figura.

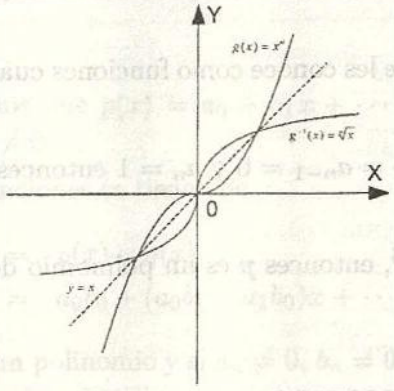


Figura 4.88:

4.7.9. Función potencia negativa

Definición 4.34 *Se denomina función potencia negativa a la función*

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \end{cases}$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$.

Proponemos como ejercicio el estudio de la paridad, la monotonía y la existencia de su inversa.

4.7.10. Función polinomial

Definición 4.35 *Una función* p *de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *definida por:*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *son números reales se llama función polinomial real.*

Una función polinomial p se dice también polinomio real o simplemente polinomio y es costumbre escribir $p(x)$ para indicar el polinomio p.

Los números $a_0, a_1, \cdots, a_n$ se denominan coeficientes de polinomio p.

Definición 4.36 *Sea* p *un polinomio, si* $a_n \neq 0$, *se dice que el polinomio tiene grado* n. *Se escribe* $grad(p) = n$.

Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = k \neq 0$ entonces $grad(p) = 0$ y si $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = 0$, p se denomina polinomio nulo y en este caso su grado no está definido.

Designaremos con $\mathbf{K}(x)$el conjunto de todos los polinomios.

EJEMPLOS

1. Sea $p(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Es obvio que $p(x)$ es un polinomio de grado 1, como se ve, es la función afín y si $b = 0$ es la función lineal.

2. Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Entonces p es un polinomio de grado 2, los coeficientes son a, b y c.

   A los polinomios de grado 2 se les conoce como funciones cuadráticas y cuyo análisis realizaremos más adelante.

3. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ y $a_n = 1$ entonces $p(x) = x^n$. El polinomio p es la función potencia positiva.

4. Sea $p(x) = 3 - x^2 - 2x^4 + x^5$, entonces p es un polinomio de grado 5, sus coeficientes son 3, 0, -1, 0, -2 y 1.

OPERACIONES CON POLINOMIOS

1. **Adición de polinomios**

Sean $p, q \in \mathbb{K}(x)$, supongamos que p y q son polinomios de grado m y n respectivamente; de acuerdo a la adición de funciones, resulta que $p(x) + q(x)$ es un polinomio cuyo grado es menor o igual que $\max\{m, n\}$; y que está definido por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (p+q)(x) = p(x) + q(x) \tag{4.6}$$

y si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m \leq n$ entonces $grad(p+q) \leq n = \max\{m, n\}$.

Supongamos que

$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$, con $a_n \neq 0$. $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, con $b_m \neq 0$ entonces:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + \cdots + (a_n + b_n)x^n.$$

donde

$$b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0.$$

Así por ejemplo, si p y q son los polinomios definidos por: $p(x) = 3 - x^2 - 2x^4 + x^5$, $q(x) = 3 - x + 2x^2 + 2x^3$, entonces $p(x) + q(x) = 6 - x + x^2 + 2x^3 - 2x^4 + x^5$.

Observación.- Por las propiedades de la adición de funciones se sigue que $(\mathbb{K}(x), +)$ es un grupo conmutativo.

2. **Producto de números reales por polinomios.**

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $p(x)$ un polinomio, definido por $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$.

De acuerdo con la definición del producto de números reales por funciones, resulta que:

$$(\lambda p)(x) = \lambda \cdot p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n; \tag{4.7}$$

expresión esta última que nos muestra que $(\lambda p)(x)$ es un polinomio; así:

Si $\lambda = 0$, $\lambda p(x) = 0$, es decir se trata del polinomio nulo.

Si $\lambda \neq 0$ y $grad(p) = n$ entonces $grad(\lambda p) = n$.

EJEMPLO

Si $P(x) = 2 - x + 3x^3$, entonces $3P(x) = 6 - 3x + 9x^3$.

Observación.- Sea $P_n = \{p \in \mathbb{K}(x) : grad(p) \leq n\}$, entonces P_n con las operaciones de adición de polinomios y producto de un número real (escalar) por un polinomio es un espacio vectorial real.

3. **Producto de polinomios.**

Sean p, $q \in \mathbb{K}(x)$, supongamos que $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, con $a_m \neq 0$; $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, con $b_n \neq 0$.

De acuerdo al producto de funciones se tiene que

$$\begin{aligned} (p \times q)(x) &= p(x) \times q(x) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + a_m b_n x^{m+n}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Se observa que $p(x) \times q(x)$ es un polinomio y si $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ entonces $grad(p \times q) = m + n = grad(p) + grad(q)$.

Puesto que el producto de funciones es conmutativo, entonces el producto de polinomios es conmutativo.

Por otra parte, el polinomio definido por $p(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ se llama polinomio unidad que se nota con 1, esto es $\forall x \in \mathbb{R}$, $1(x) = 1$; y dicho polinomio es tal que $\forall q \in \mathbb{K}(x)$, $q \times 1 = q$ o bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $q(x) \times 1(x) = q(x) \times 1 = q(x)$.

El conjunto $\mathbb{K}(x)$ con las operaciones de suma y producto de polinomios es un anillo conmutativo con unidad.

EJEMPLO

Sean p y q los polinomios definidos por: $p(x) = -1 + x - x^4$, $q(x) = x - x^3 + x^5$, entonces:

$$p(x) \times q(x) = (-1 + x - x^4)(x - x^3 + x^5) = -x + x^2 + x^3 - x^4 - 2x^5 + x^6 + x^7 - x^9.$$

Note que $grad(p) = 4$, $grad(q) = 5$, $grad(pq) = 9 = grad(p) + grad(q)$.

Observación.- Dado el polinomio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, interesa evaluar p en uno o varios puntos $x \in \mathbb{R}$; para ello conviene evaluar no usando la expresión de p sino mediante el método conocido como *esquema de Hörner* que a continuación describimos:

Para un polinomio de grado 2, se tiene:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ &= a_0 + x\,[a_1 + a_2x]\,. \end{aligned}$$

Para un polinomio de grado 3, se tiene:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ &= a_0 + x(a_1 + a_2x + a_3x^2) \\ &= a_0 + x[a_1 + x(a_2 + a_3x)]. \end{aligned}$$

En general, dado un polinomio p de grado n, definido por $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ podemos escribirlo como:

$$p(x) = a_0 + x[a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \cdots + x(a_{n-1} + a_nx)\cdots))].$$

Esta forma de escribir al polinomio p para la evaluación en un punto x se conoce como esquema de Hörner.

El siguiente cuadro muestra la secuencia de cálculos a ejecutarse utilizando el esquema de Hörner para un polinomio de grado n.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_0
	a_n	$+a_{n-1} + a_nx$	$a_{n-2} + x(a_{n-1} + a_nx)$	$\cdots$	$p(x)$
	$\nearrow$	$\downarrow$	$\nearrow$ $\downarrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
x	a_nx	$x(a_{n-1} + a_nx)$	$x[a_{n-2} + x(a_{n-1} + a_nx)]$	$\cdots$	

Para un polinomio de grado 3, el cuadro es:

	a_3	a_2	a_1	a_0
	a_3	$+a_2 + a_3x$	$a_1 + x(a_2 + a_3x)$	$a_0 + x[a_1 + x(a_2 + a_3x)] = p(x)$
	$\nearrow$	$\downarrow$	$\nearrow$ $\downarrow$	$\nearrow$
x	a_3x	$x(a_2 + a_3)$	$x[a_1 + x(a_2 + a_3)]$	

EJEMPLO

1. Sea $p(x) = 2 - 3x + 5x^2 + 2x^3 - x^4$. Evaluar el polinomio p en los puntos $x = -1, 1, 2$ y 3.

   Solución.

   Puesto que $P(x) = 2 + x[-3 + x(5 + x(2 - x))]$, se tiene que:

	-1	2	5	-3	2
	-1	3	2	-5	$7 = P(-1)$
$x = -1$	1	-3	-2	5	
	-1	1	6	3	$5 = P(1)$
$x = 1$	-1	1	6	3	
	-1	0	5	7	$16 = P(2)$
$x = 2$	-2	0	10	14	
	-1	-1	2	3	$11 = P(3)$
$x = 3$	-3	-3	6	9	

Ejercicios

1. Demostrar que la función p definida por: $p(-1) = 3$ y $p(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$, si $x \neq -1$, es una función polinómica de grado 2.

2. .

   a) Sea $p : x \to a_1 x + a_0$. Determinar los reales a_1 y a_0 para que se tenga $p(x) = 0$ cualquiera que sea el real x. (Indicación: Escribir en particular que $p(0) = 0$ y $p(1) = 0$). Deducir que $a_1 = a_0 = 0$ y finalmente que el polinomio p es el polinomio nulo.

   b) Determinar los coeficientes a_2, a_1 y a_0 para que la función polinómica $P : x \mapsto a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ sea la función nula sobre R.

   Observación.- De acuerdo a los ejercicios 1 y 2 se concluye que la nulidad del polinomio p entraña la nulidad de todos sus coeficientes. Admitiremos entonces el siguiente resultado:

   Una función polinomio es la función nula si y solo si todos sus coeficientes son nulos.

3. Sean p y q dos polinomios. ¿En qué caso se tiene que: $grad(p + q) = \sup(grad(p), grad(q)$?

4. Demostrar que, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene

$$x^n - a^n = (x - a)\left(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}\right).$$

5. Factorizar $x^n - 1$ y deducir que, para todo $x \neq 1$, se tiene:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

   Note que el primer miembro no es sino la suma de los $(n + 1)$ primeros términos de una sucesión geométrica de razón x y de primer término 1.

Función Cuadrática.

Como hemos indicado anteriormente, se llama función cuadrática a la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

A continuación estudiaremos la función cuadrática y para ello, consideraremos únicamente el caso en que $a > 0$.

1. Si $b = c = 0$, entonces $f(x) = ax^2$. En este caso se tiene que $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$; además, f es par y monótona a trozos, pues es decreciente en $]-\infty; 0]$ y creciente en $[0; +\infty[$. La gráfica de esta función se indica a continuación.

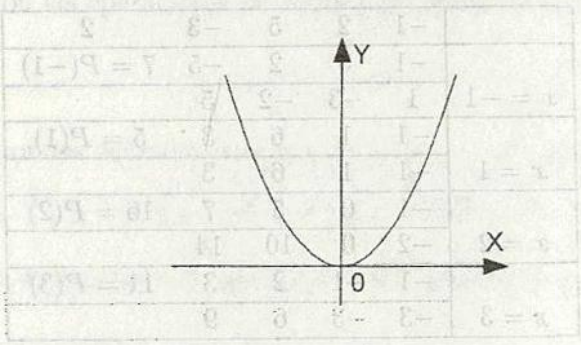


Figura 4.89:

2. Si $b = 0$ y $c \neq 0$, $f(x) = x^2 + c$.

Puesto que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ y como $a > 0$ entonces $ax^2 + c \geq c$; con lo cual $\text{Rec}(f) = [c; +\infty[$. La función f es decreciente en $]-\infty; 0]$ y creciente en $[0; +\infty[$. Además f es par. Su representación gráfica se indica a continuación.



Figura 4.90:

3. Si $b \neq 0$, $c = 0$, $f(x) = ax^2 + bx$.

En este caso $f(x) = ax^2 + bx$ se escribe $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a}$; es decir que $f(x) + \dfrac{b^2}{4a} = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$, y como $a > 0$ se sigue que $f(x) + \dfrac{b^2}{4a} \geq 0$; es decir $f(x) \geq -\dfrac{b^2}{4a}$, obteniéndose así que $\text{Rec}(f) = \left[-\dfrac{b^2}{4a}; +\infty\right[$. Por otra parte, f no es par ni impar; es decreciente en $\left]-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ y creciente en $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right[$. (Ver Figura 4.91).

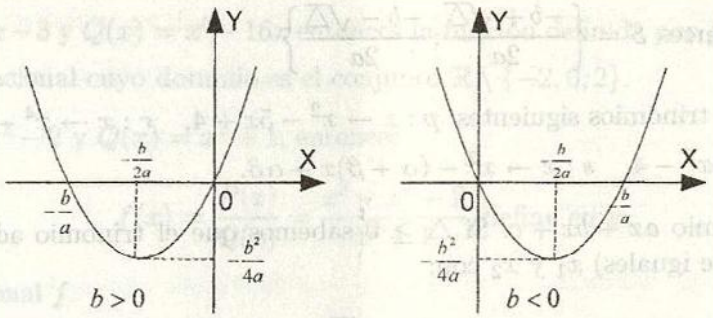


Figura 4.91:

4. Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$. Entonces:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Se tiene entonces que $f(x) - \dfrac{4ac-b^2}{4a} = a(x+\dfrac{b}{2a})^2$, y como $a > 0$, $f(x) - \dfrac{4ac-b^2}{4a} \geq 0$, es decir que $f(x) \geq \dfrac{4ac-b^2}{4a}$, luego $\text{Rec}(f) = \left[\dfrac{4ac-b^2}{4a}; +\infty\right[$.

La función f no es par ni impar, es decreciente sobre $\left]-\infty; -\dfrac{b}{a}\right]$ y creciente sobre $\left[-\dfrac{b}{a}; +\infty\right[$. (Ver Figura 4.92).

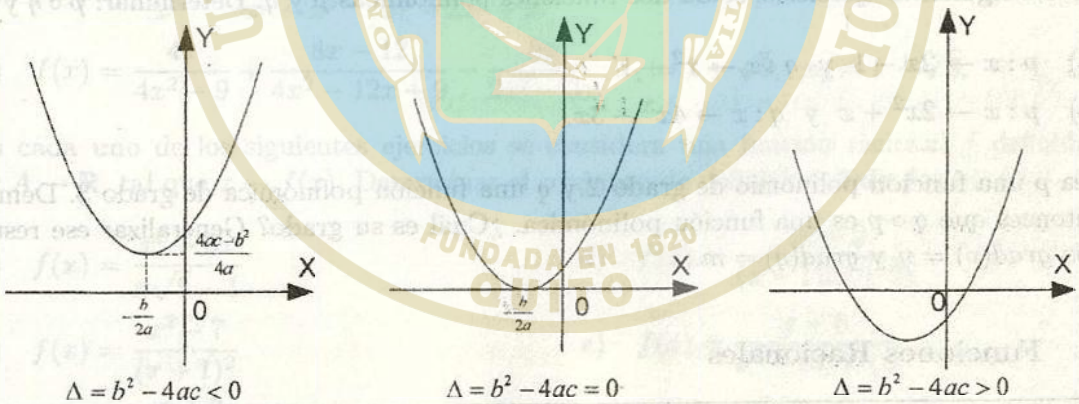


Figura 4.92:

Ejercicios

1. Estudiar la función cuadrática en el caso en que $a < 0$.
2. Probar el siguiente teorema: Sea S el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$ de la ecuación $ax^2+bx+c = 0$, con $a \neq 0$. Se nota $\Delta = b^2 - 4ac$ el discriminante.

   Si $\Delta < 0$ entonces $S = \varnothing$

   Si $\Delta = 0$ entonces $S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

Si $\triangle > 0$ entonces $S = \left\{ \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}; \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} \right\}$

3. Factorizar los trinomios siguientes: $p : x \to x^2 - 5x + 4$, $r : x \to x^4 - 5x^2 + 4$, $q : x \to x^4 - 3x^2 - 4$, $s : x \to x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$.

4. Dado el trinomio $ax + bx + c$. Si $\triangle \geq 0$ sabemos que el trinomio admite dos raíces reales (eventualmente iguales) x_1 y x_2 con:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}.$$

Si notamos $S = x_1 + x_2$ y $P = x_1 x_2$, probar que

$$S = -\frac{b}{a} \text{ y } P = \frac{c}{a}.$$

Probar entonces que: Si $\triangle \geq 0$ entonces $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c = a(x^2 - Sx + P) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

5. El objeto de este ejercicio es mostrar que $p : x \to |x|$ no es una función polinomio.

   a) Demostrar que la función $x \to [p(x)]^2$ es una función polinomio, de grado 2.

   b) Deducir entonces que si p es un polinomio, entonces, necesariamente $grad(p) = 1$.

   c) Demostar que no existen dos reales a y b tales que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = ax + b$. Concluir.

6. En los siguientes ejercicios, se da dos funciones polinómicas p y q. Determinar: $p \circ q$ y $q \circ p$.

   a) $p : x \to 2x - 1$ y $q : x \to x^2 + 1$

   b) $p : x \to 2x^2 + x$ y $q : x \to 4x^3 - 3x$.

7. Sea p una función polinomio de grado 2 y q una función polinómica de grado 3. Demostrar entonces que $q \circ p$ es una función polinómica. ¿Cuál es su grado? Generalizar ese resultado con $grad(p) = n$ y $grad(q) = m$.

4.7.11. Funciones Racionales

Definición 4.37 *Sean* $P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, *con* $a_m \neq 0$ *y* $b_n \neq 0$, *dos polinomios.*

Llamamos función racional a la función f *definida por* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *tal que* $Q(x) \neq 0$.

Es decir que una función racional f no es sino el cociente de dos polinomios. Naturalmente, f no está definida, por lo general, sobre todo R, resulta que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus A$, donde $A = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$.

EJEMPLOS

1. Si $P(x) = x + 1$ y $Q(x) = x - 1$; entonces la función f definida por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x-1}$, con $x \neq 1$, es una función racional.

   Se tiene que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Si $P(x) = x^3 + 5x - 3$ y $Q(x) = x^5 - 16x$ entonces la función definida por $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x - 3}{x^5 - 16x}$, es una función racional cuyo dominio es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.

3. Si $P(x) = x^3 + x^2 - 2$ y $Q(x) = x^2 + 1$, entonces

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 + 1}, \text{ define en } \mathbb{R}$$

una función racional f.

Ejercicios

1. Se considera la función real f definida por:

$$f : A \to \mathbb{R},\ x \to \frac{x}{x-1} - \frac{x-3}{x+1} - \frac{8(2x+1)}{x^2-1}.$$

   a) Determinar el conjunto de definición de f. Mostrar que f es una función racional y simplificar la escritura de esta función.

   b) Calcular la imagen por f de cada uno de los reales: $x_1 = -3$, $x_2 = \sqrt{6}$.

2. Lo mismo que en el ejercicio anterior en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1} + \dfrac{2x + 2}{x^2 - 1}$; $x_1 = -2$; $x_2 = \sqrt{2}$

   b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3} + \dfrac{x + 1}{x^3 - x^2} + \dfrac{3}{x^3 - 2x^2 + x}$; $x_1 = -1, x_2 = -\sqrt{2}$

   c) $f(x) = \dfrac{4x}{4x^2 - 9} + \dfrac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \dfrac{5x}{2x^2 - 3x}$; $x_1 = 1 + \sqrt{9}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

3. En cada uno de los siguientes ejercicios se considera una función racional f definida por $f : A \to \mathbb{R}$, tal que $x \to f(x)$. Determinar el conjunto de definición A de f.

   a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x\sqrt{5} - 1}$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{(x+1)^2}$

   c) $f(x) = \dfrac{x + 3}{(x^2 + 1)^2}$

   d) $f(x) = \dfrac{7x + 2}{(x-1)(x+2)}$

   e) $f(x) = \dfrac{x + 6}{x^2 - 8x + 16}$

4. En cada uno de los siguientes ejercicios, se considera una función racional f definida por $f : A \to \mathbb{R}$, tal que $x \to f(x)$. Determinar el conjunto de definición A de f y simplificar la escritura de la función racional f.

   a) $f(x) = \dfrac{12x - 4x^2}{8x^2 + 12x}$

   b) $f(x) = \dfrac{(x+3)^2 - (5x-4)^2}{36x^2 - 1}$

   c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 16x + 32}{8 - 2x}$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST SAPIENTIA FUNDADA EN QUITO

d) $f(x) = \dfrac{(x^2 + 2\sqrt{3}x + 3)(5 + x)}{(25 - x^2)(x + \sqrt{3})}$

e) $f(x) = \dfrac{4x(8x + 7)}{64x^2 + 112x + 49}$

f) $f(x) = \dfrac{(x + 2)(2x + 1)^2 - 16(x + 2)}{(2x + 5)(7 - x) + 4x^2 - 25}$

5. En los siguientes ejercicios se consideran dos funciones racionales p y q respectivamente definidas por:

$$p : A \to \mathbb{R}, \qquad x \to p(x)$$
$$q : B \to \mathbb{R}, \qquad x \to q(x).$$

Se pone $s = p + q$ y $r = pq$. Determinar el conjunto de definición de s y de r; luego simplificar, si tiene lugar, la escritura de estas funciones.

a) $p(x) = \dfrac{2 + 3x}{2 - 3x}$, $q(x) = \dfrac{3x - 2}{2 + 3x}$

b) $p(x) = \dfrac{2 + \sqrt{2}x}{\sqrt{2} - x}$, $q(x) = \dfrac{2x + 2\sqrt{2}x^2}{x^2 - 2}$

c) $p(x) = \dfrac{x + 1}{x - 5}$, $q(x) = \dfrac{-5x - x^2}{x^2 - 25}$

d) $p(x) = \dfrac{x^2 - (2x - 1)^2}{\sqrt{2}x - 1}$, $q(x) = \dfrac{2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1}{9x^2 - 1}$

e) $p(x) = \dfrac{(x - 1)^2 - (2x + 3)^2}{x^2 - 2}$, $q(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}$

4.8. Funciones Acotadas y Envolventes

4.8.1. Funciones Acotadas

Definición 4.38 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$*

a) Se dice que f es mayorada o acotada superiormente si $f(A)$ posee extremo superior. A este extremo superior se le denomina extremo superior de f y se nota con $\sup_{x \in A} f(x)$.

b) Se dice que f es minorada o acotada inferiormente si $f(A)$ posee extremo inferior. A tal extremo inferior se le denomina extremo inferior de f y se representa con $\inf_{x \in A} f(x)$.

c) f es acotada si $f(A)$ es acotado.

Puesto que $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset \mathbb{R}$ entonces:

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\} = \sup f(A)$$
$$\inf_{x \in A} f(x) = \inf\{f(x) : x \in A\} = \inf f(A).$$

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de las funciones acotadas; por el momento no investigaremos en qué puntos o conjuntos de puntos del conjunto A la función f alcanza su extremo inferior o su extremo superior ni las condiciones sobre f y sobre A para que f sea acotada.

EJEMPLOS

1. Sea f la función definida por $f(x) = x^2, \forall x \in]-1,1[$.

   Puesto que $f(]-1;1[) =]0;1[$ entonces $\sup_{x\in]-1;1[} f(x) = 1$, $\inf_{x\in]-1;1[} f(x) = 0$. Luego f es acotada. (Ver Figura 4.93).

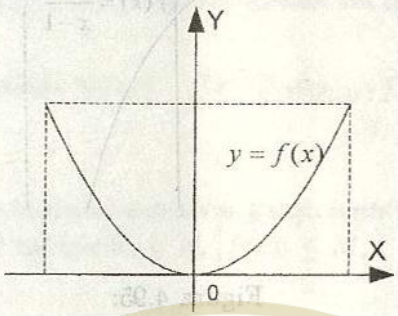


Figura 4.93:

2. Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \forall x \in]-1;1[$.

   Como: $x \in]-1;1[\Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow 0 < x+1 < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{x+1}$; entonces, $\dfrac{1}{2} < f(x)$ de donde se sigue que $f(]-1;1[) = \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, por lo tanto $\inf_{x\in]-1;1[} f(x) = \dfrac{1}{2}$. La función f no está acotada superiormente ya que $f(]-1;1[)$ no posee extremo superior. (Ver Figura 4.94).

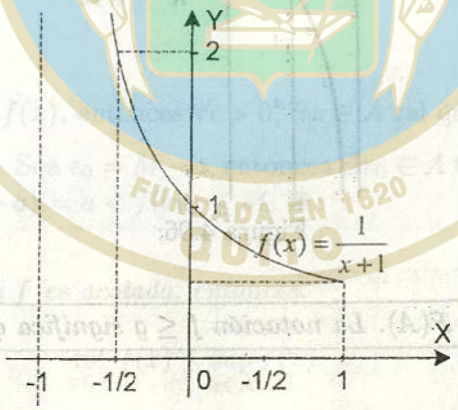


Figura 4.94:

3. Sea f la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{x-1}, \forall x \in]-1,1[$.

   $\forall x \in]-1;1[$, se tiene $\dfrac{1}{x-1} < -\dfrac{1}{2}$ o lo que es lo mismo $f(x) < -\dfrac{1}{2}$, de donde: $f(]-1;1[) = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$ y $\sup_{x\in]-1;1[} f(x) = -\dfrac{1}{2}$. La función f no está acotada inferiormente pues $f(]-1,1[)$ no posee extremo inferior. (Ver Figura 4.95).

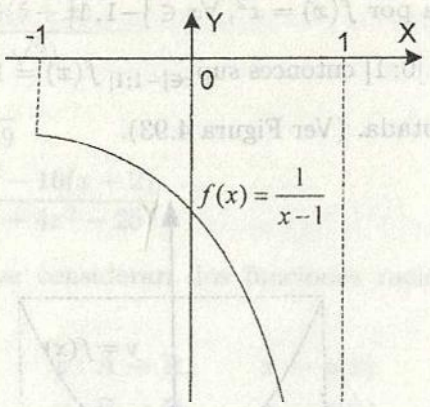


Figura 4.95:

4. La función f definida por $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}$, $\forall x \in]-1;1[$, no es acotada.

   Como la función $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ es biyectiva (¡demuéstrelo!) entonces $f(]-1;1[) = \mathbb{R}$, que prueba que f no es acotada, ya que $\mathbb{R}$ no lo es. (Ver Figura 4.96).

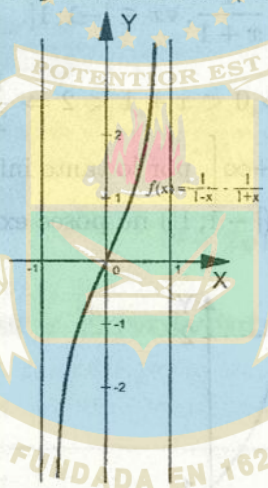


Figura 4.96:

Definición 4.39 *Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$. La notación $f \leq g$ significa que $\forall x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.*

EJEMPLOS

Sean $A =]-1;1[$ y $f, g \in \mathcal{F}(A)$.

1. Si f y g están definidas por $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, entonces $\forall x \in]-1;1[$; $f(x) = x \leq |x| = g(x)$. Luego $f \leq g$.

2. Si $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, resulta que $f \not\leq g$.

   En efecto, si $-1 < x < 0$, $x < x^2$, de donde $f(x) < g(x)$ y si $0 \leq x < 1$ entonces $x^2 \leq x < 1$ con lo que $g(x) \leq f(x)$. En consecuencia:

$$\begin{aligned} f(x) &< g(x) \text{ si } -1 < x < 0, \text{ y} \\ g(x) &\leq f(x) \text{ si } 0 \leq x < 1 \end{aligned}$$

Observación.- A menudo interesa saber si f es o no acotada sobre un subconjunto C de A, entonces:

Diremos que f es acotada superiormente sobre C si existe $\sup_{x\in C} f(x)$ y que f es acotada inferiormente sobre C si existe $\inf_{x\in C} f(x)$.

Por otra parte, el número real $\sup_{x\in C} f(x)$ (respectivamente $\inf_{x\in C} f(x)$) depende de C y de f, pero no de x.

Además, si $\sup_{x\in C} f(x)$ existe, entonces: $\forall x \in C$, $f(x) \leq \sup_{x\in C} f(x)$ y si $\inf_{x\in C}$ existe, entonces $\forall x \in C$, $\inf_{x\in C} f(x) \leq f(x)$.

Teorema 4.12 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$. La condición necesaria y suficiente para que f sea acotada sobre A es que exista un número real $M > 0$ tal que $\forall x \in A$, $|f(x)| \leq M$.*

Demostración. Si existe $M > 0$ tal que $\forall x \in A$, $|f(x)| \leq M$, es obvio que f es acotada ya que $f(A) \subset [-M, M]$ pues $-M$ y M son cotas inferior y superior de $f(A)$ respectivamente.

Recíprocamente, si f es acotada sobre A entonces existen $\inf_{x\in A} f(x) = \alpha$ y $\sup_{x\in A} f(x) = \beta$.

Sea $M = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$, entonces $\forall x \in A$, $|f(x)| \leq M$. ■

Teorema 4.13 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$. Para que $M = \sup_{x\in A} f(x)$ es necesario que $\forall x \in A$, $f(x) \leq M$.*

Demostracin. Si $M = \sup_{x\in A} f(x)$ entonces $\forall x \in A$, $f(x) \leq M$ ■

Teorema 4.14 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$ y $M = \sup_{x\in A} f(x)$. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < M$, entonces $\exists x_0 \in A$ tal que $a < f(x_0) \leq M$.*

Demostracin. Como $M = \sup_{x\in A} f(x)$, entonces $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $M - \epsilon < f(x) \leq M$.

Como $a < M$ entonces $M - a > 0$. Sea $\epsilon_0 = M - a$, entonces $\exists x_0 \in A$ tal que $M - \epsilon_0 < f(x_0) \leq M$; de donde se sigue que: $M - (M - a) = a < f(x_0) \leq M$. ■

Teorema 4.15 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$. Si f es acotada, entonces:*

$$\inf_{x\in A} f(x) \leq \sup_{x\in A} f(x).$$

Demostración. Es trivial ■

Teorema 4.16 *Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$. Supongamos f, g acotadas. Si $f \leq g$, entonces:*

i) $\inf_{x\in A} f(x) \leq \inf_{x\in A} g(x)$

ii) $\sup_{x\in A} f(x) \leq \sup_{x\in A} g(x)$

Demostración.

i) Demostremos que $\inf_{x\in A} f(x) \leq \inf_{x\in A} g(x)$.

Por hipótesis $f \leq g$, entonces $\forall x \in A$, $f(x) \leq g(x)$; además f y g son acotadas. Sean $\alpha = \inf_{x\in A} f(x)$, $\beta = \sup_{x\in A} f(x)$. Mostremos que $\alpha \leq \beta$.

