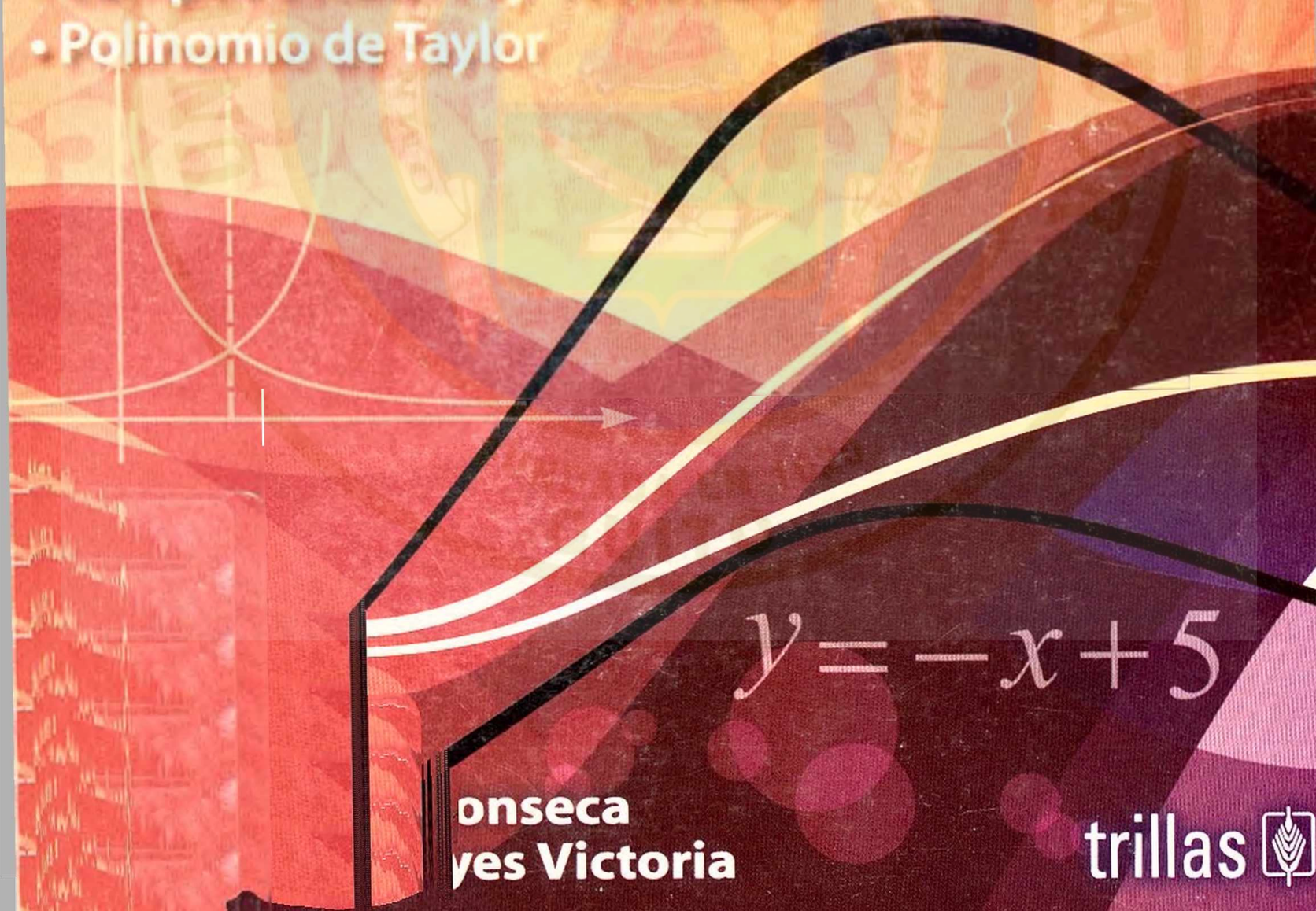
CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

- Sistemas de ecuaciones
- Superficies cuadráticas
- Curvas
- Campos escalares y vectoriales
- Polinomio de Taylor



onseca
yes Victoria

trillas

Sistema Integrado de Bibliotecas
Biblioteca digital UCE
Calle Jerónimo Leyton y Gato Sobral – Cdla. Universitaria
+593 2230757 ext: 808 biblioteca.general@uce.edu.ec

BASE LEGAL PARA DIGITALIZACIÓN DE LIBROS CON DERECHOS DE AUTOR

El Sistema Integrado de Bibliotecas de la Universidad Central del Ecuador, digitalizará su acervo bibliográfico siempre y cuando sea para fines educativos y de investigación. No se permite la reproducción y distribución para la comercialización directa e indirecta del mismo.

La digitalización del material bibliográfico se lo realiza de acuerdo al Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación Art. 212 numeral 9, Literal ii "(…) Una biblioteca o archivo podrá, además, realizar los siguientes actos (…) La reproducción electrónica y comunicación pública de obras de su colección para ser consultadas gratuita y simultáneamente hasta por un número razonable de usuarios, sólo en terminales de redes de la respectiva institución o para usuarios de esa institución bajo su control, en condiciones que garanticen que no se puedan hacer copias electrónicas de esas reproducciones" y literal vii "La reproducción, adaptación, traducción, transformación, arreglo, distribución y comunicación de una obra protegida por derechos de autor o una prestación protegida por derechos conexos, en uno o más formatos accesibles para el uso exclusivo de personas con discapacidad".

Este material se considera un producto intelectual a favor de su autor; por tanto, la titularidad de sus derechos se encuentra protegida por el Código Orgánico De La Economía Social de los Conocimientos, Creatividad e Innovación. La violación a dichos derechos constituye un delito que será responsabilidad del usuario.

Este libro está disponible físicamente en:

BIBLIOTECA	Biblioteca General			**PISO**	01
				ESTANTE	10
				BANDEJA	11
CONVENIO INTERINSTITUCIONAL		**UNIVERSIDAD**			

CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

UNIVERSIDAD CENTRAL
CONTROL DE BIENES
5136754
3023 8055

Cód 87265

CÁLCULO

DIFERENCIAL E INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

513.3
B389

CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

Rubén Becerril Fonseca
J. Guadalupe Reyes Victoria

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
FUNDADA EN 1826

$y = -x + 5$

EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, España,
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

ID= 1902 E10-B11

Catalogación en la fuente

Becerril Fonseca, Rubén
Cálculo diferencial e integral en varias variables. -- México : Trillas, 2012.
374 p. ; 27 cm.
Bibliografía: 369
Incluye índices
ISBN 978-607-17-1091-8

1. Cálculo diferencial. 2. Cálculo integral. I. Reyes Victoria, J. Guadalupe. II. t.

D- 515'B146c LC- QA303'B4.2

La presentación y disposición en conjunto de
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES
son propiedad del editor.
Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 2012, Editorial Trillas, S. A. de C. V.

División Administrativa,
Av. Río Churubusco 385,
Col. Gral. Pedro María Anaya,
C. P. 03340, México, D. F.
Tel. 56884233, FAX 56041364

División Comercial,
Calzada de la Viga 1132,
C. P. 09439, México, D. F.
Tel. 56330995
FAX 56330870

www.trillas.com.mx

Tienda en línea
www.etrillas.com.mx

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Reg. núm. 158

Primera edición, marzo 2012
ISBN 978-607-17-1091-8

Impreso en México
Printed in Mexico

INVENTARIO
Compra ..... Donación ..... Canje ...
Proc. Pollibros
5916 Fecha 15-11-12 37.06
Nº Inf. Recp ..... Fecha Inf .....
Nº Alta 513675
Biblioteca General

Prólogo

Entre los principales problemas que tiene un lector estudioso de las Ciencias Básicas (Física, Química, Matemáticas) o de la Ingeniería, está el de encontrar aislados en la abundante literatura muchos temas de su interés. Por un lado, los textos clásicos orientados hacia las partes aplicadas de la ciencia que tienen relevancia, no son del todo accesibles al joven lector, y para su lectura imponen una cantidad considerable de prerrequisitos. Por otra parte, la literatura teórica en muchas ocasiones causa tedio en los aspirantes al ejercicio práctico de la ciencia.

La presente obra trata de equilibrar las dos cosas: la parte teórica de una forma simple, y su uso en las partes aplicadas de la ciencia, pensando en la formación del futuro científico, ingeniero, técnico, etcétera. Para su lectura se presuponen conocimientos elementales de cálculo diferencial de una variable. Los demás conceptos el lector no matemático puede irlos aprendiendo durante la misma lectura.

El objetivo de la obra es introducir al estudiante de Ciencias Básicas e Ingeniería a los conceptos modernos de **Dinámica** y **Geometría**, sin tener que realizar tantas lecturas teóricas, estudiando apenas lo necesario en las obras citadas.

En el primer capítulo hacemos un bosquejo de los elementos necesarios para leer el trabajo, como son los sistemas de ecuaciones, las matrices y los determinantes. Se hace de esta manera una reseña de los elementos básicos del **Álgebra lineal**.

El capítulo 2 trata de los aspectos básicos de los objetos geométricos elementales en el espacio euclidiano: las **rectas**, los **planos**, y las **superficies cuadráticas**. Necesitamos para su descripción los conceptos de **vector**, **ángulo** y **distancia**.

En el capítulo 3 se estudian los elementos básicos de las **curvas** planas y espaciales, sus propiedades diferenciables y geométricas (**vector velocidad**, **longitud de arco** y **ángulo** entre curvas).

El capítulo 4 muestra el estudio de las funciones diferenciables $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y los elementos para realizarlo: **la continuidad**, las **derivadas parciales**, el **gradiente**, el **plano tangente**, etcétera.

Los **valores extremos** de una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (para $n \leq 3$) se analizan en el capítulo 5 mediante el **polinomio de Taylor** y los **multiplicadores de Lagrange**.

En el capítulo 6 se hace una muestra somera de la teoría básica de las funciones diferenciables del tipo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \leq 3)$ y los resultados más importantes se enuncian y ejemplifican: los teoremas de la **función inversa** y el de la **invarianza del dominio**.

En el capítulo 7 se estudian los sistemas de coordenadas clásicos en los espacios reales bidimensional y tridimensional (las **polares**, las **cilíndricas**, las **esféricas**) y sus cambios de coordenadas.

A lo largo del capítulo 8 se definen las integrales dobles y triples sobre regiones del plano y del espacio respectivamente, y se mencionan los resultados más importantes como el **teorema de Fubini** y el **teorema de cambio de variable** y sus aplicaciones inmediatas.

El noveno capítulo está dedicado a estudiar las acciones de los **campos escalares y vectoriales** en una región contenida en un espacio euclidiano y se definen los operadores de **rotor**, **divergencia** para campos vectoriales y el de **gradiente** para campos escalares.

A lo largo del capítulo 10 se enuncian los resultados importantes de la integración de los campos escalares y vectoriales definidos en regiones euclidianas como el **teorema de Green** y el **Primer teorema de Cohomología**. Se mencionan algunas aplicaciones de tales resultados para resolver problemas de la Mecánica y afines.

En el capítulo 11 se hace el estudio de los conceptos **superficie regular**, **superficie poliédrica**, y **orientación de una superficie** contenidas en un espacio tridimensional.

Finalmente, en el capítulo 12 se estudia la acción de un campo ya sea escalar o vectorial en una superficie ordinaria y se obtienen los resultados integrales más importantes: el **teorema de Gauss-Ostrogradskii** y el **teorema de Stokes**, así como sus aplicaciones inmediatas.

Este libro es producto de varios cursos de Análisis vectorial, Cálculo avanzado y de Geometría diferencial impartidos por los autores para las licenciaturas de Ingeniería (en energía, electrónica, bioquímica, química, biomédica, de alimentos, etcétera) y Matemáticas en la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, durante los años 1992 - 2010. La presentación del documento es diferente de la de los cursos clásicos debido a que las necesidades de las propias licenciaturas así lo requieren. Para consultar la solución de los ejercicios sugeridos en cada sección el lector puede dirigirse a la página electrónica del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, cuya dirección es *http://mat.izt.uam.mx*.

Finalmente, queremos agradecer el apoyo vigoroso, incondicional y desinteresado del jefe del Departamento de Matemáticas de la UAM-I, *Dr. Mario Pineda Ruelas*, quien durante la elaboración de este trabajo (y durante todo su periodo como jefe) nos brindó su ayuda, para que se pudiera elaborar de la mejor manera, así como al matemático *Rubén Becerril Borja* por todo su apoyo en la revisión literaria, técnica y de diseño para que este trabajo tuviese una mejor presentación. Igualmente, agradecemos también al editor de la editorial Trillas en México, matemático *José Luis Serrato* y a tal casa editorial por el apoyo que le están brindando a los autores mexicanos que están involucrados con las Matemáticas.

LOS AUTORES

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Índice de contenido

1 Sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes 11
1.1 Sistemas de ecuaciones . . . 11
1.1.1 Matrices . . . 13
1.1.2 Suma de matrices . . . 15
1.1.3 Multiplicación de matriz por escalar . . . 16
1.1.4 Producto de matrices . . . 18
1.1.5 Determinantes de orden tres . . . 22
1.1.6 La inversa de una matriz . . . 30
1.1.7 Sistemas de tres ecuaciones lineales . . . 31
1.1.8 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos . . . 36
1.2 El método de Gauss-Jordan . . . 39

2 Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ 51
2.1 Sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . 51
2.2 Plano tangente ambiental . . . 55
2.3 El producto escalar euclidiano y la norma en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . 56
2.3.1 Norma de un vector . . . 58
2.3.2 Ángulo entre dos vectores . . . 61
2.4 El producto vectorial . . . 64
2.5 El triple producto escalar . . . 66
2.6 Vectores y valores propios de una matriz . . . 73
2.7 Rectas y planos . . . 83
2.7.1 Rectas en $\mathbb{R}^n$ . . . 83
2.7.2 El plano . . . 84
2.8 Elementos básicos de superficies en $\mathbb{R}^3$ . . . 91
2.8.1 Superficies de revolución . . . 92
2.8.2 Superficies cilíndricas . . . 94
2.8.3 Superficies cónicas . . . 95
2.8.4 Elipsoides, hiperboloides y paraboloides . . . 97

3 Curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ 107
3.1 Curvas regulares, suaves y parametrizadas . . . 107
3.2 Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . 110
3.3 Orientación de curvas y curvas poligonales . . . 120
3.4 Longitud de arco y ángulo entre curvas . . . 123
3.5 La segunda derivada. Aceleración . . . 127

4 Funciones diferenciables de tipo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 129
4.1 La topología de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . 129
4.2 Funciones escalares de argumento vectorial . . . 132
4.3 Superficies y curvas de nivel . . . 135
4.4 Límites y puntos singulares . . . 139

4.4.1 Puntos de acumulación y límites . . . 139
4.4.2 Puntos singulares . . . 140
4.4.3 Continuidad . . . 142
4.5 Derivadas parciales y el gradiente . . . 144
4.6 Diferenciabilidad . . . 147
4.7 Regla de la cadena . . . 150
4.8 Plano tangente . . . 154
4.9 Derivadas direccionales . . . 156

5 Valores extremos de funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 159
5.1 Derivadas de orden superior . . . 159
5.2 El polinomio de Taylor . . . 163
5.3 Valores extremos de funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ . . . 170
5.3.1 Puntos regulares . . . 170
5.3.2 Puntos críticos . . . 171
5.3.3 Formas cuadráticas básicas . . . 173
5.3.4 Zoológico de formas cuadráticas básicas . . . 175
5.4 Puntos críticos no degenerados . . . 176
5.5 Multiplicadores de Lagrange y el teorema de Weierstrass . . . 185
5.6 Diferencial total de un campo escalar . . . 193

6 Funciones diferenciables $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 197
6.1 Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ . . . 197
6.2 Transformaciones lineales . . . 201
6.3 La matriz jacobiana . . . 207
6.4 Diferenciabilidad . . . 209
6.5 Regla de la cadena . . . 212
6.6 Funciones inversas e implícitas . . . 216

7 Sistemas de coordenadas 227
7.1 Regiones del espacio $\mathbb{R}^3$ . . . 227
7.2 Sistema de coordenadas polares . . . 232
7.3 Coordenadas Cilíndricas . . . 235
7.4 Coordenadas Esféricas . . . 237

8 Integrales múltiples 239
8.1 Integrales dobles . . . 239
8.2 Integrales triples . . . 260

9 Campos escalares y vectoriales en una región del espacio $\mathbb{R}^3$ 267
9.1 Campos escalares . . . 267
9.2 Campos vectoriales . . . 271
9.3 Divergencia, gradiente y rotor . . . 278

10 Integrales de línea 289
10.1 Integrales de línea de primer género . . . 289
10.2 Integrales de línea de segundo género . . . 294
10.3 Campos conservativos . . . 299
10.4 El teorema de Green . . . 310

11 Superficies regulares y poliédricas en $\mathbb{R}^3$ 317
11.1 Superficies regulares . . . 317
11.2 Superficies poliédricas . . . 328
11.3 El espacio tangente a una superficie . . . 329
11.4 Orientación . . . 332
11.5 Formas diferenciales . . . 337
11.6 Áreas de regiones sobre superficies regulares . . . 338

11.7 Campos escalares y vectoriales en superficies 339

12 Integrales de superficie **345**
12.1 Integral de superficie de primer género 345
12.2 Integral de superficie de segundo género 348
12.3 El teorema de Gauss-Ostrogradskii 355
12.4 El teorema de Stokes 363

Bibliografía **369**

Índice analítico **371**

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo

1 Sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes

1.1 Sistemas de ecuaciones

Consideramos de inicio el problema de resolver un sistema de ecuaciones de 2×2 con coeficientes reales de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ son constantes reales y x, y son incógnitas.

◁ Despejamos a la variable x de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda.

De la relación

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

se obtiene que

$$a_{11}x = b_1 - a_{12}y$$

lo que implica que, si $a_{11} \neq 0$,

$$x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} \qquad (*)$$

Al sustituirla en la segunda ecuación del sistema se tiene que

$$b_2 = a_{21}\left(\frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}\right) + a_{22}y$$

que nos permite resolver para la variable y de la siguiente forma.

De la ecuación

$$b_2 = \frac{a_{21}(b_1 - a_{12}y) + a_{11}a_{22}y}{a_{11}}$$

se obtiene

$$a_{11}b_2 = a_{21}b_1 - a_{21}a_{12}y + a_{11}a_{22}y$$

de donde

$$a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = y(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

De esta manera, si

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

entonces podemos despejar a y, quedando

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Al sustituir esta igualdad en la ecuación $(*)$ se obtiene el valor de la incógnita x de la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} x &= \frac{b_1 - a_{12}\left(a_{11}b_2 - a_{21}b_1\right)/\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)}{a_{11}} \\ &= \frac{\left(b_1(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - a_{12}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1)\right)/\left(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\right)}{a_{11}} \\ &= \frac{a_{11}(b_1a_{22} - a_{12}b_2)}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21})} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

de donde,

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \quad \triangleright$$

Resumimos esta discusión en el siguiente lema.

LEMA 1.1. *Para el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas x, y*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

con a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 números reales, se tiene la solución dada por la pareja

$$x = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

$$y = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

sabiendo que $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

NOTACIÓN. Para la expresión $ad - bc$ definimos el arreglo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

mediante la igualdad

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

EJEMPLO 1.2. Para los números reales arbitrarios a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 tenemos

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} b_2 - a_{21} b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad \triangleright$$

En esta notación, las soluciones del sistema dado en el lema 1.1 se escriben

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Para tal sistema de ecuaciones se introduce el siguiente arreglo formado por los coeficientes que intervienen en el sistema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

al cual llamaremos la **matriz principal** del sistema.

Se obtienen de ésta las **submatrices** cuadradas (2×2):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

y a cada una de éstas se le asocia un número distinguido propio:

$$D = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D_x = \left| \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2$$

$$D_y = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}$$

llamado el **determinante** correspondiente.

Con esta última notación se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 1.3 (regla de Cramer). *Las soluciones x, y del sistema inicial se calculan por*

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

sabiendo que $D \neq 0$.

EJEMPLO 1.4. Resuelva el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

◁ La matriz principal del sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y las submatrices asociadas son

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

con determinantes correspondientes

$$D = \left|\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 = 13$$

$$D_x = \left|\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8$$

$$D_y = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

Por el corolario 1.3 se tiene que las soluciones del sistema de ecuaciones son

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{8}{13}, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{13} \triangleright$$

En la discusión mostrada al resolver un sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas nos encontramos con los conceptos auxiliares de solución que son las **matrices** y los **determinantes**. Estudiamos estos objetos matemáticos y sus propiedades en las próximas secciones. Más adelante volveremos al problema de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Ejercicios 1.1

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones escribiendo en cada caso todas las matrices asociadas.

a. $\begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ 2x - 4y = -5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -2x + 5y = -15 \\ 5x - 4y = 4 \end{cases}$

2. Determine los valores de α que permitan resolver el sistema de ecuaciones dado, utilizando el procedimiento visto.

a. $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ \alpha x - 4y = -5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + \alpha y = 1 \\ \alpha x + 2y = -5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ 2x + (\alpha - 1)y = -3 \end{cases}$

1.1.1 Matrices

Un arreglo de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde cada a_{ij} es un número real, se llamará **matriz real de dimensiones** $m \times n$. Esto es, el arreglo consta de m renglones y n columnas.

El i-ésimo renglón de la matriz sería

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

y se llamará i-ésimo **vector renglón**.

Al arreglo

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

se le denomina j-ésimo **vector columna**.

La **entrada** a_{ij} de la matriz se encuentra en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna (i denota los renglones, j denota las columnas).

EJEMPLO 1.5. La matriz real

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

es de (3×5).

◁ Mencionamos algunos elementos de la matriz

$$a_{34} = 7, \quad a_{15} = 8, \quad a_{23} = 2, \quad a_{32} = 3$$

El segundo vector renglón es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El tercer vector columna es

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \triangleright$$

Si en una matriz se tiene que $m = n$, esa matriz se llamará **matriz cuadrada**.

EJEMPLO 1.6. Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

son cuadradas.

A una matriz con entradas idénticamente nulas se llama **matriz nula** y se denota por

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

Ejercicios 1.1.1

1. Considere las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 11 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Para cada una de ellas

a. Determine su orden.

b. Diga el elemento que se encuentra en el primer renglón segunda columna.

c. Escriba el elemento 2, 3.

d. Escriba la segunda columna.

e. El tercer renglón.

2. Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine los elementos: a_{12}, a_{22}, a_{24}, b_{11}, b_{21}, b_{32}.

3. Construya la matriz $\mathbf{C} = (c_{ij})$ de orden 3×3 cuyas entradas satisfacen

   a. $c_{ij} = 2i - j$

   b. $c_{ij} = \dfrac{1}{i+j}$

   c. $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i \geq j \end{cases}$

4. Escriba la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$ que se indica

   a. De orden 2×4 tal que $a_{ij} = 2 - ij$

   b. De orden 4×3 tal que $a_{ij} = i^{j-2}$

5. Dos matrices $\mathbf{M} = (m_{ij})$, $\mathbf{R} = (r_{ij})$ son **iguales** si son del mismo orden, $m \times n$, y además $m_{ij} = r_{ij}$ para todo i, j. Determine los valores de a, b, c, d para que las parejas de matrices sean iguales

   a. $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 2a & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ c & d \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} 2a-b & c-d \\ c+3d & a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

1.1.2 Suma de matrices

En adelante denotaremos a las matrices reales por letras mayúsculas:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{M}, \ldots$$

y sus entradas reales por minúsculas

$$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \ldots, m_{ij}, \ldots$$

Dos matrices se pueden sumar si tienen las mismas dimensiones, es decir si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m\times n}$ entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ tiene sentido. De hecho, si las matrices tienen entradas $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ entonces su suma se define por la suma de entradas correspondientes, esto es,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

EJEMPLO 1.7. Sean las matrices reales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

◁ No tienen sentido la suma matricial $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ debido a que son de diferentes dimensiones. ▷

EJEMPLO 1.8. Sean las matrices reales

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

◁ Su suma tiene sentido y se calcula mediante

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & 3 \\ -3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \quad \triangleright$$

Ejercicios 1.1.2

1. Considere las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 11 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 \\ -7 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   a. Determine el orden de cada una de las matrices.

   b. Para aquellas parejas de matrices que sea posible, realice la suma de éstas.

   c. ¿Es importante el orden en que se hace la suma? ¿Por qué?

1.1.3 Multiplicación de matriz por escalar

Una cantidad **escalar** es un número real arbitrario y lo denotamos por las letras griegas

$$\lambda, \mu, \tau, \ldots$$

Dada la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, se define la nueva matriz de $m \times n$ obtenida al multiplicar por el escalar λ, $\lambda\mathbf{A}$, como aquella que se obtiene de multiplicar por λ cada una de sus entradas:

$$\lambda\mathbf{A} = \lambda\,(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

EJEMPLO 1.9. Ilustramos la operación anterior con los siguientes ejemplos.

1. Si tomamos los elementos

$$\lambda = 3, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\lambda\mathbf{A} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \\ -3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Al considerar los elementos

$$\mu = -1, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

se obtiene la matriz

$$\mu\mathbf{B} = -1\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIÓN 1.10. Es fácil verificar las siguientes afirmaciones

1. La matriz $\mathbf{O} = (0)$ (**nula**) es el elemento matricial que al sumarse a cualquier matriz no la altera:

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$$

2. Dada una matriz arbitraria $\mathbf{A}$ y $\lambda = -1$, entonces $-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$ es la matriz inversa aditiva de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{O}$$

EJEMPLO 1.11. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcule: $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $3\mathbf{A}$, $\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

◁ Mediante cálculos directos, obtenemos:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3\mathbf{A} = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \triangleright$$

DEFINICIÓN. Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz arbitraria de $m \times n$, se define la **matriz transpuesta** de $\mathbf{A}$ como la matriz de $n \times m$ que se obtiene de a_{ij} intercambiando renglones por columnas. Denotada por $\mathbf{A}^t$, sus entradas se definen por

$$\mathbf{A}^t = (a_{ji})$$

EJEMPLO 1.12. Mostramos la definición con los siguientes ejemplos.

1. Dada la matriz (2×3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

se tiene que su transpuesta es la matriz (3×2) dada por

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

2. Para el vector (o matriz) renglón

$$\mathbf{A} = (1 \quad -1 \quad 4)$$

se obtiene la matriz transpuesta dada por el vector columna

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. Para la matriz cuadrada de 2×2

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

su transpuesta es

$$\mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \triangleright$$

4. Las matrices

$$\mathbf{I_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen la propiedad: $\mathbf{I_2}^t = \mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_3}^t = \mathbf{I_3}$.

Cualquier matriz cuadrada que tenga la propiedad del ejemplo 1.12-4, recibe el nombre de **matriz simétrica**.

Ejercicios 1.1.3

1. Considere la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Calcule

a. $\mathbf{B}^t$

b. $\mathbf{B} - \mathbf{B}^t$

c. $\mathbf{B} + \mathbf{B}^t$

d. $(\mathbf{B} - \mathbf{B}^t)^t$

e. $(\mathbf{B} + \mathbf{B}^t)^t$

2. Considere la matriz

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Calcule

a. $\mathbf{E}^t$

b. $\mathbf{E} - \mathbf{E}^t$

c. $\mathbf{E} + \mathbf{E}^t$

d. $(\mathbf{E} - \mathbf{E}^t)^t$

e. $(\mathbf{E} + \mathbf{E}^t)^t$

3. Los dos ejercicios anteriores muestran en esos casos especiales que, para una matriz $\mathbf{A}$, la matriz $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ es una matriz simétrica. ¿Podría verificarlo para cualquier matriz de orden $n \times n$?

4. Para la matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ calcule $\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{M}$.

5. Para la matriz $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ calcule $\lambda \mathbf{I}_3 - \mathbf{R}$.

6. Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

calcule

a. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

b. $\mathbf{B} - \mathbf{A}$

c. $2\mathbf{A} - 6\mathbf{B}$

d. $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$

e. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t$

f. $\mathbf{A}^t - 2\mathbf{B}^t$

g. $\mathbf{B}^t - 2\mathbf{A}^t$

h. $\mathbf{A}^t + \frac{1}{2}\mathbf{B}^t$

1.1.4 Producto de matrices

Sean $A_{m\times n}, B_{n\times s}$ dos matrices reales. Se define su producto como la matriz $C_{m\times s}$ obtenida de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{m\times s} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{pmatrix} = (c_{ij}) = \mathbf{C}_{m\times s}$$

donde la entrada c_{ij} de $\mathbf{C}$ se obtiene de multiplicar los elementos del i-ésimo renglón de $\mathbf{A}$ con los de la j-ésima columna de $\mathbf{B}$, y realizar la suma de estos productos.

Esto es,

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}_{i\text{-ésimo renglón}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}}_{j\text{-ésima columna}}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

siendo que el producto del i-ésimo renglón de $\mathbf{A}$ con la j-ésima columna de $\mathbf{B}$ se define por la suma anterior.

Si denotamos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

donde

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B^1 & B^2 & \cdots & B^s \end{pmatrix}$$

siendo el vector columna

$$B^j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

entonces

$$c_{ij} = A_i B^j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

con el producto definido por la suma anterior.

En otras palabras, para poder multiplicar dos matrices $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n\times s}$ es necesario que el número n de columnas de $\mathbf{A}$ coincida con el número n de renglones de $\mathbf{B}$, y el resultado (producto) es una matriz de dimensiones $m \times s$: $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{m\times s}$

EJEMPLO 1.13. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 5}$$

Calcule **BA** y **AB**.

◁ Se obtiene lo siguiente:

1. $\mathbf{BA} = \mathbf{B}_{2\times 5}\ \mathbf{A}_{3\times 2}$, como $5 \neq 3$ no tiene sentido el producto.

2. $\mathbf{AB} = \mathbf{A}_{3\times 2}\ \mathbf{B}_{2\times 5}$, en este caso sí tiene sentido el producto y se realiza

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & -5 & 12 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A continuación mostramos el cálculo de algunos elementos c_{ij} del producto de las matrices dadas

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + 4 = 4$$

$$c_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 + 6 = 9$$

$$c_{14} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 - 2 = -5$$

$$c_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 + 2 = 2$$

$$c_{35} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

La matriz obtenida es de (3×5). ▷

EJEMPLO 1.14. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Calcule **AB** y **BA**.

◁ Para estas matrices tenemos

1. $\mathbf{AB} = \mathbf{A}_{2\times3}\mathbf{B}_{3\times2} = \mathbf{C}_{2\times2}$ es una matriz cuadrada de (2×2)

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

2. $\mathbf{BA} = \mathbf{B}_{3\times2}\mathbf{A}_{2\times3} = \mathbf{C}_{3\times3}$ es una matriz cuadrada de (3×3),

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \\ 0 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Dejamos al lector la verificación de los cálculos. ▷

El ejemplo precedente muestra que, en general, el producto de matrices no es conmutativo, es decir, en general $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

TEOREMA 1.15. *Sean las matrices* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m\times n}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\ell\times m}$

1. *Se tiene la siguiente regla de distribución del producto con la suma de matrices*

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$$

2. *Si* λ *es un número real (escalar) entonces*

$$\mathbf{C}(\lambda\mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{C})\mathbf{B}$$

3. *Si* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n\times s}$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k\times m}$ *son matrices reales entonces.*

$$\mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B}$$

◁ Damos a la matriz $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (A^j + B^j)$ en forma de columnas. Si escribimos la matriz $\mathbf{C} = (C_i)$ en forma de renglones, entonces

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (C_i)\,(A^j + B^j) = (C_i A^j) + (C_i\, B^j) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$$

Las otras propiedades son cálculos directos y se omiten. ▷

EJEMPLO 1.16. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times2} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

Verificamos que para estas matrices se cumplen las igualdades del teorema 1.15.

1. Se cumple la igualdad $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = (\mathbf{CA} + \mathbf{CB})$

◁ Primero realizamos la suma de matrices $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y luego calculamos $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\mathbf{CA} + \mathbf{CB} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y se verifica la relación. ▷

2. Ahora comprobamos la asociatividad $\mathbf{C(AB) = (CA)B}$

◁ Por un lado

$$\mathbf{C(AB)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado

$$\mathbf{(CA)B} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

con esto comprobamos la igualdad. ▷

La matriz

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

con la característica de tener 1's en la diagonal y los otros elementos nulos, tiene la propiedad de que si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m \times n}$ es una matriz arbitraria, entonces se cumple la igualdad

$$\mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$$

La matriz $\mathbf{I_n}$ se llamará **matriz identidad** de $n \times n$.

EJEMPLO 1.17. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

y sea $\mathbf{I} = \mathbf{I}_2$ la matriz identidad, entonces

$$\triangleleft \quad \mathbf{AI} = \mathbf{AI}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \quad \triangleright$$

Ejercicios 1.1.4

1. Para la matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ calcule
   a. $\mathbf{MM}^t$
   b. $\mathbf{M}^t\mathbf{M}$

2. Para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ calcule
   a. $\mathbf{AA}^t$
   b. $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$

3. Demuestre que para cualquier matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ siempre es posible calcular $\mathbf{AA}^t$ y $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$

4. Con la matriz
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
   calcule $\mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 6\mathbf{I}_2$

5. Dadas las matrices $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

SIB - UCE

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule

a. $\mathbf{C}^2$
b. $\mathbf{C}^3$
c. $\mathbf{DC}$
d. $\mathbf{CD}^t$
e. $\mathbf{DE}$
f. $\mathbf{ED}$
g. $(\mathbf{DE})^2$
h. $(\mathbf{ED})^2$

1.1.5 Determinantes de orden tres

En esta parte definimos, para las matrices cuadradas de dimensiones 2×2 y 3×3, un número característico: su **determinante**. Este concepto, así como sus propiedades, pueden ser generalizadas para matrices cuadradas de dimensiones mayores.

Para una matriz cuadrada de 2×2 real

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se definió el número característico, llamado su **determinante**, por la igualdad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Cambiando un poco la notación, lo anterior nos dice que para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

su determinante se calcula por la igualdad

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = |\mathbf{A}^t|$$

Esto nos dice que el determinante de una matriz $\mathbf{A}$ y el de su transpuesta son iguales, cuando son de orden 2×2.

EJEMPLO 1.18. El determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se calcula

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \quad \triangleright$$

Para una matriz real de 3×3

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

definimos de igual forma su determinante como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

donde los determinantes 2×2 en el desarrollo se calculan ordinariamente.

EJEMPLO 1.19. Calcule el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$\triangleleft$ Mediante la definición se obtiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(15-16) - 2(10-12) + 3(8-9)$$

$$= -1 + 4 - 3 = 0 \triangleright$$

Dado el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

los números a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2, 3$ se llaman los **elementos del determinante**.

Si se considera un elemento del determinante, se dice que el determinante de la matriz 2×2 que se obtiene al quitar el renglón y la columna donde se localiza tal elemento es su **menor** correspondiente.

EJEMPLO 1.20. Dado el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \circ 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

para el número 3, en el centro, su menor es

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 1.21. En el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 4 & -11 & 14 \\ \pi/2 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$$

para el elemento $\pi/2$, el menor es

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -11 & 14 \end{vmatrix}$$

Definimos la **paridad** de un elemento de un determinante como la suma del número del renglón y del número de la columna donde se encuentra.

EJEMPLO 1.22. En el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & \circ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

el elemento 4 tiene la paridad $= 3 + 2 = 5$.

En el mismo determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & \circ 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

el elemento 2 tiene la paridad $= 1 + 2 = 3$.

De manera similar, para

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \circ 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

el elemento 3 tiene la paridad $= 1 + 3 = 4$.

Definimos para un elemento a_{ij} de un determinante de 3×3 su **cofactor** como el número (que carga signos)

$$(-1)^{i+j} M_{ij}$$

donde i es el número de renglón, j el número de columna y M_{ij} es su menor.

EJEMPLO 1.23. Consideremos nuevamente el determinante del ejemplo 1.22.

1. En el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & \circ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

el elemento 4 tiene cofactor $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$

2. Análogamente, si

$$\begin{vmatrix} \circ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

entonces el elemento 1 tiene cofactor $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 16 = 1$

3. De igual manera, en el mismo determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & \circ 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

el elemento 2 tiene cofactor $A = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(10-12) = 2$

Observemos que inicialmente un determinante se desarrolla mediante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Si se definen

$$A_1 = \text{cofactor } (a_1) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$B_1 = \text{cofactor } (b_1) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$C_1 = \text{cofactor } (c_1) = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

en esta notación el determinante puede desarrollarse mediante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

Un resultado más general sobre el desarrollo de un determinante viene dado por el siguiente teorema, cuya prueba omitimos.

TEOREMA 1.24 (del desarrollo). *Cualquier determinante* 3×3 *se calcula como la suma de los elementos de un renglón o una columna por sus cofactores.*

◁ En particular, al desarrollar por la tercera columna,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3$$

donde

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

son los cofactores de c_1, c_2, y c_3, respectivamente. ▷

EJEMPLO 1.25. Calcule el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

desarrollándolo por la segunda columna.

◁ Utilizando las paridades y el teorema del desarrollo 1.24 se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2(-1+4) = -6 \quad \triangleright$$

EJEMPLO 1.26. Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

desarrollando mediante el segundo renglón.

$$\triangleleft \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2(10-12) + 3(5-9) - 4(4-6) = 4 - 12 + 8 = 0 \quad \triangleright$$

LEMA 1.27. *Si un determinante cambia los renglones por columnas, no se altera, esto es, el determinante de una matriz y el determinante de su transpuesta coinciden.*

◁ Por el teorema del desarrollo 1.24 tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \triangleright$$

LEMA 1.28. *Si en un determinante se intercambian dos renglones, o dos columnas, el signo del determinante se cambia.*

◁ Por el teorema del desarrollo 1.24 se tiene que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

$$= a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

Y al calcular el determinante, después de intercambiar los dos primeros renglones, obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2(b_1c_3 - c_1b_3) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + c_2(a_1b_3 - a_3b_1)$$

$$= -a_1(b_2c_3 - c_2b_3) + b_1(a_2c_3 - c_2a_3) - c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 1.29. Ya hemos calculado el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

◁ Si intercambiamos la primera y segunda columnas obtenemos, al desarrollar por la nueva primera columna

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1+4) = 6 \quad \triangleright$$

Del lema 1.28, para el determinante con dos renglones iguales, al intercambiarlos, obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

lo que implica que tal determinante es nulo debido a que 0 es el único número real que es igual a su negativo. Esto es, se cumple el siguiente resultado.

COROLARIO 1.30. *Si en un determinante se repiten dos renglones o dos columnas, el determinante vale cero.*

EJEMPLO 1.31. ◁ Por un cálculo directo, se tiene que el siguiente determinante con dos renglones iguales se anula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(4-1) - 3(4-1) = 0$$

Este determinante se desarrolló mediante la segunda columna y con esto comprobamos la validez del corolario 1.30. ▷

Tenemos también el siguiente resultado importante sobre el desarrollo de un determinante.

COROLARIO 1.32. *La suma de los productos pares de los elementos de una fila o renglón por los complementos algebraicos correspondientes es cero, es decir, para cualquier determinante se cumplen las igualdades*

$$\begin{aligned} a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 &= 0 \\ b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 &= 0 \\ c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 &= 0 \end{aligned}$$

◁ Consideremos un determinante arbitrario

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

entonces,

$$A_2 = - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \; C_2 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Por el corolario 1.30 el siguiente determinante se anula

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Al desarrollar tal determinante por el segundo renglón se tiene

$$\begin{aligned} 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= -a_1 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 \end{aligned}$$

lo que prueba la primera igualdad. Las otras se prueban de forma análoga. ▷

Observamos que para cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= \lambda a_1A_1 + \lambda b_1B_1 + \lambda c_1 = \lambda(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) \\ &= \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

lo cual se resume en el siguiente resultado.

LEMA 1.33. *Se puede factorizar del determinante un factor común de los elementos de un renglón (o una columna).*

Observamos que, utilizando el lema 1.33 con $\lambda = 0$, obtenemos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0a_1 & 0b_1 & 0c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

lo que nos conduce al siguiente corolario.

COROLARIO 1.34. *Si en un determinante un renglón (o una columna) tiene todos sus elementos cero, entonces su valor es cero.*

Sea λ un número real tal que $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2$, entonces de acuerdo al lema 1.33 y al Corolario 1.30,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Esto implica el siguiente resultado.

COROLARIO 1.35. *Si en un determinante un renglón (o una columna) es proporcional a otro renglón (o a otra columna), entonces su valor es cero.*

EJEMPLO 1.36. ◁ El determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 12 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4(1) & 4(3) & 4(4) \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4(0) = 0$$

en virtud de que tiene dos renglones repetidos. ▷

Sean $\lambda_1, \beta_1, \gamma_1$ números reales arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 + \lambda_1 & b_1 + \beta_1 & c_1 + \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= (a_1 + \lambda_1)A_1 + (b_1 + \beta_1)B_1 + (c_1 + \gamma_1)C_1 \\ &= (a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) + (\lambda_1A_1 + \beta_1B_1 + \gamma_1C_1) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Resumimos lo anterior en el siguiente resultado.

COROLARIO 1.37. *Si en un determinante un renglón (o una columna) los elementos son sumas, entonces tal determinante puede ser descompuesto como la suma de los determinantes de los sumandos correspondientes (respetando factores).*

EJEMPLO 1.38. Calcule el determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

◁ Claramente se puede descomponer en la siguiente cadena

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2 & 2+3 & 3+3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

donde los determinantes en la última suma se han calculado, el primero desarrollando por la primera columna, y el segundo por la segunda columna. ▷

COROLARIO 1.39. *El valor del determinante no cambia cuando a un renglón (o una columna) se le agregan proporcionales de otro renglón (columna) paralelo.*

◁ Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un escalar arbitrario, entonces, ya que un determinante con un renglón repetido es cero, tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 & c_1 + \lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \triangleright$$

Todos los resultados obtenidos del lema 1.27 al corolario 1.39 se llaman **transformaciones elementales** de los determinantes.

EJEMPLO 1.40. Calcule el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

◁ Con ayuda del Corolario 1.39 éste puede calcularse mediante la cadena de igualdades

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2-2(1) & 1-2(2) & 2-2(3) \\ 3-3(1) & 2-3(2) & 1-3(3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8 \quad \triangleright$$

Estos resultados sobre transformaciones elementales de los determinantes se pueden generalizar para órdenes (dimensiones) más grandes. Aquí hemos detallado la teoría apenas para matrices cuadradas de dimensiones 2 y 3.

Tenemos el siguiente resultado para el cálculo del determinante de un producto de matrices cuadradas.

TEOREMA 1.41 (Determinante de un producto). *Sean* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{3\times3}$. $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{3\times3}$ *dos matrices cuadradas de* 3×3, *entonces*

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

Esto es, el determinante de un producto es el producto de los determinantes.

◁ Es un cálculo directo y omitimos su demostración. ▷

EJEMPLO 1.42. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Compruebe la igualdad $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

◁ Puede verificarse que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18, \quad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

de donde, $|\mathbf{A}||\mathbf{B}| = (-18)(5) = -90$

Por otro lado,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 2 & 14 & 11 \\ 3 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante se calcula

$$|\mathbf{AB}| = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 2 & 14 & 11 \\ 3 & 11 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 2-2(1) & 14-2(11) & 11-2(11) \\ 3-3(1) & 11-3(11) & 14-3(11) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 0 & -8 & -11 \\ 0 & -22 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -11 \\ -22 & -19 \end{vmatrix} = 8(19) - 11(22) = -90$$

que prueba la igualdad mencionada. ▷

Ejercicios 1.1.5

Calcule los determinantes de los ejercicios 1–8.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
mediante la segunda columna.

2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$
mediante el tercer renglón.

3. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$
mediante la primera columna.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$
donde φ es un ángulo arbitrario.

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$

Calcule el determinante de cada una de las matrices de los ejercicios 9–13.

9. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 8 & 14 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1-t^2 & 1 & t \\ 0 & t^3 & 1 \\ 1 & 2+t & t^2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} e^t & 2t^2+1 & t^3 \\ e^t & 4t & 3t^2 \\ e^t & 4 & 6t \end{pmatrix}$

Si sabemos que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4$$

calcule el determinante de cada una de las matrices de los ejercicios 14–17.

14. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$

15. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+4c_1 & b_2+4c_2 & b_3+4c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

Si sabemos que $|\mathbf{A}| = 2$, $|\mathbf{B}| = -3$ encuentre lo que se pide en los ejercicios 18–23.

18. $|\mathbf{AB}| =$

19. $|\mathbf{BA}| =$

20. $|\mathbf{ABA}| =$

21. $|\mathbf{A}^2| =$

22. $|\mathbf{B}^3| =$

23. Para $n \in \mathbb{N}$, $|\mathbf{A}^n| =$

24. Calcule $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

25. Calcule $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2|$ para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

26. Calcule $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$

1.1.6 La inversa de una matriz

Damos una forma de calcular la inversa de una matriz cuadrada de 2×2, así como una condición necesaria y suficiente de su existencia.

Una matriz cuadrada

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es **invertible** si existe una matriz

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

tal que $\mathbf{I} = \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, donde

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz identidad de 2×2.

La matriz $\mathbf{B}$ se denota por $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ y se llama la **matriz inversa** de $\mathbf{A}$.

TEOREMA 1.43. *Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{2\times 2}$ es tal que $|\mathbf{A}| \neq 0$, entonces $\mathbf{A}$ es invertible.*

◁ Buscamos una matriz de 2×2

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

tal que $\mathbf{I} = \mathbf{BA}$, es decir, buscamos números reales x, y, z, w tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & bz+dw \end{pmatrix}$$

lo que nos lleva al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} ax + cy = 1 \\ bx + dy = 0 \\ az + cw = 0 \\ bz + dw = 1 \end{cases}$$

Resolvemos primero, mediante el método visto en la sección 1.1, el sistema de 2×2

$$\begin{cases} ax + cy = 1 \\ bx + dy = 0 \end{cases}$$

Por hipótesis, tenemos que

$$D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

Al calcular los otros determinantes se obtiene

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{vmatrix} = d, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$$

lo que implica que

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{d}{ad-bc}, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-b}{ad-bc}$$

En forma análoga, se obtienen las otras incógnitas

$$z = \frac{c}{bc-ad} = \frac{-c}{ad-bc}, \qquad w = \frac{-a}{bc-ad} = \frac{a}{ad-bc}$$

De esta manera, la matriz inversa de $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \triangleright$$

EJEMPLO 1.44. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$ Calculamos el determinante de $\mathbf{A}$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Por el teorema 1.43, $\mathbf{A}$ es invertible, y su inversa se calcula por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificamos esta afirmación realizando el producto de las matrices

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad \triangleright$$

Ejercicios 1.1.6

1. Encuentre la inversa, si existe, de la matriz dada.

   a. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

   b. $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

   c. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

1.1.7 Sistemas de tres ecuaciones lineales

En esta parte generalizamos el resultado sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales obtenido en el lema 1.1, para sistemas lineales de 3 ecuaciones con tres incógnitas.