Supongamos que $\alpha > \beta$, entonces, $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $g(x) < \beta + \epsilon$, en particular para $\epsilon_0 = \alpha - \beta > 0$, $\exists x_0 \in A$ tal que $g(x_0) < \beta + \epsilon_0$ de donde $g(x_0) < \beta + \epsilon_0 = \beta + (\alpha - \beta) = \alpha$, es decir $g(x_0) < \alpha$. Como $\forall x \in A, \alpha \leq f(x)$ se tendría $g(x_o) < f(x_0)$ lo que contradice la hipótesis

ii) Se propone como ejercicio. ■

Teorema 4.17 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$ con f acotada. Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos no vacíos de A tales que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Entonces:*

i) $\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{i=1,n} \left(\sup_{x\in A_i} f(x)\right)$

ii) $\inf_{x\in A} f(x) = \inf_{i=1,n} \left(\inf_{x\in A_i} f(x)\right)$

Observación.- Se acostumbra escribir:

$$\sup_{x\in \bigcup_{i=1}^{n} A_i} f(x) = \sup_{i=1,n} \left(\sup_{x\in A_i} f(x)\right)$$

$$\inf_{x\in \bigcup_{i=1}^{n} A_i} f(x) = \inf_{1=1,n} \left(\inf_{x\in A_i} f(x)\right)$$

Demostración.

i) Puesto que $f(A) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(A_i)$ aplicando la parte i) del ejercicio 5 resulta que:

$$\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{i=1,n} \left(\sup_{x\in A_i} f(x)\right).$$

De manera análoga se prueba la segunda parte.

Demos una demostración directa del teorema.

Probemos que $\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{i=1,n} \left(\sup_{x\in A_i} f(x)\right)$. Sean $M_i = \sup_{x\in A_i} f(x)$ y $M = \sup_{i=1,n} M_i$. $\forall \epsilon > 0$, $\exists i$ tal que $M - \frac{\epsilon}{2} < M_i$, y $\exists x \in A_i$ tal que $M_i - \frac{\epsilon}{2} < f(x)$; de donde $M - \epsilon < M_i - \frac{\epsilon}{2} < f(x)$.

Como $x \in A_i$ entonces $x \in A$, con lo cual dado $\epsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que $M - \epsilon < f(x)$; es decir $M = \sup_{x\in A} f(x)$ o bien $\sup_{i=1,n} \left(\sup_{x\in A_i} f(x)\right) = M$ ■

ii) Su demostración se propone como ejercicio.

Teorema 4.18 *Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$. Supongamos f, g acotadas superiormente, entonces $f + g$ es acotada superiormente y se tiene que:*

$$\sup_{x\in A} [f(x) + g(x)] \leq \sup_{x\in A} f(x) + \sup_{x\in A} g(x)$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM SCIENTIARUM FUNDADA EN 1826 QUITO

Demostración. Sean $M_1 = \sup_{x\in A} f(x)$, $M_2 = \sup_{x\in A} g(x)$, entonces

$$\forall x \in A,\ f(x) \leq M_1$$

$$\forall x \in A,\ g(x) \leq M_2$$

Sumando miembro a miembro las dos desigualdades anteriores tenemos:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq M_1 + M_2$$

con lo que $f+g$ está acotada superiormente en A.
Demostremos que: $\sup_{x\in A}[f(x)+g(x)] \leq M_1 + M_2$.

Sea $M = \sup_{x\in A}[f(x)+g(x)]$. Supongamos $M > M_1 + M_2$, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A$ tal que $M - \epsilon < f(x) + g(x)$, en particular para $\epsilon_0 = M - M_1 - M_2 > 0, \exists x_0 \in A$ tal que $M - \epsilon_0 < f(x_0) + g(x_0)$, de lo cual se sigue que $M - (M - M_1 - M_2) < (f+g)(x_0)$; es decir, $M_1 + M_2 < (f+g)(x_0)$, que contradice el hecho que $M_1 + M_2$ es cota superior de $f+g$. ■

EJEMPLO

1. Si $f(x) = x$ y $g(x) = -x$, $\forall x \in [-1,1]$ entonces $(f+g)(x) = 0$. Además como $\sup_{x\in[-1,1]} f(x) = 1 = \sup_{x\in[-1,1]} g(x)$, $\sup_{x\in[-1,1]}[f(x)+g(x)] = 0$; se verifica entonces que

$$0 = \sup_{x\in[-1,1]}[f(x)+g(x)] \leq \sup_{x\in[-1,1]} f(x) + \sup_{x\in[-1,1]} g(x) = 2.$$

La Figura 4.97 nos dá la representación de las funciones f, g y $f+g$.

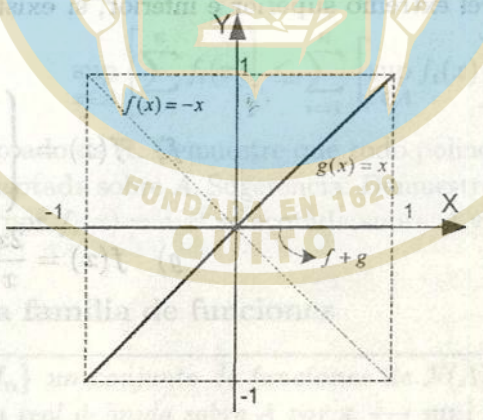


Figura 4.97:

Observaciones.

1. Si f, g son acotadas inferiormente, entonces $f+g$ es acotada inferiormente y además

$$\inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x) \leq \inf_{x\in A}[f(x)+g(x)].$$

Así por ejemplo, sean $A =]-1,1[$, $f(x) = x$, $g(x) = |x|$.

Tenemos, $\inf_{x\in A} f(x) = -1$, $\inf_{x\in A} g(x) = 0$. Por otra parte

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + |x| = \begin{cases} 0, \text{ si } -1 < x \leq 0 \\ 2x, \text{ si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

entonces

$$\inf_{x\in A}[(f+g)(x)] = 0$$

con lo que $\inf_{x\in A} f(x) + \inf_{x\in A} g(x) = -1 < \inf_{x\in A}[f(x) + g(x)] = 0$.

2. Si f y g son acotadas, por el teorema 4.18 y la parte 1 de la observación se sigue que $f+g$ es acotada.

   Asímismo, si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es acotada si f lo es (Se propone como ejercicio su prueba).

   Si designamos con $C_A(\mathbb{R})$ el subconjunto de $\mathcal{F}(A)$ constituido por funciones acotadas, entonces con la suma usual de funciones y producto de números reales por funciones, $C_A(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real. Dejamos como ejercicio su verificación.

Teorema 4.19 *Sean $f, g \in C_A(\mathbb{R})$ tales que $f \geq 0$, $g \geq 0$. Entonces*

$$\sup_{x\in A}[(f \times g)(x)] \leq \left[\sup_{x\in A} f(x)\right]\left[\sup_{x\in A} g(x)\right].$$

Demostración. Se deja como ejercicio ■

Ejercicios

1. Sea $A =]-2; 2[$. Hallar el extremo superior e inferior, si existen, de las siguientes funciones definidas sobre A.

   a) $f(x) = \sqrt{x+2}$
   b) $f(x) = x^2 - 4$
   c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{2}x(2 - |x|)$
   e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$
   f) $f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ si } -2 < x \leq 0 \\ 2x \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{2}{x}, \text{ si } 1 < x < 2 \end{cases}$
   g) $f(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$.

2. Se considera las funciones reales f y g definidas por $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = \dfrac{1+2x^2}{1+x^2}$

   a) ¿La función f es acotada sobre $\mathbb{R}$?
   b) Establecer, para todo real x, la desigualdad: $1 \leq g(x) < 2$.
   c) Demostrar que la función $g \circ f$ es acotada sobre $\mathbb{R}$.
   d) Demostrar que la función $f \circ g$ es igualmente acotada sobre $\mathbb{R}$ y que se tiene: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2 \leq (f \circ g)(x) < 11$.

3. Demostrar que si g y f son dos funciones acotadas en $\mathbb{R}$, entonces $g \circ f$ y $f \circ g$ son igualmente acotadas sobre $\mathbb{R}$.

4. Sea la función real $f : x \to 2(x-1)^2 - 3$. Representar gráficamente las funciones $\frac{1}{2}(f + |f|)$ y $\frac{1}{2}(f - |f|)$.

5. Demuestre la parte ii) del teorema 4.16.

6. Demuestre la parte ii) del teorema 4.17.

7. Sea $f \in F(A)$. Supongamos f acotada y que $B \subset A$. Demostrar que:

   a) $\inf_{x\in A} f(x) \leq \inf_{x\in B} f(x)$

   b) $\sup_{x\in B} f(x) \leq \sup_{x\in A} f(x)$

8. Demuestre el teorema 4.19.

9. Sean $f \in C_A(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que:

   a) $\sup_{x\in A}[f(x) + \alpha] = \alpha + \sup_{x\in A} f(x)$

   b) $\sup_{x\in A}[\alpha f(x)] = \alpha \sup_{x\in A} f(x)$ si $\alpha \geq 0$, y $\sup_{x\in A}[\alpha f(x)] = \alpha \inf_{x\in A} f(x)$ si $\alpha < 0$

10. Demuestre que $C_A(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real.

11. .

    a) Sean $f_1, \cdots, f_n \in C_A(\mathbb{R})$. Demuestre que:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\inf_{x\in A} f_i(x)\right] \leq \inf_{x\in A}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]$$

$$\sup_{x\in A}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] \leq \sum_{i=1}^{n}\left[\sup_{x\in A} f_i(x)\right]$$

    b) Sea A un intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Demuestre que todo polinomio de grado menor o igual que n es una función acotada sobre A. Sugerencia: Demuestre que para cada $i = 0, \ldots, n$, la función f_i definida por $f_i(x) = a_i x^i$ es acotada sobre A y luego utilice la parte a).

4.8.2. Envolventes de una familia de funciones

Definición 4.40 *Sea $\{f_1, \ldots, f_n\}$ un conjunto de funciones de $\mathcal{F}(A)$. Se llama envolvente superior de $f_1, \ldots, f_n$ a la función real definida sobre A por $x \longrightarrow \sup\{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$.*

De manera análoga se define la envolvente inferior de $f_1, \ldots, f_n$.

A la envolvente superior (respectivamente inferior) se la representa por: $\sup_{i=1,\ldots,n} f_i$ (respectivamente $\inf_{i=1,\ldots,n} f_i$) y en un punto cualquiera $x \in A$ por: $\sup_{i=1,\ldots,n} f_i(x)$ (respectivamente $\inf_{1=1,\ldots,n} f_i(x)$).

Si llamamos $g = \sup_{i=1,\ldots,n} f_i$; es decir, $\forall x \in A, g(x) = \sup_{i=1,\ldots,n} f_i(x)$, entonces $\forall i = 1, \ldots, n,\ f_i \leq g$.

Si para cada $i = 1, \ldots, n,\ f_i \in C_A(\mathbb{R})$, entonces $g \in C_A(\mathbb{R})$; es decir, la envolvente de funciones acotadas es acotada.

EJEMPLOS

1. Sea $A = [-1, 1]$

a) Sean f_1 y f_2 las funciones definidas en A por $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$.
Puesto que si $-1 \leq x < 0$, $f_1(x) = x < x^2 = f_2(x)$, entonces $\sup\{f_1(x), f_2(x)\} = x^2$.
Si $0 \leq x \leq 1$, $f_2(x) = x^2 \leq x = f_1(x)$ con lo cual $\sup\{f_1(x), f_2(x)\} = x$.
En consecuencia $\sup_{i=1,2} f_i$ es la función definida en A por

$$\sup_{i=1,2} f_i(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ x, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Análogamente, la envolvente inferior de f_1 y f_2 es:

$$\inf_{i=1,2} f_i(x) = \begin{cases} x, \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ x^2, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Las gráficas de las envolventes superior e inferior de f_1 y f_2 se indican en la Figura 4.98.

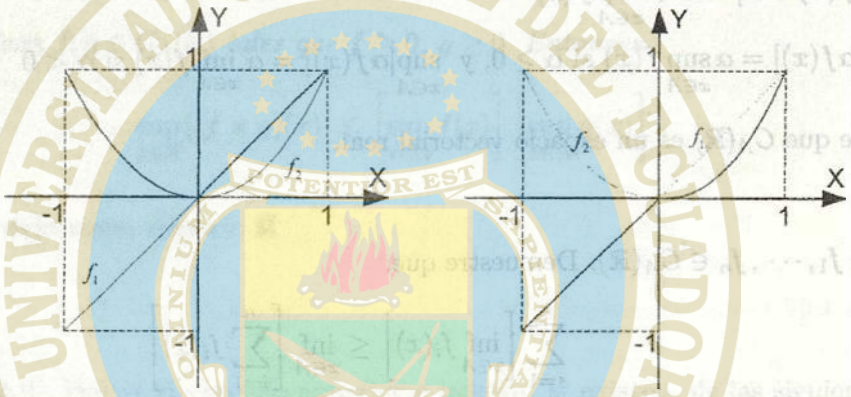


Figura 4.98:

b) Sean $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}$, $f_3(x) = \frac{1}{2} - x^2$.
Para hallar la envolvente superior de f_1, f_2, f_3; observando las gráficas de f_1, f_2 y f_3, indicadas en la Figura 4.99 hemos de hallar los puntos x_1 y x_2 para los cuales $f_2(x_1) = f_3(x_1)$ y $f_1(x_2) = f_3(x_2)$.

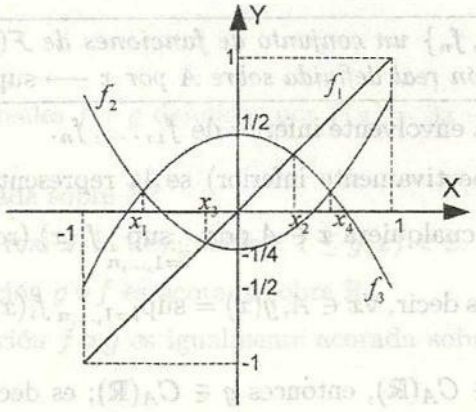


Figura 4.99:

Así:

$$\begin{aligned} f_2(x) = f_3(x) &\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{8} \\ &\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{8}} = \pm\frac{1}{4}\sqrt{6} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{6}. \\ f_1(x) = f_3(x) &\Rightarrow \frac{1}{2} - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \text{ de donde } x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Necesitamos igualmente determinar los puntos x_3 y x_4 de intersección entre f_1 y f_2 y entre f_2 y f_3 respectivamente; así:

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\Rightarrow x = x^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x - \frac{1}{4} = 0 \\ &\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

consecuentemente:

$$x_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

Por otra parte:

$f_2(x) = f_3(x) \Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, y en consecuencia $x_4 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Luego:

$$\sup_{i=1,2,3} f_i(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{4}, \text{ si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{2} - x^2, \text{ si } -\frac{1}{4}\sqrt{6} < x \leq \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x, \text{ si } \frac{-1+\sqrt{3}}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Verifiquemos que efectivamente la envolvente superior, es la función encontrada:

Consideremos los intervalos:

$$I_1 = \left[-1; \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right], I_2 = \left[\frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right] \text{ e } I_3 = \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; 1\right].$$

Veamos que en I_1 se tiene $f_2 \geq f_1$ y $f_2 \geq f_3$. En efecto:

$$\begin{aligned}
f_2(x) \geq f_1(x) &\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} \geq x \\
&\Rightarrow x^2 - x - \frac{1}{4} \geq 0 \\
&\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} \geq 0 \\
&\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \geq 0 \\
&\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\left(x - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\left(x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\Rightarrow \left(x \leq \frac{1-\sqrt{2}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Es decir que la solución de la inecuación es el intervalo

$$S_1 = \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\sqrt{2}+1}{2}; +\infty\right[.$$

Como $I_1 \subset S_1$ se sigue que la desigualdad es cierta en I_1; es decir que $\forall x \in I_1$, $f_2(x) \geq f_1(x)$.

Veamos ahora que $f_2 \geq f_3$ en el intervalo I_1.

$$\begin{aligned}
f_2(x) \geq f_3(x) &\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2} - x^2 \\
&\Rightarrow x^2 \geq \frac{3}{8} \\
&\Rightarrow |x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \leq \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ o } x \geq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Luego, la solución de la inecuación $f_2(x) \geq f_3(x)$ es

$$S_2 = \left]-\infty; \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right] \bigcup \left[\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; +\infty\right[.$$

Como $I_1 \subset S_2$ entonces: $\forall x \in I_1$, $f_2(x) \geq f_3(x)$.

Consecuentemente, $\sup_{x \in I_1}\{f_1, f_2, f_3\} = f_2$.

Probemos ahora que en I_2 se tiene: $f_3 \geq f_1$ y $f_3 \geq f_2$. En efecto:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SPIRITUS
FUNDADA EN 1620 QUITO

a)

$$\begin{aligned} f_3(x) \geq f_1(x) \Rightarrow \quad & \frac{1}{2} - x^2 \geq x \\ & x^2 + x - \frac{1}{2} \leq 0 \\ & x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \leq 0 \\ & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4} \\ & \left|x + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{aligned}$$

Es decir que la solución de la inecuación es $S_3 = \left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$ y como $I_2 \subset S_3$ se concluye que: $\forall x \in I_2,\ f_3(x) \geq f_1(x)$.

b)

$$\begin{aligned} f_3(x) \geq f_2(x) \Rightarrow \quad & \frac{1}{2} - x^2 \geq x^2 - \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \quad & x^2 \leq \frac{3}{8} \\ \Rightarrow \quad & |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \quad & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Luego la solución de la inecuación es $S_4 = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$ y por tenerse que $I_2 \subset S_4$ se sigue que:

$$\forall x \in I_2,\ f_3(x) \geq f_2(x).$$

De a) y b) se concluye que: $\sup_{x \in I_2}\{f_1, f_2, f_3\} = f_3$.

Finalmente, consideremos el intervalo $I_3 = \left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; 1\right]$. Verifiquemos que en este intervalo se tiene $f_1 \geq f_2$ y $f_1 \geq f_3$. En efecto:

a)

$$\begin{aligned} f_1(x) \geq f_2(x) \Rightarrow \quad & x \geq x^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x - \frac{1}{4} \leq 0 \\ \Rightarrow \quad & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ \Rightarrow \quad & x \in \left[\frac{\sqrt{2}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right] = S_5 \end{aligned}$$

como $I_3 \subset S_5$, entonces podemos afirmar que: $\forall x \in I_3,\ f_1(x) \geq f_2(x)$.

b)

$$\begin{aligned} f_1(x) \geq f_3(x) &\Rightarrow x \geq \frac{1}{2} - x^2 \Rightarrow x^2 + x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ &\Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow x \leq -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{o} \quad x \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ &\Rightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, +\infty\right[= S_6 \end{aligned}$$

Como $I_3 \subset S_6$, se sigue que: $\forall x \in I_3$, $f_1(x) \geq f_3(x)$.
Concluimos finalmente que: $\sup_{x \in I_3}\{f_1, f_2, f_3\} = f_1$
De manera análoga se prueba que

$$\inf_{i=1,2,3} f_i(x) = \begin{cases} x, \text{ si } -1 \leq x \leq \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \\ x^2 - \dfrac{1}{4}, \text{ si } \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{6}}{4} \\ \dfrac{1}{2} - x^2, \text{ si } \dfrac{\sqrt{6}}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La Figura 4.100 nos muestra la representación gráfica de $\sup_{i=1,2,3} f_i(x)$ y $\inf_{i=1,2,3} f_i(x)$.

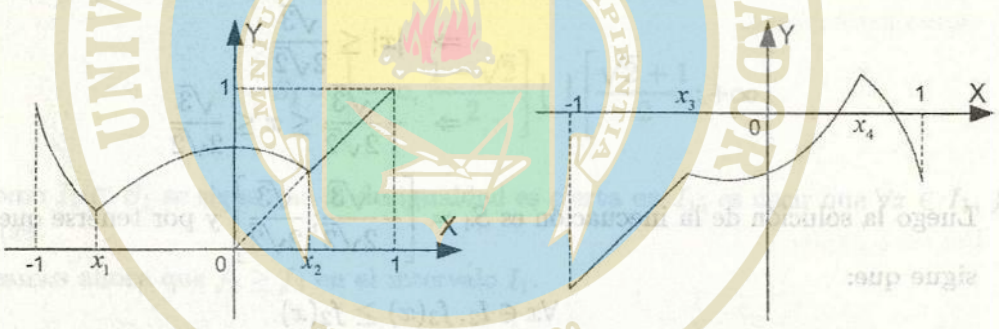


Figura 4.100:

2. Sea $f \in \mathcal{F}(A)$, designamos con $f^+ = \text{máx}\{f, 0\}$ y $f^- = -\text{mín}\{f, 0\}$, esto es, $\forall x \in A$, $f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\text{mín}\{f(x), 0\}$.

f^+ y f^- se llaman la parte positiva y la parte negativa de f, respectivamente. Resulta que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$ (su prueba se propone como ejercicio).

Así por ejemplo:

a) Sea $A = [-1; 1]$ y $f \in \mathcal{F}(A)$ dada por $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{4}$. Se tiene entonces que: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq \dfrac{1}{2}$. Luego

$$f^+(x) = \begin{cases} x^2 - \dfrac{1}{4}, \text{ si } x \in \left[-1, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \\ 0, \text{ si } -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

y

$$f^-(x) = \begin{cases} -\left(x^2 - \frac{1}{4}\right), \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{ si } x \in \left[-1 - \frac{1}{2}\left[\bigcup\right]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Verificar que $|f| = f^+ + f^-$. (Ver Figura 4.101).

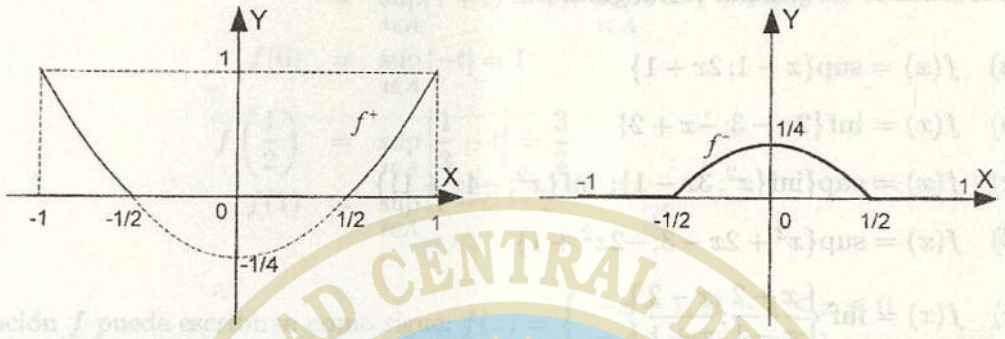


Figura 4.101:

b) Sea f la función definida por $f(x) = x^3 - x$, $x \in [-1, 1]$
Entonces:

$$f^+(x) = \begin{cases} x^3 - x, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0, \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases} \quad ; \quad f^-(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ x^3 - x, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

A continuación se indican las gráficas de f^+ y f^-.
Verificar que $|f| = f^+ + f^-$.

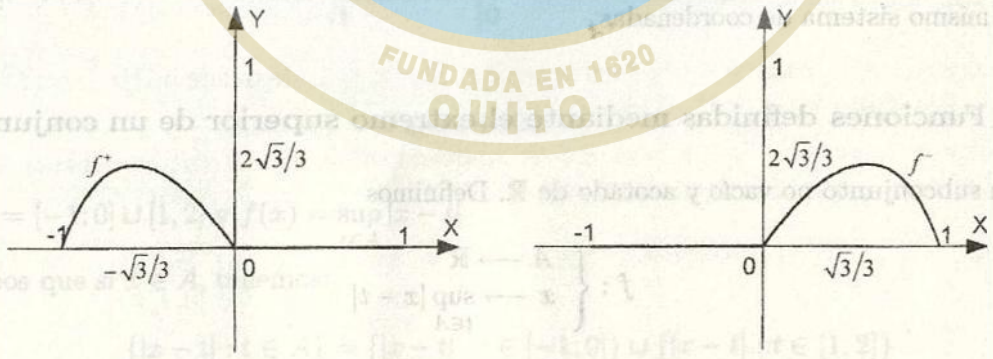


Figura 4.102:

Ejercicios

1. *a)* Estudiar la función real f definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = |x+1| + |x-3|$. Simplificar la escritura de $f(x)$. Dar el sentido de variación (estudiar la monotonía) y realizar la representación gráfica de f.

b) Estudiar la función g, definida por:

$$g(x) = \inf\left(f(x), \frac{2}{5}x + \frac{22}{5}\right).$$

Realizar la representación gráfica de la función g.

2. Estudiar en cada caso la función real f y trazar su curva representativa en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares:

a) $f(x) = \sup\{x - 1; 2x + 1\}$

b) $f(x) = \inf\{2x - 3; -x + 2\}$

c) $f(x) = \sup\{\inf\{x^2; 3x - 1\};\ \inf\{x^2; -4x + 1\}\}$

d) $f(x) = \sup\{x^2 + 2x - 3; -2x^2 + 1\}$

e) $f(x) = \inf\left\{\dfrac{x+2}{x-1}; \dfrac{x-2}{x+1}\right\}$

f) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}\inf\left\{|x|; \dfrac{1}{|x|}\right\}$

3. Hallar las envolventes superior e inferior de las funciones f, g y h que se indican en cada caso y en el intervalo I considerado.

a) $f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - 1$, $h(x) = |x + 1| - |x - 3|$, $I = [-2; 2]$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $g(x) = -x^2 + x + 3$, $h(x) = \dfrac{1}{x + 1}$, $I = [0, 4]$

4. Dada la función real f definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + |x| - 5$, hallar f^+ y f^-. Determinar además la función $|f|$ y representar gráficamente las funciones f, f^+, f^- y $|f|$ en un mismo sistema de coordenadas.

4.8.3. Funciones definidas mediante el extremo superior de un conjunto

Sea A un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Definimos

$$f : \begin{cases} A \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sup\limits_{t \in A} |x - t| \end{cases}$$

$f(x) = \sup\limits_{t \in A} |x - t| = \sup\{|x - t| : t \in A\}$.

Puesto que el conjunto $\{|x - t| : t \in A\}$ con $x \in A$ es no vacío y acotado; por el axioma de completez existe el extremo superior y además éste es único, tal extremo superior designamos con $f(x)$; por lo que f está bien definida.

Si A no es acotado entonces para cada $x \in A$, el conjunto $\{|x - t| : t \in A\}$ no es acotado y por tanto no posee extremo superior.

EJEMPLOS

1. Sea $A = [-1, 1]$, para cada $x \in A$ ponemos

$$f(x) = \sup\{|x - t| : t \in A\} = \sup_{t \in A} |x - t|.$$

Calculemos algunos valores de f.

$$\begin{aligned} f(-1) &= \sup_{t \in A} |-1 - t| = \sup_{t \in A} |1 + t| \\ &= \sup_{t \in A} (1 + t) = 1 + \sup_{t \in A} t = 1 + 1 = 2 \\ f(0) &= \sup_{t \in A} |-t| = 1 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \sup_{t \in A} \left|\frac{1}{2} - t\right| = \frac{3}{2} \\ f(1) &= \sup_{t \in A} |1 - t| = 2 \end{aligned}$$

La función f puede escribirse como sigue: $f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ x + 1, \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

(Ver Figura 4.103).

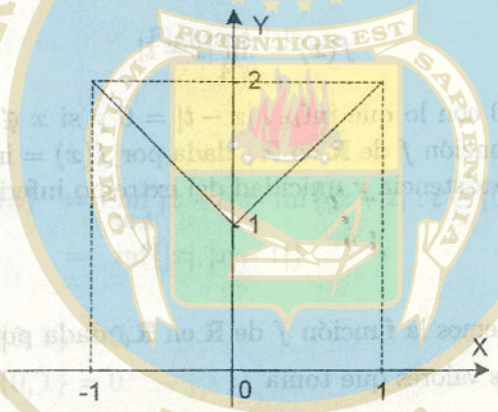


Figura 4.103:

2. Sea $A = [-1; 0] \cup [1, 2]$ y $f(x) = \sup_{t \in A} |x - t|$

Notemos que si $x \in A$, tenemos:

$$\{|x - t| : t \in A\} = \{|x - t| : t \in [-1; 0]\} \cup \{|x - t| : t \in [1, 2]\}$$

Obtengamos algunos valores de f:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \sup(\{|-1 - t| : t \in [-1; 0]\} \cup \{|-1 - t| : t \in [1, 2]\}) = 3 \\ f(0) &= \sup(\{|-t| : t \in [-1; 0]\} \cup \{|-t| : t \in [1, 2]\}) = 2 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

A continuación se muestra la representación gráfica de la función f.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

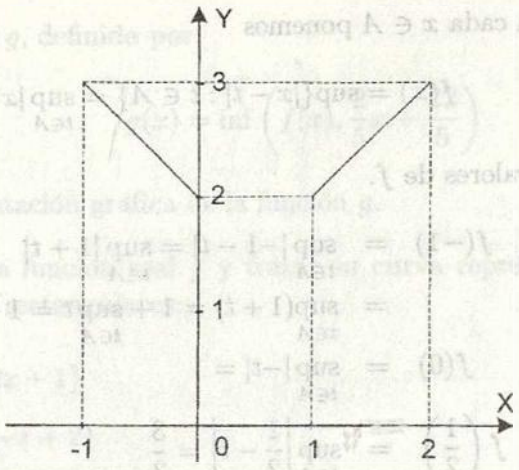


Figura 4.104:

4.8.4. Funciones definidas mediante el extremo inferior de un conjunto

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ ponemos $f(x) = \inf\{|x-t| : t \in A\}$. Abreviadamente escribimos

$$f(x) = \inf_{t \in A} |x-t|$$

Si $x \in A$, $\forall t \in A$, $|x-t| \geq 0$ con lo que $\inf_{t\in A} |x-t| = 0$ y si $x \notin A$, $\inf_{t\in A} |x-t| \geq 0$; de esta manera hemos definido una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = \inf_{t\in A} |x-t|$. Esta función está bien definida en virtud de la existencia y unicidad del extremo inferior.

EJEMPLOS

1. Sea $A = [0,1]$, determinemos la función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = \inf_{t\in[0,1]} |x-t|$.

   Para ello, analicemos los valores que toma f:

   a) Si $0 \leq x \leq 1$, como $0 \leq t \leq 1$ entonces $0 \leq |x-t| \leq 1$, de donde $\inf\{|x-t| : t \in [0;1]\} = 0$. Por tanto $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 0$.

   b) Si $x > 1$, entonces $|x-t| = x-t > 0$. Aplicando el resultado correspondiente al ejercicio 26 parte a) pág 134 tenemos:

$$\begin{aligned} \inf\{|x-t| : t \in [0,1]\} &= \inf\{|x-t| : t \in [0,1]\} \\ &\quad x - \sup\{t : t \in [0,1]\} \\ &\quad x - 1. \end{aligned}$$

   Resulta entonces que si $x > 1$, $f(x) = \inf_{t\in[0,1]} |x-t| = x-1$.

   c) Si $x < 0$ entonces $|x-t| = -(x-t) = -x+t$.

$$\begin{aligned} \inf\{|x-t| : t \in [0,1]\} &= \inf\{-x+t : t \in [0,1]\} \\ &= -x + \inf\{t : t \in [0,1]\} \\ &= -x + 0 = -x. \end{aligned}$$

   Luego, si $x < 0$, $f(x) = \inf_{t\in[0,1]} |x-t| = -x$.

En resumen, la función definida por $f(x) = \inf_{t\in[0,1]} |x-t|$, puede escribirse del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ si } x < 0 \\ 0, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

(Ver Figura 4.105).

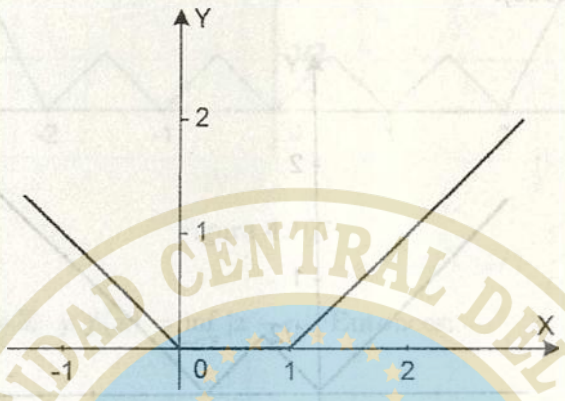


Figura 4.105:

2. Sea $A = \{0, 1\}$, ponemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf_{t\in A} |x-t| = \inf\{|x-t| : t \in \{0,1\}\} \\ &= \inf\{|x|, |x-1|\} \end{aligned}$$

a) Si $x = 0$, $f(0) = \inf\{0, 1\} = 0$
Si $x = 1$, $f(1) = \inf\{0, 1\} = 0$

b) Si $0 < x < 1$:

1) Si $0 < x < \frac{1}{2}$ entonces $\frac{1}{2} < 1 - x < 1$, luego se tiene que $0 < x < \frac{1}{2} < 1 - x < 1$, de donde $\inf\{|x|, |x-1|\} = \inf\{x, 1-x\} = x$ con lo cual $f(x) = x$ si $0 < x < \frac{1}{2}$.

2) Si $\frac{1}{2} \leq x < 1$, entonces $-1 < -x \leq -\frac{1}{2}$; es decir, $0 < 1 - x \leq \frac{1}{2}$ y por lo tanto $0 < 1 - x \leq \frac{1}{2} \leq x$, de donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf\{|x|, |1-x|\} \\ &= \inf\{x, 1-x\} \\ &= 1-x \end{aligned}$$

En consecuencia $f(x) = 1 - x$, si $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

c) Si $x > 1$, $\inf\{|x|, |x-1|\} = \inf\{x, x-1\} = x - 1$, esto es, $f(x) = x - 1$, si $x > 1$.

d) Si $x < 0$, $\inf\{|x|, |x-1|\} = \inf\{-x, 1-x\} = -x$, es decir, $f(x) = -x$, si $x < 0$.

De a), b), c) y d) se tiene

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ si } x < 0 \\ x, \text{ si } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, \text{ si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ x - 1, \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

(Ver Figura 4.106).

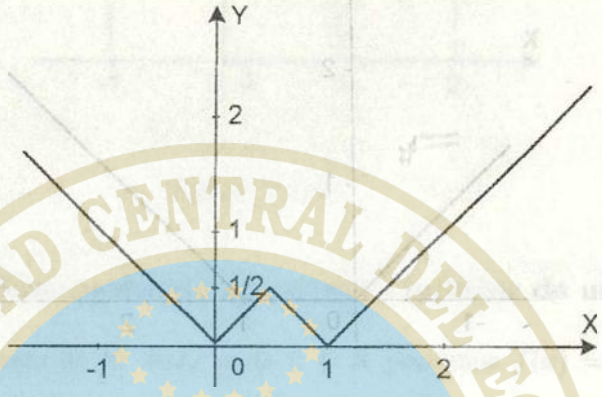


Figura 4.106:

3. Sea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, y

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf_{t \in A} |x - t| = \inf\{|x - t| : t \in A\} \\ &= \inf\{|x + 2|, |x + 1|, |x|, |x - 1|, |x - 2|\} \end{aligned}$$

a) Si $x \in A$ entonces $f(x) = 0$; así por ejemplo:
Si $x = -2$, $\inf\{0, |-1|, |-2|, |-3|, |-4|\} = 0$.
Si $x = 1$, $\inf\{3, 2, 1, 0, 1\} = 0$.

b) Razonando como en el ejercicio 2) en los intervalos $]-\infty; -2[$; $]-2; -1[$; $]-1; 0[$, $]0; 1[$, $]1; 2[$, $]2; +\infty[$ obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x + 2, \text{ si } x < -2 \\ f(x) &= x + 2, \text{ si } -2 \leq x < -\frac{3}{2} \\ f(x) &= -x - 1 \text{ si } -\frac{3}{2} \leq x < -2 \\ f(x) &= x + 1, \text{ si } -1 \leq x < -\frac{1}{2} \\ f(x) &= -x \text{ si } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ f(x) &= x, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(x) &= 1 - x, \text{ si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ f(x) &= x - 1, \text{ si } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ f(x) &= -x + 2, \text{ si } \frac{3}{2} < x \leq 2 \\ f(x) &= x - 2, \text{ si } x > 2 \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

(Ver Figura 4.107).

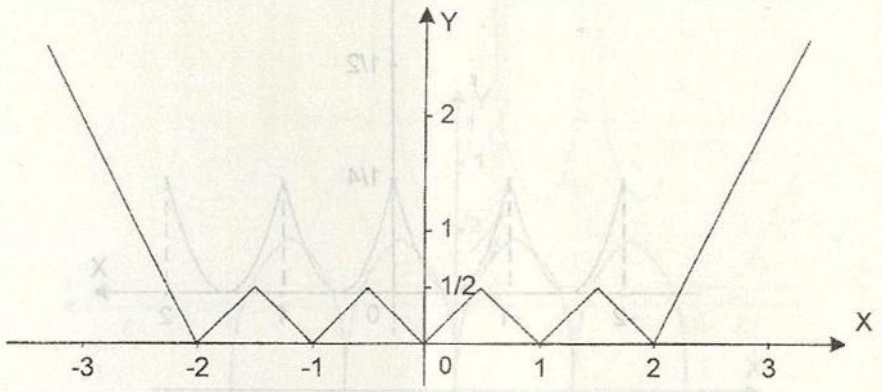


Figura 4.107:

4. Generalizando, sea $A = \mathbb{Z}$ y $f(x) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x - n|$. Entonces:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x = n, \\ x - n, \text{ si } n < x \leq n + \dfrac{1}{2}, \\ -x + n + 1, \text{ si } n + \dfrac{1}{2} < x < n + 1. \end{cases}$$

La gráfica de la función f se indica a continuación.

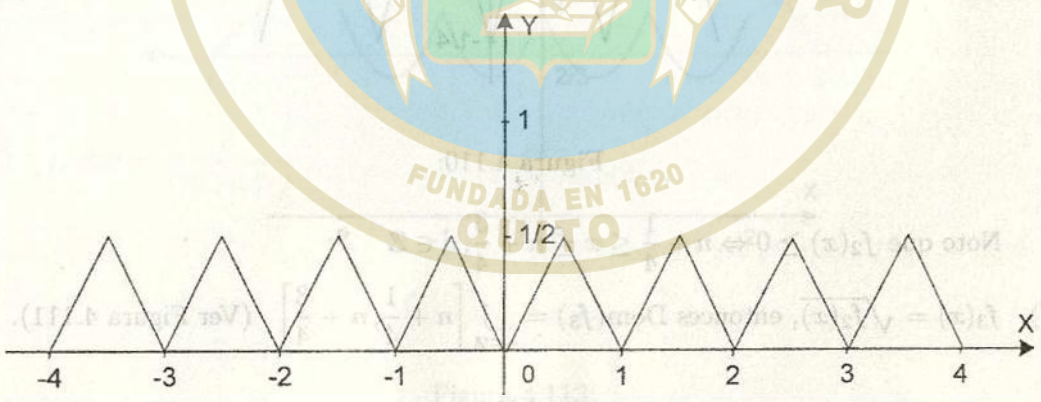


Figura 4.108:

f es una función periódica de período $p = 1$.

Si a esta función f la designamos con g, a continuación obtendremos a partir de g algunas otras funciones periódicas cuyas gráficas se construyen fácilmente a partir de la gráfica de g, así; si definimos:

a) $f_1(x) = [g(x)]^2$. (Ver Figura 4.109).

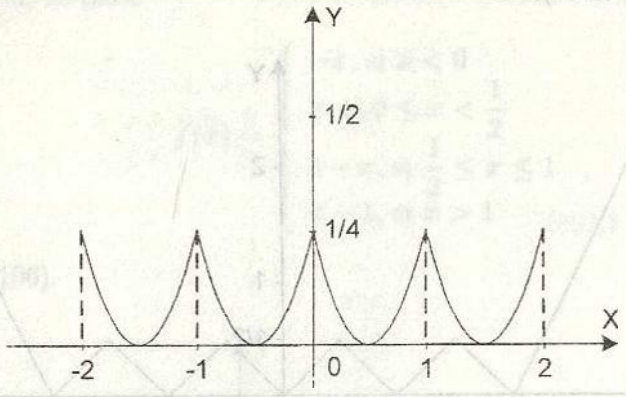


Figura 4.109:

b) $f_2(x) = g(x) - \frac{1}{4}$. (Ver Figura 4.110).

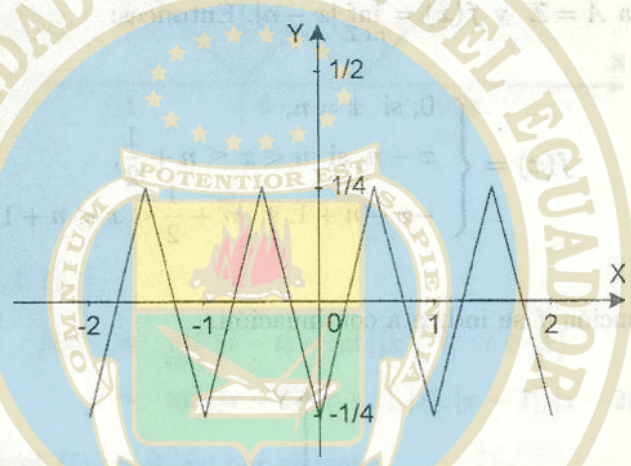


Figura 4.110:

Note que $f_2(x) \geq 0 \Leftrightarrow n + \frac{1}{4} \leq x \leq n + \frac{3}{4}, n \in \mathbb{Z}$

c) $f_3(x) = \sqrt{f_2(x)}$, entonces $\text{Dom}(f_3) = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \left[n + \frac{1}{4}, n + \frac{3}{4} \right]$. (Ver Figura 4.111).

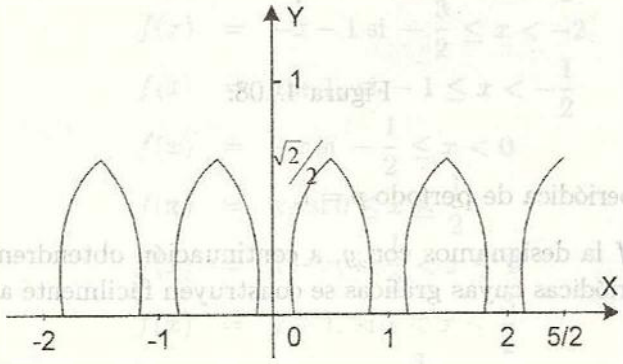


Figura 4.111:

d) $f_4(x) = \sqrt{g(x)}$. (Ver Figura 4.112).

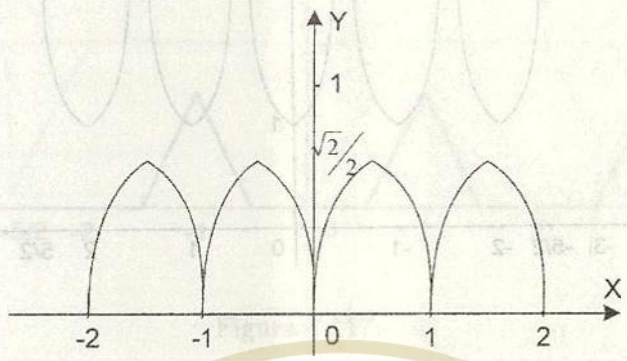


Figura 4.112:

e) $f_5(x) = \dfrac{1}{1+g(x)}$. (Ver Figura 4.113).

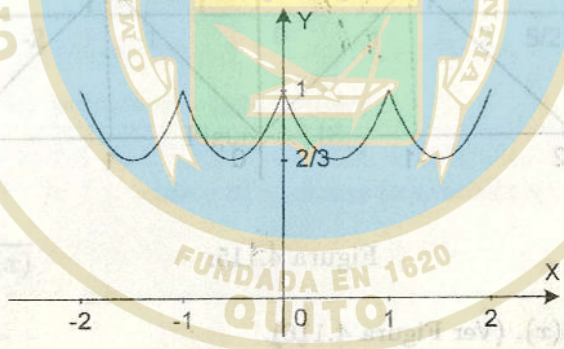


Figura 4.113:

f) $f_6(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2} - g(x)}\right)$.

Puesto que $\dfrac{1}{2} - g(x) \neq 0$ es equivalente a $g(x) \neq \dfrac{1}{2}$; entonces $x \neq n + \dfrac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Consecuentemente $\text{Dom}(f_6) = \mathbb{R} \setminus \left\{ n + \dfrac{1}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}$. (Ver Figura 4.114).

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM SCIENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

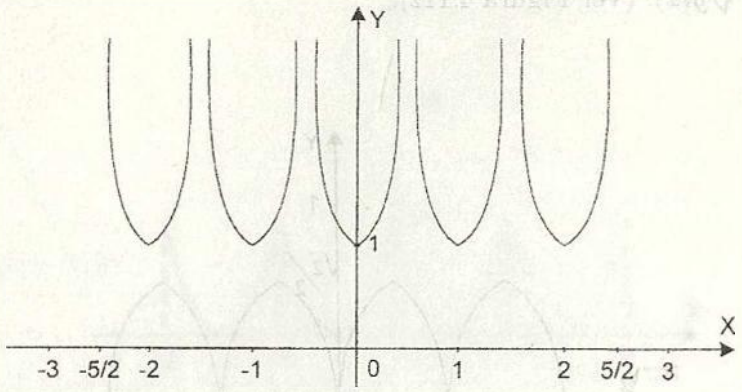


Figura 4.114:

$g)$ Sea $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $h(x) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x - 2n|$. Se tiene que h es una función periódica de período 2. (Ver Figura 4.115).

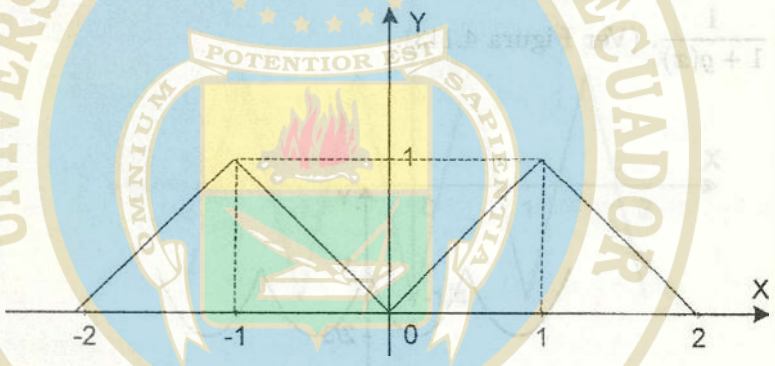


Figura 4.115:

$h)$ $f_7(x) = g(x) + h(x)$. (Ver Figura 4.116).

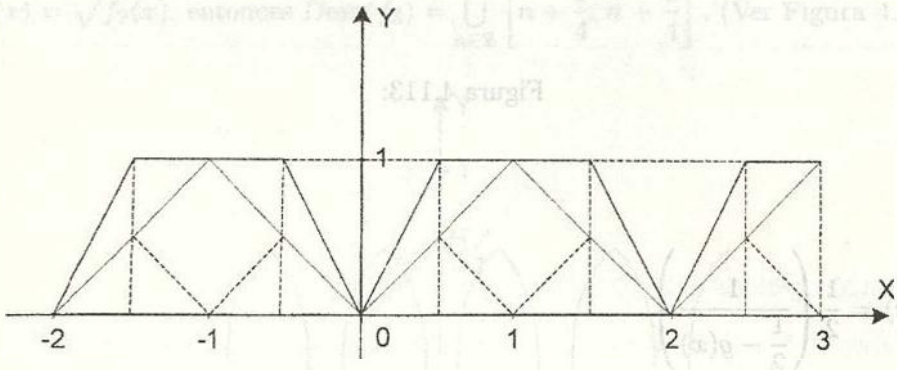


Figura 4.116:

f_7 es una función periódica de período 2.

i) $f_8(x) = h(x) - g(x)$

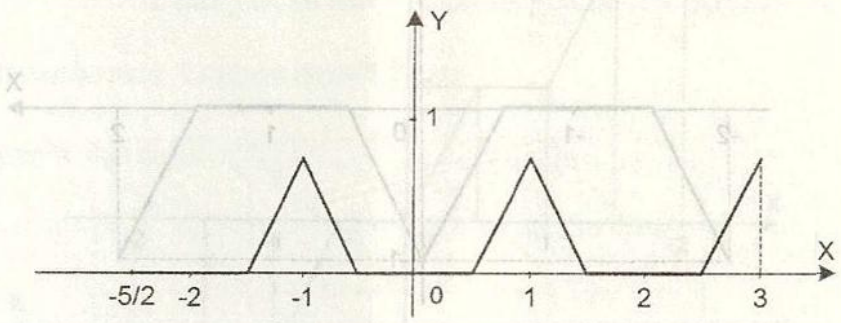


Figura 4.117:

j) $f_9(x) = [f_8(x)]^2$

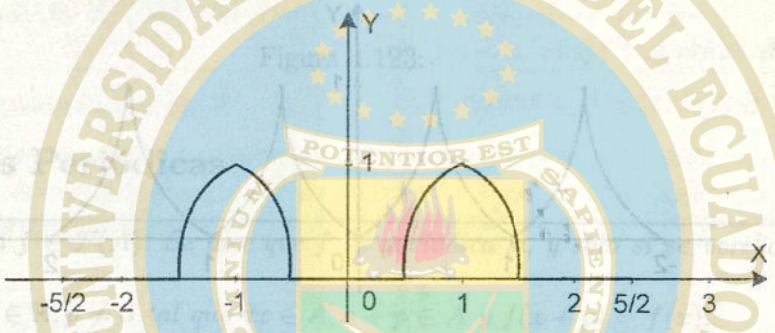


Figura 4.118:

k) $f_{10}(x) = \dfrac{2}{1 + f_{10}(x)}$

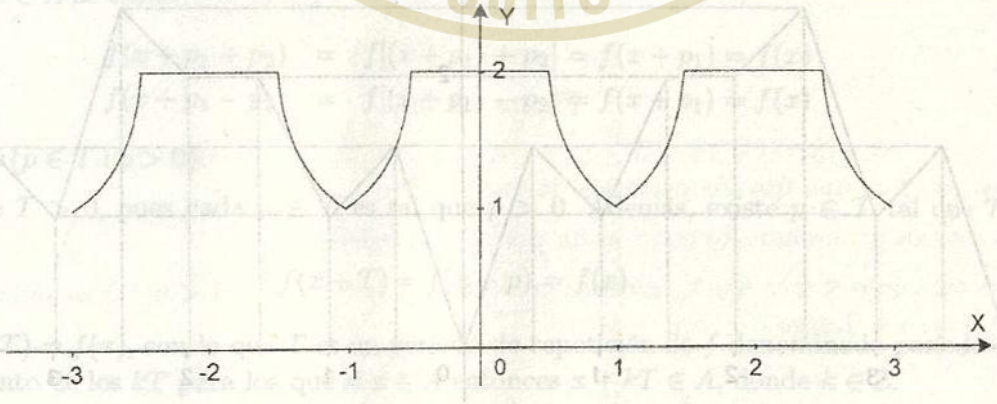


Figura 4.119:

l) $f_{11}(x) = g(x) - \mu(x)$ con $\mu(x) = \inf_{n \in \mathbf{Z}} |x - 2n - 1|$

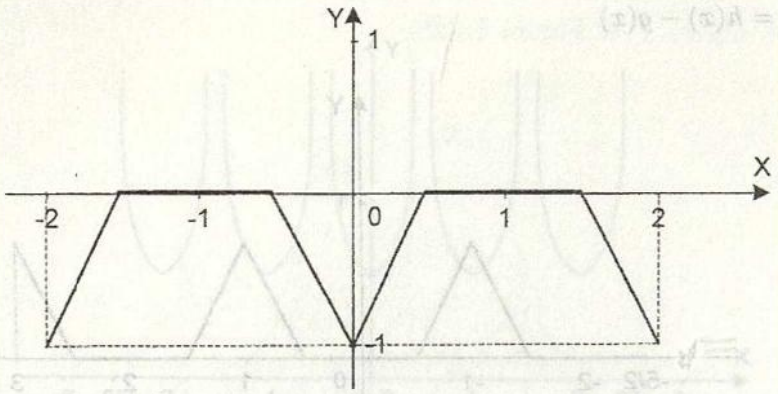


Figura 4.120:

$m)$ $f_{12}(x) = \dfrac{4g(x)}{1+2g(x)}$

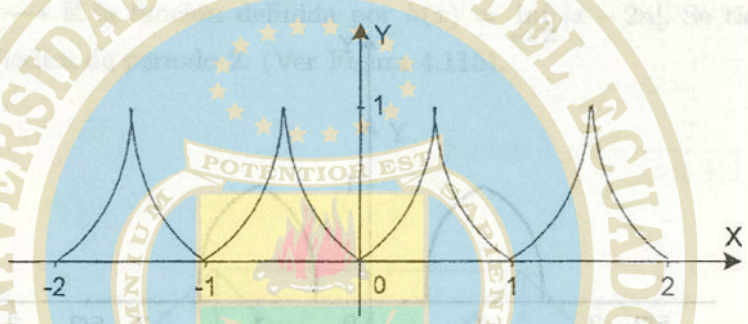


Figura 4.121:

$n)$ $f_{13}(x) = v(x) + 2g(x)$ con $v(x) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x - 4n|$

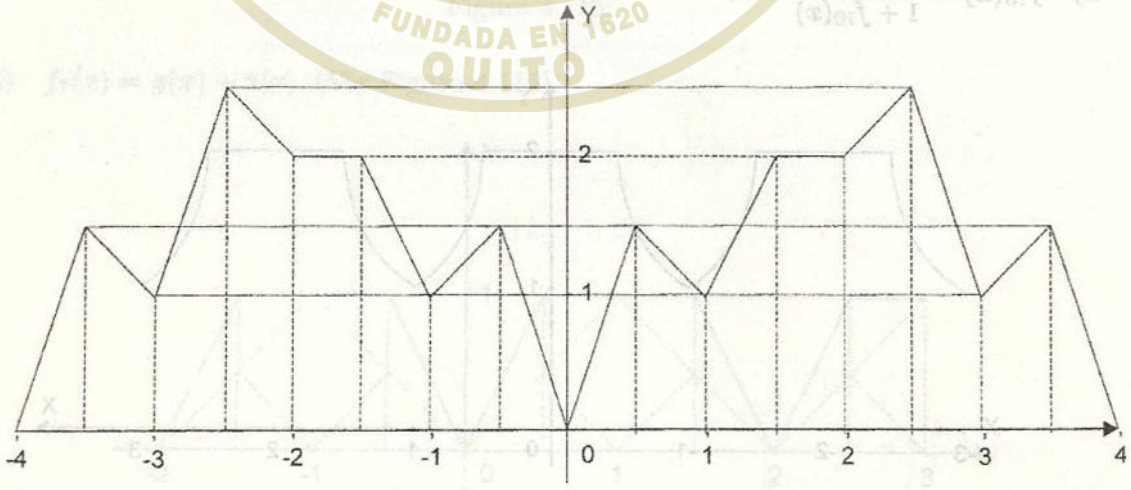


Figura 4.122:

$\tilde{n})$ $f_{14}(x) = x + g(x), x \in [-2;2]$

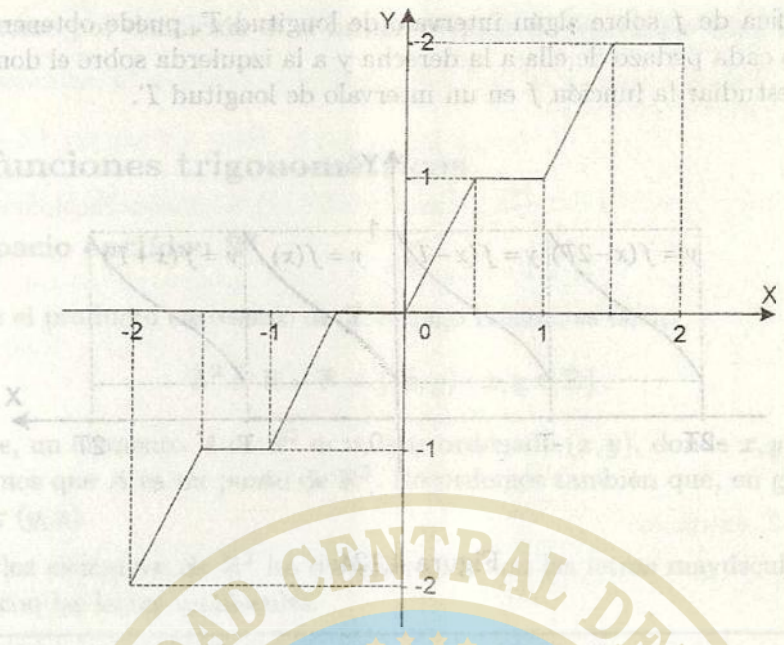


Figura 4.123:

4.9. Funciones Periódicas

Definición 4.41 *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$. Se dice que f es periódica si, y solo si se verifica la siguiente propiedad:*

$$\exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0 \text{ tal que } \forall x \in A, x + p \in A \text{ y } f(x+p) = f(x).$$

La constante p se denomina un período de repetición de f.

Supongamos que A es tal que si $x \in A$, $x + p$, y $x - p \in A$. El conjunto de todos los períodos de f se llama módulo de períodos $\mathcal{T}$ de f y verifica la siguiente propiedad:

$$\forall p_1, p_2 \in \mathcal{T}, p_1 + p_2 \in \mathcal{T} \text{ y } p_1 - p_2 \in \mathcal{T} (p_1 \neq p_2).$$

En efecto, $\forall x \in A$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(x + p_1 + p_2) &= f[(x + p_1) + p_2] = f(x + p_1) = f(x) \\ f(x + p_1 - p_2) &= f[(x + p_1) - p_2] = f(x + p_1) = f(x) \end{aligned}$$

Sea $T = Min\{p \in \mathcal{T} : p > 0\}$.

Es obvio que $T > 0$, pues cada $p \in \mathcal{T}$ es tal que $p > 0$. Además, existe $p \in \mathcal{T}$ tal que $T = p$, entonces:

$$f(x+T) = f(x+p) = f(x).$$

Luego $f(x+T) = f(x)$, con lo que T es un período de repetición de f denominado período de f y T es el conjunto de los kT para los que si $x \in A$ entonces $x + kT \in A$, donde $k \in \mathbb{Z}$.

- **Observación.**- Si $p_1 = p_2$ entonces $p_1 - p_2 = 0$; este caso no tiene interés, puesto que toda función sería periódica de período cero, pues

$$f(x + 0) = f(x), \forall x \in \text{Dom}(f).$$

Si se conoce la gráfica de f sobre algún intervalo de longitud T, puede obtenerse toda la gráfica de f transportando cada pedazo de ella a la derecha y a la izquierda sobre el dominio de f. Por lo tanto es suficiente estudiar la función f en un intervalo de longitud T.

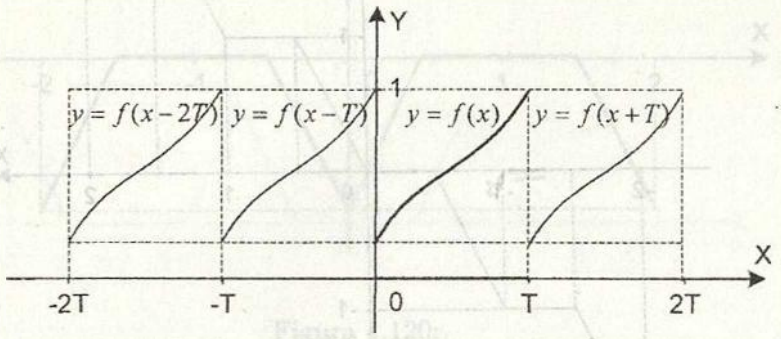


Figura 4.124:

EJEMPLO

Sea f la función definida por $f(x) = x - [x], \forall x \in \mathbb{R}$.

Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] \leq x < [x] + 1$, entonces:

$$0 \leq x - [x] < 1 \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < 1.$$

Si $n \leq x < n + 1$ entonces $[x] = n$, de donde $x - [x] = x - n$; así; $f(x) = x - n$, si $n \leq x < n + 1$.

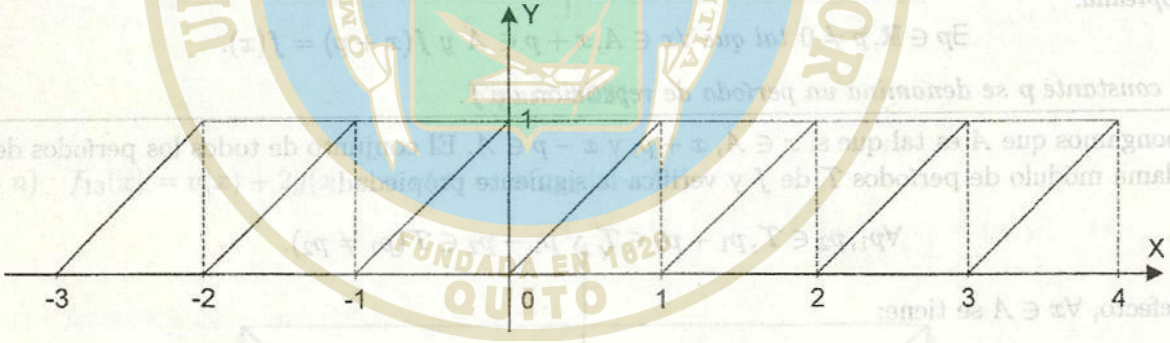


Figura 4.125:

Afirmamos que f es una función periódica de período $T = 1$.

En efecto veamos primeramente que 1 es un período de repetición:

Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $n \leq x < n + 1$, entonces $[x] = n$ y $n + 1 \leq x + 1 < n + 2$, de donde se sigue que $[x + 1] = n + 1$. Luego

$$f(x + 1) = x + 1 - [x + 1] = x + 1 - (n + 1) = x - n = x - [x] = f(x).$$

Es decir que $f(x + 1) = f(x)$ como queríamos probar.

Sea h el período de f entonces $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + h) = f(x) \Leftrightarrow (x + h) - [x + h] = x - [x]$, de donde $h = [x + h] - [x] \in \mathbb{Z}$.

Siendo $h \in \mathbb{Z}$ y como por definición es el menor período de repetición estrictamente positivo se sigue que $h = 1$.

4.10. Las funciones trigonométricas

4.10.1. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ es el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo, es decir:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Consecuentemente, un elemento A de $\mathbb{R}^2$ es un par ordenado (x, y), donde $x, y \in \mathbb{R}$. Escribiremos $A = (x, y)$ y diremos que A es un punto de $\mathbb{R}^2$. Recordemos también que, en general el par (x, y) es distinto del par (y, x).