Consideremos ahora el sistema de tres ecuaciones lineales con coeficientes reales con tres incógnitas x, y, z

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$\triangleleft$ Introducimos, de igual forma que para los sistemas lineales de 2×2, los determinantes asociados

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3$$

Si multiplicamos el primer renglón del sistema por A_1, el segundo renglón del sistema por A_2, el tercer renglón del sistema por A_3, obtenemos que

$$\begin{aligned} a_1A_1x + b_1A_1y + c_1A_1z &= d_1A_1 \\ a_2A_2x + b_2A_2y + c_2A_2z &= d_2A_2 \\ a_3A_3x + b_3A_3y + c_3A_3z &= d_3A_3 \end{aligned}$$

Así, al sumar los miembros derechos e izquierdos respectivos se obtiene

$$\begin{aligned} &(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)y + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)z \\ &= d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 \end{aligned}$$

El teorema 1.24 implica que la igualdad anterior se escribe como

$$Dx + 0y + 0z = D_x$$

de donde, si $D \neq 0$, entonces, al despejar x, se consigue el valor

$$x = \frac{D_x}{D}$$

De igual forma, podemos obtener y y z mediante un procedimiento similar (suponiendo que $D \neq 0$)

$$y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

Hemos obtenido el siguiente resultado importante.

TEOREMA 1.45 (regla de Cramer). *Para el sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas dado, se tiene una tripleta de soluciones dadas por las igualdades*

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

suponiendo que $D \neq 0$.

EJEMPLO 1.46. Resolvemos utilizando la regla de Cramer el sistema lineal

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

◁ Calculamos los determinantes del sistema

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2-2(1) & 3-2(2) & 1-2(3) \\ 3-3(1) & 1-3(2) & 2-3(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = 7 - 25 = -18$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

Por la regla de Cramer se obtiene finalmente que

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{-18} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-1}{-18} = \frac{1}{18} \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-7}{-18} = \frac{7}{18} \triangleright$$

A continuación, iniciamos el estudio de aquellos sistemas de ecuaciones de 3×3 (tres ecuaciones con tres incógnitas), donde el determinante del sistema se anula, pero se obtienen soluciones imponiendo una condición adicional.

Consideremos el mismo sistema inicial

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

suponiendo que, en este caso, el determinante principal se anula, esto es,

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

y, además, que el determinante tiene el menor de 2×2

$$D = C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Consideremos entonces el sistema de 2×3 dado por las dos primeras ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Tomamos a la variable z como un parámetro t, esto significa que hacemos $z = t$ y resolvemos el sistema de 2×2

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 - c_1t \\ a_2x + b_2y = d_2 - c_2t \end{cases}$$

para las variables x y y mediante la regla de Cramer, en virtud que el determinante principal del sistema $D = a_1b_2 - a_2b_1$ no se anula, por hipótesis.

Calculemos los otros determinantes,

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} d_1 - c_1t & b_1 \\ d_2 - c_2t & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} t = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= A_3t + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ D_y &= \begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1t \\ a_2 & d_2 - c_2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} t = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} t + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \\ &= B_3t + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De esta manera, por la regla de Cramer, las soluciones del sistema (1.1) vienen dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{A_3t + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{A_3t + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{C_3} \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{B_3t + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{C_3} \\ z &= t \end{aligned}$$

Afirmamos que estas soluciones resuelven la tercera ecuación también cuando el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

En efecto, al sustituir los valores obtenidos para x y y en la tercera ecuación se tiene,

$$a_3x + b_3y + c_3z = a_3\left(\frac{A_3t + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{C_3}\right) + b_3\left(\frac{B_3t + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{C_3}\right) + c_3t$$

$$= \frac{a_3A_3t + b_3B_3t + c_3C_3t}{C_3} + \frac{a_3\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{C_3}$$

$$= \frac{\tilde{D}t}{C_3} + \frac{a_3\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} - d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{C_3} + \frac{d_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{C_3}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{C_3} + \frac{d_3C_3}{C_3} = -\frac{1}{C_3}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + d_3 = d_3$$

El hecho de que ambos determinantes

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

se anulan, se entiende, según el cálculo anterior, de que el sistema inicial de 3×3 es **compatible**. Para este caso, las soluciones de tal sistema vienen dadas por la tripleta mencionada.

EJEMPLO 1.47. Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = -2 \\ 2x \quad + 4z = -1 \end{cases}$$

◁ Calculamos en primer lugar el determinante principal

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(4) + 4(-2) = 0$$

Después verificamos la condición para el menor

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Posteriormente se pasa a verificar la compatibilidad del sistema; calculamos, si se va a utilizar $z = t$ como parámetro

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - (-2) = 0$$

Según el método sugerido, consideramos el primer par de ecuaciones (donde $D \neq 0$) y hacemos $z = t$, obteniendo el sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 - t \\ x - y = -2 - 3t \end{cases}$$

que resolvemos utilizando (1.1).

$$D_x = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -2-3t & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} t & 1 \\ 3t & -1 \end{vmatrix} = 1 - (-t - 3t) = 1 + 4t$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1 & -2-3t \end{vmatrix} = -2 - 3t - (1 - t) = -2 - 3t - 1 + t = -3 - 2t$$

De esta manera, las soluciones al sistema inicial son

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1+4t}{-2} = -\frac{1}{2} - 2t$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-3-2t}{-2} = \frac{3}{2} + t$$
$$z = t$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es un número real arbitrario. ▷

Lo anterior se puede resumir en el siguiente resultado.

LEMA 1.48. *Considere el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

que satisface las condiciones

1. *El determinante principal se anula:*

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

2. *El menor* (2×2) *de* $\tilde{D}$

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

3. *El determinante de compatibilidad se anula*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

Se tiene un **sistema parametrizado** *de soluciones*

$$x = A_3t + \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}}{C_3}; \quad y = B_3t + \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{C_3}; \quad z = t$$

donde $t \in \mathbb{R}$ *es un número real arbitrario (véase la sección 2.7).*

Observamos que el método para resolver este tipo de ecuaciones de 3×3 consiste en ignorar la tercera ecuación y resolver paramétricamente el sistema inicial de 2×3. La tercera ecuación se resuelve automáticamente con las soluciones del sistema de 2×3, sabiendo que el determinante de compatibilidad se anula.

Ejercicios 1.1.7

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 3 \\ 2x + y - 3z = 9 \\ x + 4y - 5z = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 1 \\ 4x + 5y + 4z = 4 \\ x + 3y + 6z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 4x + y + z = 4 \end{cases}$

1.1.8 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

En esta subsección iniciamos el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales **homogéneos**, esto es, aquellos cuyos términos independientes son cero.

El procedimiento de solución de estos sistemas sigue el patrón de solución de los sistemas lineales en el lema 1.48, por ejemplo, considérese el problema de resolver el sistema homogéneo de 2×2

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 12x + 8y = 0 \end{cases}$$

Es claro que cuando $x = 0$, $y = 0$ se tiene una solución del sistema, llamada la **solución trivial**.

Al tratar de utilizar la regla de Cramer vemos que no es posible, pues

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 12 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0.$$

Procedemos entonces a ignorar una de las ecuaciones y nos quedamos, por ejemplo, con la primera:

$$3x + 2y = 0$$

Al despejar la variable y, obtenemos

$$y = -\frac{3}{2}x$$

Sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario y pongamos $x = t$, entonces $y = -\frac{3}{2}t$.

Afirmamos que estos valores de x y y, en términos de t, también resuelven la otra ecuación.

$\lhd$ En efecto por una simple sustitución se tiene

$$12x + 8y = 12t + 8\left(-\frac{3}{2}t\right) = 12t - 12t = 0 \quad \rhd$$

El método utilizado en este ejemplo se puede generalizar para cualquier sistema (2×2)

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

donde $ad - bc = 0$.

Consideremos ahora el sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Una simple sustitución prueba que $x = y = z = 0$ es una solución trivial de (1.2) (**solución trivial**), pero nos interesa encontrar soluciones no triviales del sistema. Para ello supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z \neq 0$. Entonces, del sistema (1.2) se obtiene

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_1y = -c_2z \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} a_1\left(\frac{x}{z}\right) + b_1\left(\frac{y}{z}\right) = -c_1 \\ a_2\left(\frac{x}{z}\right) + b_2\left(\frac{y}{z}\right) = -c_2 \end{cases}$$

Poniendo $v = \frac{x}{z}$, $w = \frac{y}{z}$ se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a_1v + b_1w = -c_1 \\ a_2v + b_2w = -c_2 \end{cases}$$

el cual se resuelve por la regla de Cramer si

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

◁ Primero encontramos

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{pmatrix}$$

la matriz principal del sistema. Después, calculamos los determinantes asociados

$$D_v = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix} = -c_1 b_2 + b_1 c_2$$

$$D_w = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = -a_1 c_2 + c_1 a_2$$

Ya que $v = \dfrac{D_v}{D}$, $w = \dfrac{D_w}{D}$ tenemos entonces que

$$\frac{x}{z} = \frac{D_v}{D}, \quad \frac{y}{z} = \frac{D_w}{D}$$

Por lo tanto, para que x, y, z sean soluciones del sistema, se deberá cumplir la cadena de igualdades

$$t = \frac{x}{D_v} = \frac{z}{D} = \frac{y}{D_w}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \triangleright$$

De esta manera, se obtiene el siguiente resultado.

LEMA 1.49. *Todas las soluciones del sistema lineal homogéneo (1.2) se obtienen por*

$$\begin{cases} x = D_v\, t = A_3\, t \\ y = D_w\, t = B_3\, t \\ z = D\, t \ = C_3\, t \end{cases}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ *y*

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_v = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_w = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 1.50. Resolver el sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y - 6z = 0 \end{cases}$$

◁ Formamos la matriz del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

lo que indica que los determinantes asociados sean

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 8 = 13$$

$$D_v = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 12 = -3$$

$$D_w = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 12 = 18$$

De esta manera, la solución que se obtiene es

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = 18t \\ z = 13t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Para ilustrar, si $t = 1$, entonces $x = -3$, $y = 18$, $z = 13$ es solución del sistema lineal de ecuaciones.
Si $t = \sqrt{2}$, se tendría en este caso que la tripleta $(x = -3\sqrt{2}, y = 18\sqrt{2}, z = 13\sqrt{2})$ resuelve también tal sistema. ▷

Consideremos ahora el **sistema lineal homogéneo** de 3×3

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

donde claramente $x = y = z = 0$ es una **solución trivial** del sistema.

Nos interesa el caso cuando tal sistema tiene soluciones no triviales. Procedemos a buscar tales soluciones no triviales mediante un método similar al utilizado para resolver el sistema lineal del tipo mostrado en el lema 1.48.

◁ Habíamos obtenido las ecuaciones

$$Dx = D_x, \quad Dy = D_y, \quad Dz = D_z$$

en la discusión de la regla de Cramer (teorema 1.45).

Para este caso

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = 0, \quad D_z = 0$$

lo que implica que

$$Dx = 0, \quad Dy = 0, \quad Dz = 0$$

De aquí que, si al menos una de las variables x, y o z es diferente de cero, tendríamos necesariamente que $D = 0$.

Recíprocamente, si $D = 0$, entonces alguna de las variables x, y o z es diferentes de cero. ▷

Se obtiene entonces el siguiente resultado.

TEOREMA 1.51. *Para que un sistema lineal homogéneo de 3×3 tenga soluciones no triviales es necesario y suficiente que $D = 0$.*

Ahora supongamos que $D = 0$ y que hay un menor 2×2 de D diferente de cero. Esto es, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por el lema 1.49 se tiene que el sistema homogéneo dado por el par de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

tiene solución

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t = A_3\,t, \qquad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} t = B_3\,t, \qquad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t = C_3\,t$$

Afirmamos que x, y, z soluciones de este sistema resuelven la tercera ecuación.

En efecto, al sustituir los valores de x, y, z se cumple

$$a_3x + b_3y + c_3z = a_3(A_3t) + b_3(B_3t) + c_3(C_3t) = (a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3)t = Dt = 0$$

debido a que $D = 0$ por hipótesis.

Por lo tanto, las relaciones

$$x = A_3t \quad y = B_3t \quad z = C_3t$$

para $t \in \mathbb{R}$ arbitrario resuelven el sistema lineal homogéneo de 3×3. ▷

EJEMPLO 1.52. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

◁ Ya que el tercer renglón de la matriz asociada es la suma de los dos primeros tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1+2 & 2-1 & -3+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pues en cada determinante se repiten renglones.

Por otro lado, el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0,$$

lo que nos dice que podemos considerar el par de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Utilizando el lema 1.49 se tiene que

$$x = A_3\, t = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} t - (2-3)t = -t$$

$$y = B_3\, t = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} t = -(1+6)t = -7t$$

$$z = C_3\, t = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} t = (-1-4)t = -5t$$

es decir, la solución del sistema viene dado por la tripleta

$$\begin{cases} x = -t \\ y = -7t \\ z = -5t \end{cases}$$

donde el parámetro $t \in \mathbb{R}$ es arbitrario.

Para ilustrar, si $t = 1$, entonces $x = -1$, $y = -7$ y $z = -5$ resuelven el sistema lineal dado. ▷

Ejercicios 1.1.8

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneos.

1. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y - 6z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \end{cases}$

1.2 El método de Gauss-Jordan

Damos en esta parte otra metodología para resolver sistemas de ecuaciones lineales, utilizando propiedades aritméticas de las matrices con entradas reales. Como se observará, este método no apela en ningún momento a los determinantes menores del sistema, ni al orden mismo de éste, es decir, el número de ecuaciones puede ser arbitrario, así como el número de incógnitas que intervienen.

EJEMPLO 1.53. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

◁ Primero modificamos el orden del sistema intercambiando las primeras ecuaciones

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

Multiplicamos por -3 la primera y la sumamos a la segunda

$$\begin{array}{r} -3x - 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ \hline 0x - y + 4z = 5 \end{array}$$

obteniendo el par de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 4z = 5 \end{cases}$$

Después, multiplicamos por -4 la primera ecuación del sistema inicial y la sumamos a la tercera ecuación del mismo sistema

$$\begin{array}{r} -4x - 4y + 4z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \\ \hline 0x - 5y + 9z = 3 \end{array}$$

obteniendo el sistema lineal

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -5y + 9z = 3 \end{cases}$$

De esta manera, hemos obtenido el sistema equivalente de 3×3:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 4z = 5 \\ -5y + 9z = 3 \end{cases}$$

observamos que la variable x no aparece ni en la segunda ni en la tercera ecuación.

De este sistema, omitimos la primera ecuación y resolvemos el sistema 2×2

$$\begin{cases} -y + 4z = 5 \\ -5y + 9z = 3 \end{cases}$$

que tiene sólo a las variables x, y.

Si multiplicamos por -5 la primera ecuación de este sistema y la sumamos a la segunda ecuación, obtenemos la nueva ecuación

$$\begin{array}{r} 5y - 20z = -25 \\ -5y + 9z = 3 \\ \hline 0y - 11z = -22 \end{array}$$

De esta forma, nos queda entonces el **sistema escalonado**

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 4z = 5 \\ -11z = -22 \end{cases}$$

cuyo número de variables va disminuyendo en cada ecuación.

Resolviendo la tercera ecuación final para z se obtiene que

$$z = \frac{-22}{-11} = 2$$

Al sustituir, en la segunda ecuación escalonada, el valor de z, se tiene que

$$5 = -y + 4z = -y + 4(2) = -y + 8$$

de donde, $y = 3$.

Finalmente, se sustituyen los valores $y = 3$, $z = 2$ en la primera ecuación del sistema escalonado y se obtiene

$$0 = x + y - z = x + 3 - 2 = x + 1$$

lo que nos lleva a que $x = -1$.

En otras palabras, la solución del sistema es $x = -1$, $y = 3$, $z = 2$. ▷

OBSERVACIÓN 1.54. Si en el sistema dado se introduce la matriz principal

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

donde la última columna está formada por los elementos independientes del sistema, el proceso anterior se logra, también, escalonando tal matriz mediante **operaciones elementales** (al igual que en los determinantes) como se muestra:

$$\triangleleft \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad R_2 \leftrightarrow R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -3R_1 + R_2 \to R_2 \\ -4R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 5 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-5R_2 + R_3 \to R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{pmatrix} \quad \triangleright$$

La última matriz nos genera el nuevo sistema lineal escalonado

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 4z = -5 \\ -11z = -22 \end{cases}$$

el cual se resuelve hacia atrás como en el ejemplo 1.53.

Damos ahora la explicación de las operaciones elementales realizadas en las matrices mencionadas en cada paso.

La expresión $R_1 \leftrightarrow R_2$ denota la operación elemental de intercambiar el primer y segundo renglón en la primera equivalencia de matrices. La operación de multiplicar por -3 el primer renglón y sumarlo al segundo para asignarlo al segundo renglón en la segunda equivalencia de matrices, se denota por $-3R_1 + R_2 \to R_2$. Análogamente. la expresión $-4R_1 + R_3 \to R_3$ para la segunda equivalencia de matrices denota la operación de multiplicar por -4 el primer renglón, sumarle el tercero, y asignar el resultado a la nueva matriz equivalente como un tercer renglón. Las otras expresiones designan operaciones semejantes.

EJEMPLO 1.55. Resuelva el sistema lineal de ecuaciones de (5×3) dado por

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

$\triangleleft$ Vamos a utilizar el mismo método que en el ejemplo 1.53, y para ello formamos la matriz del sistema y aplicamos operaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 \to R_2 \\ R_5 \to R_3 \\ \\ R_2 \to R_5 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \\ -2R_1 + R_4 \to R_4 \\ -3R_1 + R_5 \to R_5 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \\ 0 & -1 & -5 & -23 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ -R_2 + R_3 \to R_3 \\ -R_2 + R_4 \to R_4 \\ -4R_2 + R_5 \to R_5 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad -3R_3 + R_4 \to R_4 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se obtiene la ecuación (**inconsistente**) del cuarto renglón de la matriz final

$$0 = 0x + 0y + 0z = -6$$

el sistema no es **compatible**, y por lo tanto el sistema inicial de 5×3 no tiene solución. $\triangleright$

EJEMPLO 1.56. Resuelva el sistema lineal de (5×3)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ x + y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

que se obtiene del sistema del ejemplo 1.55 al cambiar el signo de z en la cuarta ecuación.

◁ Formamos la matriz del sistema y utilizamos el método anterior para escalonar la matriz, como se muestra

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \\ -2R_1 + R_4 \to R_4 \\ -R_1 + R_5 \to R_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{4}R_2 + R_3 \to R_3 \\ -\frac{1}{4}R_2 + R_1 \to R_4 \\ -\frac{1}{4}R_2 + R_5 \to R_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ R_3 \leftrightarrow R_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -5R_3 + R_4 \to R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva al sistema escalonado de 3×3,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -4y - 8z = 11 \\ -z = -3 \end{cases}$$

el cual de inmediato nos da el valor de $z = 3$.

Al sustituir el valor de z en la segunda ecuación, se tiene $-4y - 8(3) = -32$ de donde, $y = 2$.

Finalmente, si se sustituyen estos valores en la primera ecuación de este último sistema se tiene $14 = x + 2(2) + 3(3) = x + 13$, con lo que $x = 1$.

Por lo tanto, la solución del sistema inicial de 5×3 viene dado por

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3. \quad \triangleright$$

Al método mostrado en los ejemplos precedentes se le llama **método de Gauss-Jordan** para la solución de un sistema de ecuaciones de $(m \times n)$. Tal método consiste en escalonar mediante **operaciones elementales** a una matriz para obtener una matriz equivalente que defina un sistema de ecuaciones lo más simple posible.

EJEMPLO 1.57. Resuelva mediante el método de Gauss-Jordan el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 5y + 4z + 3w = 1 \\ 2x - y + 2z - w = 0 \\ 5x + 3y + 8z + w = 1 \end{cases}$$

◁ La matriz del sistema se escalona mediante el siguiente proceso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -5R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ -2R_2 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta última matriz define al nuevo sistema de 2×4

$$\begin{cases} x + 5y + 4z + 3w = 1 \\ -11y - 6z - 7w = -2 \end{cases}$$

Resolvemos tal sistema por determinantes, al efectuar el despeje de términos en las variables x, y:

$$\begin{cases} x + 5y = 1 - (4z + 3w) \\ -11y = -2 + (6z + 7w) \end{cases}$$

Primero calculamos los determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 - (4z + 3w) & 5 \\ -2 + (6z + 7w) & -11 \end{vmatrix} = -1 + 14z - 2w$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 - (4z + 3w) \\ 0 & -2 + (6z + 7w) \end{vmatrix} = -2 + 6z + 7w$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1 + 14z - 2w}{-11} = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}z + \frac{2}{11}w$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2 + 6z + 7w}{-11} = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}z - \frac{7}{11}w$$

Para dar una **solución paramétrica** al sistema utilizamos dos variables auxiliares, $w = u$, $z = v$, lo que nos lleva a que la solución, **biparamétrica**, se escriba

$$\begin{cases} w = u \\ z = v \\ x = \dfrac{1}{11} - \dfrac{14}{11}v + \dfrac{2}{11}u \\ y = \dfrac{2}{11} - \dfrac{6}{11}v - \dfrac{7}{11}u \end{cases} \quad \triangleright$$

El método de Gauss-Jordan involucra el concepto de **matrices semejantes**.

DEFINICIÓN 1.58. Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matriz real de $(n \times m)$, por una **operación elemental** en $\mathbf{A}$ entendemos la suma en alguno de sus renglones (columnas) de un múltiplo de un renglón paralelo (o columna paralela), un intercambio de renglones (o de columnas), o suponiendo que ningún renglón (o columna) se multiplicó por un escalar el producto de un renglón (o columna) por un escalar.

EJEMPLO 1.59. En la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se multiplica el primer renglón por -2 y se suma al segundo renglón asignando el resultado al segundo renglón, denotado por $-2R_1 + R_2 \to R_2$, se obtiene la matriz semejante

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

como en el ejemplo 1.57.

Los ejemplos anteriores que muestran el método de Gauss-Jordan ilustran un buen número de operaciones elementales en las matrices.

DEFINICIÓN 1.60. Dos matrices del mismo orden $(m \times n)$ se dicen ser **semejantes** si una se obtiene de la otra por un número finito de operaciones elementales.

Cuando una matriz cuadrada $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n\times n}$ es semejante a otra matriz $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n\times n}$, suponiendo que ningún renglón (o columna) se multiplicó por un escalar, el corolario 1.39 implica el siguiente resultado.

LEMA 1.61. *Si* **A** *es semejante a* **B**, *entonces sus determinantes difieren apenas por un signo.*

◁ Esto se sigue de que pudo haber intercambio de renglones. ▷

De aquí se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO 1.62. *Si* **A** *es semejante a* **B** *y en las operaciones elementales no hay intercambio de renglones, entonces, sus determinantes coinciden, esto es:*

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$$

EJEMPLO 1.63. Consideremos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

◁ Después de las operaciones elementales siguientes, se tiene

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -3R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Con lo que, por el corolario 1.62, tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8$$

Esto se puede calcular también mediante la cadena de igualdades

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2(1)+2 & -2(2)+1 & -2(3)+2 \\ -3(1)+3 & -3(2)+2 & -3(3)+1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8$$

Estas igualdades involucran (salvo signos) a las matrices semejantes, donde no se ha alterado por factor alguno a los renglones, ni se han permutado. ▷

Utilizando el método de Gauss-Jordan para escalonar una matriz, procedemos a encontrar un método del cálculo de inversa multiplicativa de una matriz cuadrada, cuando es posible.

Consideremos un sistema de ecuaciones de (3×3),

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Debido a la regla de multiplicación de matrices, tal sistema se puede escribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Esto es, si denotamos por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

lo anterior se escribiría simplemente por la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{d}$$

Así, el sistema de ecuaciones inicial se transforma en la ecuación matricial mencionada.

EJEMPLO 1.64. Considérese el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ 6x - 7z + 2z = 0 \\ 4x + y - 11z = -2 \end{cases}$$

◁ Este sistema se puede escribir como la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \triangleright$$

Consideremos entonces un sistema matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{d}$$

asociado a un sistema de ecuaciones, donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de 3×3.

Si existiera una **matriz inversa** $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$, esto es, una matriz $\mathbf{B}$ tal que

$$\mathbf{I} = \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$$

entonces del sistema matricial se obtiene, al multiplicar por $\mathbf{B}$ la izquierda de cada miembro, la relación

$$\mathbf{BAX} = \mathbf{Bd}$$

Esto nos lleva, en virtud que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, a que se cumpla la igualdad

$$\mathbf{IX} = \mathbf{Bd}$$

Por otro lado, la matriz identidad $\mathbf{I}$ satisface que

$$\mathbf{IX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{X}$$

lo que nos lleva finalmente a la ecuación matricial

$$\mathbf{X} = \mathbf{Bd}$$

que indica los valores de x, y, z que resuelven el sistema lineal dado. Esto pues, si la matriz $\mathbf{B}$ se escribe por

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación matricial $\mathbf{X} = \mathbf{Bd}$ que resuelve el sistema se escribe como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 d_1 + \beta_1 d_2 + \gamma_1 d_3 \\ \alpha_2 d_1 + \beta_2 d_2 + \gamma_2 d_3 \\ \alpha_3 d_1 + \beta_3 d_2 + \gamma_3 d_3 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x = \alpha_1 d_1 + \beta_1 d_2 + \gamma_1 d_3 \\ y = \alpha_2 d_1 + \beta_2 d_2 + \gamma_2 d_3 \\ z = \alpha_3 d_1 + \beta_3 d_2 + \gamma_3 d_3 \end{cases}$$

Esta metodología de solución de un sistema de (3×3) nos conduce al problema de calcular la **matriz inversa** $\mathbf{B}$ de la matriz principal del sistema $\mathbf{A}$, en caso de que tal matriz inversa exista. Una condición de existencia de la matriz $\mathbf{B}$ se obtiene a través de la generalización natural del teorema 1.43 para el caso de matrices 3×3.

TEOREMA 1.65. *Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{3\times3}$ es tal que su determinante no se anula, es decir, $|\mathbf{A}| \neq 0$, entonces $\mathbf{A}$ es invertible. En otras palabras, existe una matriz $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{3\times3}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I} = \mathbf{BA}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de 3×3.*

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

EJEMPLO 1.66. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

◁ Un cálculo directo nos muestra que

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -9 + 8(1) = -1,$$

lo que nos dice que **A** es una **matriz invertible**. ▷

EJEMPLO 1.67. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

◁ Al calcular su determinante mediante operaciones elementales se tiene

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

lo que hace que **A** no sea una matriz invertible. ▷

Analicemos por un momento el sistema matricial asociado al sistema de ecuaciones

$$\mathbf{AX} = \mathbf{d}$$

y la ecuación matricial de soluciones

$$\mathbf{X} = \mathbf{Bd}$$

Estas podrían escribirse por la pareja

$$\begin{cases} \mathbf{AX} = \mathbf{Id} \\ \mathbf{IX} = \mathbf{Bd} \end{cases}$$

donde **I** es la matriz identidad de 3×3.

Un procedimiento general del método de Gauss-Jordan para resolver el sistema, nos llevaría a considerar la siguiente matriz de 3×6

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y mediante operaciones elementales llevarla (según la segunda ecuación matricial) a la matriz de 3×6:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

que resolvería el sistema de ecuaciones dado.

En otras palabras, dada una matriz $\mathbf{A}_{3\times3}$ que se pueda invertir, el proceso de llevar a la matriz **M** en la matriz **N** mediante operaciones elementales nos permite calcular la matriz inversa **B** de **A**, cuando se considera la submatriz 3×3 de **N** que se conforma desde la cuarta columna:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

Este método nos permite entonces calcular la inversa de una matriz cuadrada si es invertible. En el caso de que no sea invertible la matriz inicial, el método mismo nos lleva a un absurdo durante los cálculos de las operaciones elementales. Esto se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.68. Calcule la inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

◁ Ya hemos calculado $|\mathbf{A}| = -1$, lo que indica que $\mathbf{A}$ es invertible.
Construimos la matriz de Gauss-Jordan y procedemos a realizar operaciones elementales, obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ 2R_2 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -3R_3 + R_1 \to R_1 \\ 3R_3 + R_2 \to R_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2R_2 + R_1 \to R_1 \\ \cdot \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esto implica que la matriz inversa de $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

como se puede verificar directamente. ▷

Este procedimiento sirve también para calcular inversas de matrices de 2×2, enseguida lo ilustramos.

EJEMPLO 1.69. Sea $\mathbf{A}$ la matriz de 2×2 dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

◁ Ya hemos calculado su determinante, obteniendo $|\mathbf{A}| = 1$, lo que le hace una matriz invertible.
Construimos la matriz de Gauss-Jordan y le aplicamos operaciones elementales para calcular $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 + R_2 \to R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ -R_2 \to R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_2 + R_1 \to R_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que la matriz inversa de $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \triangleright$$

EJEMPLO 1.70. Considere la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

◁ Ya obtuvimos antes que $|\mathbf{M}| = 0$, lo que nos dice que $\mathbf{M}$ no es una matriz invertible.
Usamos el método de Gauss-Jordan para tratar de encontrar una inversa de $\mathbf{M}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_2 + R_3 \to R_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que el tercer renglón de esta última matriz tiene ceros en sus tres primeros lugares, no es posible conseguir en adelante una matriz de forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 1 & \beta_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

que nos permita continuar el proceso.

De aquí que el mismo método de Gauss-Jordan pone obstrucciones apropiadas para calcular una inversa de M, si es que M no es invertible. ▷

Ejercicios 1.2

Resuelva los sistemas 1–7 utilizando el método de Gauss-Jordan.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - 4x_2 = -1 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3 \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7 \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8 \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$

Calcule la inversa de cada una de las matrices de los ejercicios 8–15, si las hay, mediante el método de Gauss-Jordan.

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 9 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Una matriz **A** se llama **ortogonal** si satisface que $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}$. ¿Cuáles de las matrices de los ejercicios 16–21 son ortogonales?

16. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Un número real λ se llamará un **valor propio** de la matriz cuadrada $\mathbf{A}_{2\times 2}$ (o $\mathbf{A}_{3\times 3}$) si satisface la **ecuación característica** de la matriz $\mathbf{A}$,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. Calcule los valores propios de las matrices de los ejercicios 22–24.

22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Se dice que una matriz cuadrada, de orden m, $\mathbf{A}$, satisface el polinomio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

si

$$p(\mathbf{A}) = a_n \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{I}_m = \mathbf{0}$$

Verifique que cada matriz de los ejercicios 25–26 satisface el polinomio indicado.

25. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $p(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

26. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $q(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

El polinomio que se obtiene del lado izquierdo de la ecuación característica, se llama el polinomio característico de la matriz.

27. Verifique que cada una de las matrices de los ejercicios 22–24 satisface su polinomio característico.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
FUNDADA EN 1620
QUITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

CAPÍTULO

2 Geometría de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

2.1 Sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Comenzamos ahora el estudio de la geometria de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ proveyéndolos de un sistema de coordenadas cartesiano.

A cada punto p en un espacio real se le asocia una n-ada de números de una manera biunívoca

$$p \longleftrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

El entero n se llamará la **dimensión** del espacio.

La asociación se llamará un **sistema de coordenadas cartesiano** del n-espacio, denominado $\mathbb{R}^n$.

El número n de coordendas dependerá de la situación de los puntos de un espacio determinado. Esto es, para asignarle una colección de números a un punto p, primero debemos identificar la situación del punto y el espacio donde está contenido. Tal asociación debe ser dada de manera que a cada punto en un espacio determinado le corresponde una única colección de números $x_1, \ldots, x_n$, y viceversa. Esto es, dada una n-nada de números, existe un punto único p en tal espacio con el cual está asociado.

EJEMPLO 2.1. Mostramos el número de coordenadas para un espacio de dimensión baja n.

1. Para un espacio unidimensional $\mathbb{R}^1$ se necesita apenas una coordenada, $p \longleftrightarrow x_1$.
2. Para un espacio bidimensional $\mathbb{R}^2$ se necesitan apenas dos coordenadas, $p \longleftrightarrow (x_1, x_2)$.
3. Para un espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ son necesarias tres coordenadas, $p \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$.
4. Para el espacio cuatridimensional $\mathbb{R}^4$ se necesitan cuatro coordenadas, $p \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

La figura 2.1 ilustra este ejemplo para $n = 1, 2, 3$.

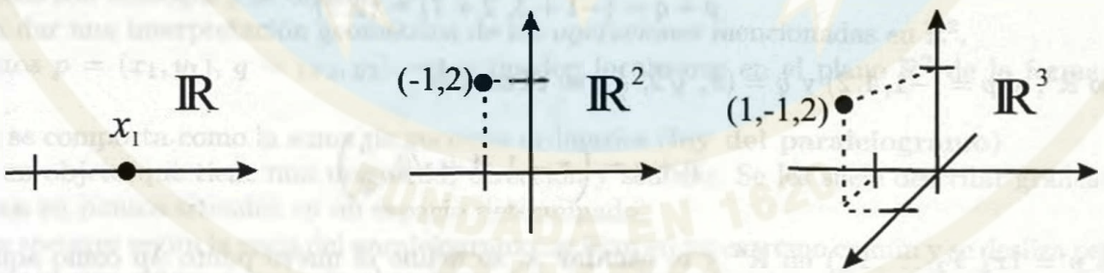


Figura 2.1. Coordenadas en $\mathbb{R}^n$ para un entero positivo n pequeño.

La localización de un punto p con sus coordenadas asociadas $p = (x_1, \ldots, x_n)$ en un espacio real $\mathbb{R}^n$ se hace mediante un sistema rectangular de ejes que tienen coincidencia en el punto común 0 y que están graduados por unidades escogidas previamente.

EJEMPLO 2.2.

1. El punto $(-1, 2)$ describe de manera única a un punto en el plano $\mathbb{R}^2$. La manera de localizarlo se muestra en la figura 2.1.

2. El punto $(1, -1, 2)$ describe una posición en el espacio $\mathbb{R}^3$. La figura 2.1 muestra la forma de localizarlo en el espacio.

3. El punto $(0, -1, 1, 4, -3)$ describe de forma única una posición en el espacio real de dimensión 5 ($\mathbb{R}^5$).

EJEMPLO 2.3. Al estudiar un *gas ideal* se toman las variables principales P =Presión, V =Volumen, T =Temperatura.

◁ De esta manera, cada estado del gas se representa por una tripleta

$$(P, V, T)$$

que corresponde a un punto en $\mathbb{R}^3$. ▷

EJEMPLO 2.4. Para estudiar un sistema de cuerpos que se mueven en el espacio $\mathbb{R}^3$, es necesario determinar la posición de los cuerpos mediante un sistema de coordenadas. Así, si tenemos los cuerpos $m_1, m_2, \ldots, m_n$, a cada uno le corresponde una posición en $\mathbb{R}^3$ dada por

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n, z_n)$$

respectivamente, en cada instante del movimiento. La figura 2.2 ilustra esta situación.

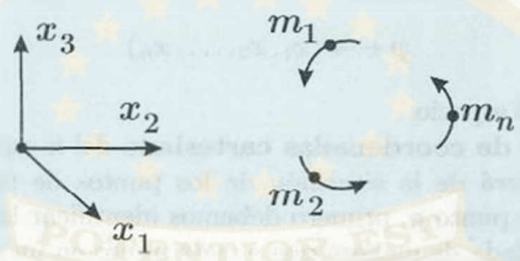


Figura 2.2. Cuerpos moviéndose en el espacio tridimensional.

A continuación le damos una **estructura algebraica** a $\mathbb{R}^n$ definiendo dos operaciones: la suma de puntos, y el producto de un número real (escalar) por un punto de $\mathbb{R}^n$.

Dados dos puntos $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, en el espacio $\mathbb{R}^n$, se define el punto $p + q$ como aquel punto con coordenadas

$$p + q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

EJEMPLO 2.5. Con algunos ejemplos mostramos cómo se realiza la operación definida para el plano y el espacio.

1. En el plano $\mathbb{R}^2$, si $p = (-1, 2)$, $q = (3, 7)$, entonces el punto $p + q \in \mathbb{R}^2$ es aquel que se obtiene mediante:

$$p + q = (-1 + 3,\ 2 + 7) = (2, 9)$$

2. En el espacio $\mathbb{R}^3$, si $p = (-1, 4, 2)$ y $q = (\pi,\ \sqrt{2},\ \frac{1}{2})$, se tiene que

$$p + q = \left(\pi - 1,\ 4 + \sqrt{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

Dado el punto $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y el **escalar** λ, se define el nuevo punto λp como aquel en $\mathbb{R}^n$ con las coordenadas

$$\lambda p = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

EJEMPLO 2.6. Damos algunos ejemplos de cómo se aplica la operación dada para el plano y el espacio.

1. Sean $p = \left(-1.2, \frac{1}{3}, 4\right)$ en $\mathbb{R}^4$ y $\lambda = 3$ en $\mathbb{R}$, entonces

$$\lambda p = (-3, 6, 1, 12)$$

2. Si $p = \left(1, -1.6, \frac{1}{5}, 8\right)$ es un punto de $\mathbb{R}^5$ y se toma $\lambda = -5$ entonces,

$$\lambda p = (-5, 5, -30, -1, -40)$$

Las operaciones definidas de esta manera tienen propiedades heredadas de las propiedades de los números reales. Esto se observa en el siguiente lema.

LEMA 2.7. *Si $p, q, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ se cumplen las igualdades*

1. $(p+u)+q = p+(u+q)$
2. $p+q = q+p$
3. $\lambda(p+q) = \lambda p + \lambda q$
4. $(\lambda+\alpha)p = \lambda p + \alpha p$
5. *Si $O = (0,\ldots,0)$ es el punto en $\mathbb{R}^n$ con coordenadas nulas, entonces, para todo punto $p \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:* $p+O = p$
6. *Si se toma $\lambda = -1$, entonces al denotar por $(-1)p := -p$, se cumple que:* $p+(-p) = O$

◁ Son cálculos directos realizados mediante las coordenadas.
Por ejemplo, para demostrar la propiedad 2, si $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, entonces

$$\begin{aligned} p+q &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \\ &= (y_1+x_1, y_2+x_2, \ldots, y_n+x_n) \\ &= (y_1, y_2 \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= q+p \end{aligned}$$

La propiedad 3 se demuestra mediante la cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} \lambda(p+q) &= \lambda[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)] \\ &= \lambda(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \\ &= (\lambda(x_1+y_1), \lambda(x_2+y_2), \ldots, \lambda(x_n+y_n)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2, \ldots, \lambda x_n + \lambda y_n) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \lambda y_2 \ldots, \lambda y_n) \\ &= \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= \lambda p + \lambda q \end{aligned}$$

Las otras pruebas son análogas y se omiten. ▷

Vamos ahora a dar una interpretación geométrica de las operaciones mencionadas en $\mathbb{R}^2$.

Dados los puntos $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$, estos pueden localizarse en el plano $\mathbb{R}^2$ de la forma que se mencionó anteriormente.

La suma $p+q$ se comporta como la suma de vectores ordinarios (**ley del paralelogramo**).

Un **vector** es un objeto que tiene una magnitud, dirección y sentido. Se les suele describir gráficamente por flechas que tienen extremos en puntos situados en un espacio determinado.

Para sumar dos vectores según la regla del paralelogramo, se fijan en un extremo común y se desliza paralelamente uno a través del otro hasta el otro extremo, creando al realizar el deslizamiento del otro vector paralelamente, un paralelogramo. El vector suma es el vector diagonal del paralelogramo que nace en el extremo común inicial (véase la figura 2.3).

A cada punto p y q se le asocia un **vector de posición** (nace en el origen de coordenadas $(0,0)$) y a la suma $p+q$ se le asocia el vector resultante de suma de vectores mediante el la regla del paralelogramo.

De igual forma, un vector en $\mathbb{R}^2$ puede ser deformado sobre su dirección cuando se multiplica por un escalar. Esto hace que varíen, su sentido o su magnitud, pero conservando su dirección.

La geometría de las operaciones mencionadas se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$. Si $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son dos puntos en $\mathbb{R}^n$, entonces el punto

$$p+q = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$$

puede ser visto como el **vector resultante** de la suma por la regla del paralelogramo.

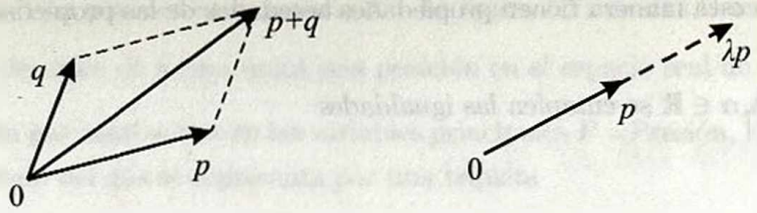


Figura 2.3. Geometría de las operaciones en $\mathbb{R}^n$.

Por otro lado, si se considera en $\mathbb{R}^n$ el vector de posición del punto $p = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces

$$\lambda p = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

tiene un vector de posición que está en la misma dirección que p, satisfaciendo que:

1. si $0 < \lambda < 1$, entonces λp es un encogimiento de p, pero tiene el mismo sentido.
2. si $1 < \lambda$, entonces λp es un estiramiento de p en el mismo sentido.
3. si $\lambda < 0$, entonces λp es un vector en sentido inverso de p.

Por lo anterior, a los puntos asociados con vectores de posición les llamamos también **vectores.**
De esta manera, al conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

provisto de la suma de puntos $p + q$ y el producto de un punto por un escalar λp le llamaremos el **espacio vectorial real** de dimensión n. Consecuentemente, a los puntos de $\mathbb{R}^n$ les llamaremos también **vectores.**

Denotaremos en adelante a los puntos de un espacio real específico por las letras

$$p,\ q,\ \ldots$$

poniendo subíndices en sus coordenadas, por ejemplo

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \quad q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

Por otro lado, cuando se trate de especificar un punto como un vector adoptaremos la notación por letras del tipo

$$\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \ldots$$

poniendo subíndices en sus coordenadas.

Para ejemplos

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

La ventaja de reconocer a un punto de un vector mediante la notación se observa en las aplicaciones. Por ejemplo, a momento de estudiar a un vector que actúa en un punto se hace tal distinción. Esto se concreta en la siguiente sección.

Ejercicios 2.1

Localice cada uno de los vectores dados en el espacio adecuado, así como el vector resultante de la operación indicada.

1. $\mathbf{u} = (3, -2)$, $\mathbf{v} = (-2, 3)$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
2. $\mathbf{u} = (3, -2)$, $\mathbf{v} = (-2, 3)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
3. $\mathbf{u} = (-3, -2)$, $\mathbf{v} = (2, -3)$, $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$.
4. $\mathbf{u} = (3, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 3)$, $\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

Localice cada uno de los vectores dados en el espacio adecuado, así como el vector resultante de la operación indicada.

5. $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
6. $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
7. $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
8. $\mathbf{u} = (1, , 2, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 3, 3)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

2.2 Plano tangente ambiental

Dado un punto $p \in \mathbb{R}^2$ arbitrario y otro q (móvil), se define un **vector localizado u** como el vector que nace en el punto p y tiene extremo final en el punto q.

◁ Por la regla del paralelogramo se tiene de la figura 2.4, que

$$\mathbf{u} + p = q$$

de donde, $\mathbf{u} = q - p$, que nos indica que el vector localizado $\mathbf{u}$ está definido por la diferencia $q - p$. ▷

Este concepto de vector localizado se puede generalizar para $p, q, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, sin ninguna dificultad.

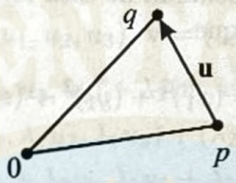


Figura 2.4. Vector localizado en un punto.

EJEMPLO 2.8. Dados $p = (1, 2, -1)$ y $q = (-3, 5, 0)$ en el espacio tridimensional, el vector localizado $\mathbf{u}$ que comienza en p y termina en q se denota, frecuentemente, por $\mathbf{u} = \overrightarrow{pq}$ y se calcula mediante

$$\triangleleft \quad \mathbf{u} = q - p = (-3, 5, 0) - (1, 2, -1) = (-4, 3, 1). \quad \triangleright$$

Por otro lado, dados un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u}$ un vector localizado, con un extremo inicial en p, se puede conseguir siempre un punto q tal que $\mathbf{u} = q - p$.

Al conjunto de vectores localizados con origen en el punto $p \in \mathbb{R}^n$, le llamamos el **espacio tangente ambiental** de $\mathbb{R}^n$ en p y lo denotamos por $T_p\mathbb{R}^n$ (véase la figura 2.5).

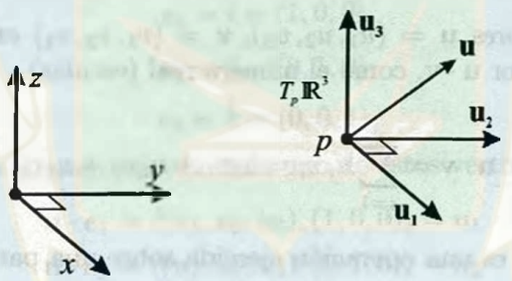


Figura 2.5. Espacio tangente ambiental $T_p\mathbb{R}^n = p + \mathbb{R}^n$.

Observamos que dos vectores de posición $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ son **paralelos** si son proporcionales (están en la misma dirección), es decir, si son múltiplos por un escalar λ:

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$$

Por lo tanto, se tiene que dos vectores localizados son paralelos si son proporcionales entre sí. Esto nos implica el siguiente resultado.

LEMA 2.9. *El espacio tangente ambiental de p en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores localizados en p, paralelos a los vectores de $\mathbb{R}^n$.*

Utilizando la idea de traslación paralela de un vector en el origen de coordenadas al punto p, podemos denotar al espacio tangente de la forma

$$T_p\mathbb{R}^n = p + \mathbb{R}^n = \{p + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

como lo muestra la figura 2.5.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

2.3 El producto escalar euclidiano y la norma en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Ahora damos un repaso a los elementos necesarios para poder definir a los objetos geométricos o físicos que pueden ser descritos como subconjuntos del plano o del espacio. Estos elementos ya son conocidos, seguramente, por el lector de sus cursos básicos de geometría analítica, pero se repasan para que los tenga a memoria inmediata.