En lo sucesivo, a los elementos de $\mathbb{R}^2$ los designaremos con las letras mayúsculas del alfabeto y a sus componentes con las letras minúsculas.

Definición 4.42 *Sean A, $B \in \mathbb{R}^2$ con $A = (a, b)$, $B = (c, d)$. Diremos que $A = B$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.*

Definición de las operaciones en $\mathbb{R}^2$

En el conjunto $\mathbb{R}^2$ definiremos dos operaciones: una operación "suma" y una operación "producto por un número real"; de tal manera que $\mathbb{R}^2$ adquiera cierta estructura algebraica, concretamente, la de un espacio vectorial real.

Adición

Definición 4.43 *Sean $A = a, b)$, $B = (c, d) \in \mathbb{R}^2$, entonces se define la suma de A y B de la siguiente manera:*

$$A + B = (a + c, b + d) \tag{4.9}$$

Notemos que la operación "suma" notada "+" definida por (4.9) es una operación o ley de composición binaria interna en $\mathbb{R}^2$; es decir que:

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ ((a, b), (c, d)) & \to & (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d). \end{array}$$

EJEMPLOS

1. Si A y B son los puntos de $\mathbb{R}^2$ definidos por $A = (3, 5)$, $B = (1, -2)$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & (3, 5) + (1, -2) \\ & = & (3 + 1; 5 + (-2)) \\ & = & (4; 3). \end{array}$$

2. Si $A = (2, 1)$, $B = (-3, -2)$ entonces:

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & (2 + (-3), 1 + (-2)) \\ & = & (-1, -1). \end{array}$$

3. Si $A = (2, 1)$, $B = (-2, -1)$ entonces la suma de A con B es: $A + B = (0, 0)$.

Producto de números reales por elementos de $\mathbb{R}^2$

Definición 4.44 *Sean $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos el producto del número real λ por A, notado λA, de la siguiente manera:*

$$\lambda A = (\lambda a, \lambda b) \tag{4.10}$$

La operación producto por un número real definida por (4.10) es una operación o ley de composición externa; es decir que:

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (a, b)) & \to & \lambda \cdot (a, b) = (\lambda a, \lambda b). \end{array}$$

EJEMPLOS

1. Sea $A = (-1, 2)$

   a) Si $\lambda = -2$, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda A &= (-2)(-1, 2) \\ &= ((-2)(-1)), ((-2)(2)) \\ &= (2, -4) \end{aligned}$$

   b) Si $\lambda = \dfrac{1}{2}$ entonces:

$$\begin{aligned} \lambda A &= \frac{1}{2}(-1, 2) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \end{aligned}$$

   c) Si $\lambda = 0$ entonces $\lambda A = (0, 0)$.

2. Sean $A = (-3, 4)$ y $B = (1, 2)$. Determinar:

   a) $3A + 2B$

   b) $A - 2B$

   Solución

   a)

$$\begin{aligned} 3A + 2B &= 3(-3, 4) + 2(1, 2) \\ &= (-9, 12) + (2, 4) \\ &= (-7, 16) \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} A - 2B &= A + (-2)B \\ &= (-3, 4) + (-2)(1, 2) \\ &= (-3, 4) + (-2, -4) \\ &= (-5, 0) \end{aligned}$$

Teorema 4.20 *$(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano; es decir que, en $\mathbb{R}^2$ se verifican las siguientes propiedades:*

V_1. $\forall A, B \in \mathbb{R}^2,\ A + B = B + A$

V_2. $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^2,\ A + (B + C) = (A + B) + C$

V_3. $\exists \mathbf{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $\forall A \in \mathbb{R}^2,\ A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$

V_4. $\forall A \in \mathbb{R}^2, \exists (-A) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $A + (-A) = 0$.

Observación.- Si $A = (a, b)$ entonces $-A = (-a, -b)$.

Demostración.- Sean $A = (a, b)$, $B = (c, d)$, $C = (e, f)$

V_1

$$\begin{aligned} A + B &= (a, b) + (c, d) \\ &= (a + c, b + d) \\ &= (c + a, d + b) \\ &= (c, d) + (a, b) \\ &= B + A \end{aligned}$$

V_2

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= (a + (c + e), b + (d + f)) \\ &= ((a + c) + e, (b + d) + f) \\ &= (a + c, b + d) + (e, f) = (A + B) + C \end{aligned}$$

V_3

$$\begin{aligned} A + \mathbf{0} &= (a, b) + (0, 0) \\ &= (a + 0, b + 0) \\ &= (a, b) = A \end{aligned}$$

Se deja como ejercicio probar que, el elemento 0 es único.

V_4

$$\begin{aligned} A + (-A) &= (a, b) + (-a, -b) \\ &= (0, 0) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Nota.- Sean $A, B \in \mathbb{R}^2$, escribiremos: $A + (-B) = A - B$.

Teorema 4.21 *Para todo* $A,\ B \in \mathbb{R}^2$ *y* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *se verifican las siguientes propiedades:*

V_5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

V_6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

V_7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

V_8. $1A = A$

Demostración.- Probaremos únicamente la parte V_7) y dejaremos las demás como ejercicio.

Sean $A = (a, b)$, $B = (c, d)$

$$\begin{aligned} \alpha(A+B) &= \alpha[(a,b)+(c,d)] \\ &= \alpha(a+c, b+d) \\ &= (\alpha(a+c), \alpha(b+d)) \\ &= (\alpha a + \alpha c, \alpha b + \alpha d) \\ &= (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c, \alpha d) \\ &= \alpha(a,b) + \alpha(c,d) \\ &= \alpha A + \alpha B \ \blacksquare \end{aligned}$$

Por cumplirse en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las propiedades enunciadas en los teoremas 1 y 2 para las operaciones en él definidas, diremos que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial real. A los elementos de todo espacio vectorial se los denomina vectores; razón por la cual, siendo $\mathbb{R}^2$ un espacio vectorial real, a sus elementos los denominaremos vectores y a los números reales los denominaremos escalares.

Combinaciones lineales de elementos de $\mathbb{R}^2$.

Definición 4.45 *Sean $A, B \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se denomina combinación lineal de los vectores A y B afectados de los coeficientes α y β al vector $\alpha A + \beta B$.*

De manera general:

Definición 4.46 *Sea el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ y $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$. Un vector V de $\mathbb{R}^2$ se dice que es combinación lineal de los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$, si existen números reales (escalares) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$V = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \cdots + \alpha_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i.$$

EJEMPLOS

1. Sean los vectores $A_1 = (3, 2)$, $A_2 = (1, -3)$, $A_3 = (0, 1)$.

   a) Una combinación lineal de A_1, A_2 y A_3 es la dada por

   $$\begin{aligned} 2A_1 + 3A_2 - 5A_3 &= 2(3,2) + 3(1,-3) - 5(0,1) \\ &= (6,4) + (3,-9) + (0,-5) \\ &= (9,-10). \end{aligned}$$

   Es decir que el vector $(9, -10)$ es una combinación lineal de los vectores A_1, A_2, A_3.

   b) Otra combinación lineal de los vectores A_1, A_2, A_3 es la siguiente:

   $$A_1 + A_2 + A_3 = (3,2) + (1,-3) + (0,1) = (4,0).$$

2. Expresar el vector $A = (3, 4)$ como combinación lineal de los vectores $A_1 = (1, 1)$, $A_2 = (0, 2)$ y $A_3 = (-1, 0)$.

   Solución.- En este caso, queremos encontrar (si es posible) escalares α, β y γ tales que:

   $$A = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3.$$

Se tiene las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 &\Leftrightarrow (3,4) = \alpha(1,1) + \beta(0,2) + \gamma(-1,0) \\ &\Leftrightarrow (3,4) = (\alpha - \gamma, \alpha + 2\beta) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \alpha - \gamma \\ 4 = \alpha + 2\beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Este último es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas; el mismo que admite infinitas soluciones. Para ello, podemos expresar dos de las incógnitas en función de la tercera y dando valores arbitrarios a esta última, se obtienen las soluciones del sistema. Así:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ \beta &= \frac{4-\alpha}{2} \\ \gamma &= \alpha - 3. \end{aligned}$$

- Por ejemplo si $\alpha = 1$, entonces $\beta = \frac{3}{2}, \gamma = -2$. Veamos que efectivamente dichos valores permiten expresar el vector A como combinación lineal de los vectores A_1, A_2 y A_3. En efecto:

$$1(1,1) + \frac{3}{2}(0,2) - 2(-1,0) = (1,1) + (0,3) + (2,0) = (3,4) = A.$$

- Otra solución es la siguiente:

$$\alpha = 3; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = 0.$$

En este caso:

$$A = (3,4) = 3(1,1) + \frac{1}{2}(0,2) + 0(-1,0).$$

- Se tiene también como solución la siguiente: $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$. En efecto: $(3,4) = 0(1,1) + 2(0,2) - 3(-1,0)$.

Podemos entonces expresarle al vector $A = (3,4)$ como combinación lineal de los vectores A_1, A_2 y A_3 de infinitas maneras; basta dar valores arbitrarios a α. Dicha solución viene expresada por: $A = \alpha A_1 + \frac{4-\alpha}{2} A_2 + (\alpha - 3)A_3$.

3. Expresar, si es posible, el vector $A = (-1,5)$ como combinación lineal de los vectores $A_1 = (-1,1)$ y $A_2 = (-2,-3)$.

Solución.- Queremos encontrar α y $\beta \in \mathbb{R}$ que verifiquen la ecuación vectorial $A = \alpha A_1 + \beta A_2$; es decir, tales que verifiquen $(-1,5) = \alpha(-1,1) + \beta(-2,-3)$ o lo que es lo mismo, tales que $(-1,5) = (-\alpha - 2\beta, \alpha - 3\beta)$

De donde se sigue que:

$$\begin{cases} -1 = -\alpha - 2\beta \\ 5 = \alpha - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + 2\beta \\ 5 = \alpha - 3\beta \end{cases} \tag{4.11}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que

$$\alpha = \frac{13}{5} \quad \text{y} \quad \beta = -\frac{4}{5}.$$

Es decir que:

$$(-1,5) = \frac{13}{5}(-1,1) - \frac{4}{5}(-2,-3).$$

Se observa en este caso que el vector $A = (-1, 5)$ se expresa de manera única como combinación lineal de A_1 y A_2; a diferencia de lo que ocurre con los vectores A_1, A_2 y A_3 del ejemplo 2, en donde el vector A dado se podía expresar como combinación lineal de dichos vectores de infinitas maneras. Más adelante hallaremos la justificación o la razón de ese comportamiento.

4. ¿Se puede expresar el vector $A = (1, 1)$ como combinación lineal de los vectores $A_1 = (-1, 1)$ y $A_2 = (3, -3)$?

   Solución.- Veamos si existe solución de la ecuación

   $$A = \alpha A_1 + \beta A_2.$$

   Se tienen las equivalencias siguientes:

   $$\begin{aligned} A = \alpha A_1 + \beta A_2 &\Leftrightarrow (1,1) = \alpha(-1,1) + \beta(3,-3) \\ &\Leftrightarrow (1,1) = (3\beta - \alpha, \alpha - 3\beta) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3\beta - \alpha \\ 1 = \alpha - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \alpha - 3\beta \\ 1 = \alpha - 3\beta. \end{cases} \end{aligned}$$

   El último sistema no tiene solución puesto que de la igualdad de los segundos miembros en las dos últimas ecuaciones se sigue que $-1 = 1$, lo cual no es posible.

   Consecuentemente, no es posible expresar al vector $A = (1, 1)$. como combinación lineal de los vectores $A_1 = (-1, 1)$ y $A_2 = (3, -3)$.

Dependencia e Independencia Lineal de Vectores en $\mathbb{R}^2$

Definición 4.47 *Se dice que los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes o también que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes o simplemente, que es un conjunto ligado si y solamente si existen números reales (escalares) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos tales que:*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = 0.$$

Definición 4.48 *Se dice que los vectores $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes si no son linealmente dependientes.*

La independencia lineal de los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ puede formularse del siguiente modo:

Definición 4.49 *Se dice que los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes o también que $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es un conjunto libre si y solamente si cualesquiera que sean los números reales $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se tiene:*

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \cdots + \alpha_n A_n = 0) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0).$$

EJEMPLOS

1. Los vectores $A = (2, 1)$ y $B = (1, -2)$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes. En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que: $\alpha A + \beta B = \mathbf{0}$.

   Reemplazando A y B tenemos:

   $$\alpha(2, 1) + \beta(1, -2) = (0, 0), \text{ o lo que es lo mismo}$$

   $$(2\alpha + \beta, \alpha - 2\beta) = (0, 0).$$

De donde se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas α y β sigiente

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ \alpha-2\beta=0. \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos que $\beta=-2\alpha$ y reemplazando este valor en la segunda resulta:

$$\begin{aligned} \alpha-2(-2\alpha)=0 &\Leftrightarrow 5\alpha=0 \\ &\Leftrightarrow \alpha=0. \end{aligned}$$

Como $\beta=-2\alpha$ se sigue finalmente que $\beta=0$. Consecuentemente $\alpha A+\beta B=\mathbf{0}$ implica que $\alpha=\beta=0$, como única solución, lo que prueba que A y B son linealmente independientes.

2. Sean los vectores $A=(-1,3)$ y $B=(-2,-6)$ de $\mathbb{R}^2$. Probar que A y B son vectores linealmente independientes.

Solución.- Veamos que la combinación lineal nula $\alpha A+\beta B=\mathbf{0}$ implica que $\alpha=\beta=0$; o que dicha ecuación vectorial tiene como única solución $\alpha=\beta=0$.

Se tiene las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \alpha A+\beta B=\mathbf{0} &\Leftrightarrow \alpha(-1,3)+\beta(-2,-6)=(0,0) \\ &\Leftrightarrow (-\alpha-2\beta,3\alpha-6\beta)=(0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha-2\beta=0 \\ 3\alpha-6\beta=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que el último sistema de ecuaciones tiene como única solución $\alpha=\beta=0$; es decir que: $\alpha A+\beta B=\mathbf{0}\Rightarrow\alpha=\beta=0$; que nos dice precisamente que los vectores $A=(-1,3)$ y $B=(-2,-6)$ son linealmente independientes.

3. Probar que todo vector A no nulo de $\mathbb{R}^2$ es linealmente independiente.

Solución.- Ello es inmediato ya que, de la igualdad $\lambda A=\mathbf{0}$ se sigue necesariamente que $\lambda=0$.

Se propone como ejercicio, probar que todo conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que contenga al vector nulo es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

4. Sean los vectores $A=(-1,3)$ y $B=(2,-6)$ de $\mathbb{R}^2$. Probar que A y B son vectores linealmente dependientes.

Solución.- Supongamos que se tiene $\alpha A+\beta B=\mathbf{0}$ para ciertos escalares α y β. Es decir que:

$$\alpha(-1,3)+\beta(2,-6)=(0,0) \text{ o lo que es lo mismo:}$$

$$(-\alpha+2\beta,3\alpha-6\beta)=(0,0).$$

De la última igualdad obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas α y β:

$$\begin{cases} -\alpha+2\beta=0 \\ 3\alpha-6\beta=0. \end{cases}$$

Multiplicando por $-\dfrac{1}{3}$ ambos miembros de la segunda ecuación obtenemos: $-\alpha+2\beta=0$, ecuación que es idéntica a la primera ecuación. Es decir que:

$$\begin{cases} -\alpha+2\beta=0 \\ 3\alpha-6\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow -\alpha+2\beta=0.$$

o lo que es lo mismo, las dos ecuaciones se reducen a una sola ya que las dos son equivalentes, esto es, a:

$$-\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\beta.$$

Esta última ecuación tiene infinitas soluciones; pues basta dar valores arbitrarios a β y obtener los correspondientes valores de α; así por ejemplo:

$$\begin{array}{rll} \text{Si } \beta = 1 & \text{entonces} & \alpha = 2 \\ \text{Si } \beta = -1 & \text{entonces} & \alpha = -2 \\ \text{Si } \beta = 0 & \text{entonces} & \alpha = 0 \\ \text{Si } \beta = 2 & \text{entonces} & \alpha = 4. \end{array}$$

Puesto que en este caso existen escalares $\alpha = 2\beta$ y β no todos nulos tales que $\alpha A + \beta B = 0$, se sigue que dichos vectores son linealmente dependientes.

Notemos en este caso por ejemplo que, cuando $\beta = 1$, $\alpha = 2$, podemos escribir

$$2A + B = 0 \Rightarrow B = -2A.$$

Esto nos permite concluir que cuando dos vectores A y B de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes, existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A = \lambda B$.

Recíprocamente se tiene que si los vectores $A, B \in \mathbb{R}^2$ no nulos son tales que $A = \lambda B$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, entonces A y B son linealmente dependientes. En efecto:

$$\begin{aligned} A = \lambda B &\Leftrightarrow A - \lambda B = 0 \\ &\Leftrightarrow A + (-\lambda)B = 0 \end{aligned}$$

y como ésta es una combinación lineal nula de los vectores A y B en la cual no todos los escalares son cero, se concluye que los vectores A y B son linealmente dependientes.

En general tenemos que: si los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes, de acuerdo a la definición sabemos que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ no todos nulos tales que:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_{i-1} A_{i-1} + \alpha_i A_i + \alpha_{i+1} A_{i+1} + \cdots + \alpha_n A_n = 0.$$

Supongamos que $\alpha_i \neq 0$, entonces de la igualdad anterior se sigue que:

$$\alpha_i A_i = -\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 - \alpha_3 A_3 - \cdots - \alpha_{i-1} A_{i-1} - \alpha_{i+1} A_{i+1} - \cdots - \alpha_n A_n.$$

Como $\alpha_i \neq 0$, se tiene:

$$A_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} A_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} A_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_i} A_3 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} A_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} A_{i+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} A_n = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right) A_j;$$

es decir que el vector A_i se expresa como una combinación lineal de los vectores A_1, A_2, A_{i-1}, $A_{i+1}, \ldots, A_n$.

Podemos entonces concluir que:

Los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son linealmente dependientes si y solo si al menos uno de ellos se expresa como combinación lineal de los restantes.

EJEMPLO

Los vectores $A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)$ y $A_3 = (1,1)$ son linealmente dependientes puesto que por ejemplo podemos escribir que:

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 + A_2 \\ A_1 &= A_3 - A_2 \\ A_2 &= A_3 - A_1. \end{aligned}$$

Vectores Colineales.

Definición 4.50 *Sea A un vector no nulo y B un vector cualquiera. Se dice que los vectores A y B son colineales si y solamente si existe un número real α tal que $B = \alpha A$.*

EJEMPLO

Los vectores $A = (1,4)$ y $B = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ son colineales puesto que $B = \frac{1}{2}A$.

Observación.- El vector nulo es colineal a todo vectore A de $\mathbb{R}^2$ puesto que $\mathbf{0} = 0A$.

Teorema 4.22 *Sean los vectores $A = (a,b)$ y $B = (c,d)$ de $\mathbb{R}^2$. La condición necesaria y suficiente para que los vectores A y B sean colineales es que $ad - bc = 0$.*

Demostración.- Si A y B son colineales y si $A \neq 0$, existe un real α tal que $B = \alpha A$, es decir tal que $c = \alpha a$ y $d = \alpha b$.

Como A es no nulo, una al menos de sus coordenadas a, b no es nula. Sea por ejemplo $a \neq 0$. Se puede escribir entonces $\alpha = \frac{c}{a}$ y por consiguiente $d = \frac{c}{a}b$ es decir que:

$$ad - bc = 0. \qquad (1)$$

Cuando $A = 0$ a y b son nulos y la igualdad anterior se verifica. Recíprocamente, supongamos que $ad - bc = 0$. Si el vector A es nulo, A y B son colineales.

Si $A \neq 0$, una al menos de sus coordenadas a, b es no nula. Supongamos por ejemplo que $a \neq 0$. La igualdad $ad - bc = 0$ puede escribirse $d = \frac{bc}{a}$; con lo cual se sigue que:

$$\begin{aligned} B &= (c,d) = \left(c, \frac{bc}{a}\right) \\ &= \frac{c}{a}(a,b) \\ &= \alpha A, \text{ donde } \alpha = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

lo que prueba que A y B son colineales.

EJEMPLO

Los vectores $A = (\sqrt{2}, 1)$ y $B = (2, \sqrt{2})$ son colineales. En efecto:

$$ad - bc = (\sqrt{2})(\sqrt{2}) - 1(2) = 2 - 2 = 0.$$

En cambio los vectores $A = (1,1)$ y $B = (-1,1)$ no son colineales. En efecto, $ad - bc = 1(1) - (1)(-1) = 2 \neq 0$. O lo que es lo mismo; probemos que no existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$A = \lambda B \Leftrightarrow (1,1) = \lambda(-1,1).$$

Si tal escalar existiese, se tendría que $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$, lo cual no es posible. Consecuentemente los vectores A y B no son colineales.

Ejercicios

1. ¿Los pares de los siguientes vectores son colineales?

   a) $A = (\sqrt{3}-1, 2), B = (2, \sqrt{3}+1)$

   b) $A = \left(-\frac{24}{35}, \frac{36}{49}\right), B = \left(\frac{14}{3}, -5\right)$

2. Demostrar que los siguientes pares de vectores no son colineales.

   a) $A = \left(-\frac{7}{2}, 5\right), B = (2, -3)$

   b) $A = (1, 3), B = (2, 5)$

Sistema Generador

Definición 4.51 *Un conjunto de vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^2$ se dice que generan $\mathbb{R}^2$ si y solamente si para cada $A \in \mathbb{R}^2$, existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tales que $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n$.*
O lo que es lo mismo:
Un conjunto de vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^2$ genera $\mathbb{R}^2$ si y solamente si todo vector de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de dichos vectores.

Observación.- Diremos que los vectores $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}^2$ no generan $\mathbb{R}^2$ cuando existe algún elemento de $\mathbb{R}^2$ que no puede expresarse como combinación lineal de dichos vectores (Ver ejemplo 4 de la página 293).

EJEMPLOS

1. Los vectores $A_1 = (2, 1)$, $A_2 = (-3, 1)$, $A_3 = (-1, -1)$ generan $\mathbb{R}^2$.

   En efecto, sea $A = (x, y)$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$. Veamos que la ecuación vectorial

   $$A = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 \quad (1)$$

   tiene solución. Se tienen las equivalencias siguientes:

   $$\begin{aligned} A = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 &\Leftrightarrow (x, y) = \alpha(2, 1) + \beta(-3, 1) + \gamma(-1, -1) \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (2\alpha - 3\beta - \gamma, \alpha + \beta - \gamma) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha - 3\beta - \gamma \\ y = a + \beta - \gamma. \end{cases} \quad (I) \end{aligned}$$

   (I) es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas: α, β, γ; el mismo que tiene infinitas soluciones. Podemos entonces expresar dos de las incógnitas en función de la tercera. Así:

   $$y - x = -\alpha + 4\beta \Rightarrow \beta = \frac{y - x + \alpha}{4}.$$

   Reemplazando dicho valor de β en $y = \alpha + \beta - \gamma$ se encuentra que:

   $$\gamma = \frac{5\alpha - x - 3y}{4}$$

Es decir que las soluciones del sistema vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ \beta &= \frac{y-x+a}{4} \\ \gamma &= \frac{5\alpha-x-3y}{4}. \end{aligned}$$

Por ejemplo:

Si $\alpha = 0$, entonces $\beta = \frac{y-x}{4}$, $\gamma = -\frac{x+3y}{4}$. Con lo cual se tiene que: $(x,y) = 0(2,1) + \frac{y-x}{4}(-3,1) - \frac{x+3y}{4}(-1,-1)$.

Si $\alpha = 1$, $\beta = \frac{y-x+1}{4}$, $\gamma = \frac{5-x-3y}{4}$ y tenemos entonces

$$(x,y) = (2,1) + \frac{y-x+1}{4}(-3,1) + \frac{5-x-3y}{4}(-1,-1).$$

Es decir que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede expresarse como combinación lineal de los vectores A_1, A_2 y A_3 dados.

2. ¿Los vectores $A_1 = (1,1)$ y $A_2 = (-3,-3)$ generan $\mathbb{R}^2$?

Solución.- Si los vectores dados generan $\mathbb{R}^2$, entonces la ecuación vectorial.

$$\forall A = (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ A = \alpha A_1 + \beta A_2$$

tendría siempre solución. Veamos entonces si aquello es posible; es decir veamo si existen los escalares α y β cualquiera que sea el vector $A = (x,y)$. Se tiene:

$$\begin{aligned} A = \alpha A_1 + \beta A_2 &\Leftrightarrow (x,y) = \alpha(1,1) + \beta(-3,-3) \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (\alpha - 3\beta, \alpha - 3\beta) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha - 3\beta \\ y = a - 3\beta \end{cases} \end{aligned}$$

sistema que tiene solución únicamente cuando $x = y$ (en cuyo caso existen infinitas soluciones). Si $x \neq y$, el sistema no tiene solución. Por ejemplo, el vector $(1,0)$ no puede expresarse como combinación lineal de los vectores A_1 y A_2 pues $1 \neq 0$. Es decir que los vectores A_1 y A_2 no generan $\mathbb{R}^2$.

Bases de $\mathbb{R}^2$

Definición 4.52 *Un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ se denomina una base de $\mathbb{R}^2$ si se verifican las dos siguientes condiciones:*

1. *Es un conjunto de vectores linealmente independientes.*
2. *Dichos vectores generan $\mathbb{R}^2$*

EJEMPLOS

1. Sean los vectores $A_1 = (1,1)$, $A_2 = (0,1)$, entonces $\{A_1, A_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. En efecto:

a) A_1 y A_2 son linealmente independientes. Así:

$$\begin{aligned} \alpha A_1 + \beta A_2 = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \alpha(1,1) + \beta(0,1) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow (\alpha, \alpha+\beta) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

b) A_1 y A_2 generan $\mathbb{R}^2$ Así:
Sea $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos que existen escalares α y β tales que $A = \alpha A_1 + \beta A_2$; es decir, tales que:

$$\begin{aligned} (x,y) &= \alpha(1,1) + \beta(0,1) \\ &= (\alpha, \alpha+\beta) \end{aligned}$$

y determinemos dichos valores.
La última igualdad nos permite escribir que:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y - x = \beta. \end{cases}$$

Por lo tanto, existen los escalres $\alpha = x$ y $\beta = y - x$ tales que:

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathbb{R}^2,\ A &= \alpha A_1 + \beta A_2 \\ &= xA_1 + (y-x)A_2 \end{aligned}$$

que prueba precisamente que A_1 y A_2 generan $\mathbb{R}^2$.
De (a) y (b) se concluye que el conjunto $\{(1,1),(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

2. Los vectores de $\mathbb{R}^2$ designados con $\vec{\imath} = (1,0)$ y $\vec{\jmath} = (0,1)$ son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^2$; es decir, constituyen una base de $\mathbb{R}^2$, llamada en lo sucesivo base canónica de $\mathbb{R}^2$.

En efecto veamos que:

a) Dichos vectores son linealmente independientes:

$$\begin{aligned} \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} = 0 &\Rightarrow \alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \\ &\Rightarrow (\alpha, \beta) = (0,0) \\ &\Rightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

b) Dichos vectores generan $\mathbb{R}^2$. En efecto, sea $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector cualquiera, veamos entonces que existe solución de la ecuación vectorial

$$A = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}.$$

Se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} A = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} &\Leftrightarrow (x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (\alpha, \beta) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases} \end{aligned}$$

es decir que $A = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$ se escribe: $A = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Es decir que los vectores $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ generan $\mathbb{R}^2$.

De a) y b) se concluye que $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Además, los números reales x y y de la expresión se llaman coordenadas de A con respecto a la base $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$.

Ejercicio

Dados tres vectores de $\mathbb{R}^2$ no nulos y distintos, probar que ellos no son linealmente independientes; es decir que, uno de ellos se escribe como combinación lineal de los demás.

Teorema 4.23 *Una base de $\mathbb{R}^2$ contiene exactamente dos vectores linealmente independientes. El número de elementos de una base se conoce como dimensión del espacio vectorial; es decir que, $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial real de dimensión 2.*

Demostración.- Es claro que un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ no puede generar $\mathbb{R}^2$; mientras que tres vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$ no son linealmente independientes (de acuerdo al último ejercicio). Por lo tanto, queda por probar que dos vectores linealmente independientes generan $\mathbb{R}^2$.

Sean A y B dos vectores linealmente independientes y $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector arbitrario; probemos que existen escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $X = \alpha A + \beta B$.

Pongamos $A = (a, b)$, $B = (c, d)$, $X = (x, y)$ entonces:

$$\begin{aligned}(x, y) &= \alpha(a, b) + \beta(c, d) \\ &= (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d),\end{aligned}$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \alpha a + \beta c \\ y = \alpha b + \beta d. \end{cases}$$

Como $A \neq 0$, podemos suponer que por ejemplo $a \neq 0$ y de la primera ecuación del sistema se sigue que:

$$\alpha = \frac{x - \beta c}{a}.$$

Reemplazando el valor de α en la segunda ecución del sistema se obtiene:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x - \beta c}{a}\right) b + \beta d, \text{ de donde} \\ ay &= xb - \beta cb + \beta ad \text{ o lo que es lo mismo} \\ ay - xb &= \beta(ad - bc) \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que:

$$\beta = \frac{ay - xb}{ad - bc}.$$

Donde $ad - bc \neq 0$; pues en caso contrario, de $ad - bc = 0$ se seguiría que $ab = cb$ y consecuentemente que $d = \dfrac{cb}{a}$ y como $B = (c, d)$ se seguiría que:

$$B = \left(c, \frac{cb}{a}\right) = \frac{c}{a}(a, b)$$

es decir que:

$$B = \frac{c}{a} A,$$

relación que nos diría que los vectores A y B son linealmente dependientes y ello contradice la hipótesis de que A y B son linealmente independientes. Luego $ad - bc \neq 0$. Reemplazando el valor de β en $\alpha = \dfrac{x - \beta c}{a}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{x - \left(\dfrac{ay - xb}{ad - bc}\right)c}{a} \\ &= \frac{adx - cbx - acy + bcx}{a(ad - bc)} \\ &= \frac{a(dx - cy)}{a(ad - bc)}\end{aligned}$$

es decir que:

$$\alpha = \frac{dx - cy}{ad - bc}.$$

Las expresiones $\alpha = \dfrac{dx - cy}{ad - bc}$ y $\beta = \dfrac{ay - xb}{ad - bc}$ garantizan la existencia de α y β que es lo que queríamos probar. ■

De acuerdo a la última parte de la demostración, podemos establecer la siguiente conclusión.

Los vectores $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ de $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes si y solo si $ad - bc \neq 0$.

EJEMPLO

Los vectores $A = (-3, 0)$ y $B = (1, 4)$ son linealmente independientes puesto que:

$$ad - bc = -12 - 0 = -12 \neq 0$$

En cambio los vectores $A = (1, 3)$, $B = (-3, -9)$ no son linealmente independientes puesto que:

$$ad - bc = 1(-9) - 3(-3) = 0.$$

Interpretación Geométrica.- Sea $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si representamos el par ordenado (a, b) como un punto en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares X, Y y asociamos al punto A el vector geométrico $\overrightarrow{OA}$, entonces, podemos establecer una identificación entre los vectores geométricos $\overrightarrow{OA}$ y los puntos $A \in \mathbb{R}^2$; es por ello también la denominación de vectores a los elementos de $\mathbb{R}^2$. La suma de vectores y el producto de números reales por vectores se describen en las siguientes figuras:

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST SAPIENTIA OMNIUM FUNDADA EN 1620 QUITO

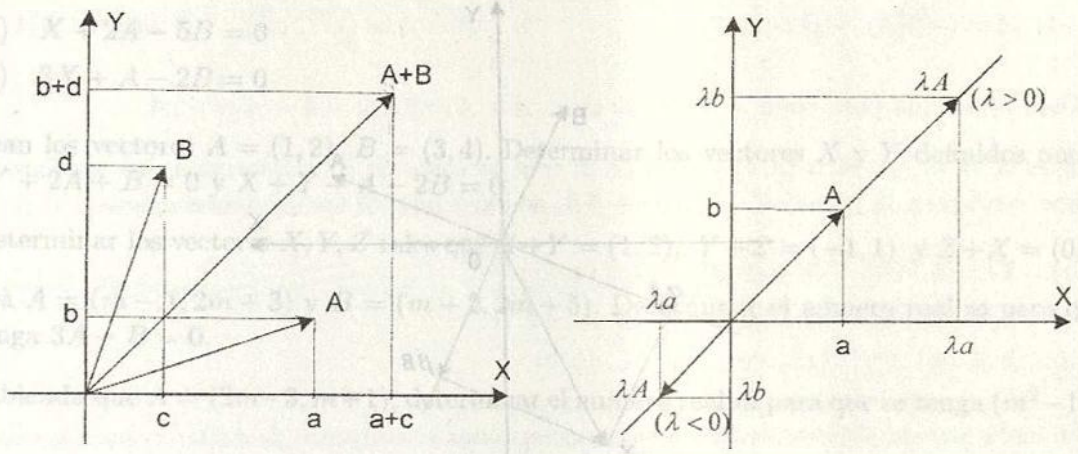


Figura 4.126:

Sean $A, B \in \mathbb{R}^2$. Si A y B son linealmente dependientes, existe un número real α tal que $A = \alpha B$; es decir que son colineales; este hecho podemos ilustrarlo en la siguiente figura.

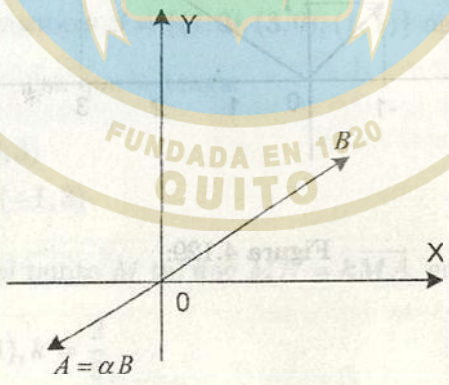


Figura 4.127:

Si A y B son linealmente independientes y $X \in \mathbb{R}^2$, entonces existen escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $X = \alpha A + \beta B$; situación que ilustramos a continuación.

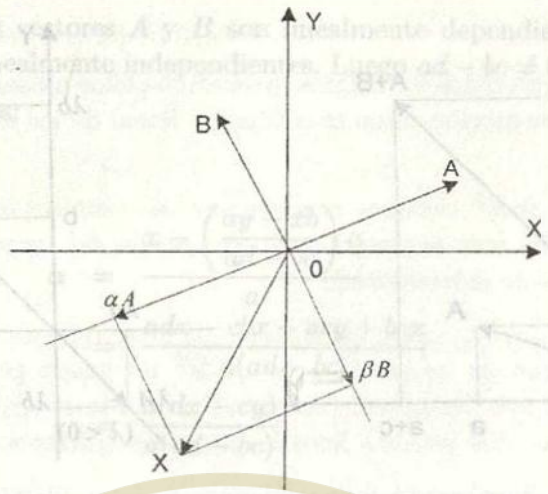


Figura 4.128:

Observación. Dos vectores no colineales constituyen una base de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO

Los vectores $A = (3, 2)$ y $B = (-1, 1)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^2$ (Verificarlo analíticamente).

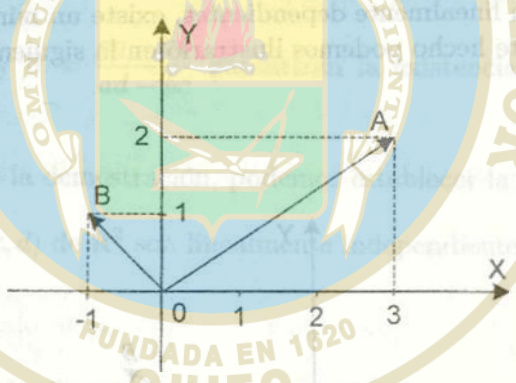


Figura 4.129:

Ejercicios

1. En $\mathbb{R}^2$ se consideran los siguientes vectores: $A = (-2, 2), B = (3, -4), C = (-5, 0), D = (0, 3)$. Determinar los elementos de $\mathbb{R}^2$ definidos por:

   a) $A + B$
   b) $12D$
   c) $A + B + C + D$
   d) $3A + 2B - 6D$
   e) $6A - 3B + 10D$

2. Dados los vectores $A = (-2, 3), B = (-2, -1), C = (-7, -4)$. Determinar el vector X definido por:

   a) $X = 4A - B$

b) $X + 2A - 5B = 0$

c) $3X + A - 2B = 0$

3. Sean los vectores $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$. Determinar los vectores X y Y definidos por $X + 4Y + 2A + B = 0$ y $X + Y + A - 2B = 0$.

4. Determinar los vectores X, Y, Z tales que $X + Y = (1, 2)$, $Y + Z = (-1, 1)$ y $Z + X = (0, -2)$.

5. Sea $A = (m - 1, 2m + 3)$ y $B = (m + 2, 2m + 5)$. Determinar el número real m para que se tenga $3A + B = 0$.

6. Sabiendo que $A = (2m - 3, m + 1)$, determinar el numero real m para que se tenga $(m^2 - 1)A = 0$.

7. Sean A y B elementos dados de $\mathbb{R}^2$. En cada uno de los casos siguientes, mostrar que

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha A + \beta B = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$$

a) $A = (1, -3)$, $B = (3, 2)$

b) $A = (2, -7)$, $B = (2, 1)$

c) $B = (2, 0)$, $B = (0, 4)$.

8. En cada uno de los siguientes casos, mostrar que existen escalares α y $\beta \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\alpha A + \beta B = 0$.

a) $A = (6, 3)$, $B = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

b) $A = (1, -1), B = (-1, 1)$

9. Probar que el conjunto de vectores $S = \{(1, 0), (3, 0), (1, 1)\}$ no es una base de $\mathbb{R}^2$

10. Determinar los reales x y y para que se tenga:

a) $x(3, -2) + y(1, 4) = (6, 3)$

b) $x(3, -2) + y(-6, 4) = (-1, 3)$

11. Calcular las coordenadas del punto M tal que $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MA}$, en los casos siguientes:

a) $A = (-5, 8)$, $B(4, -1), k = \frac{2}{5}$

b) $A = (3, 0)$, $B = (0, -4), k = -\frac{3}{2}$

c) $A = (2, -1)$, $B = (2, 4), k = -\frac{1}{3}$.

Observación.- $\overrightarrow{MB} = B - M$

12. En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores A y B de $\mathbb{R}^2$ son o no linealmente independientes. ¿Cuáles constituyen entonces bases de $\mathbb{R}^2$?

a) $A = (1, 2)$, $B = (2, 3)$

b) $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $B = (3, 2)$

c) $A = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, $B = \left(\sqrt{6}, 3\right)$

d) $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

e) $A = (-2, 3), \quad B = (2, 7)$ f) $A = (\sqrt{2}, \sqrt{5}), \quad B = (\sqrt{3}, 10)$.

13. Demostrar que para todo A de $\mathbb{R}^2$ se tiene $A + A = 2A$ y $-A - A = -2A$.

14. Sean $X = (x, y)$, $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ tres vectores de $\mathbb{R}^2$. Determinar los escalares α y β que verifiquen la igualdad $X = \alpha A + \beta B$, en cada uno de los siguientes casos:

a) $X = (8, -5), \quad A = (2, 3), \quad B = (1, 2)$

b) $X = (5, -3), \quad A = (2, -1), \quad B = (-4, 2)$

c) $X = (3, -2), \quad A = (2, 1), \quad B = (1, 2)$

15. En cada uno de los siguientes ejercicios determinar el conjunto de reales m para los cuales el conjunto de vectores $\{A, B\}$ es ligado.

a) $A = (m, 1), \quad B = (-1, m)$

b) $A = (2m + 3, 3), \quad B = (1, -m + 1)$

c) $A = (m + 1, 1), \quad B = (m^2 - m - 2, m - 2)$

16. Sean A y B dos vectores de $\mathbb{R}^2$, $A = (3, 2), B = (-1, m)$

a) Determinar el real m para que el conjunto $\{A, B\}$ sea ligado. ¿Qué condición debe verificar el real m para que el conjunto $\{A, B\}$ sea libre?

b) Sea m_0 un real para el cual el conjunto $\{A, B\}$ sea libre. Demostrar que, para ese real m_0 el conjunto $\{A, B\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

17. Sean A, B y C tres vectores de $\mathbb{R}^2$ dados por $A = (3, 2), B = (-5, 1), C = (1, 1)$.

a) Demostrar que los vectores A, B, C son linealmente dependientes.

b) Demostrar que los vectores A, B y C generan $\mathbb{R}^2$. ¿El conjunto $\{A, B, C\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^2$? Demostrar que dos vectores cualesquiera del conjunto $\{A, B, C\}$ forman una base del espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR FUNDADA EN 1620 QUITO

Producto Escalar

Definición 4.53 *Sean $A = (a, b)$, $B = (c, d) \in \mathbb{R}^2$. El producto escalar de A y B que se nota con $A \cdot B$ o $< A, B >$ o $< A|B >$ se define por:*

$$A \cdot B = \langle A|B \rangle = ac + bd. \tag{4.12}$$

El producto escalar de dos vectores es un número real.

EJEMPLOS

1. Si $A = (-3, 5)$, $B = (2, 1)$ entonces $A \cdot B = -6 + 5 = -1$
2. Si $A = (0, 1)$, $B = (2, 0)$ entonces $A \cdot B = 0(2) + 1(0) = 0$
3. Si $A = (1, 2), B = (4, -1)$ entonces $A \cdot B = 1(4) + 2(-1) = 2$

Propiedades.- Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se verifican entonces las siguientes propiedades:

1. $A \cdot B = B \cdot A$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$
4. $A \cdot A > 0$ si y solo si $A \neq 0$ y $A \cdot A = 0$ si y solo si $A = \mathbf{0}$

Demostración.- Supongamos que $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ y $C = (e, f)$

1.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= ac + bd \\ &= ca + bd \\ &= (c, d) \cdot (a, b) = B \cdot C \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= (a, b) \cdot [(c, d) + (e, f)] \\ &= (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\ &= a(c + e) + b(d + f) \\ &= ac + ae + bd + bf \\ &= (ac + bd) + (ae + bf) \\ &= A \cdot B + A \cdot C. \end{aligned}$$

3) y 4) proponemos como ejercicio ■

Observación.- El producto escalar definido por 4.12 no es el único que puede definirse sobre $\mathbb{R}^2$, existen muchas maneras de definir un producto escalar. Así por ejemplo, se puede ver que $A \cdot B = (a, b) \cdot (c, d) = ac + bd + ad + bc$, cumple las propiedades del producto escalar antes indicadas.

El producto escalar que hemos definido mediante la expresión 4.12 se denomina "producto escalar canónico de $\mathbb{R}^2$".

Espacio vectorial Euclídeo

Definición 4.54 *Se llama espacio vectorial euclídeo un espacio vectorial V previsto de un producto escalar.*

EJEMPLO

El espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar canónico es un espacio vectorial euclídeo.

Longitud o norma de un vector

Definición 4.55 *Sea $A \in \mathbb{R}^2$, su longitud o norma se designa con $\|A\|$ que se lee "norma del vector A" y se define mediante la igualdad*

$$\|A\| = \sqrt{A \cdot A}.$$

Note que la norma de un vector es un número real no negativo.

Observación.-Si $A = (a, b)$ entonces $A \cdot A = a^2 + b^2$, luego:

$$\|A\| = \|(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

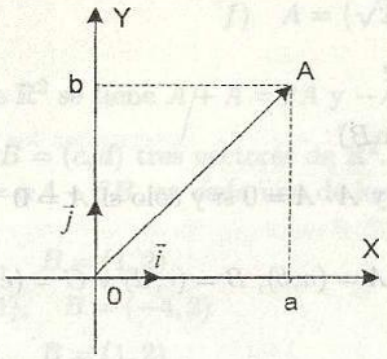


Figura 4.130:

EJEMPLOS

1. Sea el vector $A = (-3, 4)$. Se tiene que $A \cdot A = 9 + 16 = 25$ y en consecuencia:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sqrt{A \cdot A} \\ &= \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

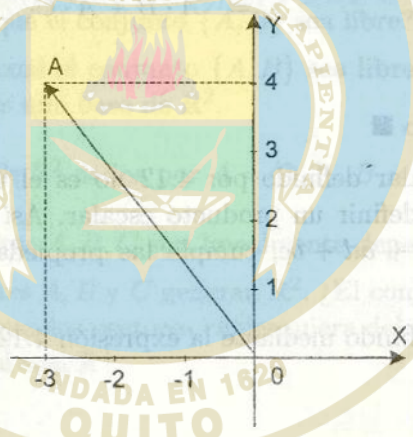


Figura 4.131:

2. Sea el vector $A = (-1, -2)$. Se tiene entonces que

$$\|A\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Teorema 4.24 *Para todo $A, B \in \mathbb{R}^2$ se verifica que:*

$$|A \cdot B| \leq \|A\| \, \|B\|,$$

llamada desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Demostración.-

1. Si $A = \mathbf{0}$, la desigualdad de Cauchy-Schwartz es evidente.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

2. Supongamos que $A \neq \mathbf{0}$ y $B \neq \mathbf{0}$ y sea $x \in \mathbb{R}$ un número real arbitrario. Entonces

$$(A - xB) \cdot (A - xB) \geq 0.$$

Pero:

$$\begin{aligned}(A - xB) \cdot (A - xB) &= A \cdot A - 2xA \cdot B + x^2 B \cdot B \\ &= \|A\|^2 - 2x(A \cdot B) + x^2 \|B\|^2.\end{aligned}$$

Llamemos $p(x) = \|B\|^2 x^2 - 2(A \cdot B)x + \|A\|^2$; p es un polinomio de segundo grado.

De $(A - xB) \cdot (A - xB) \geq 0$ resulta que $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) \geq 0$ y como el coeficiente $\|B\|^2$ de x^2 es positivo, debe cumplirse que el discriminante tiene que ser menor o igual que cero, es decir $\triangle \leq 0$; o lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}(-2A \cdot B)^2 - 4\|A\|^2 \|B\|^2 \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4(A \cdot B)^2 \leq 4\|A\|^2 \|B\|^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (A \cdot B)^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2.\end{aligned}$$

De donde, dado que $\|A\|$ y $\|B\|$ son números reales no negativos, concluimos que

$$|A \cdot B| \leq \|A\| \|B\|.$$

Se propone como ejercicio demostrar que la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene únicamente cuando A y B son linealmente dependientes.

Teorema 4.25 *Para todo $A, B \in \mathbb{R}^2$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene:*

i) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii) $\|A\| > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$

iii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ *(desigualdad triangular)*

v) $|\|A\| - \|B\|| \leq \|A - B\|$.

Demostración.- Probaremos únicamente las propiedades iii), iv) y v)

iii)

$$\begin{aligned}\|\alpha A\| &= \sqrt{(\alpha A) \cdot (\alpha A)} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (A \cdot A)} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \|A\|^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\|A\|^2} \\ &= |\alpha| \|A\|.\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\|A + B\|^2 &= (A + B) \cdot (A + B) \\ &= A \cdot A + 2A \cdot B + B \cdot B \\ &= \|A\|^2 + 2A \cdot B + \|B\|^2\end{aligned}$$

y como $|A \cdot B| \leq \|A\| \|B\|$ se tiene: $2A \cdot B \leq \|A\| \|B\|$. Luego

$$\|A + B\|^2 \leq \|A\|^2 + 2\|A\| \|B\| + \|B\|^2 = (\|A\| + \|B\|)^2.$$

Es decir que $\|A + B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$, de donde se deduce finalmente el resultado; es decir que

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

v) De $\|A\| = \|A - B + B\| \leq \|A - B\| + \|B\|$, se sigue que

$$\|A\| - \|B\| \leq \|A - B\| .$$

Igualmente,

$\|B\| = \|B - A + A\| \leq \|B - A\| + \|A\| = \|A - B\| + \|A\|$, es decir que $\|B\| \leq \|A - B\| + \|A\|$, de donde se obtiene

$$-\|A - B\| \leq \|A\| - \|B\| .$$

De $\|A\| - \|B\| \leq \|A - B\|$ y $-\|A - B\| \leq \|A\| - \|B\|$ se sigue que:

$$-\|A - B\| \leq \|A\| - \|B\| \leq \|A - B\| \Leftrightarrow |\|A\| - \|B\|| \leq \|A - B\| .$$

Vectores Ortogonales

Definición 4.56 *Sean A y $B \in \mathbb{R}^2$. Se dice que los vectores A y B son ortogonales y se nota $A \perp B$ si y solamente si su producto escalar es nulo. Es decir que*

$$A \perp B \Leftrightarrow A \cdot B = 0.$$

Observaciones

1. De acuerdo a la definición de vectores ortogonales se sigue que el vector nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$ es ortogonal a todo vector.

2. Si consideramos los vectores geométricos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ asociados con los elementos A y B de $\mathbb{R}^2$, se tiene que si A y B son ortogonales y no nulos los dos, entonces, dichos vectores forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes.

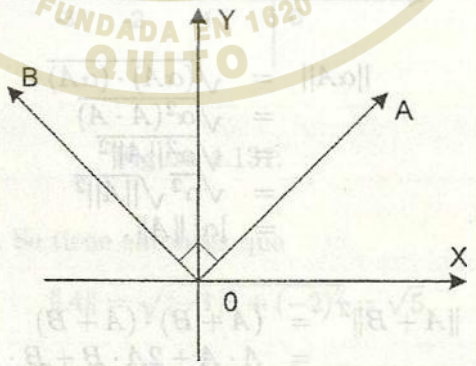


Figura 4.132:

Sistema de Referencia

Definición 4.57 *La terna $(\mathbf{0}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, donde $\mathbf{0}$ es punto del plano y $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ dos vectores no colineales, es un sistema de referencia del plano.*

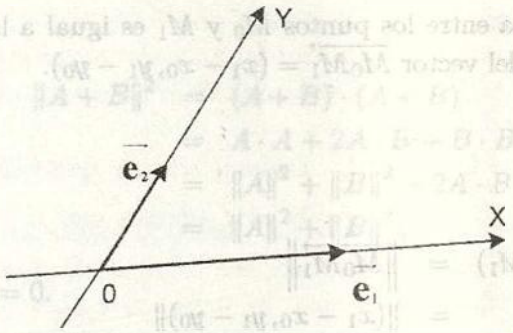


Figura 4.133:

Sistema de referencia ortogonal.- Se dice que un sistema de referencia $(0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ es ortonormal cuando los vectores $\vec{e_1}$, $\vec{2_2}$ son unitarios y ortogonales, es decir:

1. $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1$
2. $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 0$.

En adelante utilizaremos únicamente sistemas de referencia ortogonales y de preferencia los ortonormales. Concretamente, utilizaremos como sistema de referencia del plano a $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, donde 0 es el origen del plano u origen de coordenadas e $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Además, dado un punto cualquiera $P = (x, y)$ del plano en el cual consideramos el sistema de referencia $(\mathbf{0}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ diremos que x e y son las coordenadas del vector P con respecto a la base conónica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$. Es decir que:

$$P = (x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

lo cual escribimos también:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

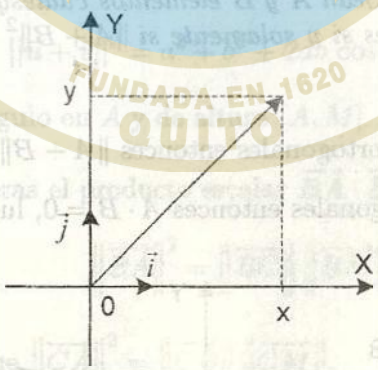


Figura 4.134:

Distancia entre dos puntos.

Teorema 4.26 *Sean M_0 y M_1 dos puntos de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) respectivamente en un sistema de referencia ortonormal $(\mathbf{0}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La distancia entre los puntos M_0 y M_1 está dada por*

$$d(M_0, M_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Demostración.- La distancia entre los puntos M_0 y M_1 es igual a la norma del vector geométrico $\overrightarrow{M_0M_1}$; es decir, la norma del vector $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$.

Luego,

$$\begin{aligned} d(M_0, M_1) &= \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \right\| \\ &= \|(x_1 - x_0, y_1 - y_0)\| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_0, y_1 - y - 0) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0)} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \end{aligned}$$

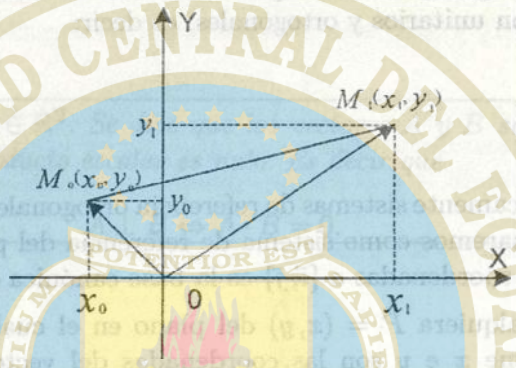


Figura 4.135:

Teorema 4.27 (de Pitágoras) *Sean A y B elementos cualesquiera del espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$. Los vectores A y B son ortogonales si y solamente si $\|A + B\|^2 = \|A\| + \|B\|^2$.*

$\Rightarrow$) Probemos que si A y B son ortogonales entonces $\|A + B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2$.

En efecto, si A y B son ortogonales entonces $A \cdot B = 0$, luego:

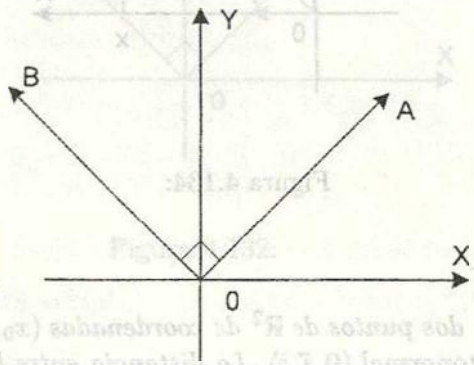


Figura 4.136:

$$\begin{aligned} \|A+B\|^2 &= (A+B)\cdot(A+B) \\ &= A\cdot A + 2A\cdot B + B\cdot B \\ &= \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A\cdot B \\ &= \|A\|^2 + \|B\|^2, \end{aligned}$$

pues por hipótesis $A \cdot B = 0$.

$\Leftarrow$ Veamos que: $||A+B||^2 = ||A||^2 + ||B||^2 \Rightarrow A \perp B$.

En efecto: como $||A+B||^2 = ||A||^2 + ||B||^2 + 2A\cdot B$, por hipótesis se tiene que

$$||A||^2 + ||B||^2 + 2A\cdot B = ||A||^2 + ||B||^2$$

de donde se sigue que $A \cdot B = 0$, lo que implica a su vez que $A \perp B$.

Ejercicios

1. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$.

   a) Demostrar que $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v}$

   b) Calcular $||\vec{u}-\vec{v}||^2$

   c) Deducir que $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$.

   Aplicación dado un paralelogramo $ABCD$. Demostrar que:

$$||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{BD}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{BC}||^2 + ||\overrightarrow{CD}||^2 + ||\overrightarrow{DA}||^2.$$

2. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos de normas respectivas a y b y de ángulo α radianes. Demostrar que:

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

3. Sea un triángulo ABC rectángulo en A y de altura $[A, M]$.

   a) Expresando de dos maneras el producto escalar $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$, demostrar que

$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \left\|\overrightarrow{BM}\right\|$$

   b) Demostrar igualmente que $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \left\|\overrightarrow{CM}\right\|$.

   c) Deducir de a) y b) el teorema de Pitágoras: $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2$.

4. Dado un triángulo ABC y sus alturas $[B, B']$ y $[C, C']$. Demostrar que:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \left\|\overrightarrow{AB'}\right\|.$$

5. Determinar el real x, de manera que:

   a) $(x\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 13$,

b) $(x\vec{u}+\vec{v})^2 = 34$, de donde $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$

6. Demostrar que:

a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$. Deducir además que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow (\vec{u}+\vec{v}) \perp (\vec{u}-\vec{v})$.

b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}$. Deducir además que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y solo si $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$.

4.10.2. Funciones Trignométricas

El círculo trigonométrico y medidas de ángulos

En el plano consideraremos el sistema de referencia $(\mathbf{0}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, de tal manera que:

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \frac{\pi}{2} \text{ (radianes)}$$

El círculo trigonométrico $\mathcal{C}$ es el círculo de centro el origen de coordenadas y de radio 1, orientado en sentido directo (es decir en sentido contrario a la rotación de las manecillas del reloj).

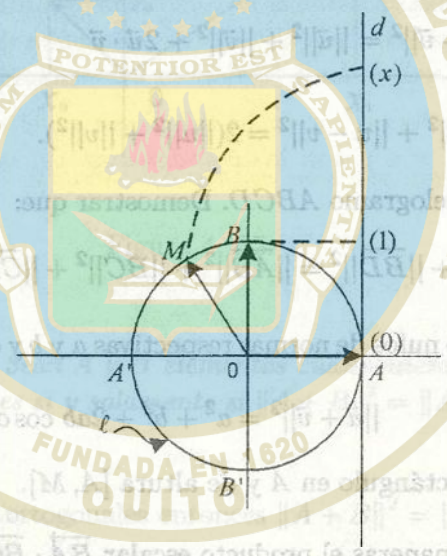


Figura 4.137:

El punto A lo tomaremos como origen sobre el círculo C y al conjunto de los números reales lo representaremos sobre la recta d, de sistema de referencia $(A, \overrightarrow{OB})$. Dicha recta la enrollamos sobre el círculo trigonométrico C y mediante dicho enrrollamiento los puntos de la recta d de abscisas $\frac{\pi}{2}$, π, $-\frac{\pi}{2}$ y $-\pi$ tienen por imágenes en el círculo trigonométrico los puntos B, A', B' y A' respectivamente.

El enrollamiento constituye una función:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\to \mathcal{C} \\ x &\mapsto M. \end{aligned}$$

Una vuelta completa corresponde a 2π.

A todo número real x se asocia un punto único M del círculo trigonométrico C. Si M es la imagen de x; es decir, si $\psi(x) = M$, el conjunto de antecedentes de M es el conjunto de todos los números reales de la forma: $x + 2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$; es decir que: $\psi(x + 2k\pi) = \psi(x) = M$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Observaciones.-

1. Sean x y $-x$ dos números reales opuestos. Ellos corresponden a dos puntos de la recta d simétricos con respecto a A. Si M y M' son sus imágenes sobre el círculo C por ψ respectivamente; es decir si, $\psi(x) = M$ y $\psi(-x) = M'$, entonces M y M' son simétricos con respecto a la recta OA.

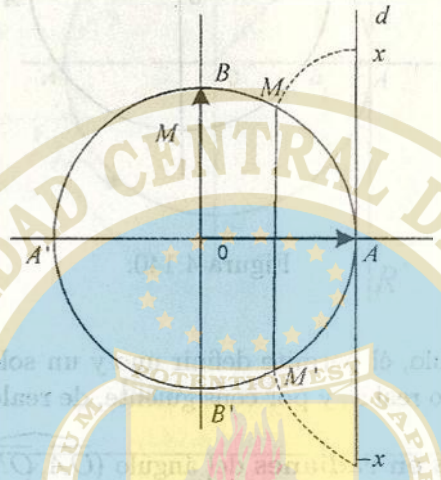


Figura 4.138:

2. Sea x un número real y sean $M = \psi(x)$, $M' = \psi(\pi - x)$. Se tiene que M y M' son simétricos con respecto a la recta $\overrightarrow{OB}$ puesto que:

$$\frac{x + (\pi - x)}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ y } \psi(\frac{\pi}{2}) = B.$$

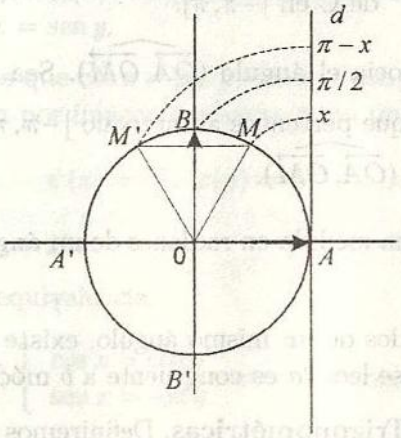


Figura 4.139:

Medida de ángulos.- Hemos visto que a todo número real x se asocia un punto M de C y por tanto, un ángulo $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$. Dicho punto M es también la imagen por ψ de todos los números reales de la forma $x + 2k\pi$, donde $k \in \mathbb{Z}$, que son también asociados al mismo ángulo $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$.

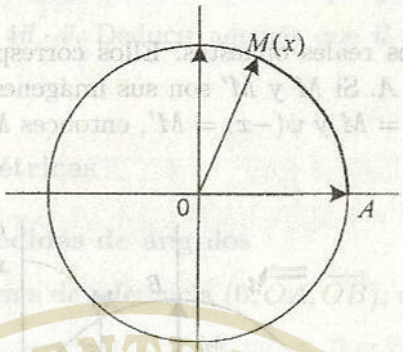


Figura 4.140:

Recíprocamente, dado un ángulo, él permite definir uno y un solo punto M de C, dicho punto M de C es la imagen de un número real x, y por consiguiente, de reales de la forma $x+2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Se llama conjunto de **medidas en radianes** del ángulo $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ el conjunto de números reales $\{x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Todo elemento del conjunto de medidas en radianes de este ángulo es una medida en radianes de ese ángulo.

Observación.- Si x_0 y x_1 son dos medidas en radianes de un mismo ángulo, existe un elemento $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0 = x_1 + 2k\pi$, lo cual se notará $x_0 \equiv x_1[2\pi]$, que se lee: "x_0 es congruente a x_1 módulo 2π".