En los cursos básicos de geometría analítica aprendemos a medir distancias entre dos puntos que están contenidos en $\mathbb{R}^3$, provisto de un sistema coordenado cartesiano. Lo recordamos a continuación.

Dados los puntos $p = (x_1, y_1, z_1)$ y $q = (x_2, y_2. z_2)$, si denotamos por ℓ la distancia entre ellos, ésta se calcula mediante la fórmula

$$\ell^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

Al espacio $\mathbb{R}^3$ con la longitud entre dos puntos definida de esta forma, le llamaremos el **espacio euclidiano** $\mathbb{R}^3$.

Observamos que en el caso $q = (0, 0, 0)$ se tiene que

$$\ell^2 = (x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2$$

que es la distancia al cuadrado de p al origen.

De esta manera, si $p = (x, y, z)$ es un punto arbitrario de $\mathbb{R}^3$, entonces su distancia del origen, tambien llamada su **norma**, se calcula por la expresión

$$\|p\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Una manera de inducir una longitud (norma) en $\mathbb{R}^3$ es a través de la definición de un **producto escalar.**

Esto está motivado de la relación para $p = (x, y, z)$,

$$\|p\|^2 = (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 = (x)(x) + (y)(y) + (z)(z)$$

que puede ser denotado por

$$(x)(x) + (y)(y) + (z)(z) = (x, y, z) \cdot (x, y, z) = p \cdot p$$

donde $p \cdot p$ se define por la primera expresión en la cadena de igualdades.

Aquí hacemos la primera distinción entre los puntos y los vectores. Más que definir la operación $\cdot$ para puntos, es más conveniente definirla para vectores, con motivo de las aplicaciones.

DEFINICIÓN 2.10. Dados los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en el espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$, se define el **producto escalar** de ellos, denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, como el número real (escalar)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Observamos que el producto escalar es una operación ejercida sobre una pareja de vectores y su valor es un número real.

EJEMPLO 2.11. Si $\mathbf{u} = (-1, 0, 3)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, 4\right)$ en $\mathbb{R}^3$, entonces su producto escalar es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1, 0, 3) \cdot \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, 4\right) = (-1)\left(\frac{1}{2}\right) + 0(\sqrt{2}) + (3)(4)$$

EJEMPLO 2.12. Dados los vectores $\mathbf{u} = (4, -1)$ y $\mathbf{v} = (1, 4)$, el producto escalar de estos es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (4, -1) \cdot (1, 4) = (4)(1) + (-1)(4) = 4 - 4 = 0.$$

El producto escalar definirá una **norma** en virtud del siguiente lema.[1]

LEMA 2.13. *Dados los vectores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *en el espacio cartesiano* $\mathbb{R}^3$, *y los números reales* λ_1, λ_2 *se cumplen las fórmulas siguientes.*

[1] En algunos textos clásicos la notación utilizada para el producto escalar es mediante $\langle , \rangle$ como se indica:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

SIB - UCE

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}$.

2. $(\lambda_1\,\mathbf{u}+\lambda_2\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\lambda_1\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\lambda_2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$.

3. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$ *para todo* $\mathbf{u}$. *De hecho,* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$ *si y sólo si,* $\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

◁ En coordenadas $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$, la prueba se realiza de la siguiente manera

1. Para los vectores $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ y $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$ tenemos,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}&=(u_1,u_2,u_3)\cdot(w_1,w_2,w_3)=u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3\\&=w_1u_1+w_2u_2+w_3u_3=(w_1,w_2,w_3)\cdot(u_1,u_2,u_3)\\&=\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\end{aligned}$$

2. Para los escalares λ_1, λ_2 y los vectores $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$ tenemos,

$$\begin{aligned}(\lambda_1\mathbf{u}+\lambda_2\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}&=[\lambda_1(u_1,u_2,u_3)+\lambda_2(v_1,v_2,v_3)]\cdot(w_1,w_2,w_3)\\&=[(\lambda_1u_1,\lambda_1u_2,\lambda_1u_3)+(\lambda_2v_1,\lambda_2v_2,\lambda_2v_3)]\cdot(w_1,w_2,w_3)\\&=[(\lambda_1u_1+\lambda_2v_1,\lambda_1u_2+\lambda_2v_2,\lambda_1u_3+\lambda_2v_3)]\cdot(w_1,w_2,w_3)\\&=(\lambda_1u_1+\lambda_2v_1)w_1+(\lambda_1u_2+\lambda_2v_2)w_2+(\lambda_1u_3+\lambda_2v_3)w_3\\&=\lambda_1(u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)+\lambda_2(v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3)\\&=\lambda_1(u_1,u_2,u_3)\cdot(w_1,w_2,w_3)+\lambda_2(v_1,v_2,v_3)\cdot(w_1,w_2,w_3)\\&=\lambda_1\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}+\lambda_2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\end{aligned}$$

3. Para el vector $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ se tiene,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}&=(u_1,u_2,u_3)\cdot(u_1,u_2,u_3)\\&=(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2\geq 0\end{aligned}$$

De hecho, $(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2=0\Longleftrightarrow u_1=u_2=u_3=0$. ▷

Sea $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$, y considérese el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}e_1&=\hat{\imath}=(1,0,0)\\e_2&=\hat{\jmath}=(0,1,0)\\e_3&=\hat{k}=(0,0,1)\end{aligned}$$

◁ El producto escalar de vector $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ con cada uno de estos vectores nos da

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot e_1&=\langle(u_1,u_2,u_3),(1,0,0)\rangle=u_1\\\mathbf{u}\cdot e_2&=\langle(u_1,u_2,u_3),(0,1,0)\rangle=u_2\\\mathbf{u}\cdot e_3&=\langle(u_1,u_2,u_3),(0,1,0)\rangle=u_3\end{aligned}$$

es decir, obtenemos las coordenadas de $\mathbf{u}$. ▷

En general, si $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ es un vector en $\mathbb{R}^n$, y denotamos por

$$e_i=(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{i},0,\ldots,0)$$

al vector con 1 en la i-ésima coordenada y con las demás coordenadas nulas, se obtiene que

$$\mathbf{u}\cdot e_i=u_i$$

lo que nos da la i-ésima coordenada de $\mathbf{u}$.

De esta forma $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^3$ puede ser escrito como

$$\mathbf{u}=u_1(1,0,0)+u_2(0,1,0)+u_3(0,0,1)=(u_1,u_2,u_3)$$

Es decir

$$\mathbf{u}=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3=u_1\hat{\imath}+u_2\hat{\jmath}+u_3\hat{k}$$

donde los vectores e_i son como se definieron.

EJEMPLO 2.14. Mostramos ejemplos de la discusión anterior.

1. El vector $\mathbf{u} = (-1, 4, -2)$ puede escribirse en términos de los vectores e_1, e_2, e_3 como

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (-1, 4, -2) = (-1, 0, 0) + (0, 4, 0) + (0, 0, -2) \\ &= -1(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1) = -1e_1 + 4e_2 - 2e_2\end{aligned}$$

2. El vector $\mathbf{v} = (2, 0, 3)$ se escribe como

$$\mathbf{v} = 2e_1 + 0e_2 + 3e_3 = 2e_1 + 3e_3 \triangleright$$

Los vectores e_1, e_2, e_3 definidos de esta forma son llamados **vectores canónicos** y satisfacen que:

1. El producto escalar de un vector canónico consigo mismo es la unidad,

$$\begin{aligned}e_1 \cdot e_1 &= 1 \\ e_2 \cdot e_2 &= 1 \\ e_3 \cdot e_3 &= 1\end{aligned}$$

2. El producto escalar entre dos de ellos diferentes es cero,

$$\begin{aligned}e_1 \cdot e_2 &= (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0 \\ e_1 \cdot e_3 &= (1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 \\ e_2 \cdot e_3 &= (0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0\end{aligned}$$

Esto es, tales vectores son **ortogonales** o perpendiculares.

El conjunto de vectores $\{e_1, e_2, e_3\}$ se dice ser la **base canónica** de $\mathbb{R}^3$.

En general, dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ tales que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ se llamarán **ortogonales** y esto se denota, comúnmente, por $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Más adelante explicaremos el porqué de esta definición.

EJEMPLO 2.15. Ejemplificamos el concepto de vector ortogonal.

1. Los vectores $\mathbf{u} = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$ son ortogonales debido a que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1, 1, 2) \cdot (2, 2, 0) = -2 + 2 + 0 = 0.$$

2. Los vectores $\mathbf{u} = (1, -1, 3)$ y $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ no son ortogonales debido a que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1, -1, 3) \cdot (1, -1, 1) = 1 + 1 + 3 = 5 \neq 0.$$

3. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector en $\mathbb{R}^2$, es fácil construir un vector ortogonal a $\mathbf{u}$, si se cambia el orden de las coordenadas y el signo de una de ellas: $\mathbf{u}^\perp = (-u_2, u_1)$. En efecto,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\perp = (u_1, u_2) \cdot (-u_2, u_1) = -u_1 u_2 + u_2 u_1 = 0.$$

Para muestra, si $\mathbf{u} = (1, 2)$, entonces $\mathbf{u}^\perp = (-2, 1)$ es ortogonal a $\mathbf{u}$.

2.3.1 Norma de un vector

En virtud del lema 2.13 se pueden definir los conceptos de **distancia** entre dos puntos, **norma** del vector, y **ángulo** entre dos vectores.

DEFINICIÓN 2.16. Definimos la norma del vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, denotado por $\|\mathbf{u}\|$, como

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_1, u_2, u_3) = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2$$

EJEMPLO 2.17. Dados los vectores $\mathbf{u} = (-1, 0, 3)$ y $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}, 4\right)$, se calculan sus normas por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 + 16} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

No es difícil comprobar que se cumplen las siguientes propiedades de la norma en $\mathbb{R}^3$.

LEMA 2.18. *Para los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ y los escalares $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ se cumple*

1. $\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{u}\|$
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ *si y sólo si* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.
   Esta es otra forma de ver que dos vectores $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son* **ortogonales**.
3. *Los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son perpendiculares si y sólo si se cumple el* **teorema de Pitágoras** *(véase la figura 2.6 a)*
   $$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$
4. *La* **desigualdad de Schwarz**
   $$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$
   y la igualdad se da si $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$, *con* $\lambda > 0$.
5. *La* **desigualdad del triángulo**
   $$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$
   y la igualdad se cumple si $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son múltiplos por escalares (véase la figura 2.6 b).*

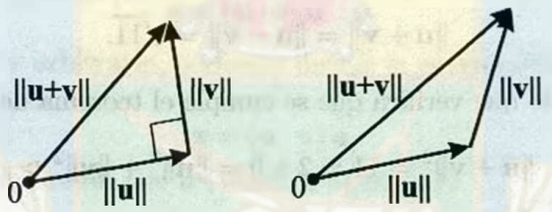


Figura 2.6. a. Teorema de Pitágoras; b. Desigualdad del triángulo.

◁ Demostramos algunos incisos de este lema:

1. $\|\lambda \mathbf{u}\| = \sqrt{\lambda \mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{u}} = \sqrt{\lambda^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = |\lambda| \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = |\lambda| \, \|\mathbf{u}\|$
2. Al suponer $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ se obtiene la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 && \text{(aplicando la definición)} \\
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) && \text{(desarrollando)} \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} && \text{(simplificando)} \\
2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} && \text{(despejando)} \\
4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 0 && \text{(consecuencia)} \\
\mathbf{u} &\perp \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, o bien $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2
\end{aligned}$$

3. Es similar al inciso anterior y lo mostramos en las igualdades

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) && \text{(desarrollando)} \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} && (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0 \Leftrightarrow \mathbf{u}\perp\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

4. Se deja como ejercicio al lector.

5. Se aplica el inciso 4 en la segunda desigualdad del siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2+2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\|\mathbf{v}\|^2 \\ &\le \|\mathbf{u}\|^2+2|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|+\|\mathbf{v}\|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2+2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

Considerando el inicio y el final de esta cadena se cumple que

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \le (\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|)^2$$

lo que implica nuestra afirmación. ▷

EJEMPLO 2.19. Los vectores $\mathbf{u}=(-1,1,0)$, $\mathbf{v}=(2,2,1)$ son ortogonales, pues $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ y se verifica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \|(-3,-1,-1)\|^2 = 9+1+1=11 \\ \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 &= \|(1,3,1)\|^2 = 1+9+1=11 \end{aligned}$$

es decir, se cumple el inciso 2 del lema 2.6,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{11}.$$

Por otro lado, $\|\mathbf{u}\|^2=2$, $\|\mathbf{v}\|^2=9$, lo que verifica que se cumple el teorema de Pitágoras,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = 11 = 2+9 = \|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2 \ \triangleright$$

EJEMPLO 2.20. Sean los vectores $\mathbf{u}=(-1,1,1)$ y $\mathbf{v}=(2,-2,1)$, entonces

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| &= \|(1,-1,2)\| = \sqrt{6} \\ \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{9} \end{aligned}$$

lo que indica que se cumple la desigualdad del triángulo para estos vectores,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| = \sqrt{6} \le \sqrt{9}+\sqrt{3} = \|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{u}\| \quad \triangleright$$

Un vector $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$ tal que $\|\mathbf{u}\|=1$ se llamará **vector unitario**.

Así pues, dado el vector $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$ que no sea nulo, se garantiza la construcción del vector unitario mediante la siguiente igualdad

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

lo cual se verifica directamente,

$$\triangleleft \ \|\hat{\mathbf{v}}\| = \left\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1 \ \triangleright$$

EJEMPLO 2.21. Para el vector $\mathbf{v}=(1,4,-3)$ se tiene que $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{26}$, con lo que se construye el vector unitario

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{(1,4,-3)}{\sqrt{26}} = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, \frac{4}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}\right)$$

Ahora pasamos a definir la **distancia** entre dos puntos arbitrarios del espacio, como la norma del vector localizado determinado por ellos.

Sean dados dos puntos $p = (x_1, y_1, z_1)$, $q = (x_2, y_2, z_2)$ en el espacio cartesiano, se define la distancia ℓ entre los puntos mencionados, como la norma del vector $\mathbf{u} = p - q = \overrightarrow{qp}$, es decir,

$$\begin{aligned}\ell^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 = \langle p-q, p-q\rangle \\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\cdot(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.22. Sean los puntos $p = (1, 2, 3)$ y $q = (-2, -1, 0)$ entonces la distancia entre los puntos p y q se calcula por la norma del vector $\mathbf{u} = p - q = (3, 3, 3)$,

$$\lhd\ \ell^2 = \|\mathbf{u}\|^2 = 3^3 + 3^2 + 3^2 = 27$$

de donde, $\ell = 3\sqrt{3}$. $\rhd$

2.3.2 Ángulo entre dos vectores

Sean ahora dos vectores. $\mathbf{u}$ vector unitario y $\mathbf{v}$ un vector arbitrario. Buscamos un vector $\mathbf{z}$ en la dirección de $\mathbf{u}$ tal que sea la **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{z}$, es decir el vector $\mathbf{v} - \mathbf{z}$ sea ortogonal al vector $\mathbf{u}$ como lo muestra la figura 2.7.

$\lhd$ Ya que se busca que el vector $\mathbf{v} - \mathbf{z}$ sea ortogonal al vector $\mathbf{u}$, se deberá satisfacer que $(\mathbf{v} - \mathbf{z})\cdot\mathbf{u} = 0$.

Por otro lado, si $\mathbf{z}$ está en la dirección de $\mathbf{u}$, entonces es suficiente con encontrar un escalar λ tal que $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{u}$.

Al sustituir en la ecuación de ortogonalidad se tiene que

$$\begin{aligned}0 = (\mathbf{v} - \mathbf{z})\cdot\mathbf{u} &= (\mathbf{v} - \lambda\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \lambda\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \lambda\end{aligned}$$

en virtud de que $\mathbf{u}$ es unitario y por lo tanto $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Esto implica que $\lambda = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, y que entonces el vector buscado es

$$\mathbf{z} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u} \quad \rhd$$

Así, dados los vectores $\mathbf{u}$ unitario y $\mathbf{v}$ arbitrario, podemos definir la **proyección ortogonal** del vector $\mathbf{v}$ en el vector $\mathbf{u}$ como el vector

$$\mathbf{z} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{u}$$

que es un vector que está en la misma dirección que $\mathbf{u}$ (véase la figura 2.7).

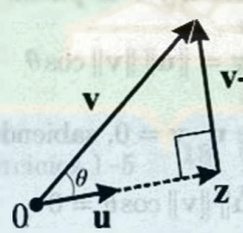


Figura 2.7. Proyección ortogonal de un vector en otro.

EJEMPLO 2.23. Realizamos la proyección del vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$ en el vector $\mathbf{u} = (2, -1, 5)$.

$\lhd$ Ya que $\mathbf{u}$ no es unitario, lo normalizamos mediante la división por su norma

$$\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{(2,-1,5)}{\sqrt{30}} = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

De esta manera, el vector buscado es

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\cdot\mathbf{v}\right)\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\right)\mathbf{u} \\ &= \frac{1}{30}\left[(2,-1,5)\cdot(-1,1,1)\right](2,-1,5) \\ &= \frac{2}{30}(2,-1,5) = \left(\frac{2}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{3}\right) \quad \rhd\end{aligned}$$

El cálculo mostrado en este ejemplo prueba el siguiente corolario.

COROLARIO 2.24. *La* **proyección** *del vector* $\mathbf{v}$ *arbitrario en el vector no nulo* $\mathbf{u}$*, llamado* $\mathbf{z}$*, se calcula por la fórmula*

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u}$$

En muchas ocasiones, cuando no haya confusión, entenderemos no al vector $\mathbf{z}$ obtenido, sino al escalar (factor de $\mathbf{u}$)

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

como la proyección mencionada.

De la figura 2.7 se tiene que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ son vectores arbitrarios y $\mathbf{z}$ es la proyección de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{u}$ entonces al considerar el ángulo θ entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se tiene que

$$\cos\theta = \frac{\|\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Si se sustituye el valor de

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$$

se tiene entonces que

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|^2}\|\mathbf{u}\| = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|}$$

cuando consideremos a $\theta \in [0,\pi]$.

Esto demuestra el siguiente resultado.

LEMA 2.25. *Si* $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1,v_2,v_3)$ *son dos vectores en* $\mathbb{R}^3$*, formando un ángulo* θ *entre ellos, se define este ángulo por la igualdad*

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

donde $0 \le \theta \le \pi$.

En otras palabras el producto escalar de los vectores $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *se puede escribir como*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

EJEMPLO 2.26. Si los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ cumplen que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, sabiendo que ambos son no nulos, entonces

$$\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta = 0$$

lo que implica que $\cos\theta = 0$, y consecuentemente $\theta = \pi/2$. Esto justifica su nombre de **vectores ortogonales**.

EJEMPLO 2.27. Sean los vectores $\mathbf{u} = (2,-1,1)$ y $\mathbf{v} = (3,-4,-4)$, entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 6+4-4 = 6$$

y las normas son

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{41}$$

◁ Por lo tanto, el ángulo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es

$$\theta = \arccos\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \arccos\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{41}}$$

$$= \arccos\sqrt{\frac{6}{41}} \quad \triangleright$$

Como última observación de esta sección tenemos que de las relaciones

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \quad |\cos\theta| \leq 1$$

podemos decir que

$$\left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1$$

lo que nos lleva a verificar la desigualdad de Schwarz

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

enunciada en el inciso 4 del lema 2.18.

Ejercicios 2.3

Calcule $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ para cada pareja de vectores de los ejercicios 1–5.

1. $\mathbf{u} = (-1, 2), \mathbf{v} = (3, 1)$
2. $\mathbf{u} = (-1, 0, 1), \mathbf{v} = (1, 2, 3)$
3. $\mathbf{u} = (-1, 2, 3), \mathbf{v} = (1, 2, -4)$
4. $\mathbf{u} = (1, 1, 0, -1), \mathbf{v} = (-1, 0, 1, 2)$
5. $\mathbf{u} = (4, -2, 3, -1), \mathbf{v} = (-1, -2, 3, -4)$
6. Si los vértices de un triángulo son: (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) entonces su área puede determinarse por

$$\text{Área} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dibuje cada triángulo cuyos vértices se dan y determine su área.

   a. $(-1, 4)$, $(3, 1)$, $(2, 6)$
   b. $(3, 3)$, $(-1, -1)$, $(4, 1)$
   c. $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 4)$

7. ¿Cuáles de las parejas de vectores de los ejercicios 1–5 son ortogonales?
8. Determine todas las constantes a de tal forma que los vectores $(a, 2)$ y $(a, -2)$ sean ortogonales.
9. Determine el valor de c tal que el vector $\mathbf{v} = (2, c, 3)$ sea ortogonal a $\mathbf{w} = (1, -2, 1)$.
10. Calcule $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ para los vectores de los ejercicios 1-5.
11. Verifique que el triángulo con vértices $(2, 3, -4)$, $(3, 1, 2)$ y $(-3, 0, 4)$ es isósceles.
12. Verifique que el triángulo con vértices $(2, 3, -4)$, $(3, 1, 2)$ y $(7, 0, 1)$ es rectángulo.
13. Para cada uno de los vectores de los ejercicios 1–5 encuentre un vector unitario en la misma dirección del vector dado.
14. Para cada uno de los vectores de los ejercicios 1–5 encuentre un vector unitario en dirección contraria al vector dado.
15. Interprete geométricamente el inciso 2 del lema 2.18.
16. Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$
   a. Demuestre que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ si y sólo si $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$
   b. Interprete geométricamente el inciso **a.** Sugerencia: ¿Cuáles son los cuadriláteros tal que sus lados miden lo mismo?
17. A continuación se da una forma geométrica de demostrar la desigualdad de Schwarz y, por lo tanto, una interpretación de la misma:

    En el corolario 2.24 se obtuvo una expresión para la proyección, $\mathbf{z}$, del vector $\mathbf{v}$ sobre el vector $\mathbf{u}$. Si se observa la figura 2.7, entonces $\mathbf{z}$ es un cateto del triángulo rectángulo formado y, por lo tanto, su longitud es menor a la de la hipotenusa, es decir, $\|\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{v}\|$. Deduzca la desigualdad de aquí.
18. Calcule el ángulo formado por cada pareja de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de los ejercicios 1–5.
19. Calcule los ángulos del triángulo formado por los puntos dados, así como la longitud de cada lado.
   a. $p = (-1, 1, 1)$, $q = (1, -2, 3)$, $m = (3, -1, 1)$.
   b. $p = (1, 0, 0)$, $q = (0, 1, 0)$, $m = (0, 0, 1)$.
20. Calcule la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ de cada pareja de vectores de los ejercicios 1–5.
21. Calcule la proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ de cada pareja de vectores de los ejercicios 1–5.
22. Demuestre que para dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ con ángulo θ entre ellos se cumple la fórmula

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

2.4 El producto vectorial

Definimos otra operación entre vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$ llamada **producto vectorial**.

DEFINICIÓN 2.28. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Se define el **producto vectorial** de $\mathbf{u}$ con $\mathbf{w}$ denotado por $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$, como el vector en $\mathbb{R}^3$ con coordenadas

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = (u_2w_3 - w_2u_3,\ -(u_1w_3 - w_1u_3),\ u_1w_2 - u_2w_1)$$

en la base canónica ordenada $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Una forma de recordar las coordenadas del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ es a través de la siguiente cadena convencional de igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{w} &= (u_2w_3 - w_2u_3,\ -(u_1w_3 - w_1u_3),\ u_1w_2 - u_2w_1) \\
&= (u_2w_3 - w_2u_3)e_1 - (u_1w_3 - w_1u_3)e_2 + (u_1w_2 - u_2w_1)e_3 \\
&= e_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

donde los últimos determinantes se calculan mediante la expresión del penúltimo renglón.

EJEMPLO 2.29. Dados los vectores $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ y $\mathbf{w} = (-2, 3, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= e_1(-4) - e_2(3) + e_3(1) = (-4, -3, 1)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.30. Para los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 3)$, $\mathbf{w} = (2, 2, 6)$ obtenemos el vector

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= e_1(0) - e_2(0) + e_3(0) = (0, 0, 0)
\end{aligned}$$

En este último ejemplo no es extraño tener como resultado el vector $(0, 0, 0)$, debido a que los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ dados son **paralelos**, es decir, $\mathbf{u}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{w}$: $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{w}$. De hecho, dados dos vectores paralelos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$, su producto vectorial es nulo.

◁ Si $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{w}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \times \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) = \lambda \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \lambda(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \quad \triangleright$$

Enunciamos la recíproca de la afirmación anterior: Toda pareja de vectores cuyo producto vectorial se anula es una pareja de vectores paralelos, la cual es cierta y es consecuencia del inciso 6 del lema 2.31 abajo.

Observamos que el producto vectorial $\times$ está definido para vectores en $\mathbb{R}^3$ y el resultado es un vector contenido en $\mathbb{R}^3$. Mostramos ahora las propiedades del producto vectorial.

LEMA 2.31. *Dados los vectores* $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ *en* $\mathbb{R}^3$ *y los escalares* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *se tienen las siguientes propiedades.*

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{w} \perp \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{w} \perp \mathbf{w}$, *es decir,* $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = 0$ y $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = 0$
2. Anticonmutatividad: $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{u}$
3. Conmutatividad respecto a escalar: $\lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{u}) \times \mathbf{w}$

4. Distributividad: $\mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mu\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

5. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\| - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2$

6. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\| \operatorname{sen}\theta$, *donde θ es el ángulo entre* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{w}$.

◁ Hacemos las pruebas de algunos incisos de este resultado.

1. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = (u_2w_3 - u_3w_2, -(u_1w_3 - u_3w_1), u_1w_2 - u_2w_1)$$

Si escogemos por ejemplo a $\mathbf{u}$, entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} &= u_1(u_2w_3 - u_3w_2) - u_2(u_1w_3 - u_3w_1) + u_3(u_1w_2 - u_2w_1) \\ &= u_1u_2w_3 - u_1u_3w_2 - u_2u_1w_3 + u_2u_3w_1 + u_3u_1w_2 - u_3u_2w_1 = 0\end{aligned}$$

2. Por la propiedad de cambiar el signo a un determinante, si se permutan dos renglones se tiene

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{w} \times \mathbf{u}$$

4. De las propiedades de distribución de los determinantes, se prueba este inciso mediante la cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times (\lambda\mathbf{w} + \mu\mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda w_1 + \mu v_1 & \lambda w_2 + \mu v_2 & \lambda w_3 + \mu v_3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + \mu(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\end{aligned}$$

Los demás incisos se comprueban de manera similar. ▷

Tomemos dos vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ cuyo producto vectorial sea el vector cero, entonces al utilizar la propiedad 6 del lema anterior,

$$0 = \|(0,0,0)\| = \|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{w}\| \operatorname{sen}\theta$$

esto implica que el ángulo θ formado por ellos satisface, bien $\theta = 0$ o bien $\theta = \pi$. Esto es, los vectores son **paralelos**. Por esto es que podemos definir a un par de vectores como paralelos, si su producto vectorial se anula.

EJEMPLO 2.32. Sean los vectores $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ y $\mathbf{w} = (0, 1, 3)$, entonces, por el inciso 1 del lema 2.31 el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{w}$. Esto es,

◁ $$\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-3-2)e_1 - (3)e_2 + (1)e_3 = (-5, -3, 1)$$

es ortogonal a $\mathbf{u}$ y a $\mathbf{w}$. ▷

Si se consideran dos vectores arbitrarios $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^3$, éstos generan un paralelogramo R como lo muestra la figura 2.8.

Tal paralelogramo R tiene una base $\|\mathbf{u}\|$ y altura $\|\mathbf{w}\| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$. De esta manera, el área del paralelogramo se calcula como

$$\text{Área}\,(R) = (\text{base} \times \text{altura}) = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\| \operatorname{sen}\theta$$

con lo que tal área se calcula según el inciso 6 del lema 2.31 mediante las igualdades

$$\text{Área}\,(R) = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{w}\| \operatorname{sen}\theta = \|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\|$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

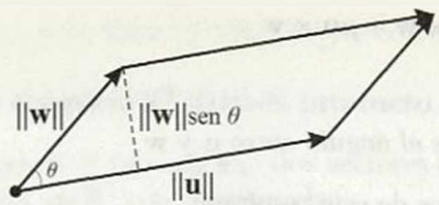


Figura 2.8. Área de un paralelogramo.

EJEMPLO 2.33. Calcule el área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{u} = (7, 8, 9)$ y $\mathbf{w} = (-3, 5, 2)$.

◁ Primero calculamos el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 7 & 8 & 9 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= e_1(-29) - e_2(41) + e_3(59) = (-29, -41, 59)$$

Por lo tanto el área del paralelogramo es

$$\text{Área} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\| = \sqrt{(-29)^2 + (-41)^2 + (59)^2} = \sqrt{6003}. \quad \triangleright$$

Por otro lado, el producto vectorial puede ser considerado mecánicamente como el momento de acción del vector $\mathbf{u}$ en el punto p que tiene asociado el vector de posición $\mathbf{w}$ (véase la figura 2.9).



Figura 2.9. Momento de acción de $\mathbf{u}$ en $\mathbf{w}$.

Ejercicios 2.4

Calcule el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ de los vectores de los ejercicios 1–4.

1. $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{w} = (6, 2, 3)$
2. $\mathbf{u} = (-6, 0, 5)$, $\mathbf{w} = (3, 0, 3)$
3. $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{w} = (-1, 0, 2)$
4. $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{w} = (2, 4, 6)$
5. ¿Cuáles de las parejas de vectores de los ejercicios 1–4 son paralelos?
6. Calcule el área del paralelogramo formado por cada pareja de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ de los ejercicios 1–4.
7. Determine el área del triángulo cuyos vértices son $(1, 1, 2)$, $(-1, 3, 4)$ y $(0, 2, 5)$.
8. Determine el área del triángulo cuyos vértices son los puntos
   a. $p = (1, 1, 2)$, $q = (2, 1, 4)$, $m = (-1, 2, -2)$
   b. $p = (0, 0, 1)$, $q = (0, 1, 0)$, $m = (1, 0, 0)$
   c. $p = (1, 1)$, $q = (2, 1)$, $m = (-1, 2)$

2.5 El triple producto escalar

Ahora, definimos otra operación vectorial en $\mathbb{R}^3$ denominada **producto mixto** o **triple producto escalar** de tres vectores ordenados.

DEFINICIÓN 2.34. Dados los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ se define el **producto mixto** o **triple producto escalar** de ellos al número real denotado por $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$ y en ese orden, como

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$$

Obtenemos el siguiente resultado útil para problemas prácticos.

LEMA 2.35. *Dados los vectores espaciales* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *y* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *se tienen las siguientes propiedades.*

1. *El producto mixto de* $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ *y* $\mathbf{v}$ *en coordenadas se calcula por*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

2. *El producto mixto no cambia si se hacen las permutaciones circulares*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$$

3. *El producto mixto es anticonmutativo al transponer dos vectores, por ejemplo:*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = -(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$$

4. *El volumen* V *del paralelepípedo tendido sobre* $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ *y* $\mathbf{v}$ *se calcula por*

$$V = |(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})|$$

5. $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$ *si y sólo si los tres vectores están contenidos en un mismo plano.*

◁ Ya que $(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \cdot (v_1, v_2, v_3) \\ &= \left(e_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (v_1, v_2, v_3) \\ &= v_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - v_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + v_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

lo que demuestra el punto 1.

Los incisos 2 y 3 tienen pruebas análogas utilizando las propiedades de los determinantes.

Para demostrar el punto 4 de la figura 2.10 se tiene que el paralelepípedo tiene una base con área $\|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\|$ y altura igual a la proyección de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ cuya longitud es el valor absoluto

$$\left| \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\|} \right|$$

Por lo tanto el volumen del paralelepípedo será

$$\begin{aligned}\text{Volumen} = \text{Área de la base} \times \text{altura} &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\| \left| \frac{(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\|} \right| \\ &= |(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}| = |(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})|\end{aligned}$$

lo que prueba la afirmación.

El inciso 5 se sigue del inciso 4. ▷

EJEMPLO 2.36. Calculamos el triple producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (0, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-5) - (-3) + 0 = -2\end{aligned}$$

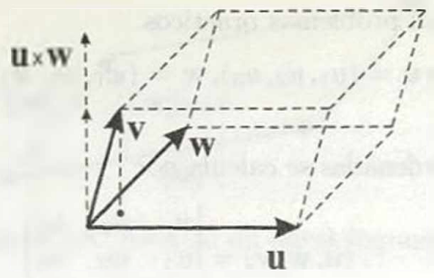


Figura 2.10. Volumen del paralelepípedo.

EJEMPLO 2.37. Para los vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (4, 2, 0)$ obtenemos

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

lo que era de esperarse, pues $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ son coplanares. De hecho se observa que $\mathbf{v} = 4\mathbf{u} + 2\mathbf{w}$.

EJEMPLO 2.38. Ahora encontramos el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (1, 1, -2)$ es

$$V = |(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})| = \left| \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \right| = |-20| = 20$$

Consideremos ahora los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ en $\mathbb{R}^3$ tales que su triple producto escalar no se anula

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \neq 0$$

Entonces, por el lema 2.35 se tiene que no son coplanares, es decir, ninguno de ellos depende de los otros. Esto se observa del hecho de que si alguno de ellos fuera **combinación lineal** de los otros, por ejemplo

$$\mathbf{u}_3 = \lambda \mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{u}_2, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

entonces su triple producto escalar sería calculado mediante las propiedades de los determinantes:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \lambda \mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{u}_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \lambda \mathbf{u}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mu \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_1 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = 0$$

lo que no puede ser.

DEFINICIÓN 2.39. El conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ se dice ser **linealmente independiente** si su triple producto escalar no se anula, esto es,

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \neq 0.$$

EJEMPLO 2.40. Sean los vectores canónicos $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$.

◁ Es claro que

$$(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

lo que los hace linealmente independientes. ▷

EJEMPLO 2.41. Sea el conjunto de vectores

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (0,1,1), \mathbf{u}_3 = (1,1,1)\}$$

◁ Su triple producto escalar se calcula por

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

lo que nos dice que los vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ son linealmente independientes. ▷

EJEMPLO 2.42. Sea ahora el conjunto de vectores

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0), \mathbf{u}_2 = (0,1,1), \mathbf{u}_3 = (2,5,3)\}$$

◁ El triple producto escalar entre ellos es

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0$$

lo que hace de ellos un conjunto linealmente dependiente.

Esto es, existen escalares μ, λ tal que por ejemplo

$$\mathbf{u}_3 = \lambda \mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{u}_2 = \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,1)$$

es decir

$$(2,5,3) = (\lambda, \lambda, 0) + (0, \mu, \mu) = (\lambda, \lambda + \mu, \mu)$$

o bien

$$\begin{cases} 2 = \lambda \\ 5 = \lambda + \mu \\ 3 = \mu \end{cases}$$

lo que implica que $\lambda = 2$, $\mu = 3$.

Por lo tanto, una **dependencia lineal** entre ellos se da mediante la igualdad

$$\mathbf{u}_3 = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 \ ▷$$

EJEMPLO 2.43. Sea el conjunto $\{\mathbf{u}_1 = (1,2), \mathbf{u}_2 = (\frac{1}{2}, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

lo que hace de estos vectores un conjunto linealmente dependiente en el plano $\mathbb{R}^2$. De hecho $\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{u}_2$.

EJEMPLO 2.44. El conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1 = (1,2), \mathbf{u}_2 = (-2,1)\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^2$ pues

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0$$

En general un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^n$

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n\}$$

se llamará **linealmente independiente** si el determinante de la matriz conformada por estos vectores no se anula, es decir,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{vmatrix} \neq 0$$

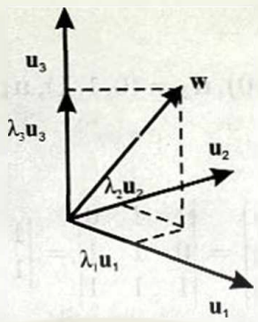


Figura 2.11. Proyección paralela de $\mathbf{w}$.

Sea entonces el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$. Ya que no todos pertenecen a un mismo plano, al considerar cualquier vector espacial $\mathbf{w}$, las proyecciones paralelas de $\mathbf{w}$ en cualquiera de los vectores nos provee de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que el vector $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2$ mediante la igualdad

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3$$

como lo muestra la figura 2.11.

Esto es, *el conjunto de vectores* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ *genera al espacio* $\mathbb{R}^3$ *mediante combinaciones lineales.*

DEFINICIÓN. El conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \subset \mathbb{R}^3$ se llamará una **base** para $\mathbb{R}^3$ si todos los vectores son linealmente independientes y generan al espacio $\mathbb{R}^3$ mediante combinaciones lineales.

Resumimos la discusión anterior en el siguiente resultado.

TEOREMA 2.45. *Un conjunto de vectores* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *es una base de vectores para* $\mathbb{R}^n$ *si y sólo si* $k = n$ *y el determinante*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{vmatrix} \neq 0$$

EJEMPLO 2.46. Los vectores canónicos espaciales

$$\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$$

son una base de $\mathbb{R}^3$ llamada la **base canónica**. Cualquier $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ se escribe

$$\mathbf{w} = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3.$$

EJEMPLO 2.47. El conjunto de vectores

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{u}_2 = (0,1,1),\ \mathbf{u}_3 = (1,1,1)\}$$

es una base de vectores para $\mathbb{R}^3$.

◁ De hecho, si $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, se tiene que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tal que

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3$$

es decir, si $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces

$$\begin{aligned}(w_1, w_2, w_3) &= \lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,1,1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3)\end{aligned}$$

o equivalentemente, λ_1, λ_2, λ_3 resuelven el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda_1 \qquad + \lambda_3 = w_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = w_2 \\ \qquad \lambda_2 + \lambda_3 = w_3 \end{cases}$$

Tal sistema tiene determinante

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=\det\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{u}_2\\\mathbf{u}_3\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{u}_2\\\mathbf{u}_3\end{vmatrix}=(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)\neq 0$$

lo que implica que ese sistema tiene solución para λ_1, λ_2, λ_3.

De hecho, por la regla de Cramer, se obtiene:

$$\lambda_1=\frac{\begin{vmatrix}w_1&0&1\\w_2&1&1\\w_3&1&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix}w_1&w_2&w_3\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{(\mathbf{w},\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}$$

$$\lambda_2=\frac{\begin{vmatrix}1&w_1&1\\1&w_2&1\\0&w_3&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\w_1&w_2&w_3\\1&1&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{(\mathbf{u}_1,\mathbf{w},\mathbf{u}_3)}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}$$

$$\lambda_3=\frac{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{w})}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}\quad\triangleright$$

Esto se puede generalizar en el siguiente lema 2.48, enunciado apenas para el caso tridimensional.

LEMA 2.48. *Si* $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}\subset\mathbb{R}^3$ *es una base de vectores para* $\mathbb{R}^3$ *y* $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ *es tal que* $\mathbf{w}=\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\lambda_3\mathbf{u}_3$, *entonces los coeficientes* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ *están dados por las igualdades*

$$\lambda_1=\frac{(\mathbf{w},\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)},\ \lambda_2=\frac{(\mathbf{u}_1,\mathbf{w},\mathbf{u}_3)}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)},\ \lambda_3=\frac{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{w})}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}$$

EJEMPLO 2.49. Sea $\mathbf{w}=(-1,3,-1)\in\mathbb{R}^3$ y sea la base de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\{\mathbf{u}_1=(1,1,0),\ \mathbf{u}_2=(0,1,1),\ \mathbf{u}_3=(1,1,1)\}$$

$\triangleleft$ Claramente, cálculos directos nos hacen obtener

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{u}_2\\\mathbf{u}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=1$$

$$(\mathbf{w},\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{w}\\\mathbf{u}_2\\\mathbf{u}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&3&-1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-1\\1&1\end{vmatrix}=4$$

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{w},\mathbf{u}_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{w}\\\mathbf{u}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&3&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&-1\\1&1\end{vmatrix}=4$$

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{w})=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{u}_2\\\mathbf{w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&1\\-1&-1\end{vmatrix}=-5$$

de donde, por el lema 2.48 se tiene que

$$\lambda_1=\frac{(\mathbf{w}_1,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}=\frac{4}{1}=4$$

$$\lambda_2=\frac{(\mathbf{u}_1,\mathbf{w},\mathbf{u}_3)}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}=\frac{4}{1}=4$$

$$\lambda_3=\frac{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{w})}{(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)}=\frac{-5}{1}=-5$$

hacen que

$$\begin{aligned}\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\lambda_3\mathbf{u}_3 &= 4(1,1,0)+4(0,1,1)-5(1,1,1)\\ &= (4,4,0)+(0,4,4)+(-5,-5,-5)=(4,8,4)+(-5,-5,-5)\\ &= (-1,3,-1)=\mathbf{w} \quad \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.50. $\triangleleft$ Sean los vectores básicos $\{\mathbf{u}_1=(1,2),\ \mathbf{u}_2=(-2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Entonces dado $\mathbf{w}=(-1,3)$ se tiene que

$$\mathbf{w}=\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2$$

para los valores de λ_1 y λ_2 dados por

$$\lambda_1=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{u}_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{5}{5}=1$$

$$\lambda_2=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{5}{5}=1$$

Esto se comprueba directamente de la igualdad

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2=1(1,2)+1(-2,1)=(1,2)+(-2,1)=(-1,3)\ \triangleright$$

Consideramos ahora una base $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la ordenamos según el signo del determinante dado por el triple producto escalar $(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$.

DEFINICIÓN 2.51. Decimos que la base dada $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tiene **orientación positiva a la derecha (regla de la mano derecha)** si al considerar en el orden $\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3$, es positivo el triple producto escalar

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)$$

EJEMPLO 2.52. Los vectores básicos $\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ dados en ese orden le dan una orientación a la derecha al espacio $\mathbb{R}^3$, en virtud de que

$$(e_1,e_2,e_3)=\begin{vmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

EJEMPLO 2.53. En cambio si se toma el orden de los vectores básicos canónicos por

$$\{e_1=(1,0,0),\ e_3=(0,0,1),\ e_2=(0,1,0)\}$$

entonces tal orden le da una **orientación negativa** al espacio $\mathbb{R}^3$ en virtud de que

$$(e_1,e_3,e_2)=\begin{vmatrix}e_1\\ e_3\\ e_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

EJEMPLO 2.54. El conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1=(1,1,0),\ \mathbf{u}_2=(0,1,1),\ \mathbf{u}_3=(1,1,1)\}$ ordenados así, le dan una orientación a $\mathbb{R}^3$ positiva a la derecha en virtud de que

$$(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_2)=\begin{vmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

EJEMPLO 2.55. Los vectores básicos $\{\mathbf{u}_1 = (1,2), \mathbf{u} = (-2,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ le dan una orientación positiva a la derecha al plano, en virtud de que el siguiente determinante es positivo

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Se observa que si $\mathbf{u} \times \mathbf{w} \neq 0$, entonces los vectores unitarios

$$\left\{ \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}, \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{w}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{w}\|} \right\}$$

conforman una **base** que está orientada positiva a la derecha (**regla de la mano derecha**) por la elección del producto $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

Todos los conceptos mencionados son parte de los conocimientos básicos que conforman los cursos de Geometría analítica del plano y del espacio.

Ejercicios 2.5

Calcule el volumen del paralelepípedo formado por las ternas de vectores de los ejercicios 1–3.

1. $\mathbf{u} = (2,0,1)$, $\mathbf{w} = (1,3,2)$, $\mathbf{v} = (4,-1,1)$.
2. $\mathbf{u} = (-2,1,1)$, $\mathbf{w} = (-4,3,2)$, $\mathbf{v} = (0,0,1)$.
3. $\mathbf{u} = (0,-1,1)$, $\mathbf{w} = (0,0,-1)$, $\mathbf{v} = (-1,2,3)$.
4. Calcule el volumen del tetraedro cuyos vértices son $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ y $(1,1,1)$.
5. ¿Cuáles tripletas de vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}$ de los ejercicios 1–3 son una base de vectores de $\mathbb{R}^3$?
6. Dado el vector $(1,4,3)$, escríbalo en términos de cada una de las bases orientadas encontradas en los ejercicios 1–3.
7. Repita el ejercicio anterior para el vector $(2,-1,6)$.
8. Demuestre la igualdad
   $(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = 2\,\mathbf{u} \times \mathbf{w}$
9. Demuestre la igualdad
   $\mathbf{u} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v}$
10. Demuestre la igualdad
    $$(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} \end{vmatrix}$$

2.6 Vectores y valores propios de una matriz

En algunos problemas de aparición cotidiana en las Ciencias Naturales y la Ingeniería es necesario resolver una igualdad matricial del tipo

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada $(n \times n)$, $\mathbf{u}$ es un vector columna $(n \times 1)$ y λ es un escalar.

En otras palabras, dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, el problema es encontrar un vector $\mathbf{u}$ y un escalar λ que hagan válida la ecuación mencionada.

Discutiremos el caso de dimensión 3 y mencionaremos los resultados que se pueden extender para dimensiones arbitrarias.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de 3×3,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y denotamos el vector incógnita $\mathbf{u}$ por el vector columna,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Entonces, en coordenadas, la ecuación matricial se escribe en la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

o bien,

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$
$$= \left[\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$

que matricialmente se escribe

$$0 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}$$

y que induce el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$$

es decir, el sistema homogéneo en u_1, u_2, u_3,

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 = 0\\ a_{21}u_1 + (a_{22}-\lambda)u_2 + a_{23}u_3 = 0\\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + (a_{33}-\lambda)u_3 = 0\end{cases}$$

Tal sistema lineal homogéneo tiene asociada a la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, y por el lema 1.51 el sistema lineal homogéneo obtenido tiene soluciones no triviales ($\mathbf{u} \neq (0,0,0)$), si y sólo si su determinante se anula, es decir, $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.

Caracterizamos a los escalares λ y a los vectores $\mathbf{u}$ que cumplen la condición matricial dada inicialmente, para la matriz $\mathbf{A}$.

DEFINICIÓN 2.56. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada real, entonces el escalar λ se dirá un **valor propio** de $\mathbf{A}$ si anula el determinante

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

La relación anterior se llama la **ecuación característica** de la matriz $\mathbf{A}$.