Una biyección.- Sea $\overline{\psi}$ la restricción de ψ al intervalo $]-\pi, \pi]$. Es claro que $\psi([-\pi, \pi]) = C$; es decir que la imagen directa de $]-\pi, \pi]$ es el círculo trigonométrico. Pero por $\overline{\psi}$, todo punto M de C tiene un único antecedente en $]-\pi, \pi]$. La función $\overline{\psi}$ es una biyección de $]-\pi, \pi]$ en C y se puede definir la biyección recíproca ψ^{-1} de C en $]-\pi, \pi]$.

Sea M un punto de C, se le asocia el ángulo $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$. Sea $x = \psi^{-1}(M)$; x es la medida del ángulo $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ y es la única que pertenece al intervalo $]-\pi, \pi]$, denominándose además medida principal en radianes del ángulo $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$.

Medida en Grados.- Si x es una medida en radianes de un ángulo, entonces $\dfrac{360}{2\pi}x$ es una medida en grados de este ángulo.

Si a y b son dos medidas en grados de un mismo ángulo, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + k \cdot 360$ o lo que es lo mismo $a \equiv b[360]$, que se lee: "a es congruente a b módulo 360°".

Definición de las Funciones Trigonométricas. Definiremos un conjunto de funciones denominadas funciones trigonométricas. Seis son tales funciones cuyas denominaciones son: seno, coseno, tangente, cotagente, secante, cosecante y cuyas notaciones son: sen, cos, tan, cot, sec, csc, respectivamente.

Hemos visto que a cada número real x se le asocia uno y solo un punto M del círculo trigonométrico C, es decir, $\Psi(x) = M$; tal número real x es la medida en radianes del ángulo $(\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$.

Pongamos $M = (a, b)$, entonces los números reales a y b son las coordenadas de M respecto de la base $\{i, j\}$, es decir, $M = a\vec{i} + b\vec{j}$.

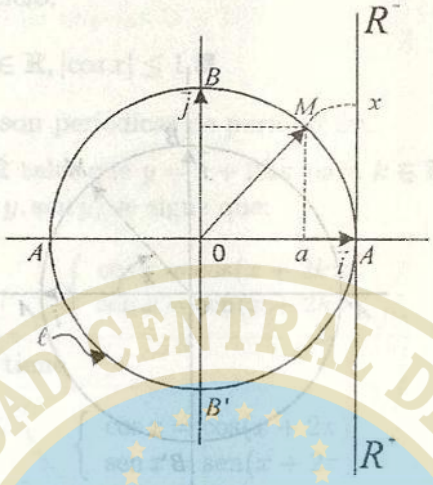


Figura 4.141:

Definición 4.58 *Definimos el seno y el coseno del número real x, medida del ángulo $(\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$, mediante:*

$$\begin{cases} \cos x = a \\ \operatorname{sen} x = b \end{cases}$$

es decir, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ son las coordenadas del vector M respecto a la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

De la definición se sigue que M puede escribirse como

$$M = (\cos x, \operatorname{sen} x).$$

Puesto que M es imagen de los números reales de la forma $x + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, esto es, $\Psi(x + 2k\pi) = M$ entonces, si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $\Psi(x) = \Psi(y)$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y + 2k\pi$ y $\cos y = a$, $\operatorname{sen} y = b$ o bien $\cos x = \cos y$, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y$.

Recíprocamente, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\cos x = \cos y$, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y$; entonces $M = (\cos x, \operatorname{sen} x) = (\cos y, \operatorname{sen} y)$ con lo cual x, y tienen por imagen mediante ψ un único punto $M \in C$ esto es,

$$\psi(x) = M,\ \psi(y) = M$$

entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = y + 2k\pi$.

Es decir que hemos establecido la equivalencia:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \cos x = \cos y \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv y \text{ (módulo } 2\pi),$$

donde $x \equiv y$ (módulo 2π) se lee "x es congruente a y módulo 2π".

Además:

$$x \equiv y \text{ (módulo } 2\pi) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x - y = 2k\pi.$$

Observación. En lo sucesivo, el ángulo $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ indicaremos con un arco que parte del vector $\vec{\imath}$ hasta el vector $\overrightarrow{OM}$; el número real x junto al arco indica la medida del ángulo $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$. (vea la figura siguiente)

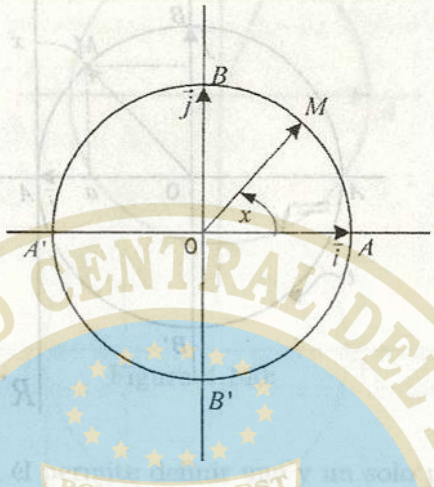


Figura 4.142:

Debemos tener cuidado en no confundir x con el ángulo $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

Definición 4.59 .

1. *La función seno es una función de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *que a cada* $x \in \mathbb{R}$ *le asocia el número real* $\operatorname{sen} x$*, esto es,*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

2. *La función coseno es una función de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *que a cada* $x \in \mathbb{R}$ *le asocia el número real* $\cos x$*, es decir,*

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x. \end{aligned}$$

Observación. sen y cos designan a las funciones seno y coseno mientras que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son los números reales que designan los valores que toman las funciones seno y coseno en $x \in \mathbb{R}$.

Propiedades de las Funciones Seno y Coseno.

1. .

   a) $\operatorname{Rec}(\text{sen}) = [-1, 1]$

   b) $\operatorname{Rec}(\cos) = [-1, 1]$

   Demostración.-

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exists! M \in C$ tal que $\psi(x) = M$ con lo cual $M = (\cos x, \operatorname{sen} x) = (a, b)$.
Como $|b| \leq \|M\| = 1$, entonces $|b| \leq 1$ o bien $-1 \leq b \leq 1$ y siendo $b = \operatorname{sen} x$, resulta que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ que es lo mismo que $\operatorname{sen} x \in [-1, 1]$ y esto a la vez equivale a decir que $\operatorname{Rec}(\operatorname{sen}) = [-1, 1]$.
Observación.- Como $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ se tiene que: $\forall x \in \mathbb{R}, |\operatorname{sen} x| \leq 1$.

b) Proponemos como ejercicio.

Igualmente, se tiene que $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| \leq 1$.■

2. Las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π.

Demostración.- Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y = x + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\psi(x) = \psi(y) = M$. De $M = (\cos x, \operatorname{sen} x) = (\cos y, \operatorname{sen} y)$ se sigue que:

$$\begin{cases} \cos x = \cos(x + 2k\pi) \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2k\pi). \end{cases}$$

En particular, para $k = 1$ se tiene

$$\begin{cases} \cos x = \cos(x + 2\pi) \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi). \end{cases}$$

3. La función seno es impar y la función coseno es par.

Demostración.- Para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exists!\ M \in C$ tal que $M = (\cos x, \operatorname{sen} x) = (a, -b)$. Sea $M' = (a, b)$ entonces M' es imagen de números de la forma $-x + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}^-$ con lo cual: $M' = (a, b) = (\cos(-x + 2k\pi), \operatorname{sen}(-x + 2k\pi))$ y en virtud de la periodicidad de sen y cos resulta que

$$\begin{aligned} M' &= (\cos(-x), \operatorname{sen}(-x)) \\ &= (a, -b) \\ &= (\cos x, -\operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

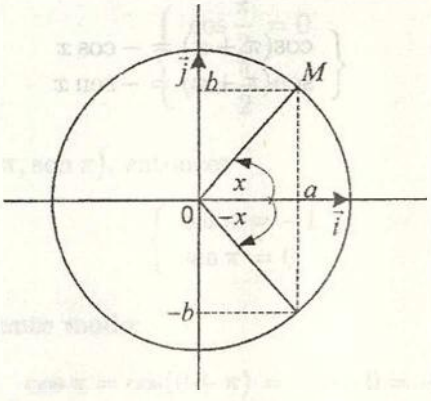


Figura 4.143:

4. Para cada $x \in \mathbb{R}$, se verifica que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

   Demostración.- En efecto, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\exists! M \in C$ tal que $\psi(x) = M$, entonces $M = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ y $\|M\|^2 = 1$ con lo cual $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ que es lo mismo que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

5. Para cada $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ y $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x$

   Demostración.- Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $\exists! M \in C$ tal que $\psi(x) = M$. Pongamos $M = (a, b) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$

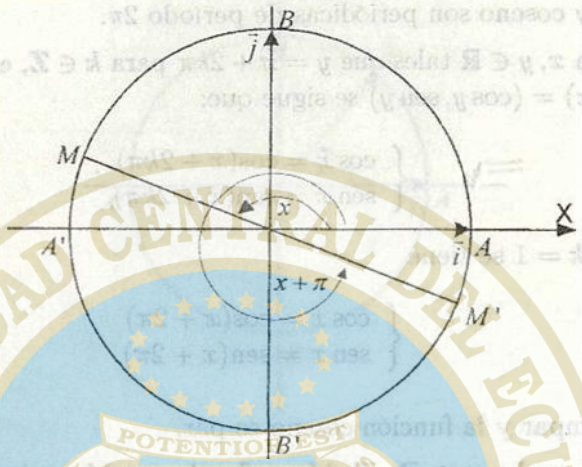


Figura 4.144:

El punto $M' \in C$ es imagen de $\pi + x$ y $M' = (\cos(\pi + x), \operatorname{sen}(\pi + x))$.

Como el ángulo $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ tiene por medida π, pues $(x + \pi) - x = \pi$, entonces M y M' son puntos simétricos respecto al origen, esto es,

$$\begin{aligned} M' &= (-a, -b) \\ &= (-\cos x, -\operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

Luego $M' = (-\cos x, -\operatorname{sen} x) = (\cos(\pi + x), \operatorname{sen}(\pi + x))$, de donde:

$$\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \operatorname{sen}(\pi + x) = -\operatorname{sen} x \end{cases}$$

6. Para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

   a) $\cos(\pi - x) = -\cos x$

   b) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

   Demostración.-

   a) Probaremos que $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1826
QUITO

Aplicando la periodicidad y la paridad de la función coseno, tenemos:

$$\begin{aligned} -\cos x &= \cos(\pi + x) \\ &= \cos[2\pi + x - \pi] \\ &= \cos[(x - \pi) + 2\pi] \\ &= \cos[(x - \pi)] \\ &= \cos[-(\pi - x)] \\ &= \cos(\pi - x). \end{aligned}$$

Luego $\cos(\pi - x) = -\cos x$

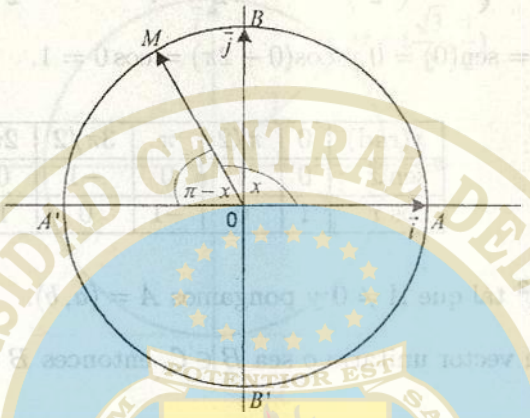


Figura 4.145:

b) La demostración de la propiedad $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ se deja como ejercicio para el lector. ■

Valores de las Funciones Seno y Coseno en $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

1. Puesto que $\vec{\imath} = (1,0)$ y $\psi(0) = A$, entonces $A = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1,0)$ o sea $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$.
2. Como $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = B = (0,1) = \left(\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, entonces
$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$
3. $\psi(\pi) = A' = (-1,0) = (\cos\pi, \operatorname{sen}\pi)$, entonces
$$\begin{cases} \cos\pi = -1 \\ \operatorname{sen}\pi = 0 \end{cases}$$

Podemos proceder del siguiente modo:

$$\cos\pi = \cos(0 + \pi) = -\cos 0 = -1$$

$$\operatorname{sen}\pi = \operatorname{sen}(0 + \pi) = -\operatorname{sen} 0 = 0$$

ya que $\cos(x + \pi) = -\cos x$ y $\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$.

4. $\psi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B' = (0,-1) = \left(\cos\frac{3\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$, luego:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{3\pi}{2} = 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

También:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{3\pi}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right) = -\cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi\right) = -\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

5. Se tiene $\operatorname{sen}(0+2\pi) = \operatorname{sen}(0) = 0$ y $\cos(0+2\pi) = \cos 0 = 1$.

Resumen:

x(rad)	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\operatorname{sen} x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

Observación.- Sea $A \in \mathbb{R}^2$ tal que $A \neq \mathbf{0}$ y pongamos $A = (a,b)$.

El vector $B = \dfrac{1}{\|A\|}A$ es un vector unitario o sea $B \in \mathcal{C}$, entonces $B = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ y como

$$B = \frac{1}{\|A\|}A = \frac{1}{\|A\|}(a,b) = \left(\frac{a}{\|A\|}, \frac{b}{\|A\|}\right),$$

se sigue que:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{a}{\|A\|} \\ \operatorname{sen} x = \dfrac{b}{\|A\|}. \end{cases}$$

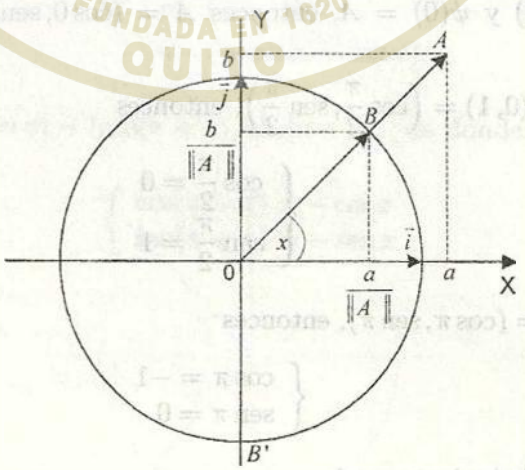


Figura 4.146:

Valores de las Funciones Seno y Coseno en $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$

1. Como $\psi\left(\frac{\pi}{6}\right) = M = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, entonces

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

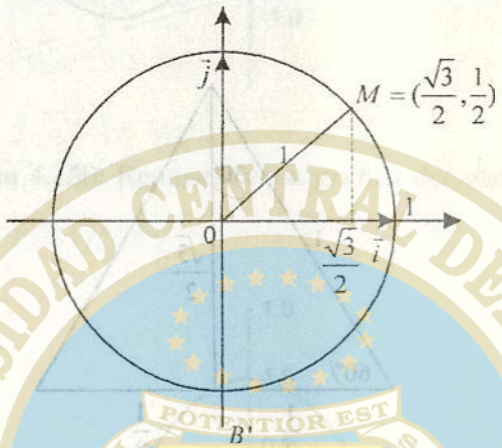


Figura 4.147:

2. Como $\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, se sigue que

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

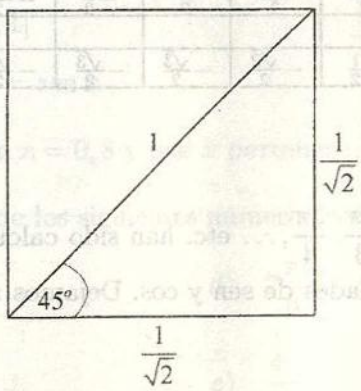


Figura 4.148:

3. Como $\psi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, se sigue:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

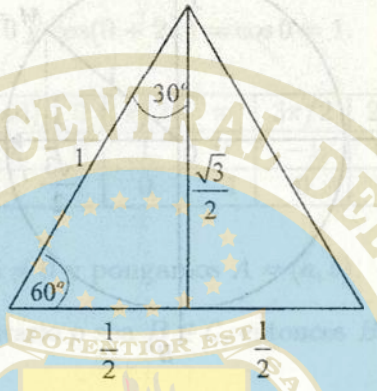


Figura 4.149:

Resumen:

x(rad)	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$
x(grad)	30°	45°	60°	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
$\operatorname{sen} x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Los valores de sen y cos en $x = \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4}, \ldots$ etc. han sido calculados utilizando los valores de sen y cos en $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}$ y las propiedades de sen y cos. Dejamos al estudiante la verificación de esos resultados.

Gráficas de las Funciones Seno y Coseno. Como hemos dicho, las funciones sen y cos son funciones periódicas, por tanto basta construir sus gráficas en el intervalo $[0, 2\pi]$ ayudándonos de los valores ya calculados.

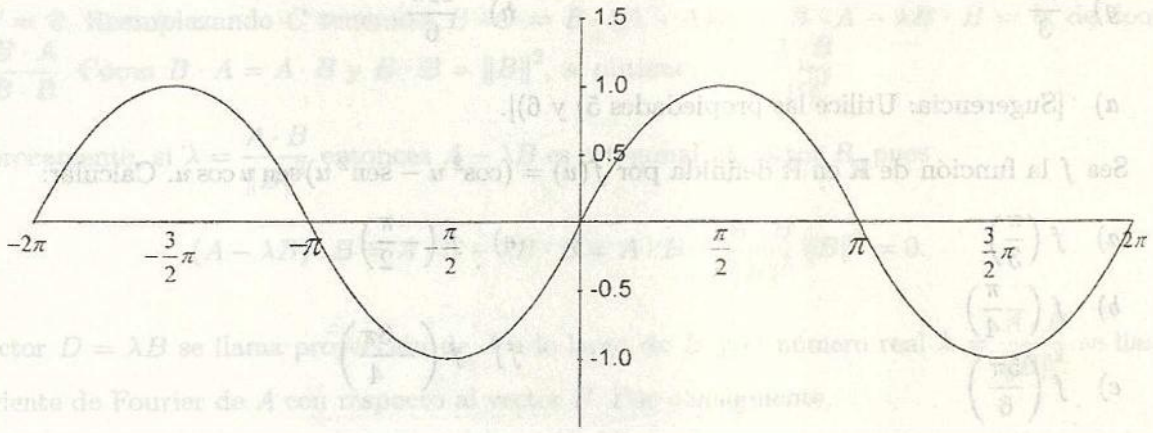


Figura 4.150: Representación gráfica del seno

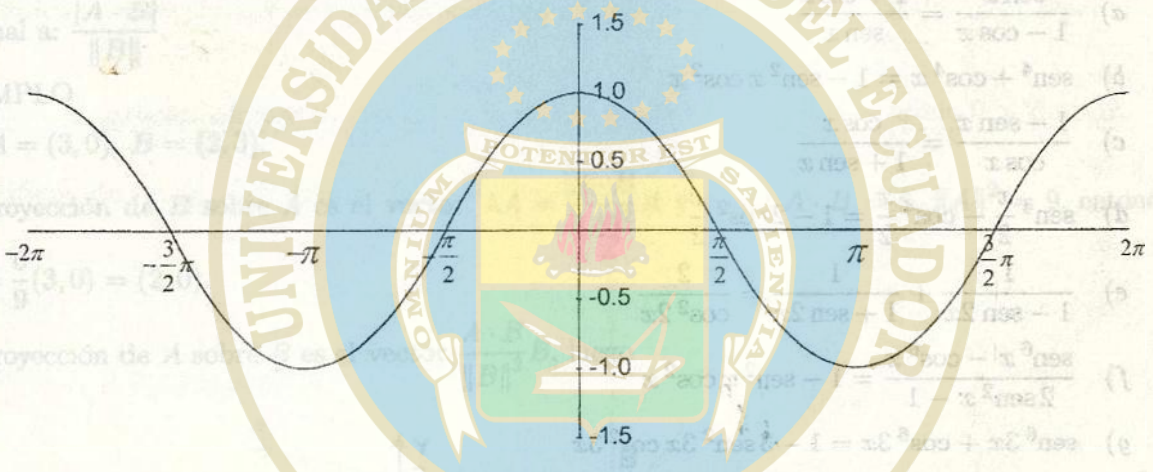


Figura 4.151: Representación gráfica del coseno

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIAE EST SAPIENTIA
QUITO

Ejercicios

1. Demostrar que $\text{Rec}(\cos) = [-1, 1]$
2. Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\, x$
3. Calcular $\cos x$, sabiendo que $\text{sen}\, x = 0,8$ y que x pertenece a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. Hallar los valores de sen y cos de los siguientes números reales:

   a) $\frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$

   b) $\frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$

   c) $\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$

   d) $7\frac{\pi}{6}$

   e) $\frac{4\pi}{3}$

   f) $\frac{5\pi}{4}$

g) $\frac{5\pi}{3}$ h) $\frac{11\pi}{6}$

a) [Sugerencia: Utilice las propiedades 5) y 6)].

5. Sea f la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(u) = (\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u)\operatorname{sen} u \cos u$. Calcular:

a) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

b) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ f) $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

d) $f\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$ g) $f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

6. Verifique las siguientes igualdades e indique para qué valores $x \in \mathbb{R}$, la igualdad tiene sentido.

a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

b) $\operatorname{sen}^4 + \cos^4 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

c) $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$

d) $\operatorname{sen}^4 \dfrac{x}{2} - \cos^4 \dfrac{x}{2} = 1 - 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$

e) $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen} 2x} + \dfrac{1}{1+\operatorname{sen} 2x} = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}^6 x - \cos^6 x}{2\operatorname{sen}^2 x - 1} = 1 - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

g) $\operatorname{sen}^6 3x + \cos^6 3x = 1 - 3\operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x$

Proyección de un vector A sobre un vector B.- Sean $A, B \in \mathbb{R}^2$, no nulos, la proyección de A sobre B es el vector λB con $\lambda \in \mathbb{R}$ a determinarse.

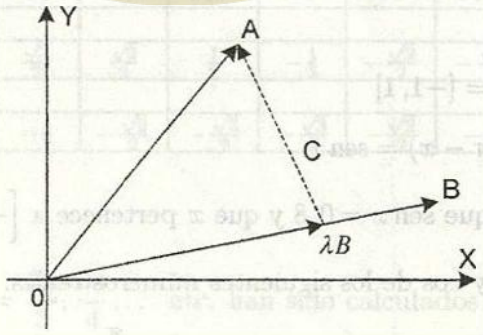


Figura 4.152:

Probaremos primeramente que existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A - \lambda B$ es perpendicular al vector B. Puesto que $\lambda B + C = A$ entonces $C = A - \lambda B$, donde C es ortogonal al vector B; es decir,

$B \cdot C = 0$. Reemplazando C tenemos: $B \cdot C = B \cdot (A - \lambda B) = B \cdot A - \lambda B \cdot B = 0$, de donde $\lambda = \dfrac{B \cdot A}{B \cdot B}$. Como $B \cdot A = A \cdot B$ y $B \cdot B = \|B\|^2$, se obtiene: $\lambda = \dfrac{A \cdot B}{\|B\|^2}$.

Recíprocamente, si $\lambda = \dfrac{A \cdot B}{\|B\|^2}$ entonces $A - \lambda B$ es ortogonal al vector B, pues

$$(A - \lambda B) \cdot B = A \cdot B - \lambda B \cdot B = A \cdot B - \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} \|B\|^2 = 0.$$

El vector $D = \lambda B$ se llama proyección de A a lo largo de B y el número real $\lambda = \dfrac{A \cdot B}{\|B\|^2}$ se llama coeficiente de Fourier de A con respecto al vector B. Por consiguiente,

$$D = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B.$$

Es decir que la proyección de B a lo largo de A es el vector $\dfrac{A \cdot B}{\|A\|^2} A$. La norma del vector proyección es igual a: $\dfrac{|A \cdot B|}{\|B\|}$.

EJEMPLO

Sea $A = (3, 0)$, $B = (2, 3)$.

La proyección de B sobre A es el vector. $\lambda A = \dfrac{A \cdot B}{\|A\|^2} A$ y como $A \cdot B = 6$, $\|A\|^2 = 9$, entonces $\lambda A = \dfrac{6}{9}(3, 0) = (2, 0)$.

La proyección de A sobre B es el vector $\dfrac{A \cdot B}{\|B\|^2} B$, luego

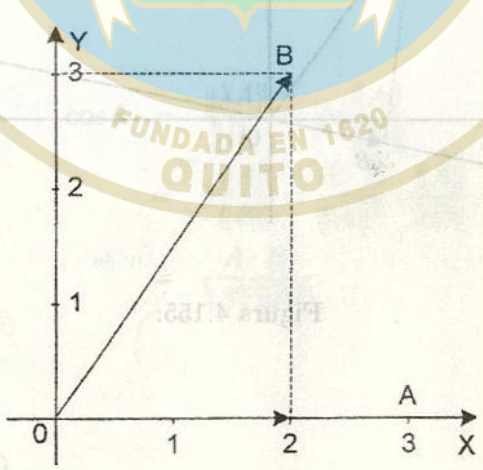


Figura 4.153:

$$\frac{A \cdot B}{\|B\|^2} B = \frac{6}{13}(2, 3) = \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right).$$

Observación. Sean A, $B \in \mathbb{R}^2$ no nulos, consideremos la proyección de A sobre B.

1. Si $A \cdot B > 0$, entonces $\lambda = \dfrac{A \cdot B}{\|B\|^2} > 0$, con lo cual B y λB tienen la misma dirección y sentido.

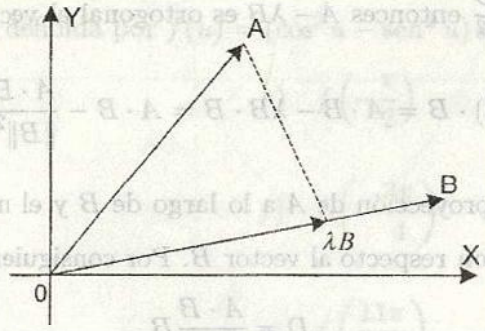


Figura 4.154:

2. Si $A \cdot B < 0$ entonces $\lambda = \dfrac{A \cdot B}{\|B\|^2} < 0$ con lo cual B y λB son de sentido opuesto.

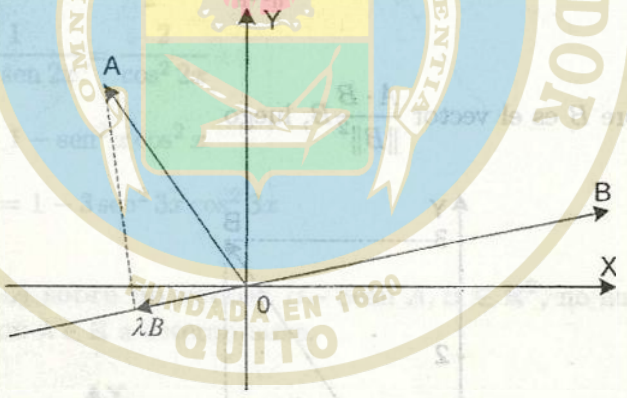


Figura 4.155:

Coseno de $x - y$.

Sean A, $B \in \mathbb{R}^2$ no nulos.

Los vectores $P = \dfrac{1}{\|A\|}A$, $Q = \dfrac{1}{\|B\|}B$ son vectores unitarios y por tanto pertenecen a C. Sea θ la medida en radianes del menor ángulo que forman los vectores P y Q.

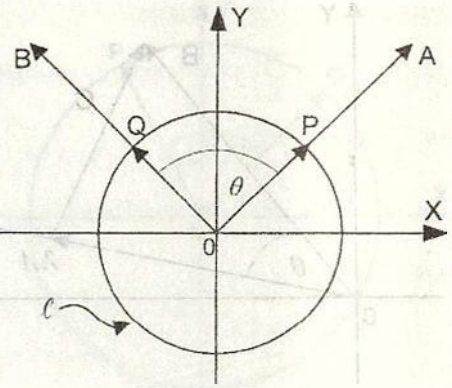


Figura 4.156:

Definición 4.60 *Se define el coseno del ángulo θ que forman los vectores P, Q mediante*

$$\cos\theta = P \cdot Q = \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|}. \tag{4.13}$$

Justificación de la definición.- Sean A, $B \in \mathbb{R}^2$ no nulos

a) Si $A \cdot B \geq 0$ entonces $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\|\lambda A\|}{\|B\|} = |\lambda|\frac{\|A\|}{\|B\|} \\ &= \lambda\frac{\|A\|}{\|B\|} = \frac{A \cdot B}{\|A\|^2} \cdot \frac{\|A\|}{\|B\|} \\ &= \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|}.\end{aligned}$$

b) Si $A \cdot B < 0$, entonces $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \frac{\|\lambda A\|}{\|B\|} = |\lambda|\frac{\|A\|}{\|B\|} \\ &= -\lambda\frac{\|A\|}{\|B\|} \\ &= -\frac{A \cdot B}{\|A\|^2} \cdot \frac{\|A\|}{\|B\|} = -\frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|}\end{aligned}$$

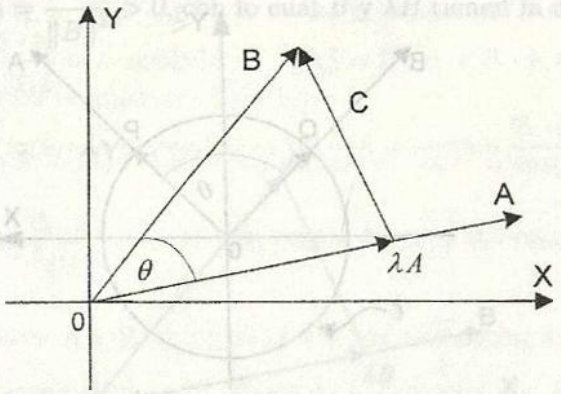


Figura 4.157:

Es decir:

$$\cos\psi = -\frac{A \cdot B}{||A||||B||}$$

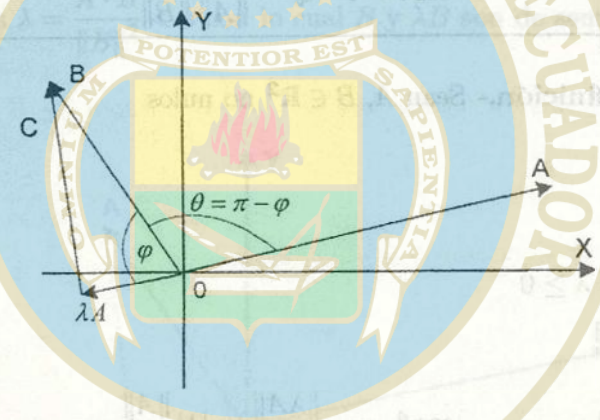


Figura 4.158:

Puesto que $\cos(\pi - \psi) = -\cos\psi$ y $\pi - \psi = \theta$, entonces

$$\cos\theta = -\left(-\frac{A \cdot B}{||A||||B||}\right) = \frac{A \cdot B}{||A||||B||}$$

De a) y b) se sigue que:

$$\cos\theta = \frac{A \cdot B}{||A||||B||} = \frac{A}{||A||} \cdot \frac{B}{||B||} = P \cdot Q.$$

Apliquemos (4.13) para el cálculo de $\cos(x - y)$. Sean x, $y \in \mathbb{R}$, entonces existen P, $Q \in \mathcal{C}$ tales que $P = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, $Q = (\cos y, \operatorname{sen} y)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= P \cdot Q \\ &= \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

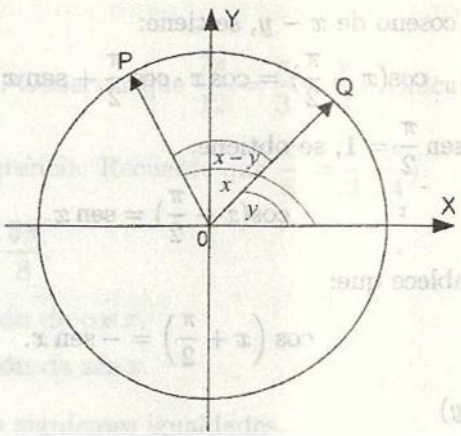


Figura 4.159:

Luego:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Coseno de $x+y$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos[x-(-y)] \\ &= \cos x \cos(-y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y). \end{aligned}$$

Dado que $\cos(-y) = \cos y$, $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$, resulta que:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

Coseno del ángulo doble. Haciendo $x = y$, en $\cos(x+y) = \cos\cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ se obtiene: $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$. Además, de la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ se sigue:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x - 1. \end{aligned}$$

O también:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \\ \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}. \end{aligned}$$

Coseno de $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ y de $\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

a) Aplicando la fórmula del coseno de $x - y$, se tiene:

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}.$$

Puesto que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, se obtiene:

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} x.$$

b) De manera similar se establece que:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x.$$

Seno de $(x+y)$ y de $(x-y)$

a) Puesto que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; podemos concluir que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos\left[\frac{\pi}{2} - (x+y)\right] = \operatorname{sen}(x+y)$. y puesto que:

$$\begin{aligned}\cos\left[\frac{\pi}{2}(-x+y)\right] &= \cos\left[(\frac{\pi}{2} - x) - y\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{sen} y\end{aligned}$$

y tomando en cuenta que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ resulta que

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (x+y)\right] = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$$

de donde:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x.$$

b) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x-y) &= \operatorname{sen}[x + (-y)] \\ &= \operatorname{sen} x \cos(-y) + \operatorname{sen}(-y)\cos x \\ &= \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x.\end{aligned}$$

Luego:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$$

Seno de $\frac{\pi}{2} + x$ y seno de $2x$.