Observamos que, de la relación $0 = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ para calcular los valores propios de una matriz, ocuparemos cualquiera de estas ecuaciones.

EJEMPLO 2.57. Calcule los valores propios de la matriz real de 2×2,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

◁ Al realizar las operaciones matriciales

$$\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda-3 & -2\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$$

se obtiene,

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-3 & -2\\ 1 & \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

lo que implica que la ecuación característica de $\mathbf{A}$ es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$, y corresponden a los valores propios de $\mathbf{A}$. ▷

EJEMPLO 2.58. Calcule los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

◁ Procediendo como en el ejemplo anterior se obtiene

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

Con lo cual, los valores propios de $\mathbf{A}$ deben satisfacer la ecuación cuadrática $\lambda^2 + 1 = 0$.

Dado que las únicas soluciones de esta ecuación son los **números imaginarios** $\lambda = i$ y $\lambda = -i$, se sigue que $\mathbf{A}$ no tiene valores propios reales. ▷

EJEMPLO 2.59. Encuentre los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Como en los ejemplos anteriores, se obtiene

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ -3 & \lambda-2 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Por lo tanto, los valores propios de $\mathbf{A}$ deben satisfacer la ecuación de tercer grado

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

Por inspección $\lambda = 4$ es una raíz, es decir,

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

y las raíces restantes de tal cúbica satisfacen la ecuación

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

la cual se puede resolver mediante la fórmula cuadrática.

Por tanto, los valores propios de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda = 4, \quad \lambda = 2 - \sqrt{3} \quad \text{y} \quad \lambda = 2 + \sqrt{3} \quad \triangleright$$

DEFINICIÓN 2.60. Sean $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada y λ un valor propio de $\mathbf{A}$. El vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ se dirá un **vector propio** de $\mathbf{A}$ asociado a λ si satisface la ecuación matricial

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$$

EJEMPLO 2.61. Sea la matriz cuadrada de 3×3 dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

◁ Calculamos sus valores propios resolviendo la ecuación característica $0 = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$, es decir,

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

cuyas raíces son $\lambda = 1, 3, 4$.

Para calcular los vectores propios asociados a cada valor propio, consideramos la ecuación matricial

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$$

para cada valor de λ, es decir, el sistema homogéneo,

$$\begin{cases} (2-\lambda)u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 + (2-\lambda)u_2 = 0 \\ (4-\lambda)u_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

Para $\lambda = 1$ se tiene el sistema

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 + u_2 = 0 \\ 3u_3 = 0 \end{cases}$$

Notamos que la primera ecuación es la misma que la segunda, y que necesariamente $u_3 = 0$. Si ponemos $x = t$, entonces la solución general de este sistema es

$$(u_1, u_2, u_3) = (t, t, 0) = t(1, 1, 0)$$

lo que indica que un vector propio asociado a $\lambda = 1$ es

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 3$ se obtiene el sistema homogéneo

$$\begin{cases} -u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

cuya solución general es del tipo

$$(u_1, u_2, u_3) = (t, -t, 0) = t(1, -1, 0)$$

lo cual implica que un vector propio asociado a $\lambda = 3$ es

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Análogamente, para $\lambda = 4$ se tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} -2u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 - 2u_2 = 0 \\ 0u_3 = 0 \end{cases}$$

La tercera ecuación nos dice que u_3 es arbitraria, mientras que el sistema de 2×2 formado por las dos primeras ecuaciones tiene sólo la solución trivial para u_1, u_2, debido a que

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por lo tanto, la solución general de este último sistema homogéneo es

$$(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, t) = t(0, 0, 1)$$

lo que implica que un vector propio asociado a $\lambda = 4$ es

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta manera, el conjunto

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{u}_2 = (1,1,0),\ \mathbf{u}_3 = (0,0,1)\}$$

es un conjunto de vectores propios de $\mathbf{A}$.

Observamos que este conjunto es una base de $\mathbb{R}^3$ debido a que

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \triangleright$$

EJEMPLO 2.62. Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus vectores y valores propios.

$\triangleleft$ En primer lugar calculamos el determinante

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 27\lambda - 54$$

La ecuación cúbica obtenida tiene raíces enteras $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -3, \lambda_3 = -3$, donde observamos que una de ellas aparece repetida (es doble).

El sistema lineal homogéneo para un valor propio λ es

$$\begin{cases} (1-\lambda)u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0 \\ 2u_1 + (-2-\lambda)u_2 - 2u_3 = 0 \\ -4u_1 - 2u_2 + (4-\lambda)4u_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$$

Para el valor propio doble $\lambda = -3$ se tiene el sistema lineal homogéneo en las incógnitas u_1, u_2, u_3,

$$\begin{cases} 4u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0 \\ 2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \\ -4u_1 - 2u_2 + 4u_3 = 0 \end{cases}$$

Al resolver por el método de Gauss-Jordan, se tiene,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2}R_1 + R_2 \to R_2 \\ R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que induce la única ecuación con tres incógnitas

$$4u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0 \iff 2u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \iff u_3 = u_1 + \frac{1}{2}u_2$$

Al poner $u_1 = t$, $u_2 = s$, la solución general tiene la forma

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(t, s, t + \frac{1}{2}s\right) = (t, 0, t) + \left(0, s, \frac{1}{2}s\right) = t(1,0,1) + s\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$$

Esto es, los vectores obtenidos al tomar $t = 1$, $s = 0$ y $t = 0$, $s = 2$,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son vectores propios asociados a $\lambda = -3$.

Para el valor propio $\lambda = 6$ se tiene el sistema homogéneo

$$\begin{cases} -5u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0 \\ 2u_1 - 8u_2 - 2u_3 = 0 \\ -4u_1 - 2u_2 - 5u_3 = 0 \end{cases}$$

que se resuelve mediante el método de Gauss-Jordan (sección 1.2) de la siguiente forma.

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{2}{5}R_1 + R_2 \to R_2 \\ -\frac{4}{5}R_1 + R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{36}{5} & -\frac{18}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{9}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -\frac{5}{18}R_2 \to R_2 \\ -\frac{5}{9}R_3 \to R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad -R_2 + R_3 \to R_3 \quad \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, se tiene el sistema,

$$\begin{cases} -5u_1 + 2u_2 - 4u_3 = 0 \\ 2u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

en el cual, si se pone $u_2 = t$, se tiene una solución general

$$(u_1, u_2, u_3) = (2t, t, -2t) = t(2, 1, -2)$$

De esta forma, tomando $t = 1$, se tiene el vector

$$\mathbf{u}_3 = 1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

que es un vector propio asociado a $\lambda = 6$.

Notamos que el sistema de vectores propios obtenidos

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1),\ \mathbf{u}_2 = (0, 2, 1).\ \mathbf{u}_3 = (2, 1, -2)\}$$

es una base de vectores para $\mathbb{R}^3$, debido a que

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \quad \triangleright$$

EJEMPLO 2.63. Consideremos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y procedamos a calcular sus vectores y valores propios.

$\triangleleft$ Un cálculo directo nos muestra que

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

lo que nos indica inmediatamente que los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 2$.

El sistema de ecuaciones lineales homogéneas que nos ayuda a calcular los vectores propios es

$$\begin{cases} (1-\lambda)u_1 = 0 \\ u_1 + (2-\lambda)u_2 = 0 \\ u_2 + (2-\lambda)u_3 = 0 \end{cases}$$

De esta forma, para el valor propio $\lambda = 1$ se tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} 0u_1 = 0 \\ u_1 + u_2 = 0 \\ u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

lo que nos indica que u_1 es arbitrario y que $u_2 = -u_1$, $u_3 = u_1$. En otras palabras, la solución general es

$$(u_1, u_2, u_3) = (t, -t, t) = t(1, -1, 1)$$

y por lo tanto,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un vector propio asociado a $\lambda = 1$.

Para el caso $\lambda = 2$ se tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} -u_1 = 0 \\ u_1 + 0u_2 = 0 \\ u_2 + 0u_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 0 \\ +0u_2 = 0 \\ u_2 + 0u_3 = 0 \end{cases}$$

lo que nos indica, de la primera ecuación que $u_1 = 0$, de la tercera que $u_2 = 0$ y que u_3 es arbitrario, es decir, la solución del sistema es del tipo general

$$(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, t) = t(0, 0, 1).$$

De esta manera, el vector

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es el único vector propio encontrado, asociado a $\lambda = 2$. ▷

De la discusión anterior, se puede formular sin demostración el siguiente resultado.

TEOREMA 2.64. *Las siguientes proposiciones son equivalentes para una matriz cuadrada $(n \times n)$ dada.*

1. **A** *tiene un valor propio* λ.
2. $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$.
3. *Existe un vector propio* **u** *para* **A** *asociado al valor propio* λ.

Una matriz cuadrada se dice **diagonal** si sus entradas que no están sobre su diagonal son todas idénticamente nulas.

EJEMPLO 2.65. La matriz cuadrada

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal.

DEFINICIÓN 2.66. Una matriz cuadrada real $(n \times n)$ **A** se dice **diagonalizable** si existe una matriz invertible **B** tal que el producto $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}$ es una matriz diagonal. En este caso se dice que **B** diagonaliza a la matriz **A**.

Tenemos el siguiente resultado para el proceso de diagonalización de una matriz cuadrada.

TEOREMA 2.67. *Para una matriz cuadrada* **A** *de $(n \times n)$ son equivalentes las siguientes proposiciones.*

1. **A** *es diagonalizable*
2. *Los vectores propios* **A** *conforman una base de* $\mathbb{R}^n$ *y la matriz* **B** *formada por los vectores propios de* **A** *(como vectores columna) diagonaliza* **A**.

◁ Daremos la prueba apenas para las matrices de 3×3, indicando que para dimensiones mayores la prueba es análoga. Suponemos que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{3\times3}$ es diagonalizable. Entonces existe una matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

tal que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}$ es una matriz diagonal $\mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}$ que tiene la forma

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Esto implica necesariamente que $\mathbf{BD} = \mathbf{AB}$.

Por un lado, se tiene

$$\mathbf{BD} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \lambda_3 b_{13} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_3 b_{23} \\ \lambda_1 b_{31} & \lambda_2 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix}$$
$$= (\lambda_1 B^1 \quad \lambda_2 B^2 \quad \lambda_3 B^3)$$

donde hemos escrito a la última matriz mediante sus columnas.

Escribimos a la matriz $\mathbf{B}$ mediante sus columnas, de la multiplicación de matrices se tiene

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}(B^1 \quad B^2 \quad B^3) = (\mathbf{A}B^1 \quad \mathbf{A}B^2 \quad \mathbf{A}B^3)$$

De esta manera, al igualar columnas en la igualdad $\mathbf{AB} = \mathbf{BD}$ se obtienen las igualdades

$$\mathbf{A}B^1 = \lambda_1 B^1, \quad \mathbf{A}B^2 = \lambda_2 B^2, \quad \mathbf{A}B^3 = \lambda_3 B^3$$

es decir, $\{B^1, B^2, B^3\}$ es un conjunto de vectores propios de $\mathbf{A}$ asociados a los valores propios respectivos λ_1, λ_2, λ_3.

Por otro lado, debido a que $\mathbf{B}$ es invertible, se cumple la relación

$$(B^1, B^2, B^3) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

que hace de $\{B^1, B^2, B^3\}$ una base de vectores propios para $\mathbb{R}^3$. Esto demuestra que 1 implica 2.

Para probar que la afirmación 1 se sigue de la 2 elegimos $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ los vectores propios de $\mathbf{A}$ asociados a los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3 respectivamente, y sea

$$\mathbf{B} = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ u_2^1 & u_2^2 & u_2^3 \\ u_3^1 & u_3^2 & u_3^3 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathbf{B}$ es invertible pues los vectores son linealmente independientes.

Por las consideraciones anteriores se tiene que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}(\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3) = (\mathbf{A}\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_3)$$
$$= (\lambda_1 \mathbf{u}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{u}_2 \quad \lambda_3 \mathbf{u}_3) = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{BD}$$

donde $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal, cuyas entradas diagonales son los valores propios de $\mathbf{A}$, es decir,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

De esta manera, $\mathbf{B}$ diagonaliza la matriz $\mathbf{A}$ pues se cumple la igualdad matricial $\mathbf{AB} = \mathbf{BD}$, o equivalentemente $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{D}$. Esto termina la prueba del teorema. ▷

Otro resultado útil para el proceso se diagonalización es el siguiente, cuya prueba omitimos por ser más técnica.

LEMA 2.68. *Si los valores propios de una matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *son todos diferentes entre sí, entonces los vectores propios de* $\mathbf{A}$ *conforman una base de vectores propios.*

El lema 2.68 junto con el teorema 2.67, implican el siguiente que es de gran utilidad.

TEOREMA 2.69. *Si la matriz cuadrada* $\mathbf{A}$ *de* $n \times n$ *tiene diferentes entre sí a todos sus valores propios, entonces es diagonalizable.*

◁ Por el lema 2.68, si los valores propios de $\mathbf{A}$ son diferentes entre sí, entonces los vectores propios de $\mathbf{A}$ conforman una base de $\mathbb{R}^n$. Por el teorema 2.67 $\mathbf{A}$ es necesariamente diagonalizable. ▷

EJEMPLO 2.70. Para la matriz cuadrada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

se obtuvieron los vectores propios

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{u}_2 = (1,-1,0),\ \mathbf{u}_2 = (0,0,1)\}$$

asociados a los valores propios $\lambda = 1$, $\lambda_3 = 3$ y $\lambda = 4$ respectivamente, y que forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $\mathbf{B}$ la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que cambia la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ por la base de vectores propios $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Por un cálculo directo se tiene que

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y otro cálculo directo prueba que

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal, con los valores propios como elementos diagonales. Consecuentemente $\mathbf{A}$ es diagonalizable por la matriz $\mathbf{B}$. ▷

El siguiente ejemplo nos muestra que una matriz $\mathbf{A}$ puede ser diagonalizable, aun sin tener todos sus valores propios distintos.

EJEMPLO 2.71. Para la matriz cuadrada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

se obtuvo una base de vectores propios

$$\{\mathbf{u}_1 = (1,0,1),\ \mathbf{u}_2 = (0,2,1),\ \mathbf{u}_3 = (5,6,10)\}$$

asociados a los vectores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = 6$ respectivamente.

Sea la matriz $\mathbf{B}$ dada por

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

que cambia la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ por la base de vectores propios obtenida.

Mediante el método de Gauss-Jordan se puede obtener que

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y un cálculo directo demuestra que

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, la matriz $\mathbf{B}$ diagonaliza a la matriz $\mathbf{A}$. ▷

EJEMPLO 2.72. Al considerar la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se obtuvieron los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, y apenas dos vectores propios correspondientes a tales valores propios

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, -1, -1), \mathbf{u}_2 = (0, 0, 1)\}$$

◁ Como este conjunto es linealmente independiente, pero no conforma una base de $\mathbb{R}^3$, no podemos asegurar ni que la matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizable ni que no lo sea. ▷

Sobre métodos más generales de diagonalización, el lector interesado puede referirse al trabajo de Anton [1], donde encontrará más información.

Ejercicios 2.6

Encuentre los valores y vectores propios de cada una de las matrices que se dan a continuación.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
10. ¿Cuáles de las matrices de los ejercicios anteriores son diagonalizables? Aquellas que lo sean diagonalícelas.
11. Si $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es una matriz de orden $n \times n$, la **traza de A**, denotada $\mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ se define como la suma de los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}$, es decir,

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Calcule la traza de las matrices

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -8 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

12. Para una matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ demuestre que

$$|\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}| = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(\mathbf{M}) + |\mathbf{M}|$$

2.7 Rectas y planos

En esta parte introducimos los conceptos de recta y plano como objetos contenidos en un espacio tridimensional, caracterizándolos mediante los elementos que los definen.

2.7.1 Rectas en $\mathbb{R}^n$

Dados un punto $p \in \mathbb{R}^n$ y un vector $\mathbf{u}$, los puntos q de la recta $L \subset \mathbb{R}^n$ que pasa por p y es paralela a $\mathbf{u}$ satisfacen la ecuación

$$q = p + t\mathbf{u}$$

para algún número real $t \in \mathbb{R}$ (véase la figura 2.12).

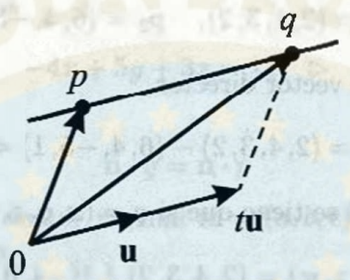


Figura 2.12. Recta en $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN. Decimos que la ecuación

$$q = p + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

es la **ecuación vectorial de la recta** contenida en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el punto p con el **vector director u**. Se llama también **ecuación paramétrica** de L pues depende del parámetro t.

EJEMPLO 2.73. Halle la ecuación paramétrica de la recta L en el plano que pasa por los puntos $p_1 = (3, 2)$ y $p_2 = (4, 1)$.

◁ Claramente, la recta pasa por el punto $p = (4, 1)$ y la dirige el vector de posición

$$\mathbf{u} = p_2 - p_1 = (4, 1) - (3, 2) = (1, -1)$$

De esta manera, si el punto arbitrario $q = (x, y)$ está sobre la recta, entonces satisface la relación

$$(x, y) = (4, 1) + t(1, -1) = (4, 1) + (t, -t) = (4 + t, 1 - t)$$

Es decir, el par de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

definen a la recta L.

Si en las relaciones anteriores despejamos la variable t,

$$\begin{cases} t = x - 4 \\ t = 1 - y \end{cases}$$

entonces, al igualar tales ecuaciones se obtiene

$$x - 4 = 1 - y$$

que implica la igualdad

$$y = -x + 5$$

que también define a L sin parámetro (véase la figura 2.13) ▷

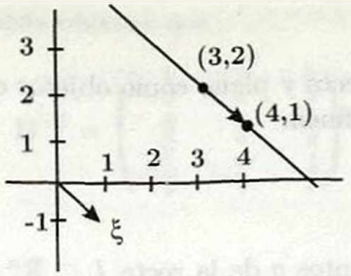


Figura 2.13. Recta $y = -x + 5$

EJEMPLO 2.74. Halle la ecuación de la recta L en $\mathbb{R}^4$ que pasa por los puntos

$$p_1 = (2, 4, 3, 2), \quad p_2 = (6.4, -5, 1)$$

$\lhd$ Tal recta pasa por $p = (2, 4, 3, 2)$ y tiene vector director

$$\mathbf{u} = p_1 - p_2 = (2, 4, 3, 2) - (6, 4, -5, 1) = (-4, 0, 8, 1)$$

Por lo tanto, en las coordenadas (x, y, z, w) se tiene que si $q = (x, y, z, w) \in L$, entonces

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) &= (2, 4, 3, 2) + t(-4, 0, 8, 1) \\ &= (2, 4, 3, 2) + (-4t, 0, 8t, t) \\ &= (2 - 4t, 4, 3 + 8t, 2 + t)\end{aligned}$$

Esto es, L se define por el sistema paramétrico

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 4 \\ z = 3 + 8t \\ w = 2 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Para ilustrar, si $t = 0$, entonces el punto $(x = 2, y = 4, z = 3, w = 2)$ está en L.

Igualmente, si $t = -1$, entonces también el punto con coordenadas $x = 6, y = 4, z = -5$, $w = 1$ pertenece a la recta L. $\rhd$

En particular, aquí estamos interesados en las rectas contenidas en $\mathbb{R}^3$, tal que si pasan por un punto $p = (a, b, c)$ con vector director $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, se tenga su definición por el sistema

$$\begin{cases} x = u_1 t + a \\ y = u_2 t + b \\ z = u_3 t + c \end{cases}$$

2.7.2 El plano

Dados, un punto $p \in \mathbb{R}^3$ y un vector $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, se define la **ecuación del plano** P pasando por el punto p con el **vector normal** (ortogonal) $\mathbf{n}$, como el conjunto de puntos $q \in \mathbb{R}^3$, que satisfacen la ecuación

$$\mathbf{n} \cdot (q - p) = 0$$

o bien,

$$\mathbf{n} \cdot q = \mathbf{n} \cdot p.$$

La figura 2.14 ilustra la definición.

EJEMPLO 2.75. Sea el punto $p = (-3, 1, -2)$ en $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{n} = (-4, 5, 3)$ un vector en $\mathbb{R}^3$. La ecuación del plano que pasa por el punto p y tiene normal $\mathbf{n}$ es, en coordenadas, $q = (x, y, z)$,

$$\lhd \quad (-4, 5, 3) \cdot (x, y, z) = (-4, 5, 3) \cdot (-3, 1, -2)$$

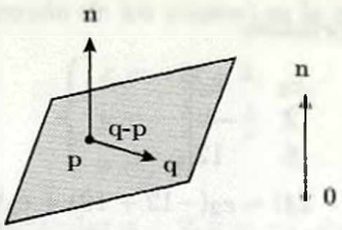


Figura 2.14. El plano en $\mathbb{R}^3$.

o equivalentemente,

$$-4x + 5y + 3z = 12 + 5 - 6 = 11$$

De esta forma, la ecuación del plano buscada es

$$-4x + 5y + 3z = 11 \quad \triangleright$$

En general, para la ecuación

$$\mathbf{n} \cdot q = \mathbf{n} \cdot p$$

del plano P pasando por $p = (p_1, p_2, p_3)$ con vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$ se tiene que, en las coordenadas (x, y, z), los puntos $q = (x, y, z)$ de P satisfacen la ecuación

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (a, b, c) \cdot (p_1, p_2, p_3)$$

o equivalentemente, satisfacen la ecuación

$$ax + by + cz = ap_1 + bp_2 + cp_3 = d$$

de donde una ecuación del tipo

$$ax + by + cz = d$$

representa la ecuación del plano con vector normal $\mathbf{n} = (a, b, c)$.

EJEMPLO 2.76. La ecuación

$$2x + 3y + 6z = 1$$

representa a un plano en $\mathbb{R}^3$ con un vector normal $\mathbf{n} = (2, 3. 6)$

$\triangleleft$ Si $y = 0$, $z = 0$ sobre el plano $\mathbb{R}^2_{y,z}$, entonces $2x = 1$, de donde $x = \frac{1}{2}$. Si $y = 0$, $x = 0$ sobre el plano $\mathbb{R}^2_{x,y}$, entonces $z = \frac{1}{6}$. Si $x = 0$, $z = 0$ sobre el plano $\mathbb{R}^2_{x,z}$, entonces $y = \frac{1}{3}$.

Lo anterior nos da los cortes del plano sobre los ejes, y la extensión del triángulo mostrado en la figura 2.15 nos realiza totalmente el plano. $\triangleright$

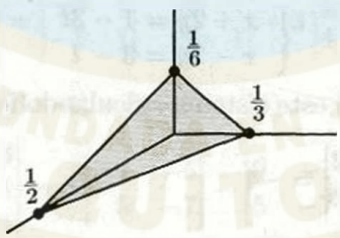


Figura 2.15. Parte del plano $2x + 3y + 6z = 1$ en el primer octante.

Observamos que dos planos P_1, P_2 son paralelos si sus respectivos normales son paralelos.

EJEMPLO 2.77. Sean los planos en $\mathbb{R}^3$, dados por las ecuaciones

$$\begin{cases} -x + 2y - 4z = 2 \\ 3x - 6y + 12z = 7 \end{cases}$$

$\triangleleft$ Sus normales respectivos son $\mathbf{n}_1 = (-1, 2, -4)$ y $\mathbf{n}_2 = (3, -6, 12)$.

Al calcular el producto vectorial de estos normales,

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & 12 \end{vmatrix}$$
$$= e_1(24-24) - e_2(-12+12) + e_3(6-6) = (0,0,0)$$

se concluye que $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son paralelos, lo que implica que los planos dados son paralelos. ▷

DEFINICIÓN 2.78. Sean dos planos P_1, P_2 contenidos en $\mathbb{R}^3$ y sean $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ sus normales respectivos. Se define el **ángulo** θ formado por los planos P_1 y P_2 como el ángulo θ formado por sus normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$. La figura 2.16 ilustra esta definición.

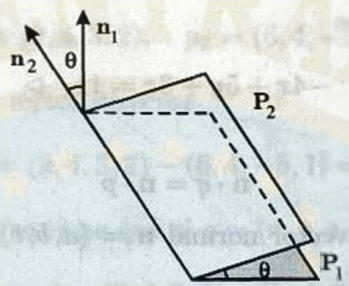


Figura 2.16. Ángulo formado por dos planos en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 2.79. Verificar si los planos $x+2y+3z=1$ y $x-2y+z=3$, en $\mathbb{R}^3$, son paralelos. De no serlo, calcular su intersección y el ángulo entre ellos.

◁ Los normales respectivos son $\mathbf{n}_1 = (1,2,3)$ y $\mathbf{n}_2 = (1,-2,1)$, con lo que tenemos,

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2+6, -(1-3), -2-2)$$
$$= (8,2,-4) \neq (0,0,0)$$

Por lo tanto $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ no son paralelos y consecuentemente los planos se cortan, y los puntos (x,y,z) en la intersección deberán satisfacer ambas ecuaciones.

Tales puntos se hallan al resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x-2y+\ z=3 \end{cases}$$

Al hacer $z=t$ se tiene el sistema lineal

$$\begin{cases} x+2y=1-3t \\ x-2y=3-t \end{cases}$$

Utilizamos la regla de Cramer para resolver este sistema calculando los determinantes respectivos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1-3t & 2 \\ 3-t & -2 \end{vmatrix} = -2(1-3t) - 2(3-t) = 8t-8$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1-3t \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} = (3-t) - (1-3t) = 2t+2$$

De esta manera

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{8t-8}{-4} = -2t+2$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{2t+2}{-4} = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la solución del sistema (intersección de los planos) es la recta parametrizada

$$\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ z = t \end{cases}$$

En particular, si $t = 0$, se tiene la solución particular $x = 2, y = -\frac{1}{2}, z = 0$, es decir, el punto $\left(2, -\frac{1}{2}, 0\right)$ está en ambos planos, lo que se verifica directamente:

$$\begin{cases} 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3(0) = 1 \\ 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) + \quad 0 = 3 \end{cases}$$

Para calcular el ángulo entre los planos se calcula el ángulo θ entre sus vectores normales

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|} = \arccos \frac{1 - 4 + 3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}$$

es decir,

$$\theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

lo que nos dice que los planos son ortogonales. ▷

Es fácil probar el siguiente lema utilizando las ideas del ejemplo anterior.

LEMA 2.80. *Si la pareja de planos*

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

no es paralela, entonces se intersectan en una recta parametrizada y forman el ángulo θ dado por

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \, \|\mathbf{n}_2\|}$$

donde $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ son los vectores normales respectivos.

◁ Es un cálculo directo al resolver el sistema lineal dado por los planos. ▷

EJEMPLO 2.81. Calcule la intersección de los planos en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

◁ Resolvemos el sistema de ecuaciones de 3×3 usando la regla de Cramer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= (-5 + 7) + (3 - 4) + 3(-21 + 20) = -2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 3(28 + 25) - (-63 + 5) + (-45 - 4) = 168$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(15 + 16) - (5 - 36) + (-4 - 27) = 93$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & -4 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = -31$$

Por lo tanto, las soluciones al sistema son

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{168}{-2} = -84$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{93}{-2} = -\frac{93}{2}$$
$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-31}{-2} = \frac{31}{2}$$

De esta manera, el punto donde se intersectan los planos tiene coordenadas

$$(-84, -93/2, 31/2) \triangleright$$

De igual forma, para dimensiones mayores ($n \geq 3$) podemos definir la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^n$ (**hiperplano**) mediante los elementos: $\mathbf{n}$ vector normal, p punto por donde pasa y q cualquier punto, utilizando la ecuación

$$\mathbf{n} \cdot p = \mathbf{n} \cdot q$$

Por ejemplo, la ecuación

$$6x - 3y + z - 3v - 2w = 8$$

denota un plano de dimensión 4 en el espacio $\mathbb{R}^5$ en el sistema de coordendas (x, y, z, v, w) con un vector normal $\mathbf{n} = (6, -3, 1, -3, -2)$.

EJEMPLO 2.82. Calcule la intersección en $\mathbb{R}^4$ de los hiperplanos de dimensión 3,

$$\begin{cases} 2x + 7y + 3z + t = 5 \\ x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ x + 5y - 9z + 8t = 1 \\ 5x + 18y + 4z + 5t = 12 \end{cases}$$

$\triangleleft$ Resolvemos este sistema mediante el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -2R_1 + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \\ -5R_1 + R_4 \to R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ -2R_2 + R_3 \to R_3 \\ -3R_2 + R_4 \to R_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos queda entonces el sistema de 2×4 dado por

$$\begin{cases} x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ y - 7z + 5t = -1 \end{cases}$$

Tal sistema lo resolvemos por la regla de Cramer en virtud de que

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

lo que nos asegura que el sistema parametrizado

$$\begin{cases} x + 3y = 3 - 5z + 2t \\ y = -1 + 7z - 5t \end{cases}$$

tiene solución para x y y en términos de las dos variables libres z, t.

Al calcular el determinante respectivo para x se tiene

$$\begin{vmatrix} 3 - 5z + 2t & 3 \\ -1 + 7z - 5t & 1 \end{vmatrix} = 6 - 26z + 17t$$

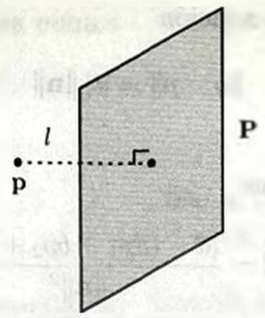


Figura 2.17. Distancia de un punto a un plano.

de donde,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6 - 26z + 17t}{1}$$

Por lo tanto, las soluciones son

$$\begin{cases} x = 6 - 26z + 17t \\ y = -1 + 7z - 5t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

para valores reales arbitrarios de z y t.

Este último sistema define un plano de dimensión 2 contenido en $\mathbb{R}^4$, esto es, la intersección de los hiperplanos dados de dimensión 3 es un plano de dimensión 2. $\triangleright$

Dados un plano P y un punto $p \in \mathbb{R}^3$, la **distancia** de p al plano P es la distancia ortogonal de p a los puntos q del plano P.

Para calcular la distancia mencionada, se procede de la siguiente manera.

$\triangleleft$ Si el plano P se define por la ecuación

$$ax + by + cz = d$$

entonces el vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$ es el normal.

Si el punto $q \in P$ nos da la distancia ortogonal buscada, entonces el vector $p - q$ es múltiplo de $\mathbf{n}$, es decir,

$$p - q = t\mathbf{n}$$

para algún escalar t (son paralelos), lo que implica que

$$\|p - q\| = |t|\,\|\mathbf{n}\|.$$

Por otro lado, al buscar $q \in P$, este punto está en la recta con un vector $\mathbf{n}$ que se une a p con q, escrita de la forma

$$\begin{cases} x = ta + p_1 \\ y = tb + p_2 \\ z = tc + p_3 \end{cases}$$

donde $p = (p_1, p_2, p_3)$ y $\mathbf{n} = (a, b, c)$ es el vector director de la recta.

Buscamos entonces un escalar t tal que la recta tenga un punto $q \in P$. Para esto, $q = (x, y, z) \in L$ debe también satisfacer la ecuación del plano:

$$\begin{aligned} d &= a(ta + p_1) + b(tb + p_2) + c(tc + p_3) \\ &= t(a^2 + b^2 + c^2) + ap_1 + bp_2 + cp_3 \\ &= (ap_1 + bp_2 + cp_3) + t(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Esto es,

$$t = \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)}{\|\mathbf{n}\|^2}$$

Por otro lado, $q \in P$ debe satisfacer además la relación

$$\|q - p\| = |t|\,\|\mathbf{n}\|$$

siendo $\|q - p\|$ la distancia buscada de q a p.

Si denotamos por ℓ a tal **distancia**, se tiene que

$$\ell = |t|\,\|\mathbf{n}\| = \frac{|d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)|}{\|\mathbf{n}\|^2}\|\mathbf{n}\|$$

lo que implica que

$$\ell = \frac{|d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Se resume toda esta discusión en el lema siguiente.

LEMA 2.83. *La distancia ℓ del punto $p = (p_1, p_2, p_3)$ al plano P con la ecuación*

$$ax + by + cz = d$$

se calcula por la fórmula

$$\ell = \frac{|d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)|}{\|\mathbf{n}\|}$$

donde $\mathbf{n} = (a, b, c)$ es el vector normal a P

Si $p = (p_1, p_2, p_3)$ está en el plano, entonces satisface la ecuación del plano, es decir

$$0 = d - (ap_1 + bp_2 + cp_3)$$

y por lo tanto su distancia a P es cero.

EJEMPLO 2.84. Sea el plano P dado por la ecuación

$$3x + 2y - z = -1$$

y tomemos el punto $p = (2, 5, 6)$.

◁ La distancia ℓ de p a P es calculada por

$$\ell = \frac{|-1 - [3(2) + 2(5) - 6]|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{|-1 - 10|}{\sqrt{14}} = \frac{11}{\sqrt{14}} \triangleright$$

Ejercicios 2.7

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(1, 2)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = (-1, 3)$.
2. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(3, 2)$ y es perpendicular al vector $(-2, 5)$.

Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos indicados en los ejercicios 3–6.

3. $(1, 1, -1)$ y $(4, 3, 2)$
4. $(0, 1, -6)$ y $(-4, 0, 2)$
5. $(1, -2)$ y $(2, 1)$
6. $(1, 1, -1, 1)$ y $(4, 4, -4, 4)$

Calcule la ecuación paramétrica de la recta que pasa por p y tiene dirección $\mathbf{u}$ para los ejercicios 7–10.

7. $p = (1, 1, -1)$, $\mathbf{u} = (-2, 3, -1)$
8. $p = (-2, 1)$, $\mathbf{u} = (4, 2)$
9. $p = (2, 3, 0)$, $\mathbf{u} = (-1, 2, 3)$
10. $p = (0, 1, 1, 2)$, $\mathbf{u} = (-1, 3, 4, 2)$
11. Escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3, 1, 2)$ y que su vector director $\mathbf{u}$ que es ortogonal a los vectores $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{w} = (-1, 0, 1)$.

Calcule la ecuación del plano que tiene vector normal N y pasa por el punto p para los ejercicios 12–14.

12. $N = (-1, 1, 2)$, $p = (2, 3, -1)$
13. $N = (4, -2, 3)$, $p = (-1, 4, 1)$
14. $N = (-1, 5, 3)$, $p = (4, 1, 6)$

Calcule la ecuación del plano que pasa por los tres puntos de los ejercicios 15–17.

15. $(1,1,1), (2,1,-1), (3,0,1)$

16. $(3,-2,-1), (1,2,3), (2,-3,1)$

17. $(4,0,2), (2,-1,0), (0,2,3)$

Calcule la ecuación de la intersección de las parejas de planos de los ejercicios 18–22.

18. Los planos de los ejercicios 12 y 13.

19. Los planos de los ejercicios 15 y 16.

20. Los planos de los ejercicios 14 y 17.

21. $\begin{cases} x+y+x=1 \\ -x+y-z=0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x-y-z=3 \\ 3x+y-2z=1 \end{cases}$

Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto p y cuyo vector director $\mathbf{u}$ es el normal al plano P de los ejercicios 23–25.

23. $p=(1,1,1)$ y P pasa por los puntos $(6,2,0), (1,1,-1), (-2,3,1)$.

24. $p=(1,0,3)$ y P es ortogonal a los planos

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$$

25. $p=(2,3,1)$ y P es paralelo al plano por los puntos $(4,2,-1), (0,1,-3)$ y $(1,0,2)$.

Calcule la intersección de la recta L con el plano P de los ejercicios 26–28.

26. L y P son la recta y el plano del ejercicio 24.

27. L es la recta que pasa por el punto $(-2,-3,-1)$ con vector director $\mathbf{u}=(1,1,-1)$ y P es el plano del ejercicio 26.

28. L es la recta por $p=(1,3,4)$ con vector director $\mathbf{u}=(2,1,0)$, y P es el plano con ecuación $2x-y+z=4$

Calcule la distancia del punto p al plano P en los ejercicios 29–31.

29. $p=(1,0,3)$, $P: 6x-8y+z=6$

30. $p=(-2,1,3)$, $P: x+y+z=2$

31. $p=(4,3,2)$, P pasa por los puntos $(1,1,1), (0,0,0), (-1,1,-1)$

2.8 Elementos básicos de superficies en $\mathbb{R}^3$

En esta sección introducimos el concepto básico de superficie en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Damos ejemplos de las superficies más comúnmente conocidas y un tratamiento general de su estudio.

Utilizamos una notación para definir a los planos coordenados de la siguiente manera: $\mathbb{R}^2_{x,y}$ denotará al plano (x,y) contenido en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2_{x,z}$ denotará al plano (x,z) contenido en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2_{y,z}$ denotará al plano (y,z) contenido en $\mathbb{R}^3$.

DEFINICIÓN 2.85. A los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfagan una relación real del tipo

$$R(x,y,z)=0$$

se les dirá que conforman una **superficie ordinaria** en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 2.86 (plano). Un conjunto de puntos que satisfacen una ecuación del tipo

$$ax+by+cz=d$$

se dice que forman un plano con vector normal $N=(a,b,c)$.

◁ Tales puntos también satisfacen la relación

$$R(x,y,z)=ax+by+cz-d=0$$

lo que asegura que un plano es una superficie (plana) en $\mathbb{R}^3$. ▷

EJEMPLO 2.87 (Esfera de radio R). Sea $R>0$ un número real dado.

◁ Los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que distan R del origen conforman una superficie esférica satisfaciendo la ecuación

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$$

o equivalentemente,

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

En otras palabras, los puntos sobre la esfera deberán satisfacer la relación:

$$R(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

lo que hace que la esfera con radio R y centro en el origen sea una superficie en $\mathbb{R}^3$. Esto se ilustra en la figura 2.18.

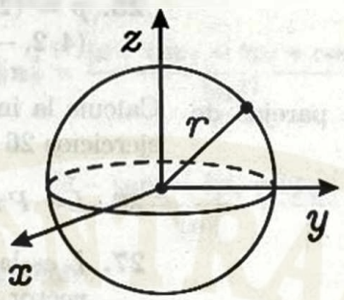


Figura 2.18. Superficie esférica en $\mathbb{R}^3$.

Para muestra, la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

describe a una superficie esférica de radio 4 con centro en $(0, 0, 0)$. ▷

2.8.1 Superficies de revolución

Consideremos en el plano x, z una curva γ que es la gráfica de una función $z = f(x)$, tal que no corta al eje z:

$$\gamma : \{(x, f(x)) \mid f \text{ es función de } x\}$$

Al hacer girar γ en torno al eje z se obtiene una **superficie de revolución** S contenida en $\mathbb{R}^3$. Veremos que S es una superficie según nuestra definición.

◁ Sea el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Afirmamos que satisface una relación del tipo

$$R(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Cierto es que (x_0, y_0, z_0) está en el círculo obtenido al hacer girar el punto (x_0, z_0) de la curva γ.

Pero entonces,

$$z_0 = f(x_0)$$

y todos los puntos del círculo de radio x_0 están a la misma altura z_0 y contenidos en el plano $R^2_{x,y}$ en un círculo de radio x_0. Es decir, tienen una ecuación en el plano $z = z_0$ dada por $x^2 + y^2 = x_0^2$ como se muestra en la figura 2.19.

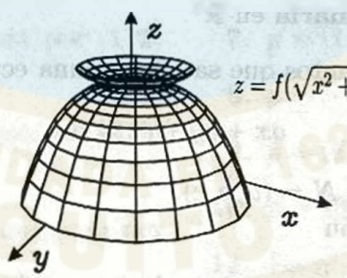


Figura 2.19. Superficie de revolución.

Esto implica que sobre tal círculo se cumple que

$$z_0 = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Ya que (x_0, y_0, z_0) es arbitrario, entonces cada punto $(x, y, z) \in S$ debe satisfacer la ecuación

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

es decir, los puntos $(x, y, z) \in S$ satisfacen además la relación

$$R(x, y, z) = z - f(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$$

lo que hace de S una superficie. ▷

De igual forma, si $z = f(y)$ y se hace girar γ alrededor del eje z, se obtiene la misma relación. Esto es, si $z = f(x)$ o $z = f(y)$ para obtener la ecuación de la superficie S obtenida al girar la gráfica γ de f alrededor del eje z es necesario remplazar

$$x \to \sqrt{x^2 + y^2}$$

o bien, en el otro caso,

$$y \to \sqrt{x^2 + y^2}$$

EJEMPLO 2.88. Consideremos la ecuación de la parábola en el plano x, z, dada por

$$z = x^2$$

con $x \geq 0$.

La ecuación de la superficie de la revolución S (**paraboloide circular**) obtenida al hacer girar tal parábola alrededor del eje z es

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2$$

o equivalentemente, la relación

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

Véase la figura 2.20 que describe a esta superficie.

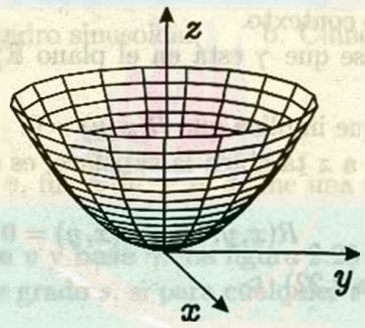


Figura 2.20. Paraboloide circular $z = x^2 + y^2$.

EJEMPLO 2.89. Consideremos la parte de la hipérbola canónica en el plano y, z,

$$z = \frac{1}{y}$$

con $y > 0$. La ecuación de la superficie de revolución S obtenida al hacer girar alrededor del eje z es

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Tal superficie se llama **hiperboloide circular** y se ilustra en la figura 2.21.

EJEMPLO 2.90. Sea el semicírculo en el plano $\mathbb{R}^2_{x,y}$ dado por la ecuación

$$x = -\sqrt{R^2 - y^2}$$

donde $x \leq 0$.

Al hacer girar en torno al eje y (intercambiando) remplazando en este caso la variable

$$x \to \sqrt{z^2 + x^2}$$

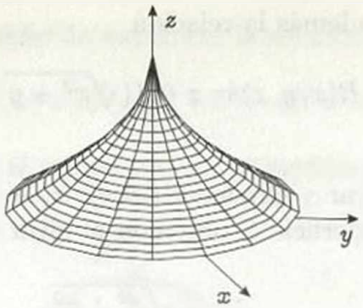


Figura 2.21. Hiperboloide circular.

se obtiene la superficie de revolución

$$-\sqrt{z^2+x^2} = -\sqrt{R^2-y^2}$$

o bien, al elevar al cuadrado cada miembro de la última igualdad,

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

que es la ya conocida esfera de radio R con centro en el origen (véase la figura 2.18). ▷

2.8.2 Superficies cilíndricas

Sea γ una curva contenida en un plano coordenado y sea ℓ el eje perpendicular a tal plano. Si por cada punto $(x_0, y_0, z_0) \in \gamma$ pasamos una recta paralela a ℓ, obtenemos una **superficie cilíndrica** S. La curva γ se llama **generatriz** de S y ℓ se llama **directriz**.

Se afirma que S es superficie en nuestro contexto.

◁ Sin pérdida de generalidad, supóngase que γ está en el plano $\mathbb{R}^2_{x,y}$. Por ser curva en $\mathbb{R}^2_{x,y}$ las coordenadas x, y satisfacen una ecuación $R(x,y) = 0$

Sea $(x,y,z) \in S$ entonces $(x,y) \in \gamma$ lo que implica que $R(x,y) = 0$.

Claramente el punto (x,y,z) omitiendo a z tambien la satisface, es decir si se define (abusando de la notación) a la función

$$R(x,y,z) = R(x,y) = 0$$

entonces S es una superficie (véase la figura 2.22). ▷

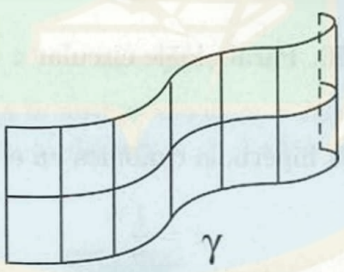


Figura 2.22. Superficie cilíndrica en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 2.91. Sea la curva plana $x^2+y^2 = 16$ el círculo de radio 4 con centro en el origen. Esta genera en el espacio la superficie cilíndrica S definida por la misma ecuación.

Se llama **cilindro circular recto** de radio 2 con centro en el origen y con directriz al eje z (véase la figura 2.23).

EJEMPLO 2.92. Sea la curva sinusoidal $y = \operatorname{sen} x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Tal curva genera la superficie cilíndrica en la misma ecuación, siendo z libre. Se llama **cilindro sinusoidal** con directriz al eje z. La figura 2.24 ilustra a esta superficie.

EJEMPLO 2.93. Sea γ la gráfica de $z = e^y$ en el plano $\mathbb{R}^2_{z,y}$. Esta curva genera la superficie cilíndrica

$$z - e^y = 0$$

con la variable x libre.

Esta superficie se llama **cilindro exponencial** con directriz el eje x .

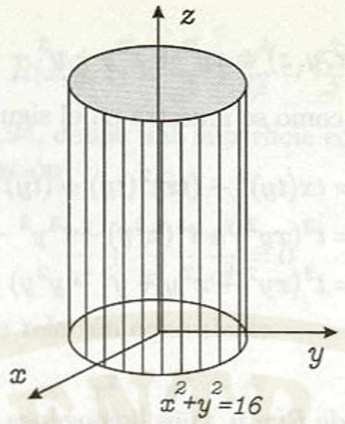


Figura 2.23. El cilindro circular recto.

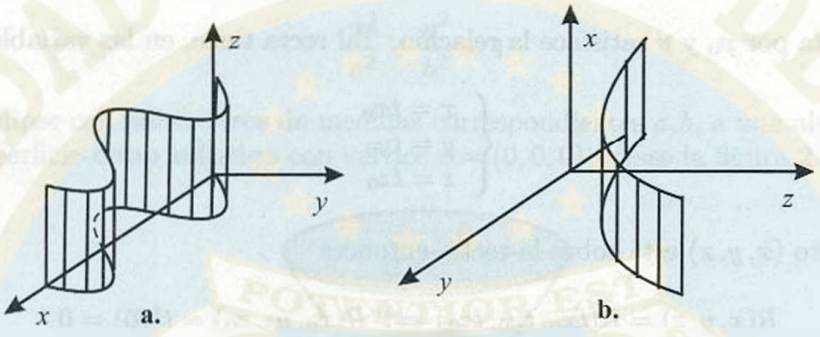


Figura 2.24. a. Cilindro sinusoidal b. Cilindro exponencial

2.8.3 Superficies cónicas

Dada una curva γ en el espacio $\mathbb{R}^3$ y un punto v, fuera de γ, se define una superficie S al tomar el haz de rectas por v que intersectan también a γ.