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos x + \operatorname{sen} x \cos\frac{\pi}{2}$. Siendo $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ se obtiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x.$$

b) Aplicando la fórmula para el seno de $x + y$, tenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x &= \operatorname{sen}(x+x) \\ &= \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x.\end{aligned}$$

Consecuentemente:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Ejercicios

1. Calcular $\cos\dfrac{7\pi}{12}$. (Sugerencia: Observar que $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$). Calcular además $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

2. Calcular $\cos\dfrac{\pi}{8}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}$ (Sugerencia: Recuerde que $\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}$).

3. Calcular: $\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}$; $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$; $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{8}$.

4. *a)* Calcular $\cos 3x$ en función de $\cos x$.
   b) Calcular $\operatorname{sen} 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$.

5. Para todo $x \in \mathbb{R}$, verificar las siguientes igualdades.

   a) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x\right)$

   b) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

   c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \cos x$

   d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2}\operatorname{sen} x$

   e) $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x)$

   f) $\operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x)$

   g) $\cos 3x \cos 2x + \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x = \cos x$

   h) $\cos x \cos\dfrac{1}{2}x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{2}x = \cos\dfrac{3}{2}x$

   i) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{3}x\right)\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right) + \cos\left(\dfrac{2}{3}x\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{3}x\right) = \operatorname{sen} x$

   j) $\operatorname{sen} 3x \cos 2x - \operatorname{sen} 2x \cos 3x = \operatorname{sen} x$

6. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, verificar las siguientes fórmulas:

   a) $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$
   $\cos(x+y)\cos(x-y) = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$
   $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x + \cos^2 y - 1$

   b) $\operatorname{sen}(x+y)\cos(x-y) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y)$

   c) $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

   d) $\operatorname{sen}(x+y)\cos(y-x) = \cos^2 x - \cos^2 y$

7. Sean x, y, $z \in \mathbb{R}$. Hallar fórmulas para el cálculo de $\operatorname{sen}(x+y+z)$, $\cos(x+y+z)$, $\operatorname{sen} 3x$, $\cos 3x$.

8. Simplificar las expresiones siguientes:

   a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \cos(\pi - x)$

   b) $\operatorname{sen}(\pi + x) + \operatorname{sen}(\pi - x)$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

c) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

d) $\operatorname{sen}(x+5\pi)+\cos(x-5\pi)+\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$.

9. En cada caso, hallar todos los $x\in\mathbb{R}$ para los que la igualdad es cierta.

a) $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $|\cos x|=\frac{1}{2}$

c) $\operatorname{sen}\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos 2x=\frac{1}{2}$

e) $\operatorname{sen}^2 x=1$

f) $\cos 3x=\frac{3}{4}$.

10. Verificar las igualdades siguientes:

a) $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x=(1+2\cos x)\operatorname{sen} 2x$

b) $\operatorname{sen}^6 t+\cos^6 t=1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2t$

c) $\cos^4 u-\operatorname{sen}^4 u=\cos 2u$

d) $\operatorname{sen}^4 a+\cos^4 a=1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2a$

e) $\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x=\cos^2 x-\cos^2 2x$
$\cos 3x\cos x=\cos^2 2x-\operatorname{sen}^2 x$

f) $\cos b+\cos 2b+\cos 3b=(1+2\cos b)\cos 2b$.

4.10.3. Las funciones tangente y cotangente

Definición 4.61 .

1. *Se llama función tangente a la función real definida por*

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},\ \textit{con}\ \cos x\neq 0$$

2. *Se llama función cotangente a la función real definida por*

$$\cot x=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},\ \textit{con}\ \operatorname{sen} x\neq 0$$

Es claro que $\tan x$ no está definida si $\cos x=0$ así mismo, $\cot x$ no está definida si $\operatorname{sen} x=0$. Puesto que:

$$\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$
$$\operatorname{sen} x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\ \forall k\in\mathbb{Z}$$

entonces:

1. $\operatorname{Dom}(\tan)=\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$.

2. $\operatorname{Dom}(\cot)=\mathbb{R}-\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$.

Note que tan y cot designan a las funciones tangente y cotagente y $\tan x$ y $\cot x$ a los valores de tangente y cotangente en x, respectivamente.

4.10.4. Propiedades de las funciones tangente y cotangente.

1. $\text{Rec}(\tan) = \mathbb{R}$, $\text{Rec}(\cot) = \mathbb{R}$

   Demostración.-

   a) Probemos que $\text{Rec}(\tan) = \mathbb{R}$.
   Sea $x \in \text{Dom}(\tan)$. Puesto que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ y $-1 \leq \cos x \leq 1$, entonces

   $$\text{Si } 0 < \cos x \leq 1 \text{ tenemos } 1 \leq \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

   Si $0 \leq \operatorname{sen} x$ entonces $0 \leq \operatorname{sen} x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$, es decir

   $$\tan x \geq 0 \quad (2)$$

   Si $\operatorname{sen} x \leq 0$ entonces $-\operatorname{sen} x \geq 0$ y multiplicando miembro a miembro en (1), tenemos: $0 \leq -\operatorname{sen} x \leq -\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x$, con lo cual $-\tan x \geq 0$ y en consecuencia:

   $$\tan x \leq 0 \quad (3)$$

   Las dos alternativas $-1 \leq \cos x < 0$ y $\operatorname{sen} x \geq 0$, $-1 \leq \cos x < 0$ y $\operatorname{sen} x \leq 0$ conducen a (2) y (3), con lo cual se deduce que $\text{Rec}(\tan) = \mathbb{R}$.

   b) Procediendo como en a) se obtiene que $\text{Rec}(\cot) = \mathbb{R}$.
   En consecuencia:

   $$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \setminus A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \tan x \end{aligned}$$

   donde $A = \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
   Análogamente

   $$\begin{aligned} \cot : \mathbb{R} \setminus B &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \cot x \end{aligned}$$

   donde $B = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

2. **Para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \dfrac{\pi}{2}k$, con $k \in \mathbb{Z}$, se verifica que** $\tan x \cot x = 1$.

   Demostración.- $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \dfrac{\pi}{2}k$, con $k \in \mathbb{Z}$; se tiene

   $$\tan x \cot x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

3. **Las funciones** tan **y** cot **son periódicas de período** π.

   Demostración.- Probemos que $\forall x \in \text{Dom}(\tan)$ y $\forall k \in \mathbb{Z}$,

   $$\tan(x + k\pi) = \tan x.$$

   Puesto que $\forall x \in \text{Dom}(\tan)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x + k\pi \in \text{Dom}(\tan)$ y

   $$\begin{aligned} \tan(x + k\pi) &= \frac{\operatorname{sen}(x + k\pi)}{\cos(x + k\pi)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos k\pi + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} k\pi}{\cos x \cos k\pi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} k\pi}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR · OMNIUM SCIENTIAE SAPIENTIA · FUNDADA EN 1620 · QUITO

Como $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{sen} k\pi = 0$ y $\cos k\pi \neq 0$, entonces

$$\tan(x + k\pi) = \frac{\operatorname{sen} x \cos k\pi}{\cos x \cos k\pi} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x.$$

En particular para $k = 1$, se tiene: $\tan(x + \pi) = \tan x$.

De manera análoga se prueba que $\forall x \in \operatorname{Dom}(\cot)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cot(x + k\pi) = \cot x$.

4. **Las funciones tangente y cotangente son impares.**

Demostración.-

a) $\forall x \in \operatorname{Dom}(\tan)$, tenemos $\cos x \neq 0$ y

$$\tan(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\tan x.$$

b) $\forall x \in \operatorname{Dom}(\cot)$, tenemos que $\operatorname{sen} x \neq 0$, y

$$\cot(-x) = \frac{\cos(-x)}{\operatorname{sen}(-x)} = \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\cot x.$$

5. .

a) Para cada $x \in \operatorname{Dom}(\tan)$, se verifica que:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

b) Para $x \in \operatorname{Dom}(\cot)$, se tiene

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Demostración.-

a) Sea $x \in \operatorname{Dom}(\tan)$, por definición $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, elevando al cuadrado ambos miembros obtenemos $\tan^2 x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$ y como $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ entonces $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, de donde $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

b) De manera análoga se prueba que $\forall x \in \operatorname{Dom}(\cot)$, $1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$, la misma que proponemos como ejercicio.

6. **Tangente de $(x + y)$, de $2x$ y de $(x - y)$**

a) Tangente de $(x + y)$.

Sean $x, y \in \text{Dom}(\tan)$ tales que $x+y \in \text{Dom}(\tan)$ entonces se tiene: $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, $\cos(x+y) \neq 0$ y

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\operatorname{sen} y \cos x}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}} \\
&= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

b) Tangente de $2x$.
Sea $x, y \in \text{Dom}(\tan)$ tales que $x - y \in \text{Dom}(\tan)$. Aplicando la fórmula para calcular $\tan(x+y)$, tenemos:

$$\tan 2x = \tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan x \tan x} = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

c) Tangente de $(x-y)$.
Sean $x, y \in \text{Dom}(\tan)$ tales que $x - y \in \text{Dom}(\tan)$. Entonces:

$$\tan(x-y) = \tan[x + (-y)] = \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)}.$$

Como la función tangente es impar, entonces $\tan(-y) = -\tan y$. Por tanto

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

7. **Se verifican las siguientes fórmulas:** $\forall x \in \text{Dom}(\tan)$,

a) $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

b) $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

Demostración.-

a) Puesto que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ y como $\forall x \in \text{Dom}(\tan)$, $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ resulta que $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$ con lo cual $\dfrac{1}{1 + \tan^2 x} = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$, de donde $\cos 2x = \dfrac{2}{1 + \tan^2 x} - 1$ o lo que es lo mismo

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}.$$

b) De la fórmula $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$ se sigue que $\forall x \in \operatorname{Dom}(\tan)$, $\cos x \neq 0$ y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2\operatorname{sen} x \frac{\cos^2 x}{\cos x} \\ &= 2\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \frac{1}{1+\tan^2 x} \\ &= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}. \end{aligned}$$

Es decir que:

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}.$$

8. **Tangente de:** $(\pi + x)$, $(\pi - x)$, $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

a) Tangente de $(\pi + x)$.
$\forall x \in \operatorname{Dom}(\tan), \forall k \in \mathbb{Z}, \tan(x + k\pi) = \tan x$; en particular para $k = 1$, $\tan(\pi + x) = \tan x$.

b) Tangente de $(\pi - x)$.
$\forall x \in \operatorname{Dom}(\tan)$, $-x \in \operatorname{Dom}(\tan)$ y $\pi - x \in \operatorname{Dom}(\tan)$ de donde

$$\tan(\pi - x) = \tan[\pi + (-x)] = \tan(-x) = -\tan x.$$

Es decir:

$$\tan(\pi - x) = -\tan x.$$

c) Tangente de $\frac{\pi}{2} + x$.
Sea $x \in \operatorname{Dom}(\tan)$ tal que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x \neq k\pi$, entonces $x + \frac{\pi}{2} \in \operatorname{Dom}(\tan)$ Se tiene

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + x)}{\cos(\frac{\pi}{2} + x)} = \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\cot x.$$

Es decir:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x.$$

d) Tangente de $\frac{\pi}{2} - x$.
Se deja como ejercicio para el lector.

Valores de la tangente en $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$

La tangente en los valores antes indicados puede obtenerse facilmente a partir de los valores de seno y coseno en dichos puntos.

$x\,(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no definida

Valores de la cotangente en $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

$x(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$	no definida	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Gráficas de las funciones Tangente y Cotangente.

Con la información obtendida en los párrafos anteriores acerca de las propiedades de las funciones tangente y cotangente así como de algunos valores que toman estas funciones y que vienen arriba codificadas, podemos construir las gráficas de las funciones tangente y cotangente.

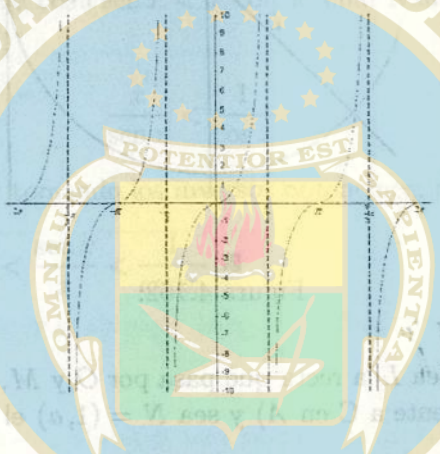


Figura 4.160:

Gráfica de función tangente

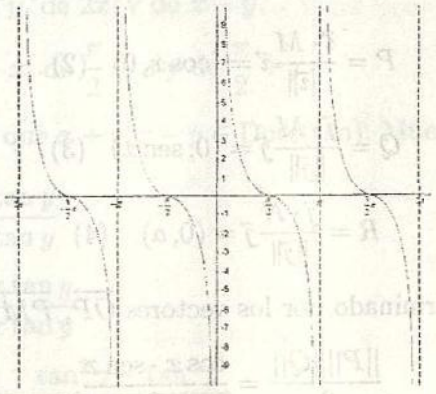


Figura 4.161:

Gráfica de la función cotangente

Desigualdad Fundamental

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad 0 < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Demostración.- Sea $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, entonces existe $M \in \mathcal{C}$ tal que $\psi(x) = M$.

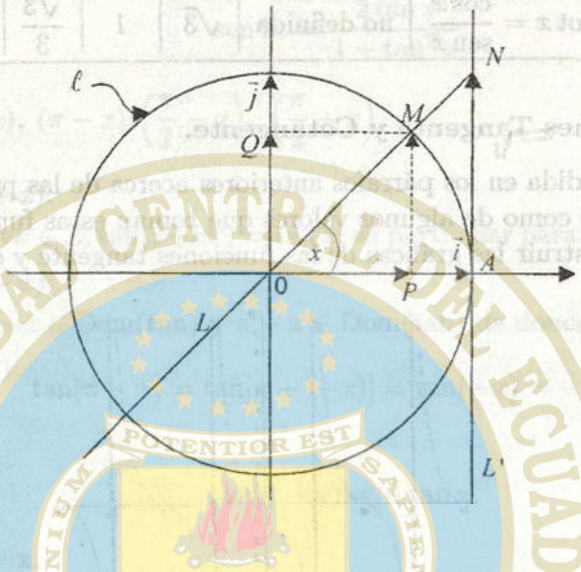


Figura 4.162:

Pongamos $M = (\cos x, \operatorname{sen} x)$. Sea L la recta que pasa por O y M, L' la recta que pasa por A y es paralela al vector $\vec{j}$ (L' es tangente a C en A) y sea $N = (1, a)$ el punto de intersección de L con L'. Se tiene entonces:

$$\operatorname{sen} x = \frac{a}{\|N\|}, \cos x = \frac{1}{\|N\|}$$

de donde

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = a. \quad (1)$$

Sea P la proyección de M sobre $\vec{\imath}$, Q la proyección de M sobre $\vec{\jmath}$ y R la proyección de N sobre $\vec{\jmath}$; entonces

$$P = \frac{\vec{\imath} \cdot M}{\|\vec{\imath}\|}\vec{\imath} = (\cos x, 0) \quad (2)$$

$$Q = \frac{\vec{\jmath} \cdot M}{\|\vec{\jmath}\|}\vec{\jmath} = (0, \operatorname{sen} x) \quad (3)$$

$$R = \frac{\vec{\jmath} \cdot N}{\|\vec{\jmath}\|}\vec{\jmath} = (0, a). \quad (4)$$

El área del triángulo OPM determinado por los vectores $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{OM}$ es

$$\frac{\|P\|\|Q\|}{2} = \frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}{2}.$$

El área del sector circular OAM determinado por los vectores $\vec{\imath}$, M y el arco AM es $\frac{1}{2}x \cdot 1^2$.

El área del triángulo OAN determinado por los vectores $\vec{i}$, $\overrightarrow{AN}$ y $\overrightarrow{ON}$ es $\dfrac{\|\vec{i}\|\left\|\vec{R}\right\|}{2} = \dfrac{1 \times a}{2}$.

Se observa que el área del triángulo OAM es menor que el área del sector circular OAM y ésta a su vez es menor que el área del triángulo OAN, es decir,

$$\frac{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}{2} < \frac{1}{2}\, x \cdot 1^2 < \frac{1 \times a}{2}. \quad (5)$$

Por (1), $a = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces (5) se escribe

$$\frac{\cos x \operatorname{sen} x}{2} < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

o también

$$\cos x \operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}. \quad (6)$$

Por hipótesis $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, luego $\operatorname{sen} x > 0$, $\cos x > 0$.

De la desigualdad (6), se sigue que $\cos x \operatorname{sen} x < x$ con lo cual resulta que $\cos x < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ y de la desigualdad $x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ se tiene

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Es decir: $\cos x < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$ y tomando los inversos obtenemos: $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}$.

Por tanto, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < \dfrac{1}{\cos x}$. ■

Ejercicios

1. Probar que $\operatorname{Rec}(\cot) = \mathbb{R}$.
2. Probar que la función cotangente es una función periódica de período π.
3. Demostrar que $\forall x \in \operatorname{Dom}(\cot)$, se verifica
$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$
4. Hallar la cotangente de $x + y$, de $2x$, y de $x - y$.
5. Hallar la cotangente de $\pi - x$, de $\dfrac{\pi}{2} - x$ y de $\dfrac{\pi}{2} + x$.
6. Sean $x, y \in \operatorname{Dom}(\tan)$ tales que $x + y, x - y \in \operatorname{Dom}(\tan)$. Muestre que:
   a) $\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)} = \dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$
   b) $\dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \dfrac{1 - \tan x \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
   c) $\tan(x+y)\tan(x-y) = \dfrac{\tan^2 x - \tan^2 y}{1 - \tan^2 x \tan^2 y}$.
7. En cada caso, hallar todos los $x \in \mathbb{R}$ para los que la igualdad es cierta.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR · OMNIA PATIENTIA PRUDENTIOR EST · FUNDADA EN 1620 · QUITO

a) $\tan x = 1$

b) $\tan 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) $|\tan x| = \sqrt{3}$

d) $\tan^2 3x = 3$

e) $\cot^2 \dfrac{x}{2} = 1$

8. Verifique las igualdades siguientes (el denominador es distinto de cero).

a) $\dfrac{\tan 2x + \tan x}{\tan 2x - \tan x} = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$

b) $\dfrac{\tan 2x}{\tan x} = \dfrac{2\cot^2 x}{\cot^2 x - 1}$

c) $\tan a + \cot a = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2a}$

d) $\dfrac{1 + \operatorname{sen} b - \cos b}{1 + \operatorname{sen} b + \cos b} = \tan \dfrac{b}{2}$

e) $\dfrac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} = \dfrac{1}{\cos 2x}$

f) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} u} - \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = \tan \dfrac{u}{2}$

g) $\cos 2t + \operatorname{sen} 2t \tan t = 1$

h) $\dfrac{\operatorname{sen} u + \cos 2u - 1}{\cos u - \operatorname{sen} 2u} = \tan u$

i) $\dfrac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} = \tan a$

j) $\cot r \operatorname{sen} 2r - 1 = \cos 2r$

k) $\dfrac{2\cot x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - 2} = \tan 2x$

l) $\dfrac{1 - \tan 2a \tan a}{1 + \tan 2a \tan a} = \dfrac{\cos 3a}{\cos a}$

m) $\dfrac{\tan^2 2a - \tan^2 a}{1 - \tan^2 2a \tan^2 a} = \tan 3a \tan a$

4.10.5. Funciones Secante y Cosecante

Definición 4.62.

i) Se llama función secante a la función real definida por $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}, \forall x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\cos x \neq 0$.

ii) Se llama función cosecante a la función real definida por $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}, \forall x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\operatorname{sen} x \neq 0$.

De la definición resulta inmediato que:

1. $\operatorname{Dom}(\sec) = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\operatorname{Dom}(\csc) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

2. $\operatorname{Rec}(\sec) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; $\operatorname{Rec}(\csc) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

   Es decir:

$$\begin{aligned} \sec : \mathbb{R} \setminus A &\to]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x &\mapsto \sec x = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

donde $A = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\begin{aligned} \csc : \mathbb{R} \setminus B &\to]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ x &\mapsto \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

donde $B = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Además de la definición se desprenden los siguientes resultados:

1. Secante y cosecante son funciones periódicas de período 2π.
2. Secante es una función par, la cosecante es impar.
3. $\forall x \in \text{Dom}(\sec),\ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
4. $\forall x \in \text{Dom}(\csc),\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$

Gráficas de las funciones secante y cosecante

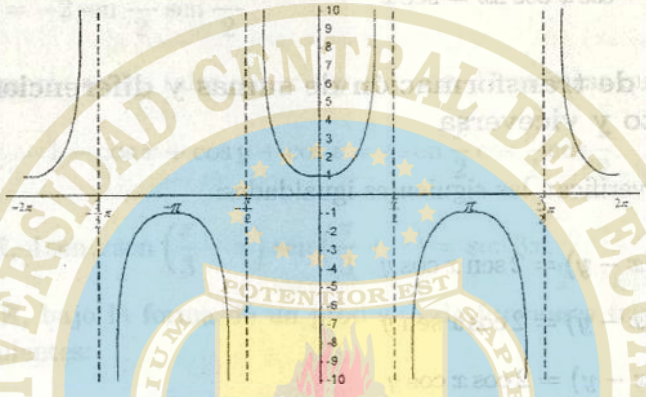


Figura 4.163:

Gráfica de la función secante

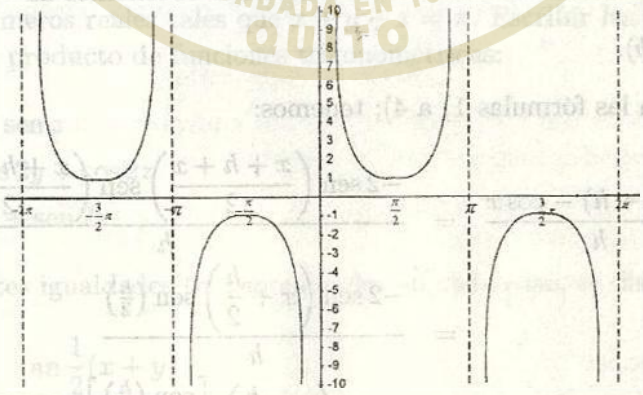


Figura 4.164:

Gráfica de la función cosecante

Ejercicios

1. Hallar la secante y cosecante de $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $(x+\pi)$, $(x-\pi)$.
2. Verifique las igualdades siguientes (se supone el denominador distinto de cero).
   a) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x \sec 3x} - \dfrac{1}{\cos x \csc 3x} = 4\cot 4x \cos 2x$
   b) $2\cos u - \operatorname{sen} 2u \csc u = 0$
   c) $\dfrac{1-\cos u}{1+\cos u} = \sec^2 \dfrac{u}{2} - 1$
   d) $\csc 2\omega - \cot 2\omega = \tan \omega$
   e) $\tan a + \cot a = 2\csc 2a$
   f) $\csc x \operatorname{sen} 2x - \csc x \cos 2x = \sec x$

4.10.6. Fórmulas de transformación de sumas y diferencias de senos o cosenos a producto y viceversa

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se verifican las siguientes igualdades:

1. $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen} x \cos y$
2. $\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2\cos x \operatorname{sen} y$
3. $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$
4. $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$

En efecto, realicemos la siguiente sustitución:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b. \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones obtenemos $2x = a+b$ o bien $x = \dfrac{a+b}{2}$ y por tanto $y = \dfrac{1}{2}(a-b)$.

Reemplacemos x y y en las fórmulas 1) a 4); tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \frac{-2\operatorname{sen}\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \\ &= \frac{-2\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= -\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right] \end{aligned}$$

Luego, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}$ tal que $h \neq 0$,

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]$$

Ejercicios

1. Comprobar en cada caso las siguientes fórmulas:

   a) $2\operatorname{sen} 3x \cos 2y = \operatorname{sen}(3x + 2y) + \operatorname{sen}(3x - 2y)$

   b) $\cos x - \cos 5x = 2\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x$

   c) $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2\cos 2x \operatorname{sen} x$

   d) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} 2x \cos x$

   e) $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} 3x \cos 2x$

   f) $\cos 4x + \cos 2x = 2\cos 3x \cos 2x$

   g) $\operatorname{sen}(4x + 3y) - \operatorname{sen}(4x - 3y) = 2\cos 4x \operatorname{sen} 3y$

   h) $\cos 5x - \cos 2x = -2\operatorname{sen} \dfrac{7x}{2} \operatorname{sen} \dfrac{3x}{2}$

2. Sean x, y, z tres números reales tales que $x + y + z = \pi$. Demostrar que:

$$1 - \cos x + \cos y + \cos z = 4\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}.$$

3. Mostrar que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $4\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3} - x\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \operatorname{sen} 3x$.

4. Expresar $f(x), x \in \mathbb{R}$, bajo la forma de un producto de funciones trigonométricas, en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 2x - \operatorname{sen}^2 3x$

   b) $f(x) = \cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos^2(2x + \pi)$

   c) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\operatorname{sen} \dfrac{3x}{2}$

   d) $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

   e) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x$.

5. Sean x, y, z tres números reales tales que $x + y + z = \pi$. Escribir las siguientes expresiones bajo la forma de un producto de funciones trigonométricas:

   a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z$

   b) $1 + \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z$

   c) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2z$.

6. Verificar las siguientes igualdades (el denominador en cada caso, es distinto de cero).

   a) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \dfrac{\tan \frac{1}{2}(x + y)}{\tan \frac{1}{2}(x - y)}$

   b) $\dfrac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b} = \tan \dfrac{1}{2}(a - b)$

   c) $\dfrac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x} = 1 + 2\cos 2x$

d) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \tan \dfrac{1}{2}(x+y)$

e) $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \tan 2x$

f) $\dfrac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a - \cos b} = -\cot \dfrac{1}{2}(a-b)$

g) $\dfrac{\cos 2x + \cos 7x}{\cos 3x + \cos 6x} - \dfrac{2\operatorname{sen}\left(\frac{7}{2}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right)}{\cos 5x - \cos 2x} = 2\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 3x}$

7. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Verifique las siguientes fórmulas:

a) $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = -\dfrac{1}{2}(\cos[(m+n)x] - \cos[(m-n)x])$

b) $\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}[(m+n)x] + \operatorname{sen}[(m-n)x])$

c) $\cos(mx)\cos(nx) = \dfrac{1}{2}(\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x])$

d) $\cos(mx)\operatorname{sen}(nx) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}[(m+n)x] - \operatorname{sen}[(m-n)x])$

4.11. Ecuaciones Trigonométricas

Ecuación $\operatorname{sen} x = a$

Nos proponemos estudiar la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ con $a \in \mathbb{R}$. Para ello, designemos con S el subconjunto de $\mathbb{R}$ solución de la ecuación propuesta.

Puesto que $\operatorname{Rec}(\operatorname{sen}) = [-1, 1]$, el problema de resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ nos sugiere identificar dos casos:

1. Si $|a| > 1$ entonces $a \notin \operatorname{Rec}(\operatorname{sen})$ con lo cual la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ no tiene solución en $\mathbb{R}$, en otros términos $S = \emptyset$.

2. Si $|a| \leq 1$ entonces $a \in \operatorname{Rec}(\operatorname{sen})$ con lo cual $S \neq \emptyset$, en otros términos existe al menos un real $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x_0 = a$.

Además, $x \in S$ si y solo si $\operatorname{sen} x = a$ que es a la vez equivalente a que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$. Elevando ambos miembros al cuadrado, tenemos: $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x_0$.

De la igualdad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, resulta que $1 - \cos^2 x = 1 - \cos^2 x_0$; es decir $\cos^2 x = \cos^2 x_0$; igualdad que podemos expresarla como sigue:

$$\cos x = \cos x_0 \quad \text{o} \quad \cos x = -\cos x_0;$$

Por tanto, si $x \in S$, se tiene

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \\ \cos x = \cos x_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \\ \cos x = -\cos x_0 \end{cases}$$

Designemos con S_1 el conjunto solución de

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \\ \cos x = \cos x_0 \end{cases}$$

y S_2 el conjunto solución de

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \\ \cos x = -\cos x_0. \end{cases}$$

Ahora bien, si $x \in S$ entonces x verifica

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \\ \cos x = \cos x_0 \end{cases},$$

es decir $x \in S_1$ o bien x verifica

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \\ \cos x = -\cos x_0 \end{cases},$$

esto es $x \in S_2$; con lo cual $x \in S \Rightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2$ o sea $S \subset S_1 \cup S_2$.

Recíprocamente, $x \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2$.

Si $x \in S_1$ entonces x verifica la ecuación $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$ con lo cual $x \in S$. De manera análoga, si $x \in S_2$ entonces $x \in S$.

Así, $x \in S_1 \cup S_2$ entonces $x \in S$ que es equivalente a decir $S_1 \cup S_2 \subset S$. En consecuencia $S = S_1 \cup S_2$.

Determinemos S_1 y S_2.