Se llama una **superficie cónica** con **vértice** v y **base** γ. La figura 2.25 ilustra estas superficies.

Una relación $R(x, y, z)$ se dice homogénea de grado s, si para cualquier $t \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$R(tx, ty, tz) = t^s R(x, y, z)$$

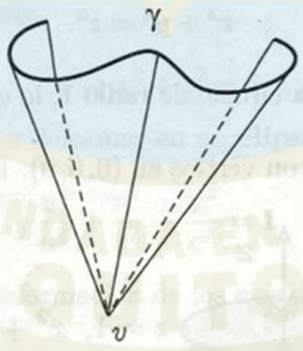


Figura 2.25. Superficie cónica en $\mathbb{R}^3$.

Para muestra, la relación

$$R(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

es homogénea de grado 2. En efecto,

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad R(tx, ty, tz) &= (tx)^2 + (ty)^2 - (tz)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 - t^2z^2 \\ &= t^2(x^2 + y^2 - z^2) = t^2 R(x, y, z) \quad \triangleright \end{aligned}$$

Otro ejemplo es la relación

$$R(x,y,z) = xy^2 + x^2y + y^3 - z^2y$$

la cual es una relación homogénea de grado 3, como se muestra en el siguiente cálculo.

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad R(tx,ty,tz) &= tx(ty)^2 + (tx)^2(ty) + (ty)^3 - (tz)^2(ty) \\ &= t^3(xy^2) + t^3(x^2y) + t^3y^3 - t^3(z^2y) \\ &= t^3(xy^2 + x^2y + y^3 - y^2y) = t^3R(x,y,z) \quad \triangleright \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente lema.

LEMA 2.94. *Una relación $R(x,y,z) = 0$, donde $R(x,y,z)$ es homogénea de grado s, define una superficie cónica en $\mathbb{R}^3$.*

$\triangleleft$ Sea $R(x,y,z) = 0$ tal que R es homogénea de grado s, y supóngase que $v = (0,0,0)$. Sea $p_0 = (x_0,y_0,z_0)$ tal que $R(y_0,x_0,z_0) = 0$.

Se afirma que toda la recta por p_0 y v satisface la relación. Tal recta tiene, en las variables x, y, z, la ecuación

$$\begin{cases} x = tx_0 \\ y = ty_0 \\ z = tz_0 \end{cases}$$

De esta manera, si el punto (x,y,z) está sobre la recta, entonces

$$R(x,y,z) = R(tx_0,ty_0,tz_0) = t^sR(x_0,y_0,z_0) = t^s(0) = 0$$

lo que demuestra que $(x,y,z) \in S$. $\triangleright$

EJEMPLO 2.95. La relación

$$R(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

es homogénea de grado 2 y por lo tanto

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

define una superficie cónica .

$\triangleleft$ Claramente $R(0,0,0) = 0^2 + 0^2 - 0^2 = 0$, lo que nos dice que $(0,0,0)$ está en la superficie y es el vértice.

De la relación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, si despejamos a z^2, obtenemos

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Si tomamos $z = 1$, entonces $x^2 + y^2 = 1$ es un círculo de radio 1, lo que nos dice que la curva γ, base de la superficie, es un círculo.

La superficie cónica S es un **cono circular** con vértice en $(0,0,0)$. La figura 2.26 muestra esta superficie. $\triangleright$

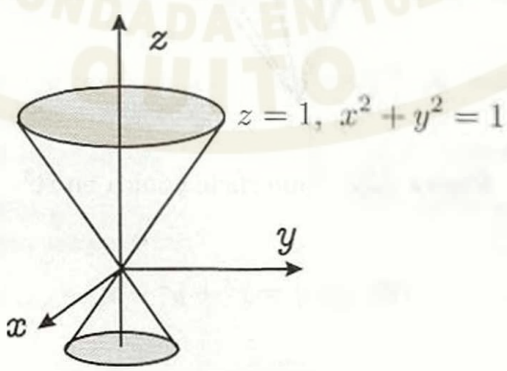


Figura 2.26. Cono circular.

EJEMPLO 2.96. Sea la relación

$$R(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

homogénea de grado 2, entonces por el lema 2.94, define una superficie cónica.

◁ Al hacer $R(x,y,z) = 0$ se obtiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

o bien, despejando los términos en z se tiene la relación equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

Si se hace $z = c$, obtenemos una curva γ base de la superficie, dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de una elipse con parámetros de medidas correspondientes a, b, a una altura $z = c$.

Le llamaremos a tal superficie **cono elíptico** con vértice $v = (0,0,0)$ (véase la figura 2.27). ▷

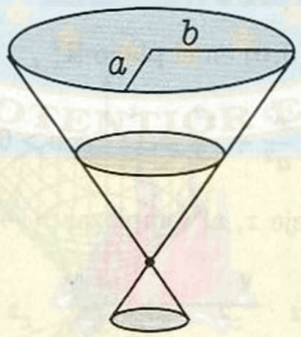


Figura 2.27. Cono elíptico.

2.8.4 Elipsoides, hiperboloides y paraboloides

En esta parte definimos nuevas superficies a partir de las ya conocidas, utilizando **cambios afines** de coordenadas: deformación de los ejes coordenados y traslaciones.

◁ Dada la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

en las coordenadas cartesianas x, y, z, la podemos deformar en un **elipsoide circular** en $\mathbb{R}^3$,

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} = 1$$

en las nuevas coordenadas u, v, w, mediante la deformación de los ejes coordenados

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{a} \\ y = \dfrac{v}{b} \\ z = \dfrac{w}{c} \end{cases}$$

o bien, mediante las relaciones inversas,

$$\begin{cases} u = ax \\ v = by \\ w = cz \end{cases}$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

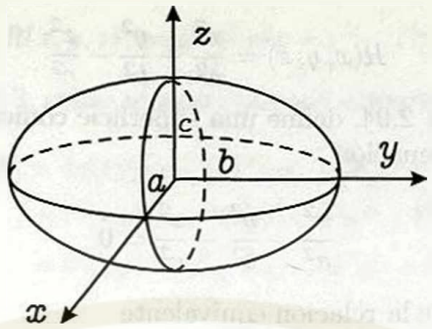


Figura 2.28. Elipsoide.

lo cual se comprueba con la simple sustitución

$$1 = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 + \left(\frac{w}{c}\right)^2 = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}.$$

La figura 2.28 ilustra al elipsoide. ▷

Mediante procesos análogos de formación de los ejes y usando otras coordenadas,[2] es posible obtener superficies nuevas a partir de superficies ya conocidas. Damos ejemplos a continuación.

EJEMPLO 2.97. Sea γ la elipse centrada en $(0,0)$ en el plano $\mathbb{R}^2_{x,z}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, c > 0$$

◁ Si se hace girar la curva γ alrededor del eje z, al remplazar $x \to \sqrt{x^2 + y^2}$ se obtiene la superficie de revolución elipsoidal dada por la ecuación

$$1 = \frac{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

llamada **elipsoide circular** (véase la figura 2.29).

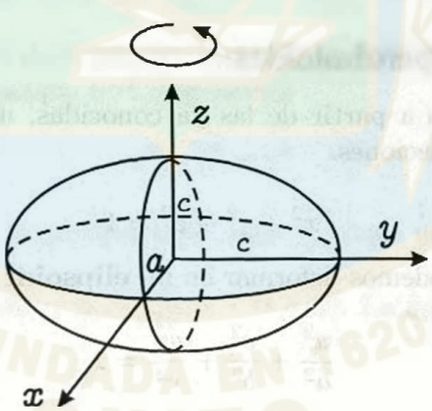


Figura 2.29. Elipsoide circular.

Al hacer una deformación del eje y mediante el remplazo de la variable y por

$$y \to \frac{ay}{b}$$

y sustituir en la última ecuación se tiene que

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{ay}{b}\right)^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

[2] En la sección 7.1 daremos un tratamiento más completo a este proceso de cambiar coordenadas en el espacio $\mathbb{R}^3$.

es decir,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

que es la ecuación de un **elipsoide** con los parámetros a, b, c (véase la figura 2.28). ▷

EJEMPLO 2.98 (hiperboloide de una hoja). Consideremos la hipérbola en el plano $\mathbb{R}^2_{x,z}$ dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b>0$$

◁ Al hacerla girar alrededor del eje z, remplazando $x \to \sqrt{x^2+y^2}$ se obtiene un **hiperboloide circular de una hoja** dado por la relación

$$1=\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

es decir,

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

Como cada punto de la hipérbola genera un círculo al girar, entonces tal hiperboloide se llamará **hiperboloide circular de una hoja**. Esto se ilustra en la figura 2.30.

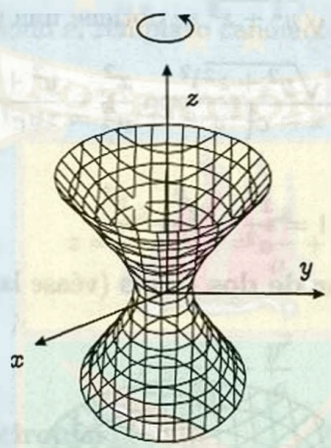


Figura 2.30. Hiperboloide circular de una hoja.

Si se deforma el eje y con el remplazo de variable

$$y \to \frac{ay}{b}$$

se obtiene

$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{ay}{b}\right)}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{\frac{a^2y^2}{b^2}}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$$
$$=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

o equivalentemente,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

que corresponde a un **hiperboloide elíptico de una hoja** (véase la figura 2.31).

Para muestra

$$2x^2+\frac{1}{2}y^2-3z^2=1$$

define a un hiperboloide elíptico de una hoja. ▷

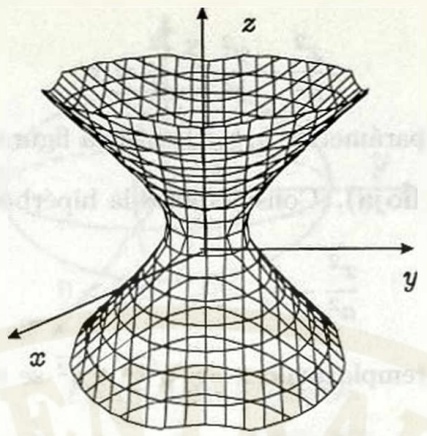


Figura 2.31. Hiperboloide elíptico de una hoja.

EJEMPLO 2.99 (hiperboloide de dos hojas). Si la misma hipérbola en el plano $\mathbb{R}^2_{x,z}$ con la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se hace girar alrededor del eje x, al remplazar $z \to \sqrt{y^2 + z^2}$ se obtiene una superficie con ecuación

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{y^2 + z^2})^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2}$$

es decir,

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

Tal superficie se llamará **hiperboloide circular de dos hojas** (véase la figura 2.32).

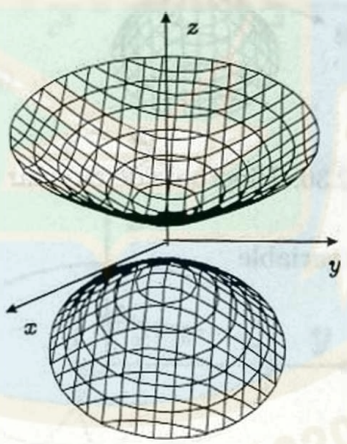


Figura 2.32. Hiperboloide circular de dos hojas.

Al hacer la deformación del eje y mediante

$$y \to \frac{cy}{b}$$

se obtiene la ecuación

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$$

que corresponde a un **hiperboloide elíptico** de dos hojas (véase la figura 2.33).

Para muestra, la ecuación

$$-x^2 - y^2 + \frac{1}{2}z^2 = 1$$

corresponde a un **hiperboloide elíptico** de dos hojas. ▷

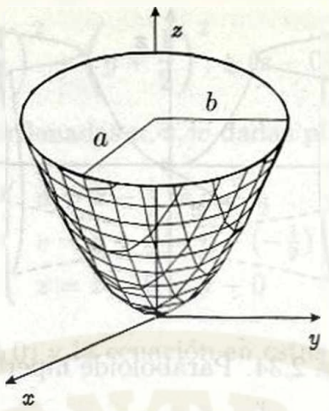


Figura 2.33. Hiperboloide elíptico de dos hojas.

EJEMPLO 2.100. Sea la parábola en el plano $\mathbb{R}^2_{x,z}$ dada por la ecuación $az = x^2$ o bien

$$z = \frac{x^2}{a}$$

Si se hace girar alrededor del eje z haciendo el remplazo canónico $x \to \sqrt{x^2 + y^2}$ en la última relación, se obtiene un **paraboloide** con ecuación

$$az = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$$

equivalentemente

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a} = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a}$$

o bien,

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a}$$

Tal superficie es llamada **paraboloide circular**.

◁ Si se deforma el eje y por $y \to \frac{\sqrt{ay}}{\sqrt{b}}$ se obtiene la ecuación

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{ay}}{\sqrt{b}}\right)^2}{a} = \frac{x^2}{a} + \frac{\frac{ay^2}{b}}{a} = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

es decir,

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

con los parámetros a, b con el mismo signo, que representa un **paraboloide elíptico**. ▷

Si en la ecuación obtenida en el ejemplo precedente

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

se tienen signos diferentes para a y b, la superficie se llamará **paraboloide hiperbólico**, y su gráfica se muestra en la figura 2.34. A esta superficie se le conoce también como **silla de montar**.

Observamos que hasta este punto todas nuestras superficies obtenidas mediante la deformación de los ejes han estado centradas en el origen de coordendas y todas tienen una descripción dada por una fórmula cuadrática. En realidad, si se tiene una expresión cuadrática del tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

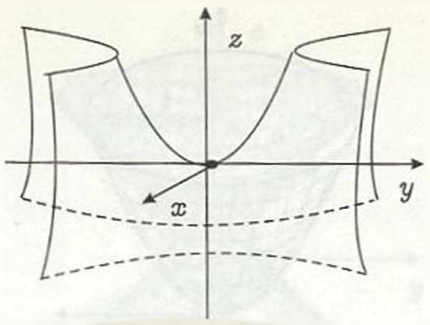


Figura 2.34. Paraboloide hiperbólico.

donde no hay términos cruzados en las variables,[3] siempre es posible identificarla como una de las superficies de la lista que hemos mencionado. El proceso para la identificación involucra una **traslación de los ejes coordenados** del origen en $\mathbb{R}^3$ a otro punto del espacio.

Si $p = (h, k, l)$ es un punto del espacio $\mathbb{R}^3$, entonces al utilizar las coordenadas (u, v, w) en $\mathbb{R}^3$ ligadas a las coordenadas cartesianas mediante las fórmulas

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \\ z = w + l \end{cases} \iff \begin{cases} u = x - h \\ v = y - k \\ w = z - l \end{cases}$$

conseguimos una traslación del punto origen $(0, 0, 0)$ al punto $p = (h, k, l)$ como lo muestra un cálculo simple (de hecho una sustitución) y como lo muestra la figura 2.35.

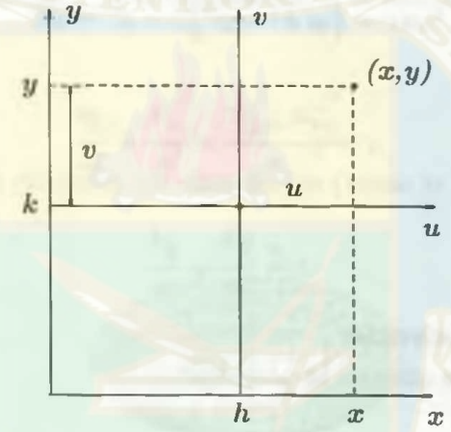


Figura 2.35. Traslación de los ejes coordenados.

EJEMPLO 2.101. Haga una traslación de ejes del origen de coordenadas al punto $p = (-1, 3, -2)$.

◁ Al utilizar fórmulas se tiene que las nuevas variables u, v, w en este sistema son dadas por

$$\begin{cases} u = x - (-1) = x + 1 \\ v = y - \quad (3) = y - 3 \\ w = z - (-2) = z + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = u - 1 \\ y = v + 3 \\ z = w - 2 \end{cases} \quad \triangleright$$

EJEMPLO 2.102. Identifique la superficie dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$$

◁ Hacemos un agrupamiento de términos para tener trinomios cuadrados perfectos, asociando los semejantes

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - x + y = (x^2 - x) + (y^2 + y) + z^2$$

de donde

$$\left(x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + z^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

[3] Si hay términos cruzados, el proceso de identificación se complica y para ello es necesario utilizar métodos del Álgebra lineal

equivalentemente,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-0)^2=\frac{1}{2}$$

Al hacer la traslación de ejes con nuevas coordenadas u, v, w dadas por

$$\begin{cases} u = x-\frac{1}{2} = x-\frac{1}{2} \\ v = y+\frac{1}{2} = y-(-\frac{1}{2}) \\ z = z-0 = z-0 \end{cases}$$

tenemos el nuevo origen en el punto $(1/2,-1/2,0)$ y la ecuación en estas nuevas coordenadas está dada por

$$u^2+v^2+z^2=\frac{1}{2}$$

que corresponde a una esfera de radio $\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ con centro en el punto $c=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. ▷

EJEMPLO 2.103. Identifique la superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación

$$4x^2+4z^2-y^2-8x+8z+4y+4=0$$

◁ Al agrupar términos obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (4x^2-8x)-(y^2-4y)+(4z^2+8z)+4 \\ &= 4(x^2-2x)-(y^2-4y)+4(z^2+2z)+4 \\ &= 4(x^2-2x+1)-(y^2-4y+4)+4(z^2+2z+4)+4-4 \end{aligned}$$

o bien,

$$4(x-1)^2-(y+2)^2+4(z+1)^2=0$$

Al realizar la traslación de ejes al punto $(1,-2,-1)$ mediante las ecuaciones

$$\begin{cases} u = x-1 \\ v = y+2 \\ w = z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = u+1 \\ y = v-2 \\ z = w-1 \end{cases}$$

obtenemos la nueva ecuación en el sistema de coordenadas u, v, w dado por

$$4u^2-v^2+4w^2=0$$

Ya que la relación es homogénea de grado 2, se tiene una superficie cónica.

Al despejar la variable con signo negativo v, se tiene

$$v^2=4u^2+4w^2$$

de donde, si $v=c$ es una constante arbitraria se obtiene la ecuación de la base del cono

$$c^2=4u^2+4w^2 \iff \left(\frac{c}{2}\right)^2=u^2+w^2$$

que es un círculo de radio $R=c/2$.

De esta manera, la ecuación

$$ax^2+4z^2-y^2+8x+8z+4y+4=0$$

es la ecuación de un cono circular en dirección del eje y con vértice en el punto $(1,-2,-1)$. ▷

EJEMPLO 2.104. Identifique la superficie dada por la ecuación

$$x^2-z^2-4x+8z-2y=0$$

◁ Al completar cuadrados en los términos semejantes obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - 4x) - (z^2 - 8z) - 2y \\ &= (x^2 - 4x + 4) - (z^2 - 8z + 16) - 2y + 12 \\ &= (x-2)^2 - (z-4)^2 - 2(y-6) \end{aligned}$$

de donde

$$2(y-6) = (x-2)^2 - (z-4)^2$$

o bien

$$(y-6) = \frac{(x-2^2)}{2} + \frac{(z-4)^2}{-2}$$

Al realizar la traslación de ejes al punto $(2,6,4)$ usando las ecuaciones

$$\begin{cases} u = x-2 \\ v = y-6 \\ w = z-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = u+2 \\ y = v+6 \\ z = w+4 \end{cases}$$

se obtiene la ecuación

$$v = \frac{u^2}{2} - \frac{w^2}{2}$$

que corresponde a un paraboloide hiperbólico.

Así pues, la ecuación inicial describe a un paraboloide hiperbólico centrado en el punto $(2,6,4)$. ▷

EJEMPLO 2.105. Identifique a la ecuación cuadrática

$$9x^2 + 4y^2 - 36z^2 - 18x + 8y - 72z + 13 = 0$$

◁ Al completar los trinomios cuadrados perfectos en tal ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= (9x^2 - 18x) + (4y^2 + 8y) - (36z^2 + 72z) + 13 \\ &= 9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 2y) - 36(z^2 + 2z) + 13 \\ &= 9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 2y + 1) - 36(z^2 + 2z + 1) + 36 \end{aligned}$$

es decir

$$-36 = 9(x-1)^2 + 4(y+1)^2 - 36(z+1)^2$$

o bien

$$1 = \frac{-9}{36}(x-1)^2 - \frac{4}{36}(y+1)^2 + (z+1)^2$$

lo que equivale a

$$1 = (z+1)^2 - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9}$$

Al efectuar la traslación de ejes al punto $(1,-1-1)$ mediante al cambio de coordenadas

$$\begin{cases} u = x-1 \\ v = y+1 \\ w = z+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = u+1 \\ y = v-1 \\ z = w-1 \end{cases}$$

obtenemos la nueva ecuación

$$1 = w^2 - \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{9}$$

que corresponde a un hiperboloide elíptico de dos hojas.

Así pues, la ecuación inicial describe a un hiperboloide elíptico de dos hojas concentrado en el punto $(1,-1,-1)$. ▷

Ejercicios 2.8

Dé las coordendas del centro y el radio de la esfera definida por cada una de las ecuaciones de los ejercicios 1–3.

1. $x^2 + y^2 + z^2 - y + 2z + 1 = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3$
3. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 3z - 4y - 2$
4. Dado el punto $p = (0, -1, 2)$, decir si está dentro, fuera o sobre cada una de las esferas de los ejercicios 1–3.

Diga qué superficies definen las ecuaciones de los ejercicios 5–10.

5. $y^2 = 2x$
6. $z^2 = xz$
7. $y^3 = 4x^2$
8. $x^2 + y^2 = 4$
9. $x^2 - y^2 = 1$
10. $x^2 - z^2 = 0$

Dé la ecuación del cono cuyo vértice es el punto $(0, 0, -1)$ y cuya base es la curva que se da en los ejercicios 11–12.

11. Elíptica $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
12. Circular $4x^2 + 4y^2 = 1$

Calcule la ecuación de la superficie S obtenida al hacer girar la curva dada en los ejercicios 13–15.

13. La recta $x + y = 1$ que se encuentra en el plano $\mathbb{R}^2_{x,y}$, alrededor del eje x.
14. La parábola $y = z^2$ que se encuentra en el plano $\mathbb{R}^2_{y,z}$, alrededor del eje y.
15. La hipérbola $xz = 1$ que se encuentra en el plano $\mathbb{R}^2_{x,z}$, alrededor del eje z.
16. Dé las ecuaciones de las líneas de intersección de la superficie dada por

$$z = y^2 - x^2$$

con los planos $z = 1$, $x = 1$, $y = 1$, respectivamente.

17. Dé la ecuación de la línea de intersección de las superficies

$$z = 1 - x^2 - y^2$$
$$z = x^2 + y^2$$

Identifique las superficies de los ejercicios 18–24 mediante una traslación de ejes.

18. $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$
19. $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$
20. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0$
21. $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$
22. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$
23. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$
24. $9x - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0.$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
OMNIUM POTENTIOR EST SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

CAPÍTULO

3 Curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

3.1 Curvas regulares, suaves y parametrizadas

En este capítulo estudiamos aquellos objetos geométricos en $\mathbb{R}^3$ conocidos como curvas. Lo hacemos de dos maneras, como la imagen de una función vectorial de variable real, y como objetos para los cuales localmente se ven como una imagen de cierta función vectorial de variable real (curvas parametrizadas). Iniciamos la discusión con un ejemplo.

EJEMPLO 3.1. Una recta en $\mathbb{R}^3$ es un objeto que se describe por un punto donde pasa $p = (p_1, p_2, p_3)$ y un vector director $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

◁ Su ecuación se describe como una relación de tipo

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

donde a cada punto $t \in \mathbb{R}$ se asocia un vector formado por coordenadas que son funciones reales de variable real

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

y cada función coordenada (componente) está definida como sigue

$$\begin{aligned} x &= x(t) = v_1 t + p_1 \\ y &= y(t) = v_2 t + p_2 \\ z &= z(t) = v_3 t + p_3 \end{aligned} \quad \triangleright$$

DEFINICIÓN 3.2. Una **función real de variable vectorial** de argumento escalar es una relación

$$\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$$

tal que a cada argumento $t \in (a, b)$ se le asocia un vector $\gamma(t)$ en $\mathbb{R}^3$. La figura 3.1 muestra esta definición.

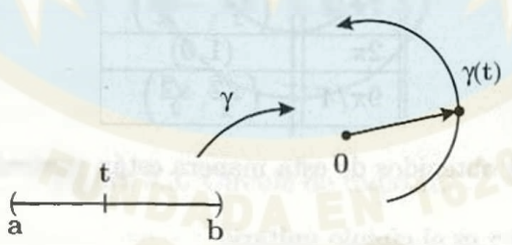


Figura 3.1. Función vectorial de variable real.

En coordenadas x, y, z de $\mathbb{R}^3$, tal asociación se escribe

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

donde $x, y, z : (a, b) \to \mathbb{R}$ son funciones reales (definidas sobre $\mathbb{R}$) y de variable real t. Esto es, las funciones componentes se escriben

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad t \in (a, b)$$

En otra notación, utilizando la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, podemos escribir tal asociación mediante la igualdad

$$\gamma(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2 + z(t)e_3$$

A lo largo de este trabajo utilizaremos preferentemente la notación $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que no involucra a los vectores canónicos.

EJEMPLO 3.3. Sea la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por la relación

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$\lhd$ Es una función vectorial (a $\mathbb{R}^2$) con argumento escalar $t \in \mathbb{R}$.
Encontramos algunos elementos de la función γ

$$\gamma(0) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1, 0)$$
$$\gamma(\pi/4) = (\cos \pi/4, \operatorname{sen} \pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\gamma(\pi/2) = (\cos \pi/2, \operatorname{sen} \pi/2) = (0, 1)$$
$$\gamma(3\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\gamma(\pi) = (-1, 0)$$
$$\gamma(5\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\gamma(3\pi/2) = (0, -1)$$

Los colocamos en una tabla

t	$\gamma(t)$
0	$(1, 0)$
$\pi/4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\pi/2$	$(0, 1)$
$3\pi/4$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
π	$(-1, 0)$
$5\pi/4$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$3\pi/2$	$(0, -1)$
$7\pi/4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2π	$(1, 0)$
$9\pi/4$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

y observamos que todos los valores de γ obtenidos de esta manera están contenidos en el círculo unitario del plano $\mathbb{R}^2_{x,y}$ como se muestra en la figura 3.2.

Afirmamos que la imagen de $\mathbb{R}$ bajo γ es el círculo unitario

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Para demostrar esto, sea $\gamma(t)$ un punto en la imagen, entonces,

$$\|\gamma(t)\|^2 = \|(\cos t, \operatorname{sen} t)\|^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

por lo tanto ya que $\|\gamma(t)\| = 1$ entonces, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in \mathbb{S}^1$.

Ahora sea $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ y sea t el ángulo que forma el vector (x, y) con el eje x. Si sobre el círculo se localizan las coordenadas (x, y) de un punto. En virtud de que el radio de $\mathbb{S}^1$ es 1, se tienen la igualdades trigonométricas

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

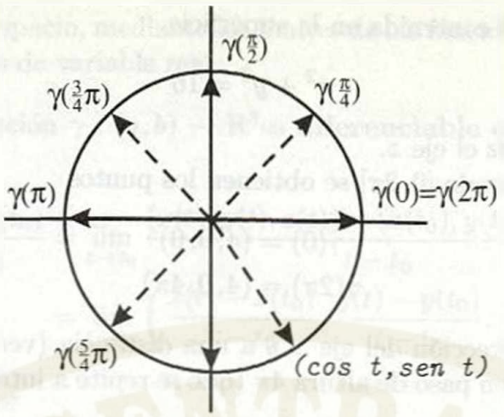


Figura 3.2. Círculo unitario $\mathbb{S}^1$

de donde $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ está en la imagen γ. De esta manera, la imagen de γ es el **círculo unitario**. Como las funciones $\operatorname{sen} t, \cos t$ son periódicas de periodo 2π, entonces γ enrrolla al círculo $\mathbb{S}^1$ en contra de las manecillas del reloj un número infinito (numerable) de veces. ▷

EJEMPLO 3.4. Consideremos la función vectorial $\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por la regla de correspondencia

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t)$$

donde R es un número real positivo.

◁ Tendremos en este caso que, al escribir tal relación en la forma

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t) = R(\cos t, \operatorname{sen} t)$$

vemos que es una deformación del círculo unitario a un círculo de radio $R > 0$ con centro en el origen de coordenadas (véase la figura 3.3). ▷

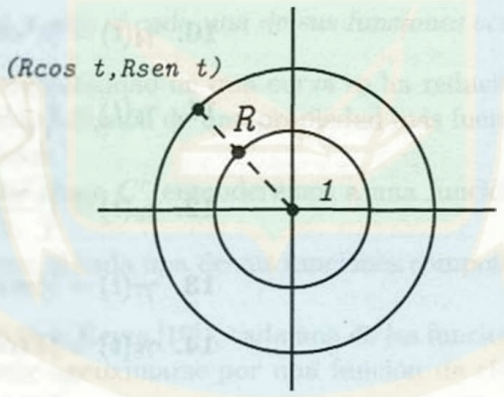


Figura 3.3. Círculo de radio R.

EJEMPLO 3.5. Sea ahora la función $\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por la relación

$$\gamma(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 2t)$$

◁ La función γ le asocia a cada t un punto en $\mathbb{R}^3$, mediante las relaciones

$$\begin{cases} x(t) = 4\cos t \\ y(t) = 4\operatorname{sen} t \\ z(t) = 2t \end{cases}$$

Al olvidar momentáneamente la variable z, se tiene que los puntos con coordenadas (x, y) en la imagen de γ se mueven en un círculo de radio 4, según el ejemplo 3.4. La variable z sólo se mueve con su dirección, dirigiéndose positivamente.

Esto nos dice que la imagen $\gamma(t)$ está contenida en la superficie

$$x^2 + y^2 = 16$$

que es un cilindro de radio 4 con directriz el eje z.

Al evaluar γ en los extremos del intervalo $[0, 2\pi]$ se obtienen los puntos

$$\gamma(0) = (4, 0.0)$$
$$\gamma(2\pi) = (4, 0, 4\pi)$$

que quedan verticalmente situados en dirección del eje z, y a una distancia (vertical) igual al 4π, lo que nos dice que la imagen de γ es una **hélice** de radio 4 y con paso de altura 4π (que se repite a intervalos de t iguales a 2π) como lo muestra la figura 3.4. ▷

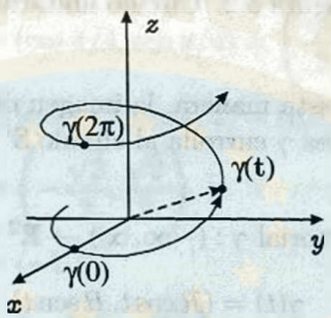


Figura 3.4. Hélice de radio 4 con paso de altura 4π.

Ejercicios 3.1

Dibuje la gráfica en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ según corresponda, de las siguientes funciones.

1. $\gamma(t) = (2t, t^2 - 1)$
2. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$
3. $\gamma(t) = (e^t, e^{-t})$
4. $\gamma(t) = (e^t, e^{4t})$
5. $\gamma(t) = (\ln t, t^3)$
6. $\gamma_1(t) = (3t, 4\,\mathrm{sen}\,t)$
7. $\gamma_2(t) = (\cos t, t + 2\,\mathrm{sen}\,t)$
8. $\gamma_3(t) = (t^2 - 2t, t^2 + 2t)$
9. $\gamma_4(t) = (\cosh t, \mathrm{senh}\,t)$
10. $\gamma_4(t) = (e^t \cos t, e^t\,\mathrm{sen}\,t)$
11. $\gamma_5(t) = \left(\frac{1}{t}\cos t, \frac{1}{t}\,\mathrm{sen}\,t\right)$
12. $\gamma_6(t) = \left(\frac{1+t}{t}\cos t, \frac{1+t}{t}\,\mathrm{sen}\,t\right) \quad t \geq 1$
13. $\gamma_7(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\,t, t)$
14. $\gamma_8(t) = (4\cos t, 4\,\mathrm{sen}\,t, e^t)$

3.2 Curvas diferenciables en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Iniciamos ahora la discusión de la diferenciabilidad de una curva espacial, utilizando para ello los conceptos y resultados clásicos del cálculo diferencial en una variable (véase Reyes [10]).

Sea $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial de variable real, t, definida en el intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y sean $t,\ t_0 \in (a, b)$ tal que t es cercano al tiempo prefijado t_0.

Calculamos la diferencia entre sus vectores imágenes $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ y luego la comparamos vía un cociente con la diferencia de argumentos (lo cual es posible, pues podemos dividir vectores entre escalares).

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \left(= \frac{\text{diferencia de imágenes}}{\text{diferencia temporal}}\right)$$

Si pensamos en las imágenes como posiciones de un cuerpo puntual que se mueve en el espacio, tal cociente representará un **vector velocidad promedio** en el intervalo $[t_0, t]$, y el proceso de límite nos daría un **vector velocidad** instantáneo (en caso de existir) al tiempo t_0.

Definimos tal proceso de límite en el espacio, mediante los límites de las funciones coordenadas que son ya conocimiento del cálculo diferencial de funciones reales de variable real.

DEFINICIÓN 3.6. Se dice que la función $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$es **diferenciable** en el punto $t_0 \in (a,b)$, si existe el límite vectorial

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{(x(t),y(t),z(t))-(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}$$
$$= \lim_{t\to t_0} \left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}, \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0} \right)$$

En tal caso, tal vector se denotará por

$$\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$$

y se llamará la **derivada** de γ en el punto t_0.

Si en cada punto del intervalo la función γ es diferenciable, se dirá que es una **función diferenciable**.

Ya que el límite que define a $\frac{d\gamma}{dt}(t_0)$ depende de la existencia de cada uno de los límites por coordenadas (según la última igualdad en la definición), entonces tenemos el siguiente resultado.

LEMA 3.7. *La función γ es diferenciable en t_0, si y sólo si cada función componente es diferenciable en t_0. Esto es, si cada límite*

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},$$
$$\frac{dy}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},$$
$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$$

existe. De aquí que γ es diferenciable, si y sólo si cada una de sus funciones componentes es diferenciable.

De esta manera, el problema de diferenciabilidad de una curva se ha reducido a la diferenciabilidad de las funciones componentes. Por eso podemos iniciar una discusión de una propiedad más fuerte de las funciones vectoriales de variable real, es decir, de las **curvas diferenciables.**[1]

Por una **función vectorial suave de clase C^r** entenderemos a una función vectorial cuyas funciones componentes son diferenciables de clase C^r con $r > 1$.

De esta manera, γ es una función suave, si cada una de sus funciones componentes es una función real de variable real suave en el intervalo $J = (a,b)$.

Por el teorema de Whitney (teorema 4.9 de Reyes [10]), cada una de las funciones componentes de una función vectorial de variable real cuando es continua, puede aproximarse por una función de clase C^r. Así, en las aplicaciones, cuando se piensa en una función vectorial de variable real, se supone que es de una clase de diferenciabilidad lo suficientemente alta, de acuerdo a las necesidades del problema que se esté solucionando. Esto es, en las aplicaciones las curvas espaciales genéricamente se piensan suaves.

Si γ es una curva suave, denotamos a su derivada en el punto arbitrario $t \in J = (a,b)$ usando una notación clásica

$$\frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$$

donde el punto sobre la variable denota a la derivada respecto al tiempo t. El vector derivada $\dot{\gamma}(t)$ es un vector que además de ser tangente a la curva γ en el punto $\gamma(t)$, es un vector localizado en el punto $\gamma(t)$, y por lo tanto pertenece al espacio tangente ambiental del punto mencionado: $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^3$

DEFINICIÓN 3.8. Una función vectorial $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ se llamará una **curva regular**, si para todo $t \in (a,b)$ su derivada $\dot{\gamma}(t)$ no se anula.

[1] El lector no familiarizado con la clase de diferenciabilidad de una función real puede ser referido al capítulo 3 de Reyes [10].

EJEMPLO 3.9. Sea la función vectorial

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

entonces la curva de imagen γ en el intervalo $(a, b) = (-\infty, \infty)$ es una hélice de paso de altura 2π, contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

Claramente el vector

$$\dot{\gamma}(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$

nunca se anula, y por ello es que la curva es **regular** (ver la figura 3.5a).



a. b.

Figura 3.5. Curvas de funciones vectoriales.

EJEMPLO 3.10. Sea la función vectorial $\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t)$$

Entonces su imagen es un círculo de radio $R > 0$ con centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$.

Su derivada $\dot{\gamma}(t) = (-R\operatorname{sen} t. R\cos t)$ es un vector que no se anula, y por lo tanto se entenderá también como una **curva regular** (véase la figura 3.5b).

EJEMPLO 3.11. Dibujemos la imagen de la curva $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$$

◁ Es claro que el dominio de la curva γ es todo el eje real $J = (-\infty, \infty)$.

Inicialmente, para hacer el dibujo de la imagen de esta curva, asignamos algunos argumentos a la función y calculamos sus valores, obteniendo la siguiente tabla.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\gamma(t)$	$(-24, 8)$	$(-6, 3)$	$(0, 0)$	$(0, -1)$	$(0. 0)$	$(6, 3)$	$(24, 8)$

Teniendo estos valores vectoriales en el plano, utilizamos ahora un método analítico para dibujar con más precisión la imagen de γ en $\mathbb{R}^2$.

Procedamos a analizar las imágenes de la curva plana según los argumentos en el dominio, utilizando para ello las funciones componentes.

Para resolver la desigualdad $t^3 - t \geq 0$ para la primera función componente, calculamos las raíces de $t^3 - t = 0$ que son $t = 0$, 1, -1.

Estos números nos dividen el intervalo $(-\infty, \infty)$ en tres partes que nos permiten resolver tal desigualdad, sabiendo que

$$t^3 - t \geq 0 \Longleftrightarrow t \in [-1. 0] \text{ o } t \in [1, \infty]$$

Por lo tanto, para la primera función componente se tiene que

$$t^3 - t \geq 0 \Longleftrightarrow t \in [-1, 0] \cup [1, \infty)$$
$$t^3 - t < 0 \Longleftrightarrow t \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

Análogamente para la segunda función componente, la ecuación $t^2 - 1 = 0$, tiene las raíces $t = \pm 1$ de donde

$$t^2 - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$
$$t^2 - 1 < 0 \Longleftrightarrow t \in (-1. 1)$$

Evaluamos a γ en los puntos importantes $t = 0, -1, 1$ obtenidos al resolver las desigualdades anteriores

$$\gamma(-1) = ((-1)^3 - (-1), (1)^2 - 1) = (0, 0)$$
$$\gamma(0) = ((0)^3 - (0), 0^2 - 1) = (0 - 1)$$
$$\gamma(1) = (-1^3 - 1, 1^2 - 1) = (0, 0)$$

y al dividir al dominio J en los subintervalos

$$(-\infty, -1), (-1.0), (0, 1)(1, \infty)$$

se obtiene la tabla

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, -1)$	$(1, -\infty)$
$x(t)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$y(t)$	$+$	$-$	$-$	$+$

que indica la posición de la imagen de un argumento sobre la curva γ en los cuadrantes del plano (véase figura 3.6), según las signaturas de sus coordenadas.

Ahora realizamos un análisis cualitativo de γ, usando la derivada de la curva

$$\dot{\gamma}(t) = (3t^2 - 1, 2t)$$

mediante un método similar al usado para la signatura de γ en el plano. Para la primera coordenada $\dot{x}(t)$ de $\dot{\gamma}(t)$ se tiene que

$$\dot{x}(t) = 3t^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow 3t^2 > 1$$

de donde

$$\dot{x}(t) > 0 \Longleftrightarrow \left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$$

por lo tanto

$$\dot{x}(t) = 3t^2 - 1 < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Análogamente, para la segunda coordenada de $\dot{\gamma}(t)$ se tiene que

$$\dot{y}(t) = 2t > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, \infty)$$
$$\dot{y}(t) = 2t < 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

De las dos desigualdades anteriores se consiguen los puntos importantes $0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ahora calculamos las imágenes bajo γ y $\dot{\gamma}$ de estos puntos importantes:

$$\gamma(0) = (0, -1)$$
$$\gamma\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \left(2\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{-2}{3}\right)$$
$$\gamma\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}, -\frac{2}{3}\right)$$
$$\dot{\gamma}(0) = (-1, 0)$$
$$\dot{\gamma}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$
$$\dot{\gamma}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

La figura 3.6 ilustra a tales puntos y a sus vectores velocidad (tangentes) correspondientes.

SIB - UCE

Con los intervalos

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$$

obtenidos mediante este segundo análisis se forma la siguiente tabla que describe la signatura de las coordenadas de $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}), \dot{y}(t))$.

t	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$\dot{x}(t)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dot{y}(t)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dot{\gamma}(t)$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

La flecha del renglón correspondiente a $\dot{\gamma}(t)$ en cada subintervalo describe cualitativamente la posición del vector velocidad tangente a $\gamma(t)$ (véase la figura 3.6).

Además, observamos que la imagen de γ tiene una autointersección en $\gamma(1) = \gamma(-1)$ lo que le hace ser una función que no es inyectiva. En el punto $\gamma(1) = \gamma(-1) = (0, 0)$ se tienen dos vectores derivadas

$$\dot{\gamma}(1) = (3t^2 - 1, 2t)\big|_1 = (2, 2)$$
$$\dot{\gamma}(-1) = (3t^2 - 1, 2t)\big|_{-1} = (2, -2)$$

De esta forma, un trazo de la curva en una región acotada alrededor de $(0, 0)$ estaría dado por la figura 3.6.

Hacemos ahora el análisis a los extremos del dominio $J = (-\infty, \infty)$:

Si $t \to -\infty$, entonces

$$\lim_{t\to-\infty} \gamma(t) = \lim_{t\to-\infty} (t^3 - t, t^2 - 1) = (\lim_{t\to-\infty} (t^3 - t), \lim_{t\to-\infty} (t^2 - 1)) = (-\infty, \infty)$$

debido al teorema de alto orden (véase teorema 2.23 de Reyes [10]). Esto nos dirá que la primera coordenada viene de $-\infty$ mientras que la segunda viene de $+\infty$ como se muestra en la figura 3.6.

Análogamente, si $t \to +\infty$, entonces, por el mismo teorema de alto orden, se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = (\lim_{t\to+\infty} t^3, \lim_{t\to+\infty} t^2) = (\infty, \infty)$$

En otras palabras, ambas coordenadas tienden a $+\infty$. Esto se puede observar en la figura 3.6. $\triangleright$

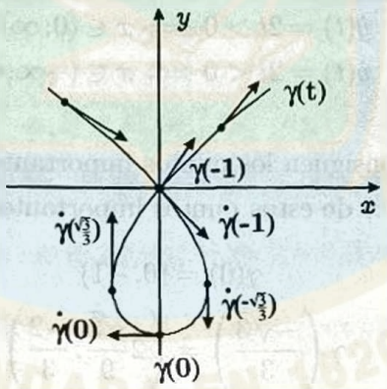


Figura 3.6. Traza de la imagen de la curva $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$.

A los vectores derivadas $\dot{\gamma}(t)$ se les entenderá también como **vectores velocidad** de γ en el punto $\gamma(t)$. A la longitud de $\dot{\gamma}(t)$, es decir a $\|\dot{\gamma}(t)\|$ se le llamará la **rapidez** de γ en el punto $\gamma(t)$.

EJEMPLO 3.12 (La cúspide). Sea la función vectorial dada por

$$\gamma(t) = (t^3, t^2)$$

$\triangleleft$ Es claro que el dominio de la curva γ es $J = (-\infty, \infty)$.

Asignamos primeramente algunos argumentos a la función γ calculando sus valores, y obteniendo la siguiente tabla.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\gamma(t)$	$(-27,9)$	$(-8,4)$	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(8,4)$	$(27,9)$

Procedemos de forma análoga al ejemplo 3.10, estudiando las signaturas de la función y su derivada.
Para la primera función coordenada, resolvemos la desigualdad $x(t) = t^3 \geq 0$, que simplemente es equivalente a $t \geq 0$.
Por lo tanto

$$x(t) = t^3 \geq 0 \Longleftrightarrow t \in [0, \infty]$$

y consecuentemente

$$x(t) = t^3 < 0 \Longleftrightarrow t \in [-\infty, 0)$$

Análogamente para la segunda coordenada se tiene que,

$$y(t) = t^2 \geq 0 \Longleftrightarrow t \in (-\infty, \infty)$$

Evaluamos los puntos importantes encontrados, que, en este caso, es solamente $t = 0$

$$\gamma(0) = (0, 0)$$

y con los subintervalos obtenidos se tiene la tabla de signatura de $\gamma(t)$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$x(t)$	$-$	$+$
$y(t)$	$+$	$+$

Analizamos la signatura de la derivada de la curva

$$\dot{\gamma}(t) = (3t^2, 2t)$$

resolviendo primeramente la desigualdad

$$\dot{x}(t) = 3t^2 > 0 \Longleftrightarrow t \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Por otro lado

$$\dot{y} = 2t > 0 \Longleftrightarrow t \in (0, \infty)$$
$$\dot{x}(t) = 2t < 0 \Longleftrightarrow t \in (-\infty, 0)$$

Se tiene en este caso, nuevamente el punto importante $t = 0$.
Calculemos las imágenes bajo γ y $\dot{\gamma}$ de este punto importante

$$\gamma(0) = (0, 0)$$

$$\dot{\gamma}(0) = (0, 0)$$

Ahora con los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ se forma la siguiente tabla de signaturas de las componentes de los vectores velocidad

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\dot{x}(t)$	$+$	$+$
$\dot{y}(t)$	$-$	$+$
$\dot{\gamma}(t)$	$\searrow$	$\nearrow$

Finalmente, como en el ejemplo 3.10 hacemos el análisis a los extremos del dominio $(-\infty, \infty)$

$$\lim_{t \to -\infty} \gamma(t) = \lim_{t \to -\infty} (t^3, t^2) = (\lim_{t \to -\infty} t^3, \lim_{t \to -\infty} t^2) \to (-\infty, \infty)$$

y

$$\lim_{t \to \infty} \gamma(t) = \lim_{t \to \infty} (t^3, t^2) = (\lim_{t \to \infty} t^3, \lim_{t \to \infty} t^2) \to (\infty, \infty)$$

La figura 3.7 ilustra esta curva conocida como **cúspide**. ▷

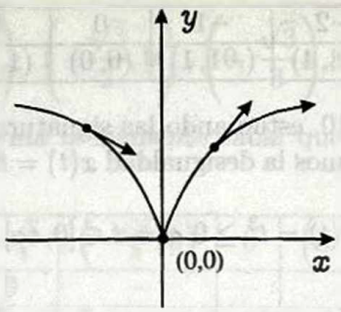


Figura 3.7. Curva imagen de la cúspide.

Damos ahora unas propiedades aritméticas de la derivada de funciones vectoriales con argumento escalar.

LEMA 3.13. *Sean $\gamma_1, \gamma_2 : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ dos funciones vectoriales de variable real suaves.*

1. *Para los escalares λ, $\mu \in \mathbb{R}$, se verifica fácilmente que*

$$\frac{d}{dt}(\lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2)(t) = \lambda\frac{d\gamma_1}{dt}(t) + \mu\frac{d\gamma_2}{dt}(t) = \lambda\dot{\gamma}_1(t) + \mu\dot{\gamma}_2(t)$$

2. *Para una función real de variable real suave $\lambda = \lambda(t)$ definida en el intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ se cumple la relación*

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\gamma(t)) = \frac{d\lambda(t)}{dt}\gamma(t) + \lambda(t)\frac{d\gamma(t)}{dt} = \dot{\lambda}(t)\gamma(t) + \lambda(t)\dot{\gamma}(t)$$

◁ Son cálculos directos y omitimos su prueba. ▷.

Sean ahora dos funciones vectoriales $\gamma_1, \gamma_2 : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ suaves en todo el intervalo y consideremos, para cada $t \in (a,b)$, los vectores velocidad $\dot{\gamma}_1(t)$, $\dot{\gamma}_2(t)$. Se tiene el siguiente resultado acerca del cálculo de la derivada en productos escalar y vectorial.

LEMA 3.14. *Si γ_1, $\gamma_2 : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ son funciones suaves, se cumplen las siguientes fórmulas.*

1. $\dfrac{d}{dt}\langle\gamma_1(t), \gamma_2(t)\rangle = \left\langle \dfrac{d\gamma_1}{dt}(t), \gamma_2(t)\right\rangle + \left\langle \gamma_1(t), \dfrac{d\gamma_2(t)}{dt}\right\rangle$

   o bien

   $\dfrac{d}{dt}\gamma_1(t)\cdot\gamma_2(t) = \dfrac{d\gamma_1}{dt}(t)\cdot\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\cdot\dfrac{d\gamma_2(t)}{dt}$

2. $\dfrac{d}{dt}\gamma_1(t)\times\gamma_2(t) = \dfrac{d\gamma_1}{dt}(t)\times\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\times\dfrac{d\gamma_2}{dt}(t)$

3. $$\frac{d}{dt}(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t)) = \left(\frac{d\gamma_1}{dt}(t),\gamma_2(t),\gamma_3(t)\right) + \left(\gamma_1(t),\frac{d\gamma_2}{dt}(t),\gamma_3(t)\right) + \left(\gamma_1(t),\gamma_2(t),\frac{d\gamma_3}{dt}(t)\right)$$
$$= (\dot{\gamma}_1,\gamma_2,\gamma_3) + (\gamma_1,\dot{\gamma}_2,\gamma_3) + (\gamma_1,\gamma_2,\dot{\gamma}_3)$$

   donde $(*\,,*\,,*\,)$ denota el triple producto escalar.

◁ Son cálculos directos y se omiten. ▷

EJEMPLO 3.15. Sean las curvas espaciales suaves

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2\pi t) \quad \text{y} \quad \gamma_2(t) = (4t^2, 2t, -t)$$

◁ Ya que $\dot{\gamma}_1(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2\pi)$ y $\dot{\gamma}_2(t) = (8t, 2, -1)$ se tienen las siguientes igualdades

1. Verificamos, para estas funciones, el primer punto del lema anterior

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\gamma_1\cdot\gamma_2) &= \dot{\gamma}_1\cdot\gamma_2 + \gamma_1\cdot\dot{\gamma}_2\\ &= (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2\pi)\cdot(4t^2, 2t, -t) + (\cos t, \operatorname{sen} t, 2\pi t)\cdot(8t, 2, -1)\\ &= -4t^2\operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\pi t + 8t\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2\pi t\\ &= (2 - 4t^2)\operatorname{sen} t + 10t\cos t - 4\pi t\end{aligned}$$

2. Ahora comprobamos el segundo punto del lema anterior

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\gamma_1 \times \gamma_2) &= \dot{\gamma}_1 \times \gamma_2 + \gamma_1 \times \dot{\gamma}_2 \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 2\pi \\ 4t^2 & 2t & -t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos t & \operatorname{sen} t & 2\pi t \\ 8t & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (-t\cos t - 4\pi t, -t\operatorname{sen} t - 8\pi t^2, -2t\operatorname{sen} t - 4t^2\cos t) \\
&+ (-\operatorname{sen} t - 4\pi t, \cos t + 16\pi t^2, 2\cos t - 8t\operatorname{sen} t) \\
&= (-t\cos t - \operatorname{sen} t - 8\pi t, \cos t - t\operatorname{sen} t + 8\pi t^2, -4t^2\cos t - 10t\operatorname{sen} t + 2\cos t) \ \triangleright
\end{aligned}$$

Introducimos ahora el concepto de curva regular parametrizada, que es de gran utilidad en las aplicaciones a la Mecánica, Física e Ingeniería. Este concepto, aunque en apariencia tiene una definición abstracta, en realidad es establecida acorde a la experiencia cotidiana.[2]

DEFINICIÓN 3.16. Una **curva regular parametrizada** Γ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (o de $\mathbb{R}^2$) tal que para cualquier punto $p \in \Gamma$ existe una función vectorial de variable real suave

$$\gamma : J \to \mathbb{R}^3$$

satisfaciendo que, si $J = (-\epsilon, \epsilon)$ para un número $\epsilon > 0$, entonces

1. La imagen de 0 bajo γ es el punto p, es decir, $\gamma(0) = p$.
2. La velocidad de γ no se anula en todo el intervalo, esto es, $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ para todo $t \in J$
3. La imagen de J bajo γ está contenida en Γ, es decir, $\gamma(t) \in \Gamma$ para todo $t \in J$

Si la imagen de J bajo γ cubre a Γ, diremos que la pareja (γ, J) es una **parametrización** de Γ.
En coordenadas (x, y, z) del espacio cartesiano, la curva $\gamma(t)$ está definida por el vector

$$\gamma(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)),\ t \in J,$$

donde las coordenadas $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son funciones reales suaves definidas en el intervalo $J = (-\epsilon, \epsilon)$ que contiene a $t = 0$ (véase la figura 3.8).

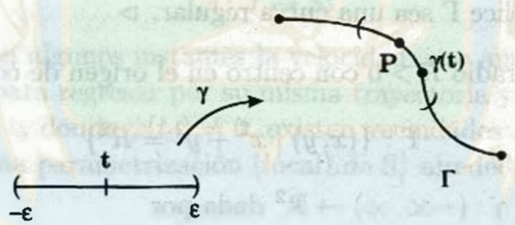


Figura 3.8. Curva regular parametrizada.

En adelante, cada vez que hagamos referencia al dominio de parametrización de una curva Γ alrededor de un punto p lo denotaremos por $[a, b]$ en lugar de $(-\epsilon, \epsilon)$, tomando en este caso el dominio más amplio para parametrizar tal curva Γ.
Esto es, cada vez que demos una curva Γ, la entenderemos, sin pérdida de generalidad, como la imagen de una función

$$\gamma : [a, b] \to \Gamma$$

donde $[a, b] \subset \mathbb{R}$, siendo γ una función suave con coordenadas suaves.
Para $\gamma : [a, b] \to \Gamma$ curva regular parametrizada, en cada punto $\gamma(t) \in \Gamma$ se define un **vector tangente** a Γ en tal punto, como el vector derivada de γ en ese punto, esto es,

$$\dot{\gamma} = v(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

[2]Por ejemplo, cuando se analiza la trayectoria espacial de un cuerpo, es difícil estudiarla en su totalidad, así que se procede a estudiarla por fragmentos, es decir, por partes que se pueden parametrizar con una variable temporal adecuada, en un intervalo temporal adecuado.

La notación $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t)$ es muy conveniente, como ya hemos mencionado, a la hora de hacer cálculos, sobre todo en problemas de aplicación.

A continuación damos un ejemplo de parametrizaciones de curvas Γ contenidas en $\mathbb{R}^3$ (o en $\mathbb{R}^2$).

EJEMPLO 3.17. Considere la elipse en el plano con semiejes $a, b > 0$, definida por la ecuación

$$\Gamma: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

◁ Una deformación del círculo unitario

$$x^2 + y^2 = 1$$

parametrizado por $t \to (\cos t, \operatorname{sen} t)$, al multiplicar por un escalar a en la primera coordenada, y por el escalar b en la segunda coordenada, nos da la parametrización requerida.

Esto es, $(x = a\cos t, y = b\operatorname{sen} t)$ con $t \in \mathbb{R}$ parametriza suavemente a la elipse Γ. El vector tangente a γ en el punto $\gamma(t) \in \Gamma$ se calcula por

$$v(t) = \dot{\gamma}(t) = (-a\operatorname{sen} t, b\cos t)$$

Como $v(t) \neq 0$, entonces Γ resulta ser una curva regular. ▷

EJEMPLO 3.18. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una hélice contenida en un cilindro de radio 4 y con paso de altura $h = 4\pi$.

◁ Para poder parametrizar a Γ, partimos de que una hélice contenida en un cilindro de radio R y paso de altura $h = 2k\pi$ tiene la parametrización general

$$t \to (R\cos t, R\operatorname{sen} t, kt),\ t \in \mathbb{R}$$

Si $R = 4$ y $h = 4\pi = 2(2\pi)$, entonces $k = 2$, lo que lleva a que la parametrización de Γ está bien definida por

$$\Gamma: \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t \\ z = 2t \end{cases}$$

Si se denota por $\gamma(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, a tal curva, entonces el vector tangente en el punto $\gamma(t) \in \Gamma$ está descrito por

$$v(t) = \dot{\gamma}(t) = (-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 2)$$

el cual no se anula. Esto hace que la hélice Γ sea una curva regular. ▷

EJEMPLO 3.19. Sea Γ el círculo de radio $R > 0$ con centro en el origen de coordenadas dado por

$$\Gamma: \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = R^2\}$$

◁ Al considerar la función vectorial $\gamma: (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t).$$

entonces su imagen es el círculo dado Γ. Su derivada $\dot{\gamma}(t) = (-R\operatorname{sen} t, R\cos t)$ es un vector que no se anula, y por lo tanto se entenderá también como una curva regular.

Observamos que la función vectorial $\tilde{\gamma}(t) = (R\cos 2t, R\operatorname{sen} 2t)$ tiene como imagen también al mismo círculo, pero su vector derivada es más grande en norma que la de $\gamma(t)$ de hecho,

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = (-2R\operatorname{sen} 2t, 2R\cos 2t)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| &= \|(-2R\operatorname{sen} 2t,\ 2R\cos 2t)\| = 2R \\ &= 2\|(-R\operatorname{sen} t,\ R\cos t)\| = 2\|\dot{\gamma}(t)\| \end{aligned}$$

lo que nos dice que la norma de $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ es el doble de la norma de $\dot{\gamma}(t)$. La figura 3.9 ilustra estas parametrizaciones.

Decimos simplemente que la parametrización $\tilde{\gamma}(t)$ "va más rápida" que la dada por $\gamma(t)$. ▷

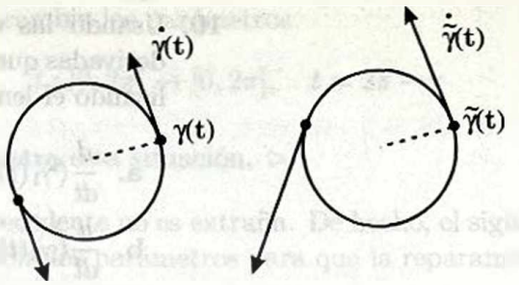


Figura 3.9. Parametrizaciones del círculo de radio $R > 0$.

EJEMPLO 3.20 (Péndulo plano simple). Consideremos un péndulo idealizado que consiste de un sistema plano con una cuerda indeformable sin peso, de longitud ℓ, de la cual cuelga un cuerpo de masa m, como lo muestra la figura 3.10.

Si tomamos como su posición de equilibrio al estado vertical hacia abajo, cualquier estado diferente del péndulo puede ser descrito por el ángulo φ que forma con la vertical de equilibrio.

Para cualquier tiempo t de una oscilación del péndulo, tenemos una función suave $t \to \varphi(t)$ que describe la posición del cuerpo de masa m en ese instante t.

Un análisis sencillo del sistema mecánico nos lleva a que tal función $\varphi = \varphi(t)$ debe satisfacer la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\varphi} + \frac{G}{\ell}\operatorname{sen}\varphi = 0$$

para condiciones iniciales apropiadas en la posición inicial $\varphi_0 = \varphi(0)$ y su velocidad inicial $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(0)$. Aquí G es la constante de gravitación universal.

Consideremos el **espacio de configuración** del sistema, es decir, aquel conjunto que define todas las posibles posiciones del péndulo durante una oscilación. Claramente este conjunto es

$$\mathbb{S}^1_\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = \ell^2\}$$

que es un círculo de radio ℓ con centro en el origen de coordenadas.

Si se asocian coordenadas a $\mathbb{S}^1_\ell$ determinadas por el ángulo de desviación φ, es decir, $x = \cos\varphi(t)$, $y = \operatorname{sen}\varphi(t)$, entonces toda solución $\varphi = \varphi(t)$ del problema está contenida en $\mathbb{S}^1_\ell$: $\varphi(t) \subset \mathbb{S}^1_\ell$.

Claramente toda solución

$$\varphi : J \to \mathbb{S}^1_\ell$$

no es una curva regular, debido a que en algunos instantes la velocidad $\dot{\varphi}$ se anula en aquellos tiempos para los cuales el cuerpo colgado del péndulo se detiene para regresar por su misma trayectoria y buscar su estado de equilibrio.

No obstante, para aquellos tiempos t_0 donde $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$, existen vecindades $J_0 \subset \mathbb{R}$ de t_0 tal que para todo $t \in J_0$ se tiene que $\dot{\varphi}(t) \neq 0$. Con esto se logra una parametrización (local) de $\mathbb{S}^1_\ell$ alrededor de $\varphi(t_0)$.

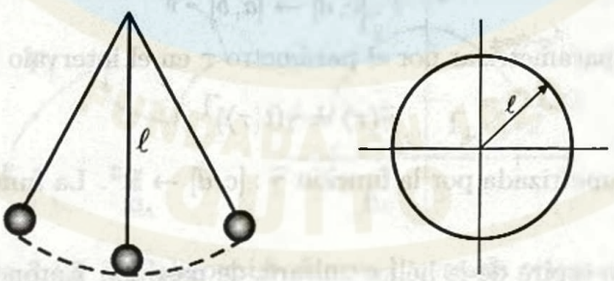


Figura 3.10. Péndulo plano simple y espacio de configuración.

Ejercicios 3.2

Calcule la derivada de cada una de las funciones de los ejercicios 1–8.

1. $\gamma_1(t) = (3t, 4\operatorname{sen} t)$.
2. $\gamma_2(t) = (\cos t, t + 2\operatorname{sen} t)$.
3. $\gamma_3(t) = (t^2 - 2t, t^2 + 2t)$.
4. $\gamma_4(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$.

5. $\gamma_5(t) = \left(\frac{1}{t}\cos t, \frac{1}{t}\operatorname{sen} t\right)$.

6. $\gamma_6(t) = \left(\frac{1+t}{t}\cos t, \frac{1+t}{t}\operatorname{sen} t\right)$.

7. $\gamma_7(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

8. $\gamma_8(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, e^t)$.

9. Calcule el vector tangente a cada curva de los ejercicios 1–8 en $t = 1$, $t = \pi/2$, $t = \pi$.

10. Usando las curvas de los ejercicio 1–8, calcule las derivadas que se indican, de dos formas diferentes, utilizando el lema 1.14.

   a. $\frac{d}{dt}(\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t))$

   b. $\frac{d}{dt}(\gamma_3(t) \times \gamma_4(t))$

   c. $\frac{d}{dt}(\gamma_1(t), \gamma_5(t), \gamma_6(t))$

3.3 Orientación de curvas y curvas poligonales

Introducimos ahora los conceptos de **orientación** de una curva suave y el de curva **poligonal** (curva suave por pedazos), que resulta de gran utilidad para las aplicaciones en las Ciencias naturales.

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por la función

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

de tal forma que $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$, diremos que la **orientación** de Γ es del punto $\gamma(a) \in \Gamma$ al punto $\gamma(b) \in \Gamma$, y que está inducida por la orientación del intervalo $[a, b]$, indicado por $[a, b]^+$ (véase la figura 3.11).

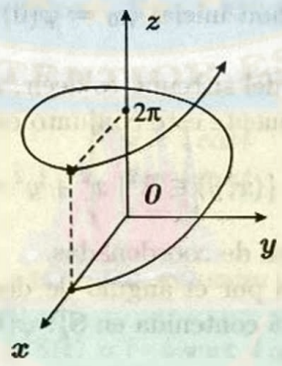


Figura 3.11. Hélice unitaria de paso 2π.

Distinguimos a la curva orientada de esta forma por Γ^+. Naturalmente, esto hace que Γ^+ esté orientada por el vector tangente $\dot{\gamma}(t)$.

Supongamos que el parámetro t es una función de un nuevo parámetro $\tau \in [c, d]$, esto es $t = t(\tau)$, y que es una biyección diferenciable

$$t : [c, d] \to [a, b]$$

Entonces diremos que Γ se puede reparametrizar por el parámetro τ en el intervalo $[c, d]$ por la composición

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(t(\tau))$$

Dicho de otra forma, Γ está parametrizada por la función $\tilde{\gamma} : [c, d] \to \mathbb{R}^3$. La función $\tilde{\gamma}$ se dice ser una **reparametrización** de la curva Γ.

EJEMPLO 3.21. Sea Γ la primera espira de la hélice unitaria de paso 2π. Entonces la parametrización

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$ orienta a Γ^+ del punto $(1, 0, 0)$ al punto $(1, 0, 2\pi)$.

◁ Sea ahora la reparametrización de Γ inducida por la biyección $t = 2\pi - \tau$ y definida para $\tau \in [0, 2\pi]$,

$$\tilde{\gamma}(\tau) = (\cos t(2\pi - \tau), \operatorname{sen}(2\pi - \tau), 2\pi - \tau)$$

En este caso $\tilde{\gamma}$ invierte la orientación de Γ pues $\tilde{\gamma}(0) = (1, 0, 2\pi)$ es el extremo inicial y $\tilde{\gamma}(2\pi) = (1, 0, 0)$ es el extremo final.

Notamos que la función biyectiva que cambia los parámetros

$$t : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi], \quad t = 2\pi - \tau$$

es tal que $\dfrac{dt}{d\tau} = -1 < 0$. La figura 3.11 ilustra esta situación. ▷

La última observación en el ejemplo precedente no es extraña. De hecho, el siguiente resultado nos impone condiciones sobre la derivada de una función que cambia los parámetros para que la reparametrización conserve la orientación.

LEMA 3.22. *Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la curva Γ que induce una orientación Γ^+. Si $t \in [a, b]$ es el parámetro de γ y existe un cambio de parámetro $t = t(\tau)$ definido en el intervalo $[c, d]$, entonces la reparametrización dada por*

$$\widetilde{\gamma}(\tau) = \gamma(t(\tau))$$

1. *Conserva la orientación de Γ, si $\dfrac{dt}{d\tau} > 0$ en todo el intervalo $[c, d]$.*

2. *Cambia la orientación de Γ, si $\dfrac{dt}{d\tau} < 0$ en todo el intervalo $[c, d]$.*

◁ Por la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{\gamma}(\tau) = \dot{\gamma}(t)\frac{dt}{d\tau}$$

lo que nos indica que los vectores $\dfrac{d\widetilde{\gamma}}{d\tau}$ y $\dot{\gamma}$ son paralelos. La cantidad $\dfrac{dt}{d\tau}$ indica el sentido de cada uno, y por lo tanto la orientación. ▷

A continuación, definimos a una curva poligonal (curva suave por pedazos).

A una curva Γ que es la unión $(+)$ de las curvas regulares $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_k$ se le llamará una **curva poligonal orientada**, o **curva suave por pedazos** orientada (véase la figura 3.12a).

La denotamos por simplicidad por

$$\Gamma^+ = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \cdots + \Gamma_k^+$$

imponiendo la condición de que la curva Γ_j^+ inicia donde termina Γ_{j-1}^+.

EJEMPLO 3.23. Sea Γ la unión, que en este contexto denotaremos por $(+)$, de los segmentos de las parábolas $y_1 = x^2$, $y_2 = 2 - x^2$ comprendidos entre sus intersecciones en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$.

◁ Si Γ_1 es el segmento de la parábola $y = x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$ y Γ_2 es el segmento de la parábola $y = 2 - x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$, entonces $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^+$ es tal que la orientación inicia en el punto $(-1, 1)$, recorre por Γ_1^+ hasta $(1, 1)$ y luego recorre por Γ_2^+ hasta $(-1, 1)$ siguiendo la orientación invertida del intervalo $[-1, 1]$ que denotamos por $[-1, 1]^-$. La curva Γ^+ es en total una curva cerrada iniciandose en el punto $(-1, 1)$ y cerrando su circuito en el mismo punto (véase la figura 3.12b).

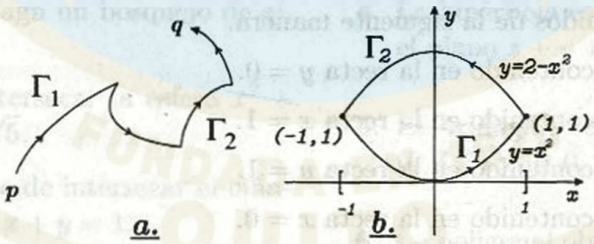


Figura 3.12. a. Poligonal b. Curva Γ cerrada orientada.

Podemos dar una parametrización de $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^+$ de la siguiente manera.

Γ_1 es la curva definida por $y = x^2$ si $x \in [-1, 1]^+$, de donde, poniendo $x = t$ y $y = t^2$ se obtiene la curva $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ con $t \in [-1, 1]^+$ que da orientación al segmento Γ_1^+.

Para parametrizar a Γ_2 con la orientación que define a la poligonal Γ^+, siendo el segmento inmediato de Γ_1^+, consideramos su definición. Γ_2 es la curva $y = 2 - x^2$ con $x \in [-1, 1]$, lo que indica que Γ_2^+ está orientada por el intervalo $[-1, 1]^-$. Usemos el cambio lineal de intervalos

$$x : [1, 2]^+ \to [-1, 1]^- = [1, -1]^+$$

que lleva $1 \to 1$, $2 \to -1$ definido por

$$x = x(t) = -2(t-1) + 1 = 3 - 2t$$

Ya que los puntos sobre la curva Γ_2 son de la forma $(x, 2-x^2)$, entonces $\gamma_2(t) = (3-2t,\ 2-(3-2t)^2)$ con $t \in [1,2]$ parametriza a Γ_2^+. Por lo tanto, la curva $\gamma = \gamma(t)$ que parametriza a todo el circuito con la orientación seguida de $\Gamma^+ = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^+$ es

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t^2) & -1 \le t \le 1 \\ (3-2t, 2-(3-2t)^2) & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

donde $\gamma : [-1,2] \to \mathbb{R}^2$ es regular por trozos. ▷

El ejemplo anterior nos da una manera de orientar a una región plana Ω que tiene como frontera a una curva cerrada poligonal Γ. Para orientar a tal región, parametrizamos a Γ de tal forma que recorra el circuito en sentido contrario a las manecillas del reloj (**regla de la mano derecha**). Esto es equivalente a considerar el **marco** dado por la pareja ordenada de vectores $\{n(t), \dot{\gamma}(t)\}$, donde $n(t)$ es un **vector normal** a $\gamma(t)$ y $\dot{\gamma}(t)$ es el vector tangente, satisfaciendo la relación de orientación

$$0 < \begin{vmatrix} n(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ n(t) \end{vmatrix}$$

No es difícil ver que esto se logra al orientar la curva cerrada Γ^+ en contra de las manecillas del reloj y tomar sus vectores normales $n(t)$ apuntando hacia afuera de Ω (véase la figura 3.13). Esta es una manera de orientar a una región Ω provista con una frontera conformada por una poligonal cerrada. La denotaremos por Ω^+.

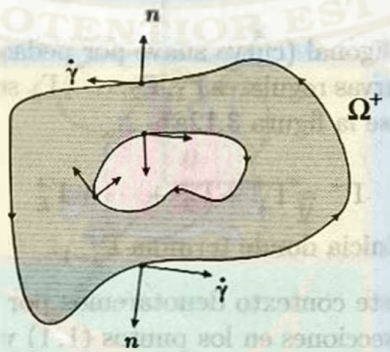


Figura 3.13. Orientación de una región plana Ω^+.

EJEMPLO 3.24. Sea Ω el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$ encerrado por la intersección de las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$. Damos una orientación del cuadrado Ω mediante la orientación de su frontera Γ, conformada por los lados.

Los lados del cuadrado están definidos de la siguiente manera.

Γ_1^+: Segmento de recta orientado contenido en la recta $y = 0$.

Γ_2^+: Segmento de recta orientado contenido en la recta $x = 1$.

Γ_3^+: Segmento de recta orientado contenido en la recta $y = 1$.

Γ_4^+: Segmento de recta orientado contenido en la recta $x = 0$.

Entonces, la frontera orientada se escribe

$$\Gamma^+ = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \Gamma_3^+ + \Gamma_4^+$$

y una parametrización global de Γ^+ está dada por una función $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida mediante las reglas

$$\gamma(t) = \begin{cases} (4t, 0) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ (1, 4t-1) & \frac{1}{4} < t \le \frac{1}{2} \\ (3-4t, 1) & \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4} \\ (0, 4-4t) & \frac{3}{4} < t \le 1 \end{cases}$$

Al calcular los vectores tangentes a lo largo de Γ^+ se tiene,

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} (4,0) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ (0,4) & \frac{1}{4} < t \le \frac{1}{2} \\ (-4,0) & \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4} \\ (0,-4) & \frac{3}{4} < t \le 1 \end{cases}$$

Los vectores normales apuntando hacia afuera de Ω son

$$n(t) = \begin{cases} (0,-4) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ (4,0) & \frac{1}{4} < t \le \frac{1}{2} \\ (0,4) & \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4} \\ (-4,0) & \frac{3}{4} < t \le 1 \end{cases}$$

Un cálculo simple prueba que en cada subintervalo se cumple la condición de orientación

$$\begin{vmatrix} n(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{vmatrix} > 0$$

Por ejemplo, si $t \in [0, \frac{1}{4}]$, se tiene que

$$\begin{vmatrix} n(t) \\ \dot{\gamma}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 16$$

La figura 3.14 ilustra este ejemplo. ▷

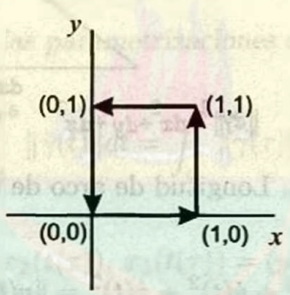


Figura 3.14. Orientación del cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicios 3.3

Parametrice las siguientes curvas. Haga un bosquejo de ellas.

1. La curva que se obtiene de intersecar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ con el plano $z = \sqrt{5}$.
2. La curva elíptica que se obtiene de intersecar el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + x + y = 1$.
3. La parábola obtenida de intersecar el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $y = 4x$.
4. La hipérbola espacial obtenida de intersecar $z = xy$ y el plano $z + y + x = -1$.
5. El triángulo espacial cuyos vértices son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.
6. La poligonal obtenida de intersecar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el cilindro rectangular $\{x = 0, x = 1, y = 0, y = 1\}$.

3.4 Longitud de arco y ángulo entre curvas

Ahora se definen los conceptos de **longitud de arco** de una curva suave y el de **ángulo** entre dos curvas regulares.

Dada una curva regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \Gamma$, si se toma $p \in \Gamma$, entonces, hasta un infinitésimo de longitud $\|d\gamma\|$ en tal punto de la curva, éste se descompone infinitesimalmente como

$$\|d\gamma\|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

donde dx, dy, dz son las componentes infinitesimales del infinitésimo del arco vectorial $d\gamma$, de allí que

$$\|d\gamma\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

De esta forma, si $\ell(\Gamma)$ denota la longitud de Γ entonces, ésta se calcula por la igualdad

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \|d\gamma\| = \int_\Gamma \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Por lo tanto, si en coordenadas cartesianas $\gamma = \gamma(t)$ parametriza a Γ en el intervalo $[a, b]$

$$\gamma(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$$

entonces $dx = \dot{x}(t)\,dt$, $dy = \dot{y}(t)\,dt$ y $dz = \dot{z}(t)\,dt$, en consecuenia la longitud de Γ se calcula mediante (véase la figura 3.15)

$$\begin{aligned}\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} &= \int_{[a,b]} \sqrt{\dot{x}(t)^2 dt^2 + \dot{y}(t)^2 dt^2 + \dot{z}(t)^2 dt^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt\end{aligned}$$

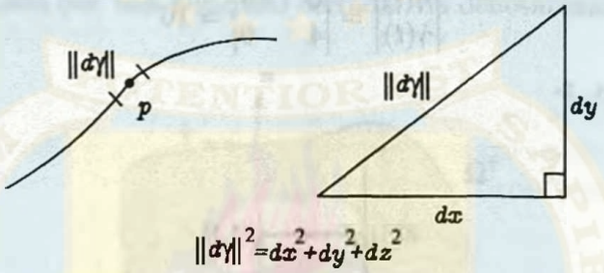


Figura 3.15. Longitud de arco de una curva.

La igualdad

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2 = \|v(t)\|^2$$

hace que la siguiente definición sea natural.

DEFINICIÓN 3.25. La **longitud** de la curva regular parametrizada $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ se define por

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\langle v(t),\, v(t)\rangle}\, dt = \int_a^b \|v(t)\| dt$$

donde $v(t) = \dot{\gamma}(t)$ es el vector velocidad tangente a la curva Γ en el punto $\gamma(t)$.

El siguiente ejemplo ilustra esta definición que se ha heredado directamente de los resultados básicos.

EJEMPLO 3.26. Sea el subconjunto del plano

$$\mathbb{S}^1_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = R\}$$

identificado como el **círculo** de radio R con centro en $(0, 0)$.

◁ Una parametrización que hace de $\mathbb{S}^1_R$ una curva regular, está dada por $\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. De la definición, la longitud de $\mathbb{S}^1_R$ se calcula,

$$\begin{aligned}\ell = \ell(\mathbb{S}^1_R) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\,\mathrm{sen}^2 t + R^2 \cos t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R \;\triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.27. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la hélice contenida en el cilindro de radio 4 y paso de altura $h = 4\pi$.
◁ Ya se vio que las ecuaciones que definen paramétricamente a Γ son

$$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\operatorname{sen} t, \ t \in [0, 2\pi] \\ z = 2t \end{cases}$$

lo que implica que,

$$\|v(t)\|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 4 = 20$$

debido a que $v(t) = (-4\operatorname{sen} t, \ 4\cos t, 2)$.

Por lo tanto, en el intervalo $[0, 2\pi]$, la longitud de esta hélice, hasta el primer paso es

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|v(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{20}\, dt = 4\sqrt{5}\pi \ \triangleright$$

El siguiente resultado nos asegura la independencia de la longitud de una curva respecto a una parametrización. Esto es, la definición de longitud está bien definida, pues no depende de la parametrización escogida de la curva.

LEMA 3.28. *Sea Γ una curva regular parametrizada por*

$$\gamma : [a, b] \to \Gamma$$

donde $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$. Si $\widetilde{\gamma} : [c, d] \to \Gamma$, con $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(\tau)$ es otra parametrización tal que el parámetro temporal t es una función del parámetro $\tau \in [c, d]$:

$$t : [c, d] \to [a, b],$$

con $\dfrac{dt}{d\tau} > 0$, entonces las longitudes del arco en las parametrizaciones respectivas son las mismas, es decir,

$$\ell = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_c^d \|\dot{\widetilde{\gamma}}(\tau)\| d\tau = \widetilde{\ell}$$

◁ Defínase

$$\widetilde{\gamma}(\tau) = (x_1(t(\tau)), x_2(t(\tau)), \ x_3(t(\tau)) = (y_1(\tau), \ y_2(\tau), \ y_3(\tau)),$$

y sea el vector velocidad

$$\dot{\widetilde{\gamma}} = w(\tau) = \left(\frac{dy_1}{d\tau}, \frac{dy_2}{d\tau}, \frac{dy_3}{d\tau}\right), \quad c \le \tau \le d$$

Entonces por definición,

$$\widetilde{\ell} = \int_c^d \|w(\tau)\| d\tau$$

Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\|w(\tau)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dy_i}{d\tau}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)^2}$$

$$= \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2} = \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \|v(t)\|$$

De esta forma, como $dt/d\tau > 0$, por el teorema de cambio de variable se tiene que

$$\widetilde{\ell} = \int_c^d \|w(\tau)\| d\tau = \int_c^d \|v(t(\tau))\| \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_a^b \|v(t)\| \, dt = \ell$$

lo que concluye la demostración. $\triangleright$

Finalizamos esta sección con el concepto de **ángulo** entre dos curvas.

Consideremos ahora dos curvas regulares suaves Γ_1 y Γ_2 tal que están parametrizadas por $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ y $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ respectivamente. Supóngase además que en las imágenes del punto t_0 se intersecan Γ_1 y Γ_2, esto es, $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$. Si tales curvas están definidas en coordenadas x, y, z por

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (x_1(t),\, y_1(t),\, z_1(t)) \\ \gamma_2(t) = (x_2(t),\, y_2(t),\, z_2(t)) \end{cases}$$

y sus vectores tangentes en el punto común $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ son

$$\mathbf{u} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

y

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_2}{dt}\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

entonces es natural definir el **ángulo** formado por esas curvas en $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ como el ángulo formado por sus vectores tangentes. Esto es, si tal ángulo es θ, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\|}$$

La figura 3.16 ilustra esta discusión.

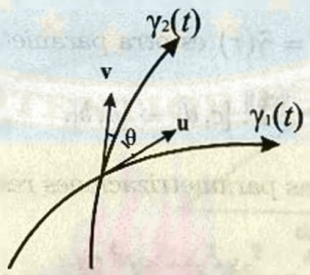


Figura 3.16. Ángulo entre dos curvas.

EJEMPLO 3.29. Sean las curvas Γ_1 y Γ_2 definidas en el intervalo $[0,4]$ mediante las reglas $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ y $\gamma_2(t) = (t, t^3)$ respectivamente.

◁ Es claro que $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = (1,1)$ es el punto de intersección de Γ_1 y Γ_2 y que, si nombramos a los vectores tangentes respectivos por

$$\mathbf{u} = \dot{\gamma}_1(1) = (1,2)$$
$$\mathbf{v} = \dot{\gamma}_2(1) = (1,3)$$

entonces el ángulo formado en el punto $(1,1)$ por las curvas Γ_1 y Γ_2 es

$$\theta = \arccos\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\mathbf{v}\|} = \arccos\left(\frac{(1,2)\cdot(1,3)}{\sqrt{5}\sqrt{10}}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right) = \arccos\left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right). \quad \triangleright$$

Ejercicios 3.4

Calcule la longitud de arco, de 0 a π, de cada una de las curvas de los ejercicios 1–9.

1. $\gamma_1(t) = (3t, 4\operatorname{sen} t)$.
2. $\gamma_2(t) = (\cos t, t + 2\operatorname{sen} t)$.
3. $\gamma_3(t) = (t^2 - 2t, t^2 + 2t)$.
4. $\gamma_4(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$.
5. $\gamma_5(t) = (t, t^2)$.
6. $\gamma_6(t) = (t, \sqrt{t})$.
7. $\gamma_7(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t,\, t)$.

8. $\gamma_8(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, e^t)$.

9. $\gamma_9(t) = (t, t^{3/2})$.

10. $\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$, $\gamma_2(t) = (t, t^2)$.

11. $\gamma_1(t) = (e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t)$, $\gamma_2(t) = (t, t)$.

Calcule el ángulo, en los puntos de intersección, entre las parejas de curvas dadas en los ejercicios 10–12.

12. $\gamma_1(t) = (t^2, t^3)$, $\gamma_2(t) = (t^3, t^2)$. Indicación: calcule primero los puntos de intersección.

3.5 La segunda derivada. Aceleración

Ya se ha mencionado sobre la clase de diferenciablidad de una función vectorial de variable real (curva suave)

$$\gamma : J \to \mathbb{R}^3$$

relegando las definiciones a las propiedades de las funciones coordenadas $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$.

Particularmente, una curva de clase C^2 es una función vectorial de variable real cuyas componentes son funciones de clase C^2.

Denotamos por $\ddot{\gamma}(t)$ la segunda derivada de la curva γ en el punto $\gamma(t)$, y en coordenadas lo escribimos

$$\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) = \ddot{x}(t)e_1 + \ddot{y}(t)e_2 + \ddot{z}(t)e_3$$

donde los puntos indican derivación respecto a la variable temporal $t \in J$.

DEFINICIÓN 3.30. Al vector espacial $\ddot{\gamma}(t)$ se le llamará el vector **aceleración** de la curva γ en el punto $\gamma(t)$.

EJEMPLO 3.31. Sea la curva

$$\gamma(t) = (R\cos t,\ R\operatorname{sen} t),\ t \in \mathbb{R}$$

◁ Un cálculo simple nos muestra que

$$\dot{\gamma}(t) = (-R\operatorname{sen} t,\ R\cos t)$$
$$\ddot{\gamma}(t) = (-R\cos t, -R\operatorname{sen} t)$$

lo que nos dice que $\gamma(t) = -\ddot{\gamma}(t)$. Esto es, el vector de posición $\gamma(t)$ y su aceleración $\ddot{\gamma}(t)$ son paralelos con sentidos opuestos. ▷

EJEMPLO 3.32. Dada la curva suave

$$\gamma(t) = (e^{2t}, \operatorname{sen} 4t, \cos t)$$

calcule $\dot{\gamma}(t)$ y $\ddot{\gamma}(t)$.

◁ Directamente, obtenemos los vectores velocidad y accleración

$$\dot{\gamma}(t) = (2e^{2t}, 4\cos 4t, -\operatorname{sen} t)$$
$$\ddot{\gamma}(t) = (4e^{2t}, -16\operatorname{sen} 4t, -\cos t) \quad \triangleright$$

EJEMPLO 3.33. Dada la curva suave

$$\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 - 2, t^4 + 1)$$

calcule $\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) >$ y $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)$.

◁ Al calcular directamente los vectores velocidad y aceleración de γ en $\gamma(t)$, obtenemos $\dot{\gamma}(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$ y $\ddot{\gamma}(t) = (2, 6t, 12t^2)$, de donde

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = 4t + 18t^3 + 48t^5$$

y

$$\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2t & 3t^2 & 4t^3 \\ 2 & 6t & 12t^2 \end{vmatrix} = e_1(36t^4 - 24t^4) - e_2(24t^3 - 8t^3)$$
$$+ e_3(12t^2 - 6t^2) = (12t^4, -16t^3, 6t^2) \ \triangleright$$

Consideremos ahora cualquier curva $\gamma = \gamma(t)$ tal que tenga una norma constante (por ejemplo $\gamma(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t)$ el círculo de radio R), esto es, para todo $t \in J$, tenemos que

$$\|\gamma(t)\| = k$$

donde k es una constante no negativa.

◁ En efecto, ya que $k = \|\gamma(t)\|$, entonces $k^2 = \|\gamma(t)\|^2 = \gamma(t) \cdot \gamma(t)$, de donde, al derivar cada miembro respecto al tiempo t obtenemos

$$0 = \frac{d}{dt}(\gamma(t) \cdot \gamma(t)) = \dot{\gamma} \cdot \gamma(t) + \gamma(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = 2\,\dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t)$$

es decir,

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \gamma(t) = 0$$

lo que nos dice que $\gamma(t)$ y $\dot{\gamma}$ son vectores ortogonales. ▷

Así, utilizando este razonamiento para aquellas curvas con vectores velocidad con norma constante $\|\dot{\gamma}(t)\| = k$ se tiene que:

Las curvas suaves que tienen rapidez constante son tales que sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

EJEMPLO 3.34. Sea la curva circular espacial

$$\gamma(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 6)$$

◁ El vector velocidad se calcula

$$\dot{\gamma}(t) = (-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 0)$$

cuya norma es $\|\dot{\gamma}(t)\| = 4$.

Por lo tanto, $\dot{\gamma}(t)$ es ortogonal al vector aceleración

$$\ddot{\gamma}(t) = (-4\cos r, -4\operatorname{sen} t, 0)$$

debido a la discusión anterior, y como se puede apreciar mediante el cálculo directo,

$$\dot{\gamma}(t) \cdot \ddot{\gamma}(t) = 16\cos t \operatorname{sen} t - 16\cos t \operatorname{sen} t = 0 \quad \triangleright$$

Ejercicios 3.5

En los ejercicios 1–13 se da una curva que representa la trayectoria que sigue una partícula. Bosqueje la curva y encuentre la velocidad y la aceleración en el tiempo que se indica.

1. $\gamma(t) = (t^2 - 1, 2t),\ t = 2$
2. $\gamma(t) = (3\operatorname{sen} t, 3\cos t),\ t = 3\pi$
3. $\gamma(t) = (\tan t, \cot t),\ t = \frac{3\pi}{4}$
4. $\gamma(t) = (\cos t, \cos^2 t),\ t = \frac{\pi}{4}$
5. $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos^2 t),\ t = \pi$
6. $\gamma(t) = (\cos t, \cos 2t),\ \frac{\pi}{2}$
7. $\gamma(t) = (3t, e^{-t}),\ t = 0$
8. $\gamma(t) = (e^{-t}, e^t),\ t = 0$
9. $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos 2t),\ t = \pi$
10. $\gamma(t) = (\sec t, \tan t), t = \frac{\pi}{6}$
11. $\gamma(t) = (\operatorname{senh} t, \cosh t),\ t = 0$
12. $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, 2\cos t),\ t = 0$
13. $\gamma(t) = (2\ln t, t^2),\ t = 2$
14. Considere la curva $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$. Verifique que su vector aceleración es ortogonal al vector $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t)$.

CAPÍTULO

4

Funciones diferenciables de tipo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

En este capítulo hacemos un tratamiento del análisis cualitativo de una función de varias variables reales, generalizando algunos conceptos conocidos ya para funciones reales de una variable real.

4.1 La topología de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Iniciamos esta sección describiendo los objetos geométricos en $\mathbb{R}^n$ que van a ser utilizados a lo largo del capítulo. Estos objetos gozan de características que son usadas para estudiar las propiedades de funciones que están definidas en subconjuntos del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Motivamos la discusión revisando lo que se conoce para dominios contenidos en la recta real $\mathbb{R}$.

El dominio de la función real de variable real $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$ es el conjunto

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

y está compuesto por la unión de los **intervalos abiertos** $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.

En general, en la teoría diferenciable de funciones reales de variable real, se presume que los dominios son de la forma $D = (a, b)$, es decir, intervalos **abiertos**.

Al intervalo (a, b) se le llama **abierto** pues no contiene los extremos (orillas) a y b.

◁Otra forma de verlo es de la siguiente manera: Si $p \in (a, b)$ entonces $a < p < b$ elegimos $\epsilon = \min\{p - a, b - p\}$. Entonces el intervalo $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ está contenido en $D = (a, b)$.

En otras palabras (a, b) es un conjunto abierto pues para todo p en él, existe un número $\epsilon > 0$ satisfaciendo la inclusión de conjuntos $(p - \epsilon, p + \epsilon) \subset (a, b)$ ▷.

Generalizamos este concepto de **conjunto abierto** en $\mathbb{R}^n$.

Si $p \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ es un número real positivo, se define la **bola** de radio ϵ y centro en p, como el conjunto sólido

$$B_\epsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q - p\| < \epsilon\}$$

DEFINICIÓN 4.1. Dado un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se dice que es un **conjunto abierto** en $\mathbb{R}^n$ si para cada $p \in \Omega$ existe un número $\epsilon > 0$ tal que la bola de radio ϵ y centro en p está contenida totalmente en Ω, es decir,

$$B_\epsilon(p) \subset \Omega$$

Véase la figura 4.1.

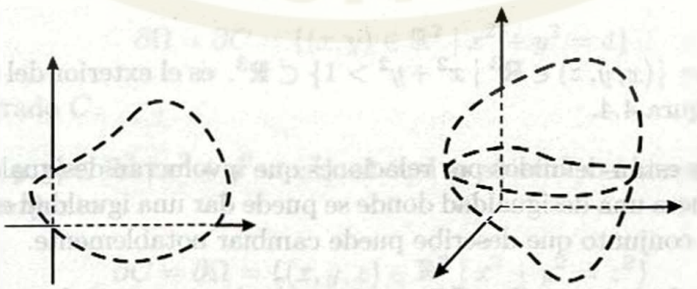


Figura 4.1. Conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 4.2. Todo intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto.

◁ Esto ya se demostró anteriormente, notando que en el caso unidimensional una bola corresponde a un intervalo.

$$\begin{aligned} B_\epsilon(p) &= \{q \in \mathbb{R} \mid \|q - p\| < \epsilon\} = \{q \in \mathbb{R} \mid |q - p| < \epsilon\} \\ &= \{q \mid -\epsilon < q - p < \epsilon\} = \{q \mid p - \epsilon < q < p + \epsilon\} \\ &= (p - \epsilon, p + \epsilon) \quad \triangleright \end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos omiten las demostraciones de las afirmaciones mostrando apenas una ilustración de los subconjuntos que intervienen. Hacemos hincapié que, en general, un conjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto "gordito" que no tiene orilla (frontera).