Para determinar S_1 tengamos presente que si $M \in C$ es tal que $M = (\cos x_0, \operatorname{sen} x_0)$ entonces por

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \\ \cos x = \cos x_0 \end{cases},$$

$M = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ con lo cual existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = x_0 + 2k\pi$. Por lo tanto, determinado x_0 el conjunto S_1 es $S_1 = \{x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Puesto que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \operatorname{sen}(\pi - x) &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

se sigue que $\forall x \in S_2$

$$\cos x = -\cos x_0 = \cos(\pi - x_0) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 = \operatorname{sen}(\pi - x_0)$$

es decir

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \\ \cos x = -\cos x_0 \end{cases}$$

se escribe del siguiente modo

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x_0) \\ \cos x = \cos(\pi - x_0) \end{cases},$$

de donde $x = \pi - x_0 + 2k\pi$, para algún $k \in \mathbb{Z}$. Resulta finalmente que $S_2 = \{\pi - x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

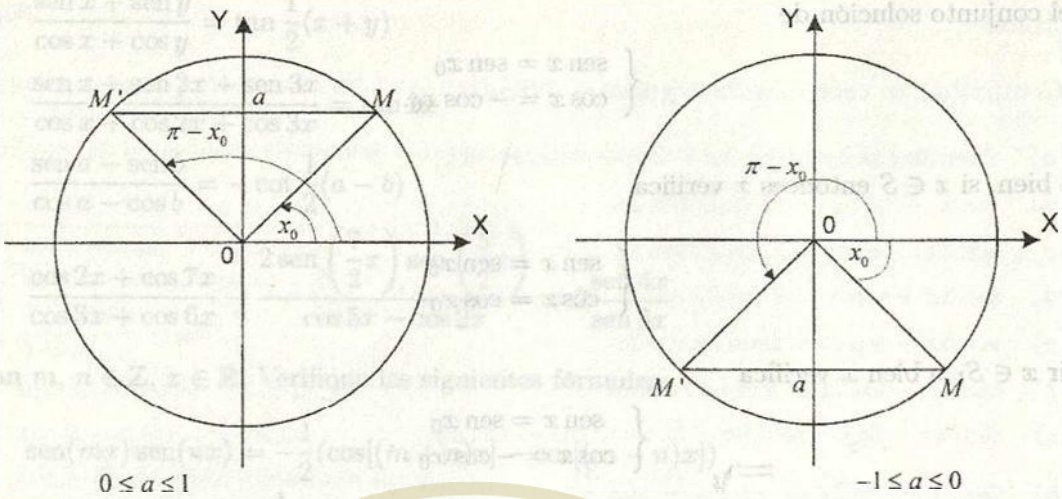


Figura 4.165:

Luego $S = \{x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ que es lo mismo que:

$(\operatorname{sen} x = a) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = x_0 + 2k\pi \vee x = \pi - x_0 + 2k\pi)$. El punto x_0 puede elegirse en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Observación.-

Si $a = 1$, podemos elegir $x_0 = \frac{\pi}{2}$. El conjunto solución S de la ecuación $\operatorname{sen} x = 1$ es:

$$\begin{aligned} S &= \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

esto es, $\operatorname{sen} x = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Si $a = -1$, el conjunto solución S de la ecuación $\operatorname{sen} x = -1$ es

$$\begin{aligned} S &= \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Note que hemos elegido $x_0 = -\frac{\pi}{2}$

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = 1,001$

   Solución

   Como $1,001 \notin$ Rec(sen) entonces el conjunto solución de esta ecuación es $\emptyset$.

2. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

   Solución

Puesto que $\frac{1}{2} \in \text{Rec(sen)}$ y como para $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ entonces $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ o también $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

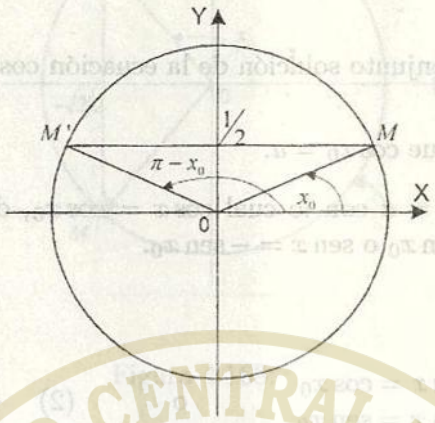


Figura 4.166:

3. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solución

Para $x_0 = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Luego, $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ o $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

El conjunto solución S de la ecuación $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ es

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

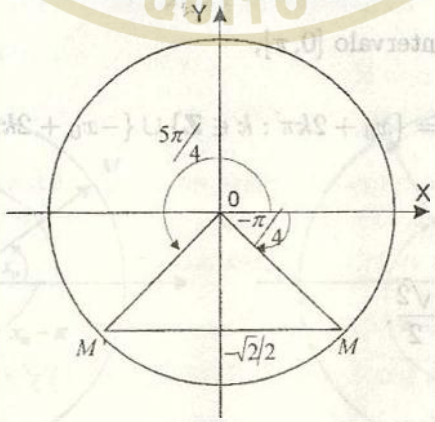


Figura 4.167:

Ecuación: $\cos x = a$

Los razonamientos empleados para hallar el conjunto solución de esta ecuación son enteramente análogos a los realizados en el estudio de la ecuación $\operatorname{sen} x = a$.

Resumimos ese análisis para el caso de esta ecuación y designemos con S el conjunto solución.

1. Si $|a| > 1$, entonces el conjunto solución de la ecuación $\cos x = a$ es $S = \emptyset$.

2. Si $|a| \leq 1$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x_0 = a$.

   Para todo $x \in S$, $\cos x = a$ con lo cual $\cos x = \cos x_0$, de donde $\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x_0$, que es equivalente a: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$ o $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x_0$.

   Resulta entonces que:

$$(1) \quad \begin{cases} \cos x = \cos x_0 \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad (2) \quad \begin{cases} \cos x = \cos x_0 \\ \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x_0. \end{cases}$$

   Si S_1 es el conjunto solución del sistema (1) y S_2 es el conjunto solución de (2), entonces $S = S_1 \cup S_2$.

   Tenemos la siguiente equivalencia:

$$x \in S_1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que} x = x_0 + 2k\pi.$$

   Como $\cos(-x_0) = \cos x_0$ y $\operatorname{sen}(-x_0) = -\operatorname{sen} x_0$, el sistema (2) puede escribirse del siguiente modo

$$\begin{cases} \cos x = \cos(-x_0) \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x_0). \end{cases}$$

   Luego, $x \in S_2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = x_0 + 2k\pi$.

   Por tanto, $\cos x = a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = x_0 + 2k\pi$ o $x = -x_0 + 2k\pi$.

   Podemos elegir x_0 en el intervalo $[0, \pi]$,

$$S = \{x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

EJEMPLO

Resolver la ecuación $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Solución

Para $x_0 = \dfrac{3\pi}{4}$, $\cos \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces, $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ o $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

$$S = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

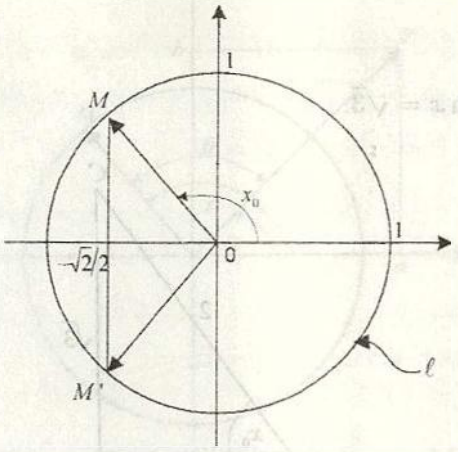


Figura 4.168:

Ecuación: $\tan x = a$

Sea $a \in \mathbb{R}$ y S el conjunto solución de la ecuación $\tan x = a$, entonces

$$S \subset \text{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Puesto que $\text{Rec}(\tan) = \mathbb{R}$, entonces existe $x_0 \in \text{Dom}(\tan)$ tal que $\tan x_0 = a$.

Además, $x \in S \Leftrightarrow \tan x = a$, con lo cual

$$\begin{aligned} \tan x = \tan x_0 &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x_0}{\cos x_0} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cos x_0 - \operatorname{sen} x_0 \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(x - x_0) = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, $x \in S \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - x_0 = k\pi$. Resulta entonces que $x \in S \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = x_0 + k\pi$, que es lo mismo que:

$$\tan x = a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = x_0 + k\pi$$

El punto x_0 podemos elegir en el intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y $S = \{x_0 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

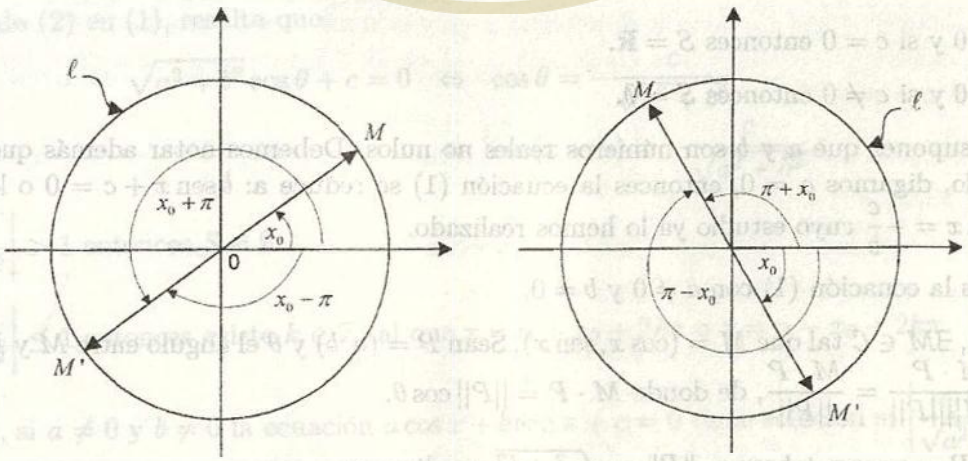


Figura 4.169:

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $\tan x = \sqrt{3}$.

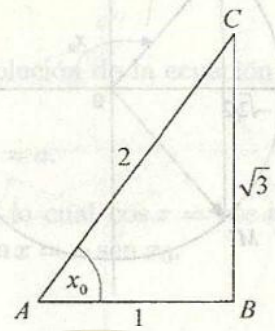


Figura 4.170:

Solución.

Para simplificar el problema, consideremos el triángulo ABC. Puesto que $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, entonces $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego, el conjunto solución de la ecuación $\tan x = \sqrt{3}$ es $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Resolver la ecuación $\tan x = 0$

Solución.

Como $\tan 0 = 0$, entonces $S = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}.\}$

Ecuación: $a\cos x + b\operatorname{sen} x + c = 0$.

Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$, S el conjunto solución de la ecuación

$$a\cos x + b\operatorname{sen} x + c = 0 \qquad (1)$$

Si $a = b = 0$ y si $c = 0$ entonces $S = \mathbb{R}$.

Si $a = b = 0$ y si $c \neq 0$ entonces $S = \emptyset$.

Hemos de suponer que a y b son números reales no nulos. Debemos notar además que si uno de ellos es nulo, digamos $a = 0$, entonces la ecuación (1) se reduce a: $b\operatorname{sen} x + c = 0$ o lo que es lo mismo, $\operatorname{sen} x = -\frac{c}{b}$ cuyo estudio ya lo hemos realizado.

Resolvamos la ecuación (1) con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Para $x \in \mathbb{R}$, $\exists M \in \mathcal{C}$ tal que $M = (\cos x, \operatorname{sen} x)$. Sean $P = (a, b)$ y θ el ángulo entre M y P, entonces $\cos\theta = \frac{M \cdot P}{||M||||P||} = \frac{M \cdot P}{||P||}$, de donde $M \cdot P = ||P||\cos\theta$.

Como $M \cdot P = a\cos x + b\operatorname{sen} x$, $\|P\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ resulta que:

$$a\cos x + b\operatorname{sen} x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\theta \qquad (2)$$

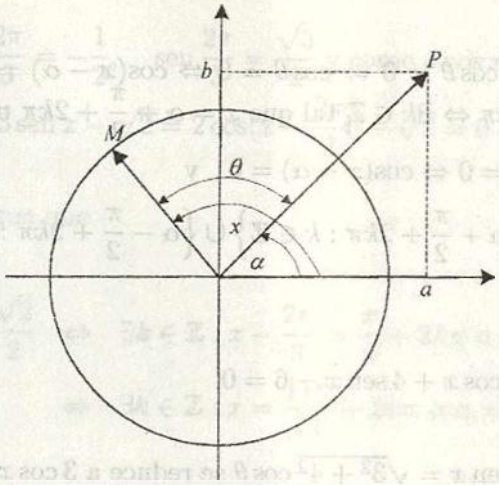


Figura 4.171:

Observación

Como $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $\sqrt{a^2+b^2} > 0$ y podemos escribir

$$a\cos x + b\operatorname{sen} x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen} x\right).$$

Sea $\alpha \in [0, 2\pi[$ la medida del ángulo $\widehat{(\vec{i}, P)}$, entonces

$$\cos\alpha = \frac{a}{||P||} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{||P||} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} a\cos x + b\operatorname{sen} x &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\cos x + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-a) \end{aligned}$$

y como $x = \alpha = \theta$, entonces $a\cos x + b\operatorname{sen} x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\theta$.

Reemplazando (2) en (1), resulta que

$$\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta + c = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\theta = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Leftrightarrow\; \cos(x-\alpha) = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Si $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$ entonces $S = \emptyset$.

Si $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + x_0 + 2k\pi$ o $x = \alpha - x_0 + 2k\pi$.

En resumen, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ la ecuación $a\cos x + b\operatorname{sen} x + c = 0$ tiene solución si $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ y en cuyo caso el conjunto solución es:

$$S = \{\alpha + x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha - x_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Observación

Si $c = 0$, entonces $\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ o $x - \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ o $x = \alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

En síntesis: $a\cos x + b\,\text{sen}\, x = 0 \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = 0$ y

$$S = \left\{\alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $3\cos x + 4\,\text{sen}\, x + 6 = 0$.

   Solución

   Puesto que $3\cos x + 4\,\text{sen}\, x = \sqrt{3^2+4^2}\cos\theta$ se reduce a $3\cos x + 4\,\text{sen}\, x = 5\cos\theta$, entonces la ecuación propuesta se escribe como $5\cos\theta + 6 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{6}{5} \notin [-1,1]$. En consecuencia, la ecuación propuesta no tiene solución en $\mathbb{R}$.

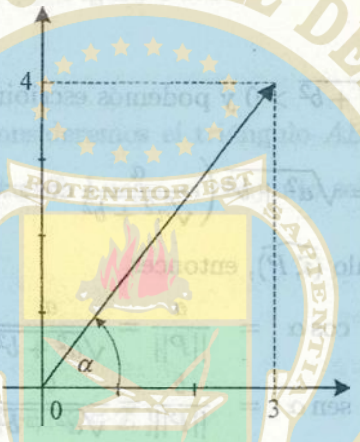


Figura 4.172:

2. Resolver la ecuación $3\cos x + 4\,\text{sen}\, x + 5 = 0$.

   Solución

   Como $3\cos x + 4\,\text{sen}\, x = 5\cos\theta$, donde $\theta = x - \alpha$ y α la medida del ángulo $\widehat{(\vec{\imath}, P)}$ con $P = (3,4)$; entonces $5\cos(x-\alpha)+5 = 0 \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x - \alpha = (2k+1)\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = \alpha + (2k+1)\pi$.

   Por otra parte, como $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, entonces $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo valor aproximado es $\alpha \approx 0,9223(\text{rad})$ o $\alpha = 53,13°$.

   En consecuencia, el conjunto solución de la ecuación $3\cos x + 4\,\text{sen}\, x + 5 = 0$ es $S = \{\alpha + (2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, con $\alpha \approx 0,9223$.

3. Resolver la ecuación $-\cos x + \sqrt{3}\,\text{sen}\, x - \sqrt{2} = 0$.

   Solución

   Haciendo $a = -1$, $b = \sqrt{3}$, $c = -\sqrt{2}$, entonces

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{1}{2}, \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Luego, $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ pues $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y como $a\cos x + b\operatorname{sen} x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$, entonces $-\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 2\cos(x - \dfrac{2\pi}{3}) - \sqrt{2} = 0$ o bien $\cos(x - \dfrac{2\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Siendo $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ se sigue que

$$\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ o } x - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

Por consiguiente,

$$-\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi.$$

O también $S = \left\{\dfrac{11\pi}{12} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Otros tipos de ecuaciones

A continuación exhibimos otros ejemplos de ecuaciones trigonométricas cuyo análisis es más delicado y no se rigen a un método general. Sin embargo, aplicando las propiedades de las funciones trigonométricas se puede simplificar el problema y conducir a las ecuaciones arriba estudiadas.

EJEMPLOS

1. Resolver la ecuación $\operatorname{sen} 2u - \operatorname{sen} u = 0$

   Solución

   Puesto que $\operatorname{sen} 2u = 2\operatorname{sen} u\cos u$, entonces:

$$2\operatorname{sen} u\cos u - \operatorname{sen} u = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} u(2\cos u - 1)$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} u = 0 \text{ o } 2\cos u - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} u = 0 \text{ o } \cos u\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : u = k\pi \text{ o } (u = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$$

   Por consiguiente,

$$S = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Resolver la ecuación $\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\left(4x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Solución

$$\begin{aligned}
\tan(x-\frac{\pi}{4}) &= \tan\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow \tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\operatorname{sen}\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}=0\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{sen}\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left[\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=0\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(3x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(3x+\frac{5\pi}{12}\right)=0\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: 3x+\frac{5\pi}{12}=k\pi\\
&\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}: x=\frac{\pi}{3}k-\frac{5\pi}{36}
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}k-\frac{5\pi}{36},\ k\in\mathbb{Z}.$$

3. Resolver la ecuación $2\operatorname{sen}^2 t-\operatorname{sen} t-1=0$.

Solución

Si hacemos $x=\operatorname{sen} t$, se obtiene la ecuación $2x^2-x-1=0$ cuya solución es $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{1\pm 3}{4}$; es decir $x_1=1$ o $x_2=-\dfrac{1}{2}$. Si $x_1=1$ entonces $\operatorname{sen} t=1$, con lo cual $t=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, para algún $k\in\mathbb{Z}$.

Si $x_2=-\dfrac{1}{2}$ entonces $\operatorname{sen} t=-\dfrac{1}{2}$ de lo cual resulta $t=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ o $t=\pi+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, para algún $k\in\mathbb{Z}$.

Luego, $2\operatorname{sen}^2 t-\operatorname{sen} t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ o $t=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ o $t=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$ para algún $k\in\mathbb{Z}$.

Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$

b) $2\cos 3x-1=0$

c) $4\cos^2 x-3=0$

d) $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

e) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{2\pi}{3}$

f) $\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

g) $\operatorname{sen}(3x+\pi)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

h) $\sqrt{2}\cos^2 x-\cos x=\sqrt{2}$

i) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^2 x+\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\tan x-1=0$

j) $2\operatorname{sen}^2 x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 3$

2. Resolver las ecuaciones:

a) $2\operatorname{sen} u - 2\cos u - \sqrt{2} = 0$
b) $\operatorname{sen} t + \sqrt{3}\cos t = -1$
c) $8\operatorname{sen} x - 5\cos x + 2 = 0$
d) $\sqrt{3}\operatorname{sen} v + \cos v - \sqrt{2} = 0$
e) $3\cos u - 8\operatorname{sen} u + 3 = 0$
f) $2\cos(t - t_0) + 10\operatorname{sen}(t - t_0) + \sqrt{104} = 0$
g) $-\cos a + \operatorname{sen} a + 2 = 0$
h) $-\sqrt{3}\operatorname{sen} a - \cos a = 1$
i) $2\operatorname{sen} u - 5\cos u = 2$
j) $\sqrt{3}\operatorname{sen} x - \cos x + 1 = 0$
k) $\tan^2 x + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\tan x + 1 = 0$
l) $4\operatorname{sen}^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$

3. Determinar, en cada caso $p \in \mathbb{R}$ para que el conjunto solución S del sistema propuesto sea no vacío. Determinar S.

a) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cos x = 1 \\ \operatorname{sen} x - \cos x = p \end{cases}$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 1 \\ \operatorname{sen} x + \cos x = p \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4\operatorname{sen} x + 3\cos x = p - 1 \\ \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3} \end{cases}$

4. Resolver las ecuaciones:

a) $\cos 2x + 3\cos x + 1 = 0$
b) $2\cos u - 3\tan u = 0$
c) $\cot^2 u - 2\csc^2 u + 5 = 0$
d) $2\operatorname{sen}^4 x - 9\operatorname{sen}^2 x = -4$
e) $6\tan^4 x + 13\tan^2 x + 5 = 0$
f) $\tan u \operatorname{sen} u = \sqrt{3}\operatorname{sen} u$
g) $\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 1 = 0$
h) $2\cos^2 u - \cos u - 1 = 0$
i) $4\operatorname{sen} x\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 0$
j) $\cos 2x + 2\operatorname{sen} x + 1 = 0$

5. Sea $a \in \mathbb{R}$. Discutir y resolver las ecuaciones siguientes:

a) $a\cos x + \sqrt{1 - a^2}\operatorname{sen} x = 2a^2$
b) $a\operatorname{sen} x + (a + 3)\cos x = 2(a - 1)$
c) $(1 - a)\operatorname{sen} x + (1 + a)\cos x = a$
d) $(1 + a)\operatorname{sen} x + (1 - a)\cos x = 2a$
e) $a\operatorname{sen} x + 2a\cos x = \sqrt{1 - a^2}$.

6. Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$
b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 4x = 0$
c) $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
d) $\operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$
e) $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
f) $\operatorname{sen}\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
g) $\tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
h) $\tan^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

i) $\tan\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)$

j) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$

k) $\tan\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=1.$

7. Sean a, b, $c\in\mathbb{R}$. Discutir y resolver las ecuaciones siguientes:

a) $a\,\text{sen}^2 x+b\,\text{sen}\,x+c=0$

b) $a\cos^2 x+b\cos x+c=0$

c) $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$

d) $a\cos 2x+b\,\text{sen}\,x+c=0$

e) $a\,\text{sen}\,2x+b\cos x=0$

f) $|a\,\text{sen}\,x+b\cos x|=c$, con $c\geq 0$

g) $|a\,\text{sen}\,x-b|=0$

h) $|a\cos x-b|=0.$

4.12. Inecuaciones Trigonométricas

Inecuación: $\text{sen}\,x>a$

Sea $a\in\mathbb{R}$, consideremos la inecuación: $\text{sen}\,x>a$ y S su conjunto solución.

1. Es claro que si $a\geq 1$, la inecuación $\text{sen}\,x>a$ tiene solución vacía, $S=\emptyset$.
2. Si $a<-1$, el conjunto solución de la inecuación $\text{sen}\,x>a$ es todo $\mathbb{R}$, es decir, $S=\mathbb{R}$.
3. Supongamos que $a\in[-1,1[$.

Si $\text{sen}\,x=a$, hemos demostrado que el conjunto solución de la ecuación $\text{sen}\,x=a$ viene dada por:

$$\{x_0+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-x_0+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$$

donde x_0 se elige en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\text{sen}\,x_0=a$.

De lo dicho, se sigue que $\text{sen}\,x>a$ si, y solo si, $\exists k\in\mathbb{Z}$ tal que $x_0+2k\pi<x<\pi-x_0+2k\pi$.

El conjunto solución S es:

$$S=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}]x_0+2k\pi,\ \pi-x_0+2k\pi[.$$

EJEMPLOS

1. Hallar el conjunto solución de la inecuación $\text{sen}\,x>-2$

   Solución

   Puesto que $\forall x\in\mathbb{R}, -1\leq\text{sen}\,x\leq 1$, resulta que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\text{sen}\,x>-2$ es siempre verdadera, luego $S=\mathbb{R}$.

2. Resolver la inecuación $\text{sen}\,x>1$.

   Solución

   Como $\forall x\in\mathbb{R}, |\text{sen}\,x|\leq 1$, resulta que $\text{sen}\,x>1$ no se verifica para ningún $x\in\mathbb{R}$, consecuentemente $S=\emptyset$.

3. Resolver la inecuación $\operatorname{sen} x > -\frac{1}{2}$.

Solución

En este caso $a = -\frac{1}{2}$, elegimos $x_0 = -\frac{\pi}{6}$ y entonces $\operatorname{sen} x_0 = -\frac{1}{2}$ y

$\operatorname{sen} x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$$

tal que

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,$$

con lo cual $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right[$.

Observación Con mayor generalidad se presenta el problema de resolver la inecuación $\operatorname{sen}(ax + b) > c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.

Si c es tal que $c \geq 1$, entonces $S = \emptyset$ y si $c < -1$ entonces $S = \mathbb{R}$.

Si $c \in [-1, 1[$, entonces existe $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\operatorname{sen} u_0 = c$, donde $u_0 = ax_0 + b$, de donde $-\frac{\pi}{2} \leq ax_0 + b \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - b \leq ax_0 \leq \frac{\pi}{2} - b$.

Deducimos que:

a) Si $a > 0$, $x_0 \in \left[-\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + b\right), \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right]$.

Solución

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(ax + b) > c &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : ax_0 + b + 2k\pi < ax + b < \pi - ax_0 - b + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x_0 + \frac{2k\pi}{a} < x < \frac{\pi - 2b + 2k\pi}{a} - x_0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] x_0 + \frac{2k\pi}{a}, \frac{\pi - 2b + 2k\pi}{a} - x_0 \right[$$

b) Si $a < 0$, $x_0 \in \left[\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - b\right), -\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + b\right)\right]$.

Solución.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(ax + b) > c &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : ax_0 + b + 2k\pi < ax + b < \pi - ax_0 - b + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : ax_0 + 2k\pi < ax < \pi - 2b - ax_0 + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi - 2b + 2k\pi}{a} - x_0 < x < x_0 + \frac{2k\pi}{a} \end{aligned}$$

El conjunto solución es:

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] \frac{\pi - 2b + 2k\pi}{a} - x_0, x_0 + \frac{2k\pi}{a} \right[.$$

4. Resolver la inecuación $\operatorname{sen}\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$.

Solución

Sea $u = \pi x - \frac{\pi}{4}$. Puesto que si $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\operatorname{sen} u_0 = \frac{1}{2}$ entonces $u_0 = \frac{\pi}{6}$, luego $x_0 = \frac{5}{12}$.

Es decir

$$\operatorname{sen}\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \pi x_0 - \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi x - \frac{\pi}{4} < \pi - \pi x_0 + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{5}{12} + 2k < x < \frac{10}{12} + 2k$$

Por tanto el conjunto solución de la inecuación $\operatorname{sen}\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2}$ es

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{5}{12} + 2k, \frac{10}{12} + 2k\right[.$$

Observación El estudio de la inecuación $\operatorname{sen}(ax+b) < c$ conduce al estudio de la inecuación $\operatorname{sen}(ax+b) > c$, ya que si S es el conjunto solución de la inecuación $\operatorname{sen}(ax+b) > c$, entonces el conjunto solución S' de la inecuación $\operatorname{sen}(ax+b) \leq c$ es $S' = \mathbb{R} \setminus S$.

Inecuación: $\cos x > a$

Sea $a \in \mathbb{R}$ y S el conjunto solución de la inecuación $\cos x > a$. Entonces,

1. Si $a \geq 1$, $S = \emptyset$.
2. Si $a < -1$, $S = \mathbb{R}$.
3. Supongamos $a \in [-1, 1[$, entonces,

$$\cos x = a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = x_0 + 2k\pi \text{ o } x = -x_0 + 2k\pi$$

donde $x_0 \in [0, \pi]$ tal que $\cos x_0 = a$.

En consecuencia, $\cos x > a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : -x_0 + 2k\pi < x < x_0 + 2k\pi$.

El conjunto solución de la inecuación $\cos x > a$ es

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-x_0 + 2k\pi, x_0 + 2k\pi[.$$

EJEMPLOS

1. Resolver la inecuación $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solución

Si $\cos x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ entonces $x_0 = \frac{3\pi}{4}$. Luego

$$\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

con lo cual

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right[\\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\pi\left(-\frac{3}{4}+2k\right), \pi\left(\frac{3}{4}+2k\right)\right[. \end{aligned}$$

2. Resolver la inecuación $\cos(3x+1) > 0$.

Solución

De $\cos(3x_0+1) = 0$ se obtiene que $3x_0+1 = \frac{\pi}{2}$ o sea $x_0 = \frac{\pi-2}{6}$, de donde

$$\begin{aligned} \cos(3x+1) > 0 &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} : -(3x_0+1)+2k\pi < 3x+1 < 3x_0+1+2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} : -\frac{\pi+2}{6}+\frac{2\pi}{3}k < x < \frac{\pi-2}{6}+\frac{2\pi}{3}k \end{aligned}$$

Luego $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi+2}{6}+\frac{2\pi}{3}k, \frac{\pi-2}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right[$.

3. Resolver la inecuación $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$.

Solución

Resolvamos la inecuación $\cos 2x > \frac{1}{2}$.

Como $\cos 2x_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x_0 = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pi}{6}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \cos 2x > \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} : -2x_0+2k\pi < 2x < 2x_0+2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} : -\frac{\pi}{6}+k\pi < x < \frac{\pi}{6}+k\pi. \end{aligned}$$

Luego el conjunto solución de la inecuación $\cos 2x \leq \frac{1}{2}$ es

$$S = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\right[$$

o bien

$$S = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^-} \left[-\frac{\pi}{6}+(2k-1)\pi, -\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\right) \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^+} \left[\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+(2k+1)\pi\right]\right)$$

Ejercicios

1. Resolver las inecuaciones siguientes:

   a) $\operatorname{sen} 2x \leq -\frac{1}{2}$

   b) $\cos \pi x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

   c) $\cos \frac{x}{2} \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   d) $\tan x \geq 1$

   e) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA FUNDADA EN 1620 QUITO

f) $|\operatorname{sen} x| \leq \frac{1}{2}$

g) $|\sec x| > \sqrt{2}$.

2. Resolver las inecuaciones siguientes:

a) $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x \geq 0$

b) $\cos x - \cos \frac{x}{2} \leq \frac{1}{4}$

c) $\cos 2x + \cos 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$. Estudiar y resolver las inecuaciones siguientes:

a) $\tan x > a$

b) $\tan x < a$

c) $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c > 0$

d) $a \operatorname{sen} x + b \cos x + c < 0$.

4. Sean a, b, $c \in \mathbb{R}$. Estudiar y resolver las inecuaciones siguientes:

a) $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c > 0$

b) $a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c < 0$

c) $a \cos^2 x + b \cos x + c \geq 0$.

5. Hallar el dominio de definición de las funciones reales siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

b) $f(x) = \sqrt{\tan 3x}$

c) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$

d) $h(x) = \sec 2x + \sqrt{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO


UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM
SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

SIB - UCE

FECHA DE DEVOLUCIÓN		

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST QUAM VIDENTIA
OMNIUM MATRIS
FUNDADA EN 1620
QUITO

ISBN 978-9942-11-184-5

15336