EJEMPLO 4.3. Una bola de radio ϵ con centro en cualquier $p \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

◁ En este caso Ω es una bola $B_\epsilon(p)$. ▷

EJEMPLO 4.4. El semiplano $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$ (véase la figura 4.2).

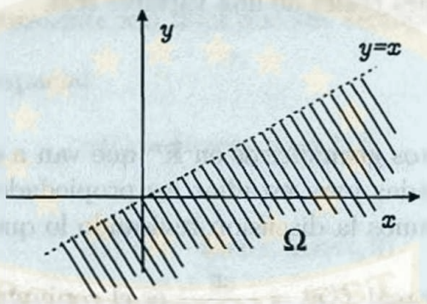


Figura 4.2. Semiplano inferior definido por la desigualdad $x > y$.

EJEMPLO 4.5. El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido mediante $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$. Este conjunto es el interior de un paraboloide de revolución.

EJEMPLO 4.6. El conjunto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2\} \subset \mathbb{R}^3$ determina el interior de un cono. Este es un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^3$ y se muestra en la figura 4.3.

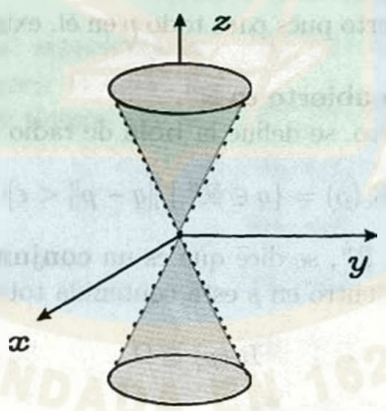


Figura 4.3. Interior del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

EJEMPLO 4.7. El conjunto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 1\} \subset \mathbb{R}^3$. es el exterior del cilindro unitario y es un conjunto abierto, como se muestra en la figura 4.4.

Hasta aquí, los ejemplos dados están definidos por relaciones que involucran desigualdades estrictas entre las variables que intervienen. Cuando se involucra una desigualdad donde se puede dar una igualdad entre las relaciones de las variables que intervienen, la geometría del conjunto que describe puede cambiar notablemente.

DEFINICIÓN 4.8. Definimos al conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ como un **conjunto cerrado** en $\mathbb{R}^n$ si su complemento en $\mathbb{R}^n$ es abierto.

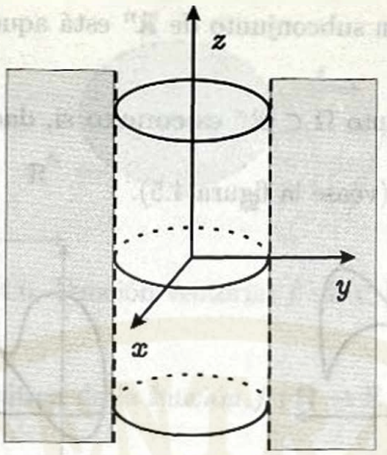


Figura 4.4. Exterior del cilindro unitario.

EJEMPLO 4.9. Para ejemplos de conjuntos cerrados tenemos a los complementos de los conjuntos abiertos dados en los ejemplos anteriores.

1. El conjunto $C = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ es cerrado en la recta real $\mathbb{R}$.
2. El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ es cerrado en el plano $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$.
4. El exterior del cono, incluyendo el cono $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq z^2\}$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^3$.
5. El interior del cilindro, incluyendo al cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^3$.

Es claro que existen subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que no son ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo $D = (-1, 2]$ es un intervalo que no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un subconjunto. Se dice que el punto $q \in \mathbb{R}^3$ es **punto frontera** de Ω si toda bola con centro en p intersecta a Ω y al complemento de Ω.

Al conjunto contenido en $\mathbb{R}^n$

$$\partial\Omega = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p \text{ es frontera de } \Omega\}$$

se le llamará la **frontera** de Ω en $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 4.10. Damos algunos ejemplos de fronteras de conjuntos euclidianos.

1. La frontera de $\Omega = (a, b)$ es un conjunto formado por dos puntos $\partial(a, b) = \{a, b\}$.
2. La frontera del conjunto cerrado $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ es la misma que la de su complemento, el abierto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$ y es la recta $\partial C = \partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.

   Tal conjunto está contenido en el cerrado C y no pertenece al abierto Ω.
3. La frontera del abierto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 4\}$ es la misma que la del conjunto cerrado $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ y la constituye el conjunto cilíndrico

   $$\partial\Omega = \partial C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

   que está contenido en el cerrado C.
4. Dados los conjuntos $\Omega = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2\}$, el cual es abierto y el conjunto cerrado $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \geq z^2\}$, entonces el conjunto

   $$\partial C = \partial\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

   es la frontera tanto de C como de Ω.

Entre las características geométricas de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ está aquella que nos asegura que tal subconjunto no está dividido en pedazos ajenos entre sí.

DEFINICIÓN 4.11. Decimos que el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es **conexo** si, dados dos puntos $p, q, \in \Omega$, existe una curva Γ totalmente contenida en Ω que los une.[1]

Si Ω no es conexo, se llamará **disconexo** (véase la figura 4.5).



Figura 4.5. Conjuntos conexo y disconexo.

EJEMPLO 4.12. El conjunto del plano

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ ó } x^2 + y^2 \geq 4\}$$

es disconexo, pues dados p, q con $\|p\| \leq 1$ y $\|q\| \geq 2$ entonces cualquier curva que los une se sale del conjunto Ω.

EJEMPLO 4.13. El conjunto anular

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

encerrado entre los círculos de radio 1 y 2 respectivamente, ambos con centro en el origen, es un conjunto conexo.

En general un conjunto conexo es aquel que está formado por una sola pieza. Esto es, un conjunto conexo en $\mathbb{R}^n$ se entiende intuitivamente como un conjunto que no está dividido en varias piezas.

DEFINICIÓN 4.14. Por una **región** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entenderemos un conjunto que es abierto y conexo.

Ejercicios 4.1

¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son abiertos? ¿Cuáles son cerrados? ¿Cuáles son conexos?

1. $\Omega = \{(x, y) \mid |x| \geq 1\}$
2. $\Omega = \{(x, y) \mid |y| < 1\}$
3. $\Omega = \{(x, y) \mid x + y < 1\}$
4. $\Omega = \{(x, y) \mid y \geq x^2\}$
5. $\Omega = \{(x, y) \mid |x| + |y| \geq 1\}$
6. $\Omega = \{(x, y) \mid |\operatorname{sen} x| > \frac{\sqrt{2}}{2}\}$
7. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua se define $\Omega = \{(x, y) \mid y > f(x)\}$
8. $\Omega = \{(x, y, z) \mid x + y + 2z < 2\}$
9. $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 - y^2 - z^2 \leq 1\}$
10. $\Omega = \{(x, y, z) \mid \|(x, y, z)\| < 1 \quad \text{ó} \quad 4 \leq \|(x, y, z)\|\}$
11. $\Omega = \{(x, y, z) \mid |x| \geq 1\}$
12. $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z < \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$

4.2 Funciones escalares de argumento vectorial

Pasamos ahora a definir a una función real con argumento vectorial utilizando los conceptos dados de abierto y conexo.

Una función real de variable vectorial definida en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, lo que denotamos por $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una relación tal que a cada punto $p \in \Omega$ se le asocia el número real $f(p)$ (véase la figura 4.6).

Esto es, para el punto $p = (x, y, z) \in \Omega$, esta asociación se escribe

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

[1] En la literatura moderna, un conjunto con esta propiedad se dice ser **conexo por trayectorias**.

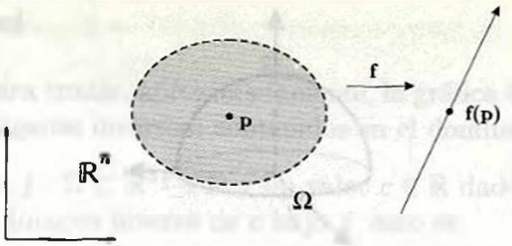


Figura 4.6. Función vectorial $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 4.15. Ya que $\Omega \in \mathbb{R}^3$ la **gráfica** de la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es un subconjunto Graf(f) de $\mathbb{R}^4$ descrita en el conjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(p, f(p)) \mid p \in \Omega\} = \{((x, y, z), f(x, y, z)) \mid (x, y, z) \in \Omega\}$$

Análogamente, para una función definida en la región plana $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con regla de correspondencia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ se tiene su gráfica como el subconjunto

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega,\ z = f(x, y)\}$$

contenido en $\mathbb{R}^3$, constituyendo una superficie en tal espacio tridimensional, si se habla en el contexto del capítulo 2.

Damos algunos ejemplos donde la regla de correspondencia es dada de antemano.

EJEMPLO 4.16. Comentamos la grfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

◁ Claramente, el dominio de f es $\Omega = \mathbb{R}^2$ y su gráfica es la superficie definida por el conjunto contenido en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\text{Graf}(f) &= \{((x, y), x^2 + y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2\}\end{aligned}$$

que resulta ser un paraboloide circular (véase la figura 4.7). ▷

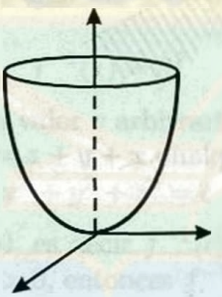


Figura 4.7. Gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

EJEMPLO 4.17. Determinamos el dominio de la función $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

◁ Para calcular el dominio Ω imponemos la condición $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, o equivalentemente

$$4 \geq x^2 + y^2 \iff 2 \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Esto es, para $(x, y) \in \Omega$ se debe cumplir que $\|(x, y)\| \leq 2$, lo que nos dice que el dominio Ω deberá ser un disco cerrado de radio 2 con centro en el origen de coordenadas.

La gráfica de f es el conjunto

$$\text{Graf}(f) - \{(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Si ponemos $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ entonces, al elevar cuadrados obtenemos $z^2 = 4 - x^2 - y^2$, de donde, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que es una esfera de radio 2 con centro $(0, 0, 0)$.

Aquí, la gráfica de f es la parte superior de tal esfera, como lo muestra la figura 4.8. ▷

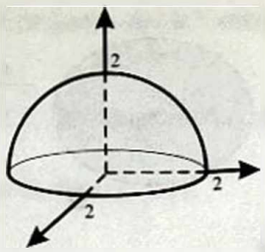


Figura 4.8. Gráfica de $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

EJEMPLO 4.18. Determinamos y bosquejamos el dominio de la función $f(x, y, z) = \ln(1 - x - y - z)$.

◁ La función está definida en una región de $\mathbb{R}^3$ determinada por la relación

$$1 - x - y - z > 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad 1 > x + y + z$$

Para dar un bosquejo del dominio consideremos la igualdad $x + y + z = 1$, la cual determina un plano con cortes con los ejes en $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. Al tomar el punto $p = (0, 0, 0)$ se tiene que sus coordenadas satisfacen

$$0 + 0 + 0 = 0 < 1$$

es decir, p satisface la relación $x + y + z < 1$ y está por abajo del plano mencionado. Es natural pensar que todos los puntos (x, y, z) satisfaciendo la relación $x + y + z < 1$ están situados por debajo de tal plano.

De esta manera el dominio de f es la región Ω de $\mathbb{R}^3$ formada por los puntos debajo del plano $x + y + z = 1$ (véase la figura 4.9). ▷

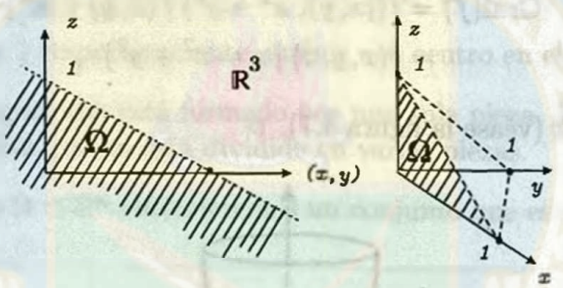


Figura 4.9. Parte del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante.

Ejercicios 4.2

1. Para la función $f(x, y) = xy^2 + 3$ encuentre

- **a.** $f(2, 1)$
- **b.** $f(1, 2)$
- **c.** $f(0, 0)$
- **d.** $f(a, b - a)$
- **e.** $f(a - b, b)$

2. Para la función $p(x, y, z) = x^2y + z^3 \ln(x^2 + 1)$ encuentre

- **a.** $p(2, 1, 2)$
- **b.** $p(0, 1, 1)$
- **c.** $p(1, -1, 4)$

Calcule los dominios de las funciones de los ejercicios 3–11 y dé su característica topológica (abierto, cerrado, conexo).

3. $f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

4. $f_2(x, y) = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2y^2}}$

5. $f_3(x, y) = \arccos(2x - y)$

6. $f_4(x, y) = \ln(y^2 - x)$

7. $f_5(x, y) = y + \sqrt{x}$

8. $g_1(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$

9. $g_2(x, y, z) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3x}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right)$

10. $g_3(x, y, z) = \dfrac{1}{\ln(9 - x^2 - y^2 - z^2)}$

11. $g_4(x, y, z) = \sqrt{x + 2y - 3z}$

4.3 Superficies y curvas de nivel

En esta parte estudiaremos un método para trazar, aproximadamente, la gráfica de una función de dos variables mediante los conjuntos de nivel de tal función (imágenes inversas) contenidos en el dominio.

DEFINICIÓN 4.19. Para una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y un valor $c \in \mathbb{R}$ dados, se define el **conjunto de nivel** de f al valor c, denotado por $f^{-1}(c)$, como la imagen inversa de c bajo f, esto es,

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = c\}$$

En otras palabras, es el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \Omega$ que bajo f toman el mismo valor $f(x, y, z) = c$.

EJEMPLO 4.20. Encontramos los conjuntos de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ para $c = -1, 0, 1$.

◁ Para el caso $c = -1$, se tiene que por definición

$$f^{-1}(-1) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = -1\}.$$

Esto es, los puntos (x, y, z) en tal conjunto deberán satisfacer la relación $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, lo que es imposible. En consecuencia, $f^{-1}(-1) = \varnothing$ (el conjunto vacío).

Consideremos ahora el valor $c = 0$. Entonces, en este caso

$$f^{-1}(0) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$$

es decir, los puntos de tal conjunto deberán satisfacer la relación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, y tal relación es apenas resuelta cuando $x = y = z = 0$. Por lo tanto, el conjunto de nivel es solamente el punto

$$f^{-1}(0) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Finalmente, consideramos el valor $c = 1$. En este caso

$$f^{-1}(1) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Es decir, los puntos en tal conjunto satisfacen la relación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, la que corresponde a la ecuación de la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, es decir

$$f^{-1}(1) = \mathbb{S}^2$$

De esta última discusión, se observa que para un valor c arbitrario los puntos (x, y, z) en el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ deberán de satisfacer la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

la cual tiene sentido (puede ser resuelta) para $c \geq 0$, es decir $f^{-1}(c)$ es vacío si $c < 0$. Si $c = 0$, hemos ya notado que $f^{-1}(0)$ se reduce al punto $(0, 0, 0)$. Finalmente, si $c > 0$, entonces $f^{-1}(c)$ es una esfera con centro en el origen y de radio $R = \sqrt{c}$ como lo muestra la figura 4.10.

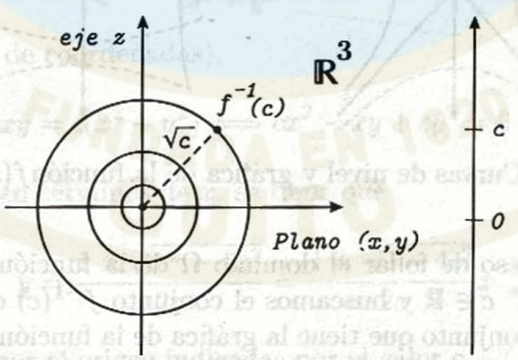


Figura 4.10. Conjuntos de nivel $x^2 + y^2 + z^2 = c$.

Notamos además que para $c_1 \neq c_2$ se tienen dos esferas diferentes $f^{-1}(c_1) \neq f^{-1}(c_2)$ en virtud de que los radios de cada una son diferentes.

Por lo tanto, los conjuntos de nivel folian (dividen) al dominio de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ mediante esferas (hojas) que no se intersecan entre sí. ▷

SIB - UCE

La última afirmación es válida para cualquier función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como lo afirma el siguiente lema.

LEMA 4.21. *Los conjuntos de nivel de una función f folian (dividen) al dominio mediante conjuntos (hojas) $f^{-1}(c)$ que no se intersecan entre sí.*

◁ Si para los valores $c_1 \neq c_2 \in \mathbb{R}$, los conjuntos de nivel respectivos $f^{-1}(c_1)$ y $f^{-1}(c_2)$ se intersecan, entonces $f^{-1}(c_1) \cap f^{-1}(c_2) \neq \varnothing$, es decir, existe $p \in f^{-1}(c_1) \cap f^{-1}(c_2)$. Ya que $p \in f^{-1}(c_1)$ y $p \in f^{-1}(c_2)$, entonces $f(p) = c_1$ y $f(p) = c_2$, lo que no puede suceder pues f es una función y a cada punto del dominio le asocia un valor y sólo uno. ▷

La discusión que hemos realizado se puede llevar a cualquier función de varias variables, en particular para funciones del tipo $f(x, y)$, donde los conjuntos de nivel $f^{-1}(c)$ son curvas planas que folian el dominio de f.

EJEMPLO 4.22. Describa los conjuntos de nivel de la función de dos variables $f(x, y) = x^2 - y^2$ para $c = -1, 0, 1$.

◁ Para el valor $c = -1$, se tiene la relación

$$x^2 - y^2 = -1$$

que corresponde a una hipérbola con sus componentes verticales y pasando por los vértices $(0, 1)$ y $(0, -1)$ respectivamente.

Para el valor $c = 0$ se deberá de cumplir la relación

$$x^2 - y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x, +y)(x - y) = 0 \Longleftrightarrow y = \pm x$$

que corresponde a un par de rectas por el origen de coordenadas.

Tales rectas son las asíntotas de la hipérbola encontrada cuando se estudió el nivel $c = -1$.

Finalmente para el caso $c = 1$, se cumplirá la relación

$$x^2 - y^2 = 1$$

que corresponde a una hipérbola con sus componentes horizontales que pasan por los vértices $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ respectivamente, teniendo como rectas asíntotas a $y = \pm x$.

Un análisis semejante al realizado nos permite concluir que si $c \in \mathbb{R}$ es un valor arbitrario se cumple que

1. Para $c < 0$, el conjunto $f^{-1}(c)$ es una hipérbola vertical con vértices en los puntos $(0, \sqrt{c}), (0, -\sqrt{c})$, y con rectas asíntotas $y = \pm x$.
2. Para $c = 0, f^{-1}(c)$ es la pareja de rectas por el origen $y = \pm x$.
3. Para $c > 0$, el conjunto $f^{-1}(c)$ es una hipérbola horizontal con vértices en los puntos $(\sqrt{c}, 0), (-\sqrt{c}, 0)$, y con rectas asíntotas $y = \pm x$.

La figura 4.11 ilustra este ejemplo. ▷

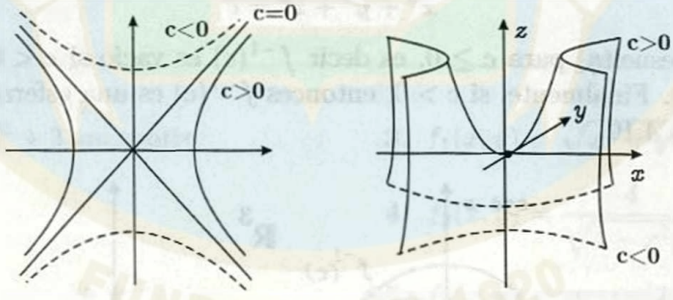


Figura 4.11. Curvas de nivel y gráfica de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Observemos detenidamente el proceso de foliar el dominio Ω de la función f mediante conjuntos de nivel. Damos inicialmente un valor de f a la "altura" $c \in \mathbb{R}$ y buscamos el conjunto $f^{-1}(c)$ que es la imagen inversa de c bajo f. En otras palabras, $f^{-1}(c)$ es la forma del conjunto que tiene la gráfica de la función f cuando se observa sólo a la altura c de los posibles valores.

Más correctamente, cada subconjunto de nivel $f^{-1}(c)$ es la parte de la gráfica de la función f suspendida dentro de la gráfica a un nivel del valor igual a c, lo que nos dice que se puede construir la gráfica de la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con el simple hecho de foliar Ω con los conjuntos de nivel, y después colocar cada conjunto de nivel a su altura correspondiente. Este proceso nos recuerda a la descripción de las zonas geográficas mediante mapas topográficos que detallan la configuración de ellas utilizando curvas de nivel. Cada curva de nivel corresponde a una altura determinada y el conjunto total de curvas nos ayuda a describir la topografía de la zona estudiada (véase la figura 4.12).

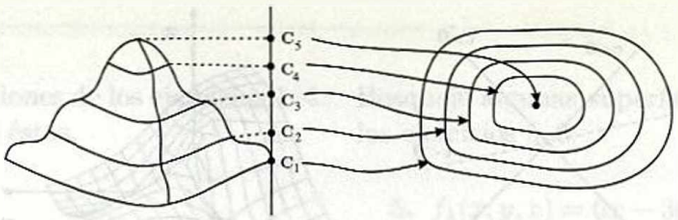


Figura 4.12. Curvas de nivel en Topografía.

EJEMPLO 4.23. Consideremos nuevamente la función $f(x,y) = x^2 - y^2$.

◁ Ya hemos estudiado cuáles son las curvas de nivel de esta función, por lo que se tienen los siguientes resultados.

1. Para un valor $c < 0$, el corte de la gráfica

$$\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) \mid z = x^2 - y^2\}$$

con el plano horizontal (a la altura) $z = c$ corresponde a una hipérbola en el plano $\mathbb{R}^2_{x,y}$ en dirección del eje y, con vértices en $(0,\sqrt{c}), (0,-\sqrt{c})$ y asíntotas $y = \pm x$.

2. Para el valor $c = 0$, el corte de la gráfica Graf(f) con el plano horizontal $z = 0$ corresponde al par de rectas $y = \pm x$ en el plano $\mathbb{R}^2_{x,y}$.

3. Para el valor $c > 0$, el corte de la gráfica Graf(f) con el plano horizontal $z = c$ corresponde a una hipérbola en el plano $\mathbb{R}^2_{x,y}$ en dirección del eje x, con vértices en $(\sqrt{c},0), (-\sqrt{c},0)$, y con asíntotas $y = \pm x$.

La figura 4.11 describe la gráfica de esta función que es un paraboloide hiperbólico (**silla de montar**). ▷

Los siguientes ejemplos nos indican que, en general, hacer el trazo de la gráfica de una función de dos variables no es simple cuando se usa la metodología de las curvas de nivel, y que hay que encontrar argumentos más sotisficados para el trazo, debido a que la estructura de las curvas de nivel es complicado, o demasiado simple para la elaboración de tal trazo.

EJEMPLO 4.24. Considérese la función en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definida por la regla de correspondencia

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

◁ Calculamos sus curvas de nivel para un valor arbitrario $c \in \mathbb{R}$. Los puntos $(x,y) \in f^{-1}(c)$ deberán satisfacer la relación

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = c$$

o equivalentemente (omitiendo el origen de coordenadas),

$$xy = c(x^2+y^2) \iff cx^2 - xy + cy^2 = 0$$

Si se resuelve la última ecuación para y en términos de x, se tiene que

$$y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4x^2}}{2c} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c^2}}{2c}x$$

que corresponde a ecuaciones de rectas por el origen indicadas por el valor c.

Tales valores de c están condicionados a que se satisfaga $1 - 4c^2 \geq 0$, es decir a que $-\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{1}{2}$. Las curvas de nivel que realmente no pasan por $(0,0)$, están trazadas en la figura 4.13 para ciertos valores de c. Claramente es difícil realizar el dibujo de la gráfica con estos elementos en virtud de que el haz de líneas obtenidas, al ser levantados a sus valores respectivos, dificulta su pegado continuo, además de la aparición del **punto singular** $p = (0,0)$. La traza de la gráfica de f, realizada por el programa **Mathematica**, se muestra en la figura 4.13, de donde observamos su complejidad cerca del punto singular. ▷

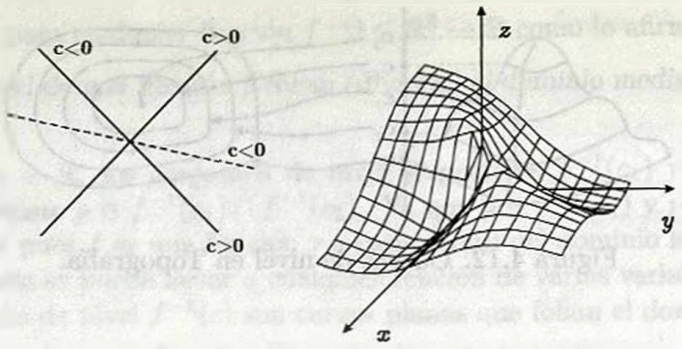


Figura 4.13. Curvas de nivel y gráficas de $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

EJEMPLO 4.25. Consideremos la función cuártica

$$f(x,y) = x^4 - y^4 - 4xy$$

◁ Para el valor $c \in \mathbb{R}$, los puntos $(x,y) \in f^{-1}(c)$ deberán satisfacer la ecuación

$$x^4 + y^4 - 4xy = c$$

Tal ecuación no es a primera vista reconocida, y de hecho, la forma de las curvas de nivel varía según el valor c. En el siguiente capítulo buscaremos tales curvas de nivel utilizando un análisis cualitativo de la función alrededor de los llamados **puntos críticos**, que determinan localmente (alrededor de ellos) la estructura de las curvas de nivel. De hecho, mostraremos las siguientes propiedades de la función f.

1. Si $c < -2$, entonces $f^{-1}(c)$ es vacío, es decir, sólo cuando $c \geq -2$ el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ es no vacío.
2. Cuando $c = -2$ la curva de nivel es la pareja de **puntos críticos** aislados
$$f^{-1}(-2) = \{(-1,-1),(1,1)\}$$
3. Cuando $-2 < c < 0$, la curva de nivel $f^{-1}(c)$ está compuesta por una pareja de curvas cerradas que encierran a los puntos críticos mencionados antes.
4. Cuando $c = 0$ la curva de nivel $f^{-1}(0)$ es una curva que se autointerseca en $(0,0)$ en forma de "ocho" y que en cada uno de sus pétalos encierra las parejas de curvas mencionados en el punto anterior.
5. Cuando $c > 0$ la curva de nivel $f^{-1}(c)$ es un circuito cerrado que encierra a la figura de "ocho" dada por $f^{-1}(0)$.

Cabe resaltar que una prueba contundente de todos los resultados mencionados en este ejemplo serían provistos por la teoría básica de la rama de la matemática conocida como **Geometría algebraica**.

La figura 4.14 ilustra las curvas de nivel de la función y su gráfica trazada por el programa **Mathematica**. ▷



Figura 4.14. Curvas de nivel y gráfica de $f(x,y)| = x^4 + y^4 - 4xy$.

La moraleja de los últimos ejemplos es que, en general, no es simple ni siquiera construir las curvas de nivel de una función. Más aún, ya teniendo las curvas de nivel de una función (vértebras de la gráfica) en muchas ocasiones no es fácil construir su gráfica (columna vertebral).

Para el caso de una función de 3 variables, la construcción de su gráfica es imposible debido a que está sumergida en un espacio real de dimensión 4, objeto que no es simple dibujar.

Ejercicios 4.3

Encuentre los dominios de las funciones de los ejercicios 1–4. Dibuje algunas curvas de nivel de éstas.

1. $f_1(x,y) = 4x - y$
2. $f_2(x,y) = \dfrac{2y}{x}$
3. $f_3(x,y) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1-y}\right)$
4. $f_4(x,y) = e^{x+y}$

Bosqueje algunas superficies de nivel para las funciones de los ejercicios 5–8.

5. $f_1(x,y,z) = 6x - 3y + 2z$.
6. $f_2(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + z$.
7. $f_3(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
8. $f_4(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$.

4.4 Límites y puntos singulares

En esta sección discutimos someramente el concepto de límite de una función real de variable vectorial en un **punto de acumulación** del dominio. Los temas son tratados de igual forma que en el capítulo 2 de Reyes [10].

4.4.1 Puntos de acumulación y límites

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región del espacio euclidiano de dimensión n, donde consideraremos, generalmente, $n = 2, 3$.

DEFINICIÓN 4.26. El punto $p \in \mathbb{R}^n$ se dirá que es un **punto de acumulación** para la región Ω si toda bola $B_\epsilon(p)$ interseca no vacíamente a Ω. Esto es, para cada bola de radio $\epsilon > 0$ con centro en p se encuentra un punto $q \in \Omega$ contenido en tal bola.

Si p no es de acumulación para Ω, se dirá que es un **punto aislado** (véase la figura 4.15).



Figura 4.15. Puntos de acumulación y aislados.

En términos menos precisos, un punto de acumulación p de la región Ω es aquel que está tan próximo de Ω como se desee. El punto p no necesariamente está contenido en Ω, pero se puede aproximar a él por puntos contenidos en Ω.

EJEMPLO 4.27. Sea $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}^1$, es claro que $p = a$ es un punto de acumulación de Ω. Todo punto $q \in (a,b)$ es de acumulación.

EJEMPLO 4.28. Sea $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, entonces $p = (0,0)$ es un punto de acumulación de Ω. También todo punto $q \neq (0,0)$ contenido en Ω es de acumulación para Ω.

EJEMPLO 4.29. Sea la región espacial

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid x + y + z < 1\}$$

◁ Es claro que el punto frontera $p = (0,0,1)$ es un punto de acumulación de Ω. Por otro lado el punto $q = (1,1,1)$ no pertenece a Ω y es un punto aislado de Ω. ▷

Definamos ahora el concepto de **límite** de una función real de variable vectorial en un punto de acumulación de su dominio, en términos de los límites de funciones reales de variable real.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función real de variable vectorial, y sea $p \in \mathbb{R}^3$ un punto de acumulación de Ω. Denotamos por $q = (x,y,z)$ el vector variable y entendemos que el punto $q \in \Omega$ se aproxima al punto p por la notación $\lim_{q \to p}$.

Además, si $p = (p_1, p_2, p_3)$ son las coordenadas, el número real $\|q - p\|$ se entiende como

$$\|q - p\| = \sqrt{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 + (z-p_3)^2}$$

DEFINICIÓN 4.30. Se dice que la función $f(x,y,z)$ tiene límite L en el punto de acumulación p de Ω, denotado por

$$\lim_{q\to p} f(x,y,z) = L$$

si y sólo si se cumple que existe el siguiente límite real de variable real:

$$\lim_{\|q-p\|\to 0} (f(x,y,z) - L) = 0$$

Ya que conocemos del Cálculo Diferencial básico el cálculo de los límites de variable real, así como su existencia, se tiene la siguiente lista de resultados para los límites en variables vectoriales.

LEMA 4.31. *El límite de la función real de variable vectorial,*

$$\lim_{q\to p} f(x,y,z) = L$$

cuando existe es único.

TEOREMA 4.32 (aritmética de límites). *Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones reales de variable vectorial y $p \in \mathbb{R}^3$ un punto de acumulación de la región Ω tales que,*

$$\lim_{q\to p} f(x,y,z) = L_1, \quad \lim_{q\to p} g(x,y,z) = L_2$$

entonces

1. $\lim_{q\to p}(f \pm g)(x,y,z) = \lim_{q\to p} f(x,y,z) \pm \lim_{q\to p} g(x,y,z) = L_1 \pm L_2$
2. $\lim_{q\to p}(fg)(x,y,z) = \lim_{q\to p} f(x,y,z) \lim_{q\to p} g(x,y,z) = L_1 L_2$
3. *Cuando $L_2 \neq 0$ se tiene que:* $\lim_{q\to p}\left(\frac{f}{g}\right)(x,y,z) = \dfrac{\lim_{q\to p} f(x,y,z)}{\lim_{q\to p} g(x,y,z)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

Estos resultados nos garantizan el cálculo de límites de funciones en puntos de acumulación que están contenidos en el dominio. Damos a continuación un par de ejemplos donde se aplica apenas una simple sustitución.

EJEMPLO 4.33. Calculemos $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left[\ln(1-x-y-z) + x^2 + y^2 + z^2 + 1\right] = 1$

◁ Es claro que el punto $p = (0,0,0)$ está contenido en el dominio Ω de f y es un punto de acumulación de Ω. Por el teorema anterior se tiene, por una simple sustitución

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left[\ln(1-x-y-z) + x^2 + y^2 + z^2 + 1\right] = 1 \triangleright$$

EJEMPLO 4.34. Calculamos el límite $\lim_{(x,y)\to(1,1)} e^{x+y}$.

◁ Una sustitución directa nos lleva a que

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} e^{x+y} = e^{1+1} = e^2 \triangleright$$

El problema del cálculo de límites de variable vectorial se complica cuando el punto de acumulación p no está en el dominio natural de la función.

4.4.2 Puntos singulares

Un caso interesante de un punto de acumulación es cuando no está contenido en el dominio de una función por generar una indeterminación al momento de tratar de evaluarlo. Si en el intento de evaluación genera un cociente por cero, se dice que tal punto es una **singularidad** de la función (véase el capítulo 2 de Reyes [10]).

EJEMPLO 4.35. Consideremos nuevamente la función

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

◁ Su dominio es la región $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, siendo el punto $p=(0,0)$ de acumulación de Ω.

1. Tomemos una aproximación en Ω a p a través el eje x, es decir mediante los puntos de la forma $(x,0)$, y en este caso se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to p} f(x,y)=\lim_{(x,0)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=\lim_{x\to 0}0=0$$

2. Consideremos ahora una aproximación en Ω a p a través del eje y, es decir mediante los puntos de la forma $(0,y)$, y en este caso se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=\lim_{y\to 0}0=0$$

3. Si hacemos la aproximación en Ω al punto p por la recta identidad $y=x$ se obtiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,x)\to(0.0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

De esta manera, hemos encontrado que existen trayectorias que se aproximan al punto $p=(0,0)$ y sus límites correspondientes no son iguales. Ya que el límite tiene que ser único por cualquier forma de aproximación, se concluye que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe. ▷

Una forma más general de estudiar un límite como el del ejemplo precedente es usar un **cambio de coordenadas**. Esto es, utilizar otras variables que identifiquen una posible dependencia del límite en una dirección o de una curva.

EJEMPLO 4.36. Sea nuevamente el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

◁ Usemos el siguiente cambio de coordenadas a coordenadas polares (véase el capítulo 7),

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

entonces el cociente dado se expresa como

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}=\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

De donde, en virtud de que $(x,y)\to(0,0)\iff r\to 0$, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta=\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

que depende del ángulo θ con el cual se aproximen las variables (x,y) al origen.

Por ejemplo, sobre la recta $y=0$ (eje x) el ángulo es $\theta=0$ lo que implica que $\mathrm{sen}\,\theta=0$ y por lo tanto el límite buscado sobre esa recta es cero.

Análogamente, sobre la recta $x=0$ (eje y) el ángulo es $\theta=\pi/2$ lo que implica que $\cos\theta=0$ y por lo tanto el límite buscado sobre tal recta es igualmente cero.

En el caso de calcular sobre la recta $y=x$, el ángulo es $\theta=\pi/4$ y por lo tanto $\cos\pi/4\,\mathrm{sen}\,\pi/4=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ que es el límite calculado anteriormente.

Se concluye entonces que el límite no existe. ▷

EJEMPLO 4.37. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

◁ Al usar el cambio de coordenadas (**polares**) $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, se tiene que $x^2+y^2 = r^2$, de donde

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}$$

Ya que $(x,y)\to(0,0) \iff r\to 0$ se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{r^2+1}-1\right)\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)}{(r^2+1)-1} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(\sqrt{r^2+1}+1\right)}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(\sqrt{r^2+1}+1\right) = 2$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2 \quad \triangleright$$

EJEMPLO 4.38. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

◁ Nuevamente, usando el cambio de coordenadas anterior

$$x = r\cos\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta$$

se tiene que

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \frac{(r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta)^2}{r^2} = \frac{r^2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2}{r^2} = (\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2$$

que depende de la variable θ.

Si se toma por ejemplo $\theta = 0$ (eje x), se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2 = (\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$$

Por otro lado, si se toma $\theta = \pi/4$ (la recta $y = x$), se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}(\cos\pi/4+\operatorname{sen}\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

lo que nos dice que tal límite no existe. $\triangleright$

4.4.3 Continuidad

Ahora extendemos el concepto de continuidad que conocemos, a funciones reales de variable real, para funciones reales de variable vectorial.

DEFINICIÓN 4.39. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función y sea $p \in \Omega$ un punto arbitrario del dominio. Decimos que la función f es **continua en el punto** p

a. si p es un punto aislado de Ω, o bien

b. si p es punto de acumulación de Ω, entonces debe cumplirse la igualdad: $\lim_{(x,y,z)\to p} f(x,y,z) = f(p)$.

Si la función f es continua en cada uno de los puntos de su dominio, se dirá simplemente que f es **continua**.

Del teorema 4.32 sobre la aritmética de límites se tiene que la suma (y diferencia), el producto y el cociente de funciones continuas es una función continua.

Más aun, en todas las funciones vectoriales donde intervengan las funciones clásicas: polinomios, exponenciales, trigonométricas, etcétera, con varias variables independientes, se tendrán funciones continuas.

EJEMPLO 4.40. ◁ Todas las funciones que se mencionan a continuación son continuas (en sus dominios naturales).

1. $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y^2}$
2. $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(x^2+y^2)$
3. $f(x,y,z) = \dfrac{x+y-z}{x^2+y^2-z^2}$
4. $f(x,y,z) = e^{x+y^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$
5. $f(x,y,z) = \dfrac{8x^2y^2+z^2}{\sqrt{\ln z + \ln x}} + e^{\cos(xyz)}$ ▷

Como es de dominio general, un problema interesante es aquel cuando una función con una singularidad p precisa debe ser extendida continuamente en tal punto. Un resultado sobre la extensión continua es el siguiente.

TEOREMA 4.41. *Si f es una función continua en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y p es una singularidad de f, para que f tenga una extensión continua F en el dominio $D = \Omega \cup \{p\}$ es necesario y suficiente que el siguiente límite exista*

$$\lim_{(x,y,z)\to p} f(x,y,z) = L$$

◁ En este caso, la extensión continua de f a p está dada por la función

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{si } (x,y,z) \in \Omega \\ L & \text{si } (x,y,z) = p \end{cases}$$ ▷

Ilustramos a continuación el teorema 4.41 con un ejemplo.

EJEMPLO 4.42. Considérese la función

$$f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$$

¿Se puede extender continuamente la función en el punto singular $p = (0,0)$?

◁ Ciertamente el dominio de la función f es $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, siendo $p = (0,0)$ un punto singular de f.

De manera análoga al caso de una sola variable, calculamos el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$$

Usando el cambio de variables mencionado anteriormente, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ se tiene que

$$\frac{x^3y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^3\cos^3\theta\, r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = r^3\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

De esta manera,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r^3\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

Por lo tanto, la extensión continua de la función f en el punto está dada por la nueva función

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ ▷

Un resultado importante de la continuidad de una función que es de interés en las aplicaciones es el siguiente.

TEOREMA 4.43 (valor intermedio). *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en una región (conexa) y para los puntos $p, q \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ se tiene que $f(p) < f(q)$, entonces para todo valor $c \in [f(p), f(q)]$ existe un punto $r \in \Omega$, tal que $f(r) = c$.*

$\lhd$ Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ una curva continua tal que una a los puntos p y q, es decir tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Consideremos ahora la siguiente composición, que es una función real de varible real,

$$g = f \circ \gamma : [0,1] \to \Omega \to \mathbb{R}$$

dada por

$$g(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$$

Entonces g es una función real de variable real continua, definida, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ y tal que $g(0) = f(p), g(1) = f(q)$. Por el Teorema del valor intermedio, para $c \in [f(p), f(q)]$ existe un argumento $t_0 \in [0,1]$ tal que $g(t_0) = c$. Defínase $r = \gamma(t_0)$, entonces se tiene que $f(r) = f(\gamma(t_0)) = g(t_0) = c$, lo que termina la prueba. $\rhd$

Ejercicios 4.4

Calcule los límites de los ejercicios 1–5.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} (4x + 6y^2)$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x}{\sqrt{y - x}}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} = \dfrac{\operatorname{arcsen}(y/x)}{1 + xy}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{xy}{y^2 + x^2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{4 + xy}$

Analice las funciones de los ejercicios 6–13 en el punto singular situado en el origen. ¿En cuáles singularidades se puede extender continuamente la función?

6. $f_1(x,y) = \dfrac{y^4 - x^4}{x^2 + y^2}$

7. $f_2(x,y) = \dfrac{4x^2y}{x^2 + y^2}$

8. $f_3(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^4 + 2y^2}$

9. $f_4(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2}$

10. $f_5(x,y) = \dfrac{y^2 + xy - 2x^2}{y - x}$

11. $f_6(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{e^{-x} - e^{-y}}$

12. $f_7(x,y) = (x + y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$

13. $f_8(x,y) = (x + y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x + y}$

4.5 Derivadas parciales y el gradiente

A continuación iniciamos el estudio de la propiedad de diferenciabilidad de una función real de variable vectorial, definida en una región del espacio $\mathbb{R}^3$ (o del plano $\mathbb{R}^2$).

Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función real de variable vectorial definida en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, y $p = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ un punto arbitrario. Si dejamos fijas las coordenadas $y = y_0$, $z = z_0$ y variamos x en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ podemos formar el cociente (**parcial**)

$$\frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

y tomar el límite cuando $h \to 0$ (véase la figura 4.16).

DEFINICIÓN 4.44. Si el límite mencionado anteriormente existe, se llamará **derivada parcial** de f respecto a x en el punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ y se denotará por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

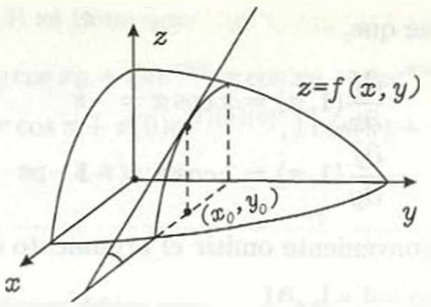


Figura 4.16. Derivada parcial de una función respecto a x.

Tal cantidad determina la **variación** de la función f en el punto $p = (x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del eje x.
Análogamente, se construyen la **derivada parcial** de f respecto a y en $p = (x_0, y_0, z_0)$ como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k}$$

y la **derivada parcial** de f respecto a z en el punto (x_0, y_0, z_0) mediante la igualdad

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\ell \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \ell) - f(x_0, y_0, z_0)}{\ell}$$

si tales límites existen.

Como (x_0, y_0, z_0) es arbitrario, el cálculo de tales parciales se obtiene derivando ordinariamente respecto a la variable indicada dejando fijas las otras variables.

EJEMPLO 4.45. Sea la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$$

◁ Calculamos sus derivadas parciales derivando ordinariamente respecto a la variable indicada, fijando las otras variables,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, x) = 4z^3 \quad \triangleright$$

EJEMPLO 4.46. Sea la función en tres variables

$$f(x, y, z) = e^{x+yz}$$

◁ Por un cálculo directo se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{x+yz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = ze^{x+yz}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = ye^{x+yz} \quad \triangleright$$

EJEMPLO 4.47. Sea la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$$

Calcule las derivadas parciales de f en el punto $p = (1, \pi)$.

◁ Calculamos directamente en cada punto (x, y).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy)$$

por lo tanto, al evaluar en $p = (1, \pi)$ se tiene que,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi) = \pi \cos \pi = -\pi$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) = 1 \cos \pi = -1 \quad \triangleright$$

En ocasiones, para fines de cálculo, es conveniente omitir el argumento donde se toman las derivadas parciales, esto es, se sobreentiende que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

denotan a la misma cantidad.

Para la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se define, en el punto $p \in \Omega$, el vector formado por las derivadas parciales en tal punto, llamado el **gradiente** de la función f en p y denotado por

$$\nabla f_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)$$

EJEMPLO 4.48. Si $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ y $p = (1,\pi)$, entonces el vector gradiente de f en p es

$$\nabla f_{(1,\pi)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi), \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) \right) = (-\pi, -1)$$

EJEMPLO 4.49. Sean $f(x,y) = x^2y^3$ y $p = (3,2)$, entonces

$$\triangleleft \quad \nabla f_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2xy^3, 3x^2y^2)_p$$

y por lo tanto, el gradiente de f en el punto p es el vector

$$\nabla f_{(3,2)} = (48, 108) \triangleright$$

Tenemos el siguiente resultado acerca de las propiedades aritméticas del gradiente.

TEOREMA 4.50. *Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}$ dos funciones tales que sus derivadas parciales existan en cada punto, entonces se cumplen las igualdades.*

1. $\nabla(f+g)_p = \nabla f_p + \nabla g_p$
2. $\nabla(\lambda f)_p = \lambda \nabla f_p$. *donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es un escalar.*
3. *La* **fórmula de Leibniz**: $\nabla(fg)_p = g\nabla f_p + f\nabla g_p$

$\triangleleft$ Damos apenas la demostración del inciso 1.

$$\begin{aligned}
\nabla(f+g)_p &= \left(\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(p), \frac{\partial(f+g)}{\partial y}(p), \frac{\partial(f+g)}{\partial z}(p) \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial g}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) + \frac{\partial g}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) + \frac{\partial g}{\partial z}(p) \right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(p), \frac{\partial g}{\partial y}(p), \frac{\partial g}{\partial z}(p) \right) \\
&= \nabla f_p + \nabla g_p \quad \triangleright
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.51. Sea la función continua en tres variables dada por

$$f(x,y,z) = \operatorname{sen} xy + e^{xyz}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\triangleleft \quad \nabla f_p &= \nabla(\operatorname{sen} xy)_p + \nabla(e^{xyz})_p \\
&= (y \cos xy, x \cos xy, 0)_p + (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})_p \\
&= (y \cos xy + yze^{xyz}, x \cos xy + xze^{xyz}, xye^{xyz})_p
\end{aligned}$$

Particularmente, en el punto $p = (1, \pi, 0)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla f_{(1,\pi,0)} &= (y\cos xy + yze^{xyz}, x\cos xy + xze^{xyz}, xye^{xyz})_{(1,\pi,0)} \\ &= (\pi\cos\pi + \pi(0)e^{(1)(\pi)(0)}, 1\cos(\pi) + (1)(0)e^0, \pi e^0) \\ &= (-\pi, -1, \pi) \quad \triangleright\end{aligned}$$

Ejercicios 4.5

Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ para cada una de las funciones de los ejercicios 1–7.

1. $z = x^2y - 4x + 5y - 19$
2. $z = 6x - 11y$
3. $z = \dfrac{\arctan(xy)}{1 + y^2}$
4. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^4}}$
5. $z = x\cos(x - 3y)$
6. $z = \dfrac{x + y}{xy + 4}$
7. $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

Calcule las derivadas parciales $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ de las funciones de los ejercicios 8–12.

8. $f_1(x, y, z) = x^3y^4 + xyz^2 - 3z^3y^3$
9. $f_2(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz) + x\operatorname{sen} y + y\operatorname{sen} z$
10. $f_3(x, y, z) = x\operatorname{sen}(y - z) + z\arctan(xy)$
11. $f_4(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{yz} + \sqrt{x^2 + z^2}\ln(xy)$
12. $f_5(x, y, z) = \dfrac{x - y + z}{x^2 + y^2z^2}$

Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(a, b)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(a, b)$ para la función dada y el punto indicado en los ejercicios 13–15

13. $z = x^2y + xy^2$ en $(2, -1)$
14. $\ln(x + y^3 + 1)$ en $(3, 1)$
15. $z = \cos x\operatorname{sen} y$ en $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$

16. *La ley de los gases ideales* afirma que para una cantidad de gas dada, la presión p, el volumen V y la temperatura absoluta T están relacionadas por la ecuación

$$pV = nRT$$

donde n es el número de moles en la muestra y R es una constante. Demuestre que

$$\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p} = -1$$

17. Muestre que la función

$$z = y^{y/x}\operatorname{sen}\left(\frac{y}{x}\right)$$

satisface la ecuación

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = yz$$

18. Pruebe que la función

$$z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

satisface la ecuación

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$$

Calcule el gradiente para cada función de los ejercicios 8–12 en el punto indicado.

19. $\nabla f_1(x, y, z)$ en $p = (1, 1, 1)$.
20. $\nabla f_2(x, y, z)$ en $p = \left(1, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
21. $\nabla f_3(x, y, z)$ en $p = \left(0, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
22. $\nabla f_4(x, y, z)$ en $p = (-1, 0, 1)$.
23. $\nabla f_5(x, y, z)$ en $p = (1, 2, 3)$.

4.6 Diferenciabilidad

Antes de pasar a dar la definición de diferenciabilidad de una función real de variable vectorial, rescatamos la idea de diferenciabilidad de una función real de variable real, poniendo a modo tal definición de manera que sea generalizable a nuestros propósitos.

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Dado el punto $p \in (a, b)$ se dice que f es diferenciable en p, si y solo si el siguiente límite existe

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

Consideremos la función

$$g(h) = \frac{f(p+h) - f(p)}{h} - f'(p)$$

en la variable incremento h.

Si $h \to 0$, tenemos que $\lim_{h \to 0} g(h) = 0$, si y sólo si f es diferenciable en p.

De esta forma, si se considera la igualdad que define a g, se tiene que

$$h\,g(h) = f(p+h) - f(p) - hf'(p)$$

de donde

$$hg(h) + hf'(p) = f(p+h) - f(p)$$

o bien

$$f(p+h) - f(p) = hg(h) + hf'(p)$$

Por lo tanto, f es diferenciable en $p \in (a, b)$, si y sólo si existe un número $f'(p)$ y una función $g(h)$ tal que

$$\begin{cases} f(p+h) - f(p) = hg(h) + hf'(p) \\ \text{y} \\ \lim_{h \to 0} g(h) = 0 \end{cases}$$

Esta nueva definición se puede generalizar para funciones cuyos argumentos son vectores.

En el caso de una función real de variable real, la derivada $f'(p)$ es una derivada direccional en la dirección única definida por la variable argumento. Para nuestro caso general, además de que el incremento vectorial h tiene tres coordenadas, las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

intervienen en la generalización, donde la interpretación general se daría por la equivalencia

$$f(p+h) - f(p) = hg(h) + hf', \quad p, h \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(p+h) - f(p) = \|h\| g(h) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(p) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(p) + h_3 \frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

y donde en la última igualdad $h = (h_1, h_2, h_3), p \in \mathbb{R}^3$.

DEFINICIÓN 4.52. Sean una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $p \in \Omega$ un punto con coordenadas (x, y, z). Se dice que f es **diferenciable** en p, si existe una función real de variable vectorial $g(h)$ tal que

$$\begin{cases} f(p+h) - f(p) = \|h\|\, g(h) + \langle h, \nabla f_p \rangle \\ \lim_{h \to (0,0,0)} g(h) = 0 \end{cases}$$

suponiendo que el vector gradiente

$$\nabla f_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)$$

existe.

Si la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es diferenciable en cada punto de Ω, simplemente diremos que f es **diferenciable** en Ω.

Damos a continuación una condición necesaria para que se verifique la propiedad de diferenciabilidad de una función real de variable vectorial. Su prueba se omite, pero el lector puede referirse a Lima [7].

TEOREMA 4.53 (de diferenciabilidad). *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y supóngase que en el punto $p \in \Omega$ las funciones determinadas por las derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} : \Omega \to \mathbb{R}$$

existen y son continuas en el punto p, entonces f es diferenciable en p.

Una consecuencia inmediata a este teorema es el siguiente corolario.

COROLARIO 4.54. *Toda función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que involucre a las funciones clásicas en las variables independientes x, y, z, es una función diferenciable*

EJEMPLO 4.55. Las siguientes funciones son diferenciables en su dominio natural.

1. Cualquier polinomio $P(x, y, z)$ en las variables x, y, z, por ejemplo,

$$P(x, y, z) = 6xyz^3 + 2x^2yz - \frac{1}{2}xy^2z^2 + 3$$

2. $f(x, y, z) = \dfrac{x - y + z}{x^2 + y^2 + 3z}$

3. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}\sqrt{1 - e^{xy} - z}$

4. $f(x, y) = \ln\left(1 - x^{1/3} + \dfrac{1}{y^2}\right)$

5. $f(x, y, z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x} + z\right)$

6. $f(x, y, z) = x^{y^2 + \ln(z+x)}$

Un resultado inmediato que no necesita prueba es el que mostramos a continuación, sobre la artmética de las funciones diferenciables.

LEMA 4.56. *La suma (y diferencia), el producto y el cociente de funciones reales de variable vectorial que son diferenciables, son funciones diferenciables.*

EJEMPLO 4.57. Las siguientes funciones son diferenciables en todo su dominio natural.

1. $f(x, y, z) = 6xyz^2 + \dfrac{x - y + z}{x^2 + y^2 + 3z}$

2. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}\sqrt{1 + e^{xy} - z} + \ln\left(1 - \sqrt[3]{xy} + \dfrac{z}{y^2}\right)$

3. $f(x, y, z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^{yz} + \ln(z + x)$

Un resultado que sigue inmediatamente de la propiedad de diferenciabilidad se enuncia a continuación.

COROLARIO 4.58. *Si f es una función diferenciable en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, entonces f es continua en tal región.*

Ejercicios 4.6

Utilice la definición de diferenciabilidad para verificar que cada una de las funciones dadas lo es en el punto indicado

1. $f(x, y) = 3x + 5y$ en $(2, 1)$.
2. $g(x, y) = 3x^2 - 5y$ en $(-1, 3)$.
3. $p(x, x) = x^2 - 4y^2$ en (x_0, y_0).
4. $h(x, y, z) = x^2 - 3y - 5z^2$ en $(2, 3, 1)$.
5. $h(x, y, z) = x^2 - 3y - 5z^2$ en (x_0, y_0, z_0).

4.7 Regla de la cadena

En muchas ocasiones, algunos problemas que involucran funciones de variable vectorial, pueden reducirse a problemas de funciones reales de variable real que son más simples de estudiar, mediante la composición con curvas contenidas en las regiones donde están definidas tales funciones. Damos el procedimiento a continuación.

Sean $f : \Omega \to R$ una función diferenciable en todo punto de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $\gamma : (a, b) \to \Omega$ una curva diferenciable. Entonces la composición $f \circ \gamma : (a, b) \to \mathbb{R}$ está definida mediante la regla

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$$

EJEMPLO 4.59. Consideremos la función $f(x, y, z) = xe^{yz} + ye^{zx}$ y la curva diferenciable $\gamma(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t,\ 2t)$.

◁ Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) &= f(4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 2t)\\ &= 4\cos t e^{(4\operatorname{sen} t)(2t)} + 4\operatorname{sen} t e^{(2t)(4\cos t)}\\ &= 4e^{8t\operatorname{sen} t}\cos t + 4e^{8t\cos t}\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

es decir,

$$(f \circ \gamma)(t) = 4e^{8t\operatorname{sen} t}\cos t + 4e^{8t\cos t}\operatorname{sen} t$$

resulta ser una función real de variable real diferenciable. ▷

EJEMPLO 4.60. Sean la función $f(x, y) = \ln(xy)$ y la curva diferenciable $\gamma(t) = \left(t, \dfrac{1}{t^2}\right)$ con $t > 0$.

◁ El dominio de f es

$$\Omega = \{(x, y) \,|\, (x > 0,\ y > 0),\ (x < 0,\ y < 0)\}$$

y la curva $\gamma(t) = (t,\ 1/t^2), \quad t > 0$ está contenida en Ω.

Entonces, la composición $(f \circ \gamma)(t)$, que resulta ser una función diferenciable, se calcula por,

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = f\left(t, \frac{1}{t^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln t \quad \triangleright$$

A continuación damos una forma de calcular la derivada de una composición de funciones, que es una herramienta muy útil en el cálculo de derivadas de funciones y de los cambios de coordenadas. (véase la figura 6.8).

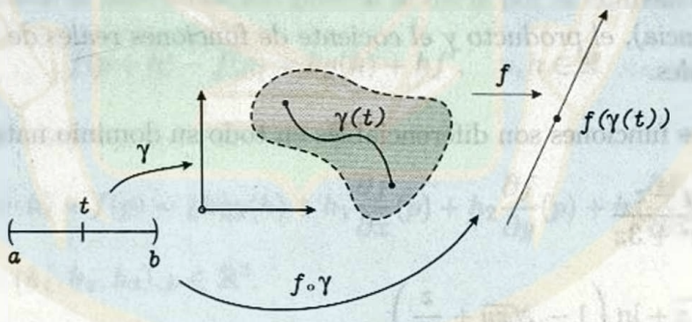


Figura 4.17. Regla de la cadena.

TEOREMA 4.61 (regla de la cadena). *Para una curva suave $\gamma(t)$ y una función diferenciable $f(x, y, z)$ se cumple la fórmula*

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \nabla f_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) = \langle \nabla f_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \rangle$$

la cual es la derivada de la composición $f \circ \gamma$ en el tiempo t.

Esto es, en coordenadas x, y, z del espacio, el teorema se ve en la forma

$$\begin{aligned}\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}\end{aligned}$$

◁ Sea $t \in (a,b)$ un punto arbitrario y considérese el incremento vectorial

$$h = \gamma(t+s) - \gamma(t)$$

Es claro que $h \to (0,0,0)$ si $s \to 0$.

En virtud de que f es diferenciable, en particular en el punto vectorial $\gamma(t)$, se cumple que

$$f(\gamma(t)+h) - f(\gamma(t)) = \nabla f_{\gamma(t)} \cdot h + \|h\| g(h)$$

donde $\lim_{h\to(0,0,0)} g(h) = 0$, siendo h cualquier incremento vectorial.

Si se toma $h = \gamma(t+s) - \gamma(t)$, entonces se tiene que

$$f(\gamma(t+s)) - f(\gamma(t)) = \nabla f_{\gamma(t)} \cdot (\gamma(t+s) - \gamma(t)) + \|\gamma(t+s) - \gamma(t)\| g(h)$$

que al dividir entre el incremento s nos da

$$\frac{f(\gamma(t+s)) - f(\gamma(t))}{s} = \nabla f_{\gamma(t)} \cdot \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} + \left\| \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} \right\| g(h)$$

Si tomamos el límite cuando $s \to 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(\gamma(t+s)) - f(\gamma(t))}{s} \\
&= \nabla f_{\gamma(t)} \cdot \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} + \left\| \lim_{s\to 0} \frac{\gamma(t+s) - \gamma(t)}{s} \right\| \lim_{h\to(0,0,0)} g(h) \\
&= \nabla f_{\gamma(t)} \cdot \dot\gamma(t) + \|\dot\gamma(t)\| \lim_{h\to(0,0,0)} g(h) \\
&= \nabla f_{\gamma(t)} \cdot \dot\gamma(t)
\end{aligned}$$

en virtud que $\lim_{h\to(0,0,0)} g(h) = 0$. ▷

EJEMPLO 4.62. Consideremos las funciones diferenciables

$$f(x,y) = x^2 + 2xy, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi \ \text{ con } \varphi \in [0, 2\pi]$$

◁ Al formar la función $g(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi)$ se puede derivar la función g respecto a una de sus variables verdaderas r, esto es,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dr} \\
&= (2x+2y)(\cos\varphi) + (2x)(\operatorname{sen}\varphi) \\
&= 2r\cos^2\varphi + 2r\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 2r\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi \\
&= 2r\cos^2\varphi + 4r\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi
\end{aligned}$$

Puesto que φ es variable, podemos derivar la función g respecto a φ para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\varphi} \\
&= (2x+2y)(-r\operatorname{sen}\varphi) + (2x)(r\cos\varphi) \\
&= (2r\cos\varphi + 2r\operatorname{sen}\varphi)(-r\operatorname{sen}\varphi) + (2r\cos\varphi)(r\cos\varphi) \\
&= -2r^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - 2r^2\operatorname{sen}^2\varphi + 2r^2\cos^2\varphi \quad \triangleright
\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.63. Consideremos la funciones

$$w = f(x,y,z) = e^{xy}\cos z, \quad x = tu, \quad y = \operatorname{sen}(tu), \quad z = u^2$$

◁ Al calcular la variación de w respecto a t se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \\ &= (ye^{xy}\cos z)u + (xe^{xy}\cos z)u\cos(tu) - (e^{xy}\operatorname{sen} z)(0) \\ &= ue^{xy}\cos z[y + x\cos(tu)] \\ &= ue^{tu\operatorname{sen}(tu)}\cos u^2\,(\operatorname{sen} tu + tu\cos(tu)) \quad \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.64. Calculemos las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ para la función $u = f(x^2 - y, xy)$.

◁ Construimos variables explícitas de la función f mediante las igualdades

$$\begin{cases} r = x^2 - y \\ q = xy \end{cases}$$

Y entonces podemos derivar la función u respecto a su variable explícita x

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} \\ &= 2x\frac{\partial f}{\partial r} + y\frac{\partial f}{\partial q}\end{aligned}$$

Por otro lado, cuando se deriva u respecto a su variable explícita y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} \\ &= (-1)\frac{\partial f}{\partial r} + x\frac{\partial f}{\partial q} \\ &= x\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial r} \quad \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 4.65. Para la función $g(t, x, y) = f(t^2x, ty)$, calculemos las derivadas parciales $\dfrac{\partial g}{\partial t}, \dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

◁ Denotemos por $u = t^2x$, $v = ty$ a las coordenadas explícitas de f, entonces,

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = 2tx\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}$$

Por otro lado

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = t^2\frac{\partial f}{\partial u} + (0)\frac{\partial f}{\partial v} = t^2\frac{\partial f}{\partial u}$$

Un cálculo análogo prueba que

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = t\frac{\partial f}{\partial v} \quad \triangleright$$

EJEMPLO 4.66. Supóngase que en una habitación $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ está definida una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que nos indica la temperatura en cada punto p de Ω.

◁ Un insecto recorre una trayectoria en Ω tal que, en cada punto, de la trayectoria la temperatura f es constante c. Entonces, al denotar tal trayectoria por $\gamma(t)$ con $t \in [a, b]$, se tiene que

$$f(\gamma(t)) = c$$

Derivamos ambos lados esta igualdad para obtener

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = 0$$

pero por la regla de la cadena esto implica que

$$\nabla f_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

Lo anterior nos dice que los vectores gradiente $\nabla f_{\gamma(t)}$ y velocidad $\dot{\gamma}(t)$ son ortogonales para todo punto $\gamma(t)$ de la trayectoria (véase la figura 4.18). En este caso decimos que el insecto ha realizado una trayectoria con la misma temperatura (isotermal). $\triangleright$

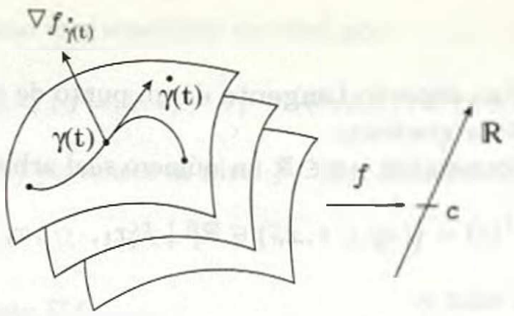


Figura 4.18. Trayectoria isotermal.

Ejercicios 4.7

1. Sean

$$\begin{cases} x = t + 2s \\ y = s^2 - t \\ z = t^2 + s^2 \end{cases}$$

y la función $u = x^2 + 2xy + y^2 + z^2$. Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ directamente y usando la regla de la cadena.

2. Dados

$$x = \operatorname{sen}(t+s)$$
$$y = \cos(t+s)$$

y la función $u = \dfrac{x+xy}{x^2+y^2}$, calcule $\dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial s}$ directamente y usando la regla de la cadena.

3. Dada la función $u = f(r-s, s-t, t-r)$, demuestre que

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

4. Sea $u = f\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$. Demuestre que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

5. Dada la función $g(x,y) = f(x+y, x-y)$, demuestre la igualdad

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

donde $u = x+y$, $v = x-y$.

6. Dado el ángulo constante φ y las relaciones

$$\begin{cases} x = u\cos\varphi - v\operatorname{sen}\varphi \\ y = u\operatorname{sen}\varphi + v\cos\varphi \end{cases}$$

demuestre que la función compuesta $f(x,y) = g(u,v)$ satisface la relación

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

7. Si $w = f\left(x^2 - y^2\right)$, demuestre que

$$y\frac{\partial w}{\partial x} + x\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

8. Dada la función $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-y}{yz}\right)$ demuestre que

$$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

9. Si $z = h(xy)$, demuestre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

10. Supóngase que $P(x,y) = yG(x+3y)$. Demuestre la relación

$$y\frac{\partial P}{\partial y} - 3y\frac{\partial P}{\partial x} = P$$

11. Para la función definida por $z = \dfrac{f(uv)}{u}$ demuestre que

$$v\frac{\partial z}{\partial v} - u\frac{\partial z}{\partial u} = z$$

12. Para la función $z = y + f(xy)$ demuestre la relación

$$y\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x} = y$$

13. Calcule el gradiente ∇f_p para las siguientes funciones, si $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $f(x,y,z) = h(r)$, donde,

a. $h(r) = r^2$
b. $h(r) = \ln r$
c. $h(r) = e^{-r^2}$

14. Determine las trayectorias isotermales si la temperatura en el punto (x,y) está dada por la función

$$f(x,y) = 100\,e^{-x^2-y^2}$$

15. Repita el ejercicio anterior si la función es

$$f(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

donde k es una constante positiva.

16. Repita el ejercicio anterior si la función es

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

4.8 Plano tangente

En esta sección introducimos el concepto de **espacio tangente** de un punto de conjunto de nivel de una función real de variable vectorial, mediante el uso del vector gradiente.

Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, y $c \in \mathbb{R}$ un número real arbitrario. Al conjunto contenido en $\mathbb{R}^n$

$$S = f^{-1}(c) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \cdots, x_n) = c\}$$

se le llama **conjunto de nivel** de f con valor c.

Consideremos el caso $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$ y sean, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ y la **superficie de nivel** de f al nivel c

$$S = f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = c\}$$

Si $\gamma : (a, b) \to \Omega$ es una curva tal que $\gamma(t) \in S$, entonces para todo $t \in (a, b)$ se cumple $f(\gamma(t)) = c$.

$\lhd$ Al derivar ambos lados de la igualdad respecto a t se tiene

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = 0$$

y por la regla de la cadena, en todo el intervalo (a, b) se cumple la igualdad

$$\nabla f_{(\gamma(t))} \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

Tomemos un punto $q \in S$ y una curva γ tal que $\gamma(0) = q$. Entonces $\dot{\gamma}(0)$ es un vector tangente a γ en q.

De esto, se tiene que

$$0 = \nabla f_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t)\big|_{t=0} = \nabla f_q \cdot \dot{\gamma}(0)$$

Concluimos entonces que el vector gradiente ∇f_q es ortogonal al vector tangente $\dot{\gamma}(0)$. $\rhd$

Resumiendo, dado un punto $q \in S$ y una curva $\gamma(t) \in S$ tal que $\gamma(0) = q$ se tiene que el gradiente de f en q es ortogonal al vector tangente $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. Como la curva $\gamma(t)$ pasando por el punto q es arbitraria, entonces se puede realizar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.67. Se define el **plano tangente** T_qS a la superficie de nivel S en el punto q, como el plano pasando por q ortogonal al vector ∇f_q (véase la figura 4.19).

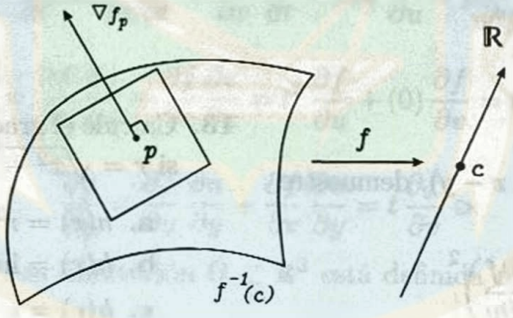


Figura 4.19. Plano tangente a una superficie de nivel.

En esta definición hemos supuesto necesariamente que $\nabla f_q \neq (0, 0, 0)$.

EJEMPLO 4.68. Calcular el plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en el punto $q = (1, 1, 1)$.

$\lhd$ Escribimos la relación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

en la forma

$$x^2 + y^2 + z^3 - 3 = 0$$

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

Entonces la esfera dada se escribe como una superficie de nivel por

$$f^{-1}(0) = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0\}$$

Verificamos ahora que el punto $(1,1,1)$ pertenece al nivel $f^{-1}(0)$. En efecto,

$$1^2 + 1^2 + 1^2 - 3 = 0$$

Después, calculamos el vector gradiente $\nabla f_{(1,1,1)}$,

$$\nabla f_{(1,1,1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\Big|_{(1,1,1)} = (2x, 2y, 2z)|_{(1,1,1)} = (2,2,2)$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a $S = f^{-1}(0)$ en $(1,1,1)$ obtenida es

$$2x + 2y + 2z = 6 \ \triangleright$$

Mencionamos que la metodología utilizada para calcular planos tangentes a superficies se aplica también para calcular, en general, los espacios tangentes de conjuntos de nivel de funciones suaves. Particularmente para calcular rectas tangentes de curvas planas, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.69. Calcule la recta tangente a la curva $C : x^2y + y^3 = 10$ en el punto $(1,2)$.

$\triangleleft$ Consideremos la función $f(x,y) = x^2y + y^3$, entonces la curva dada C está definida como la curva de nivel

$$f^{-1}(10) = \{(x,y) \mid f(x,y) = 10\} = \{(x,y) \mid x^2y + y^3 = 10\} = C$$

Primero verificamos que $(1,2) \in f^{-1}(10)$. En efecto, se satisface la igualdad

$$1^2(2) + (2)^3 = 2 + 8 = 10$$

y a continuación calculamos el gradiente,

$$\nabla f_{(1,2)} = (2xy, x^2 + 3y^2)\big|(1,2) = (4,13)$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente (que es una recta) $T_{(2,2)}C$ es

$$(4,13) \cdot (x,y) = (4,13) \cdot (1,2)$$

o equivalentemente

$$4x + 13y = 30 \ \triangleright$$

Ejercicios 4.8

Determine la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal de la superficie dada, en el punto indicado, en los ejercicios 1–7.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en $p = (1,1,\sqrt{2})$.
2. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{9} = 0$ en $p = (0,1,3)$.
3. $z = 2\operatorname{sen}(x+y)$ en $p = \left(0, \dfrac{\pi}{6}, 1\right)$.
4. $xy + yz + zx = 1$ en $p = (1,1,0)$.
5. $\operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} xz = 1$ en $p = \left(1, \dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.
6. $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $p = \left(3, -4, \dfrac{3}{5}\right)$.
7. $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $p = (\pi, 1, 0)$.

Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de las superficies dadas en el punto indicado en los ejercicios 8–9.

8. $\begin{cases} xy + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$ en $p = (2,1,-2)$
9. $\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$ en $p = (3,2,2)$

4.9 Derivadas direccionales

Introducimos ahora un concepto fundamental a la hora de hacer el análisis de un **campo escalar** (función real de variable vectorial) definido en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, un punto $p \in \Omega$ y un vector unitario $\mathbf{u}$.

La recta que pasa por p con dirección $\mathbf{u}$ tiene por ecuación paramétrica

$$\gamma(t) = p + t\mathbf{u} \quad \text{con} \quad \gamma(0) = p,\ \dot{\gamma}(0) = \mathbf{u}$$

Para los puntos sobre tal recta, se tiene un valor real bajo la función f dado por

$$f(\gamma(t)) = f(p + t\mathbf{u})$$

Si calculamos la **variación** de f a lo largo de tal recta, obtenemos, por la regla de la cadena

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \nabla f_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t)$$

En particular, para $t = 0$ se tiene

$$\left.\frac{df(p + t\mathbf{u})}{dt}\right|_{t=0} = \nabla f_{\gamma(0)} \cdot \dot{\gamma}(0) = \nabla f_p \cdot \mathbf{u}$$

DEFINICIÓN 4.70. La variación de f, obtenida anteriormente, se llama **derivada direccional** de f en el punto $p \in \Omega$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

En coordenadas x, y, z se tiene la igualdad

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt}(p + t\mathbf{u})|_{t=0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right) \cdot (u_1, u_2, u_3) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(p)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)u_3\end{aligned}$$

Observamos que, cuando se toma un vector arbitrario $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (contenido en el espacio tangente ambiental del punto $p \in \Omega$), también se puede hablar de la derivada direccional de la función f en dirección $\mathbf{v}$ con el simple hecho de calcular la derivada de f en la dirección del normalizado $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, en virtud de que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección y sentido (véase la figura 4.20).

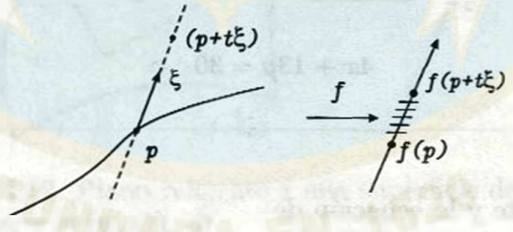


Figura 4.20. Derivada direccional de f en p en la dirección $\mathbf{u}$.

Una notación apropiada para denotar la derivada direccional de la función f en el punto p, en la dirección del vector $\mathbf{u}$ es,

$$D_{\mathbf{u}} f_p = \left.\frac{df(p + t\mathbf{u})}{dt}\right|_{t=0}$$

EJEMPLO 4.71. Calcule la derivada direccional de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

en el punto $p = (-1, 3)$ en la dirección $\mathbf{v} = (1, 2)$.

◁ Como el vector $\mathbf{v}$ no es unitario, pues $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{5}$, determinamos el vector unitario en la misma dirección

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

De esta manera,

$$D_{\mathbf{u}} f_p = \nabla f_p \cdot \mathbf{u} = (2x, 2y)|_{(-1,3)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= (-2,6) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \quad \triangleright$$

OBSERVACIÓN 4.72. Si, en particular, se toma el vector canónico $\mathbf{u} = e_1 = (1,0,0)$, se tiene que

$$D_{e_1} f_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\right) \cdot (1,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

que es la derivada parcial ordinaria respecto a la primera coordenada.

Análogamente,

$$D_{e_2} f_p = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

$$D_{e_3} f_p = \frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

OBSERVACIÓN 4.73. De la cadena de igualdades

$$D_{\mathbf{u}} f_p = \nabla f_p \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f_p\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\theta = \|\nabla f_p\| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo formado por ∇f_p y el vector unitario $\mathbf{u}$, se tiene una función en la variable θ definida por

$$h(\theta) = \|\nabla f\| \cos\theta$$

Sabiendo que la relación de $\mathbf{u}$ con θ está determinada de manera biunívoca, tenemos lo siguiente:

1. La función h tiene un máximo en $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ está en el mismo sentido y dirección que ∇f_p.
2. La función h tiene un mínimo en $\theta = \pi$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ está en dirección de ∇f_p pero con sentido contrario.

De esta manera, el mayor crecimiento de la función f, alrededor del punto p, se da en dirección del vector gradiente ∇f_p, y el mayor decrecimiento se da en dirección del vector $-\nabla f_p$.

EJEMPLO 4.74. Analicemos el crecimiento de la función

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

en el punto $p = (-1,1)$.

◁ De la discusión anterior, la función tiene el mayor crecimiento (crece más), alrededor del punto $p = (-1,1)$, en la dirección del vector

$$\mathbf{v} = \nabla f_p = (2x + y, 2y + x)|_{(-1,1)} = (-1,1)$$

Al normalizar $\mathbf{v}$ obtenemos el vector unitario

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

que nos permite calcular la derivada direccional en dirección de $\mathbf{v}$

$$D_{\mathbf{u}} f_p = \nabla f_p \cdot \mathbf{u} = (-1,1) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Por otro lado, la función f tiene el mayor decrecimiento (decrece más), alrededor del punto p en la dirección del vector $-\mathbf{v} = -\nabla f_p = (1,-1)$. La derivada direccional de la función f en el punto p en tal dirección es, en este caso,

$$D_{-\mathbf{u}} f_p = \nabla f_p \cdot -\mathbf{u} = (-1,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad \triangleright$$

Ejercicios 4.9

Calcule la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f_p$ para las funciones, puntos y vectores dados en los ejercicios 1–5.

1. $f(x,y) = xy^2$, $p = (1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,3)$.
2. $f(x,y) = \arctan(xy)$, $p = (-1,1)$, $\mathbf{v} = (1,-2)$.
3. $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $p = (0,0)$, $\mathbf{v} = (1,1)$.
4. $f(x,y,z) = y\arctan(xz)$, $p = (1,1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,0,2)$.
5. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $p = (-1,1,-1)$, $\mathbf{v} = (1,-1,2)$.
6. Supóngase que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = 4$ y que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = -1$
   a. Dibuje el vector $\nabla f(-1,2)$ con inicio en el punto $(-1,2)$
   b. ¿Cuál es la máxima derivada direccional de f en el punto $(-1,2)$.
   c. ¿Para qué vector $\mathbf{u}$ es máxima la derivada $D_{\mathbf{u}}f$ en $(-1,2)$?
7. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 3$ ¿en qué dirección debe calcularse la derivada direccional para que sea
   a. 0?
   b. la mayor posible?
8. Si la máxima derivada direccional de f en el punto (2.1) es 5, ¿cuál es la mínima derivada direccional de f en ese punto?
9. Dada la función
$$f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$$
dé la dirección $\mathbf{v}$ en la que crece más rápidamente f en el punto $p = (-1,1,1)$. Calcule $D_{\mathbf{v}}f_p$ para estos elementos.
10. Determine la dirección de mayor crecimiento, en el punto $p = (1,0)$, de la función
$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
11. La temperatura en el punto (x,y) se determina por la función
$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$
Considere el punto $p = (-1,2)$
   a. Determine la dirección en la que hay que moverse desde el punto p para calentarse lo más rápido posible.
   b. ¿A qué razón crece la temperatura en el punto p y en la dirección obtenida en el inciso anterior?
   c. Determine la dirección en la que hay que moverse desde el punto p para enfriarse lo más rápido posible.
   d. ¿A qué razón decrece la temperatura en el punto p y en la dirección obtenida en el inciso anterior?

CAPÍTULO

5 Valores extremos de funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

En este capítulo generalizamos el teorema de Taylor para funciones reales con variable vectorial que están definidas en regiones del espacio euclidiano. Lo hacemos para funciones suaves de dos variables, suponiendo una extensión natural para el caso de más variables.

La idea básica del teorema consiste en aproximar una función, de cierta clase de diferencibilidad, por un polinomio en el número de variables independientes, de la misma forma que para el caso de una sola variable (véase Reyes [10]).

Con el teorema de Taylor ya a disposición, podemos comenzar a hacer, de manera similar al caso de una sola variable, el análisis cualitativo de una función en un punto del dominio y el de su valor.

5.1 Derivadas de orden superior

Comenzamos la sección con el concepto de **derivada parcial de orden superior.**

EJEMPLO 5.1. Consideremos la función diferenciable $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ definida en $\Omega = \mathbb{R}^2$.

◁ Al calcular sus derivadas parciales se obtienen las nuevas funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} = g_1(x,y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\,e^{x^2+y^2} = g_2(x,y)$$

Claramente g_1 y g_2 también son funciones diferenciables, en las variables x, y, por lo tanto pueden calcularse sus derivadas parciales

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + 2x\,2xe^{x^2+y^2} = (2+4x^2)e^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 2y2xe^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = 2x2ye^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = 2e^{x^2+y^2} + 2y\,2ye^{x^2+y^2} = (2+4y^2)e^{x^2+y^2}$$

que resultan ser funciones diferenciables en las variables x, y.

Al omitir (por notación) las funciones g_1, g_2 de las ecuaciones anteriores, las derivadas parciales obtenidas se pueden escribir

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (2+4x^2)e^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4xye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4xye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2+4y^2)e^{x^2+y^2}$$

De ahora en adelante adoptaremos la siguiente notación para las llamadas **segundas derivadas parciales** de la función f

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Con esta notación, las segundas derivadas parciales de la función dada f se escriben

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2 + 4x^2)e^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2 + 4y^2)e^{x^2+y^2}$$

Observamos que para este caso se cumple la igualdad de las relaciones obtenidas para las segundas **derivadas parciales mixtas**:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xye^{x^2+y^2} \quad \triangleright$$

DEFINICIÓN 5.2. Si la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que sus derivadas parciales existen

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \Omega \to \mathbb{R}$$

y como funciones definidas en Ω son continuas, se dice que la función es de **clase** C^1. Si además las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ son diferenciables y sus derivadas parciales (segundas derivadas parciales de la función f)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \Omega \to \mathbb{R}$$

son continuas, entonces f se dirá una **función de clase** C^2.

Las segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

se llaman las segundas **derivadas parciales mixtas**.

En el ejemplo 5.1 se indicó una propiedad de igualdad de tales parciales mixtas. Una condición suficiente para la igualdad en general se tiene en el siguiente teorema, cuya prueba es muy técnica y la omitimos (véase Lima [7]).

TEOREMA 5.3 (Conmutatividad de las segundas parciales mixtas). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2, esto es, las funciones obtenidas por las segundas derivadas parciales son continuas, entonces se cumple la igualdad*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$$

EJEMPLO 5.4. Mostremos la validez del teorema 5.3 para la función

$$f(x,y) = x^2y^3 + 3xy$$

◁ Al calcular la derivada parcial de la función respecto a x se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 3y$$

Por lo tanto, al derivar esta última función respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 + 3$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + 3x$$

lo que implica que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 + 3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \triangleright$$

Inductivamente, podemos definir a una función de clase C^r (con $r \geq 1$), si para cualquier partición del entero r en los enteros s y m, la r-ésima derivada parcial de f dada por

$$\frac{\partial^r f}{\partial y^m \partial x^s} : \Omega \to R$$

existe y es una función continua. Aquí $0 \leq s \leq r$, $0 \leq m \leq r$ y $r = m + s$.

En la igualdad

$$\frac{\partial^r f}{\partial y^m \partial x^s} = \frac{\partial^r f}{\partial x^s \partial y^m}$$

se entiende que se calculan m derivadas parciales de f respecto a la variable y y s derivadas parciales respecto a x, realizando en total un cálculo de $m + s = r$ derivadas parciales.

La extensión de la definición de clase de diferenciabilidad para una función de más variables es una analogía a la dada para apenas dos variables.

El teorema 5.3 se puede extender para una función que depende de más variables. Esto es, si $f(x,y,z)$ es una función que satisface las condiciones dadas de diferenciabilidad, el teorema de conmutatividad se cumple también.

De hecho, por ejemplo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

Si la misma función $f(x,y,z)$ es de clase C^3, entonces la conmutatividad se extiende de manera natural.

EJEMPLO 5.5. Consideremos a $f(x,y,z)$ una función de clase C^3 definida en alguna región del espacio.

◁ Se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\end{aligned}$$

También se cumplen las igualdades

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}$$

así como la igualdad

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y} \triangleright$$

Si $f(x, y, z)$ es una función de clase C^4, también se cumple el teorema de conmutatividad de las derivadas parciales. Por ejemplo, se cumplen las igualdades

$$\frac{\partial^4 f}{\partial z \partial y \partial x^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^2 \partial z}$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z^3} = \frac{\partial^4 f}{\partial z^3 \partial x} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z^2}$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial y \partial x}$$

Generalizando lo anterior, si $f(x, y, z)$ es una función de clase C^r con $(r \geq 1)$, el teorema de conmutatividad también se extiende. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^r f}{\partial z^\ell \partial y^m \partial x^n} = \frac{\partial^r f}{\partial y^m \partial x^n \partial z^\ell} = \frac{\partial^r f}{\partial x^n \partial z^\ell \partial y^m}$$

donde $\ell + m + n = r$. Aquí se entiende que la función f se va a derivar parcialmente r veces en total: ℓ veces respecto a la variable z, m veces respecto a la variable y y n veces respecto a la variable x.

EJEMPLO 5.6. Para la función $f(x, y, z) = e^{xyz}$ calcule las derivadas parciales que se indican

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

◁ En la notación dada, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = xe^{xyz} + x^2yze^{xyz} = (x + x^2yz)e^{xyz}$$

de donde

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 2xyz)e^{xyz} + (x + x^2yz)yze^{xyz}$$
$$= (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ze^{xyz} + yz^2xe^{xyz} = (z + yxz^2)e^{xyz}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = (1 + 2xyz)e^{xyz} + (z + yxz^2)xye^{xyz}$$
$$= (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz} \triangleright$$

con lo que verifica la igualdad de las derivadas **parciales mixtas.** ▷

Ejercicios 5.1

Calcule las derivadas parciales indicadas para cada una de las funciones de los ejercicios 1–4.

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para $f(x, y) = \ln \tan(y + x)$

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ para $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{x + y}{1 + xy}\right)$

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ para $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy + x \cos xy$

4. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ para $u = \operatorname{sen}(2x + y^2)$

5. Demuestre que $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, para $u = x^2 \operatorname{sen} 2y$.

6. Demuestre que para $u = x^3y^4$ vale la igualdad

$$\frac{\partial^5 u}{\partial y^2 \partial x^3} = \frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2}$$

7. Demuestre que la función $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t^2}}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

8. Demuestre que la función $u(x,t) = e^{-k^2a^2t} \operatorname{sen} ax$ es solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

9. Al hacer el cambio de variables $x = u + w$, $y = 3u - w$, la ecuación

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 10\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

se transforma en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Sugerencia: Entienda primero el significado del cambio de variable.

10. Para $z = f\left(u^2 + w^2\right)$ calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial w \partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial w^2}$.

11. Sea $f(x,y) = g(r,\varphi)$, donde $x = r\cos\varphi$, $y = r\operatorname{sen}\varphi$. Demuestre la igualdad

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

12. Para $z = f(x,y)$, con $x = 2uw$, $y = u^2 - w^2$ calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial w \partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial w^2}$

13. Si $u = f\left(x(1+y), y(1+x)\right)$ calcule $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

14. Sea $f(x,y)$ una función tal que para cualquier número real t se cumple que en todo el dominio de f es válida la igualdad $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$, donde n es un número entero.

    a. Demuestre que se cumple la igualdad

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$$

    b. Muestre que también se cumple

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x,y)$$

15. Demuestre que la función $u = e^{3x+4y}\cos(5z)$ satisface la **ecuación de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

5.2 El polinomio de Taylor

En esta sección construimos el polinomio de Taylor de una función suave con dos variables.

Recordamos este resultado para funciones reales de variable real: Si la función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es de clase C^r, entonces, alrededor del punto $p \in (a,b)$, la función f se escribe, localmente, en la forma

$$f(x) = f(p) + \frac{f'(p)}{1!}(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3 + \cdots + \frac{f^{(r)}(p)}{r!}(x-p)^r + o((x-p)^{r+1})$$

donde $o((x-p)^{r+1})$ significa un error en el monomio $x-p$ de orden $r+1$ (véase Reyes [10]).

Aquí, la expresión polinomial de grado r en el monomio $x-p$

$$f(p) + \frac{f'(p)}{1!}(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3 + \cdots + \frac{f^{(r)}(p)}{r!}(x-p)^r$$

se llama el **polinomio de Taylor** de grado r de la función f en el punto p.

Generalizamos la idea de aproximar una función en dos variables $f(x,y)$ mediante un polinomio de grado r en dos variables x, y, para cuando la función dada es de clase C^r.

Un **polinomio lineal** en las variables x, y es del tipo

$$P_1(x,y) = c_{00} + c_{10}(x-a) + c_{01}(y-b)$$

donde los coeficientes c_{ij} son constantes reales, al igual que a y b.

Un **polinomio cuadrático** en las variables x, y es del tipo

$$P_2(x,y) = c_{00} + c_{10}(x-a) + c_{01}(y-b) + c_{20}(x-a)^2 + c_{11}(x-a)(y-b) + c_{02}(y-b)^2$$

donde, nuevamente, los coeficientes c_{ij} son constantes reales.

Un **polinomio cúbico** tiene la forma

$$P_3(x,y) = c_{00} + \underbrace{c_{10}(x-a) + c_{01}(y-b)}_{\text{parte lineal}} + \underbrace{c_{20}(x-a)^2 + c_{11}(x-a)(y-b) + c_{02}(y-b)^2}_{\text{parte cuadrática}} + \underbrace{c_{30}(x-a)^3 + c_{21}(x-a)^2(y-b) + c_{12}(x-a)(y-b)^2 + c_{03}(y-b)^3}_{\text{parte cúbica}}$$

Observamos que, en general, un polinomio de grado r en las variables x, y se escribe

$$P_r(x,y) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{k=i+j} c_{ij}(x-a)^i (y-b)^j \right) + c_{00}$$

Iniciamos un proceso de aproximación de cualquier función suave de dos variables, por un polinomio en esas variables.

Sea $f(x,y)$ una función arbitraria de clase C^r, definida en una región Ω, un punto $p = (a,b) \in \Omega$ y $(x,y) \in \Omega$ cualquier punto cercano a p.

Primero intentamos aproximar f linealmente cerca del punto p mediante el polinomio

$$f(x,y) = f(p) + \underbrace{c_{10}(x-a) + c_{01}(x-b)}_{\text{parte lineal}} + o((x-a)^2, (y-b)^2)$$

donde la expresion $o((x-a)^2, (x-b)^2)$ denota un **error** en $x-a$ y $y-b$ de orden 2.

◁ Determinamos los coeficientes c_{ij} apropiados, calculando en primer lugar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = c_{10} + o((x-a), (y-b)^2)$$

lo que nos dice que, al calcular en $p = (a,b)$, esto es, en $x = a$, $y = b$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = c_{10} + o((x-a), (y-b))|_{x=a,\, y=b} = c_{10}$$

de donde obtenemos el primer coeficiente.

Igualmente, de

$$\frac{\partial f}{\partial y} = c_{01} + o((x-a)^2, (y-b))$$

se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = c_{01}$$

Por lo tanto, la aproximación lineal de f alrededor de p sería mediante la expresión

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b) + o((x-a)^2, (y-b)^2) \;\triangleright$$

Aproximamos ahora a la función $f(x,y)$ hasta el orden 2, mediante el polinomio cuadrático

$$f(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \underbrace{c_{20}(x-a)^2 + c_{11}(x-a)(y-b) + c_{02}(y-b)^2}_{\text{parte cuadrática}} + o((x-a)^3, (y-b)^3)$$

donde la expresión $o((x-a)^3,(y-b)^3)$ denota un **error** de orden cúbico en cada uno de los monomios indicados.

◁ Procedemos a calcular las constantes c_{20}, c_{11}, c_{02} apropiadas del polinomio:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + 2c_{20}(x-a) + c_{11}(y-b) + o((x-a)^2,(y-b)^3)$$

donde la expresión $o((x-a)^2,(y-b)^3)$ denota un error de orden 2 en el monomio $x-a$ junto con un error de orden 3 en el monomio $y-b$.

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2c_{20} + o((x-a),(y-b)^3)$$

lo que al evaluar en el punto (a,b) nos dice que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = 2c_{20}$$

es decir,

$$c_{20} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

Además, se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = c_{11} + o((x-a)^2,(y-b)^2)$$

lo que nos dice al evaluar en el punto (a,b) que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = c_{11}$$

Por otro lado, al derivar parcialmente respecto a y la funcion inicial f se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + c_{11}(x-a) + 2c_{02}(y-b) + o((x-a)^3,(y-b)^2)$$

con lo que,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2c_{02} + o((x-a)^3,(y-b))$$

Al evaluar en (a,b) esta expresión se obtiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = 2c_{02}$$

y por lo tanto

$$c_{02} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

De esta forma, hasta el orden 2 la aproximación de la función f es

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(p) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y-b)^2 \\ &+ o((x-a)^3,(y-b)^3) \triangleright \end{aligned}$$

Una aproximación a orden 3 para f estaría dada por el polinomio

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \\ &+ c_{30}(x-a)^3 + c_{21}(x-a)^2(y-b) + c_{12}(x-a)(y-b)^2 + c_{03}(y-b)^3 \\ &+ o((x-a)^4,(y-b)^4) \end{aligned}$$

donde $o((x-a)^4, (y-b)^4)$ es un error de orden 4 en cada monomio.

Calculamos los coeficientes c_{30}, c_{21}, c_{12} y c_{03} de tal expresión.

◁ Derivando parcialmente respecto a la variable x, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(y-b) + 3c_{30}(x-a)^2 + 2c_{21}(x-a)(y-b) + c_{12}(y-b)^2 + o((x-a)^3, (y-b)^4)$$

de donde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 3!\, c_{30}(x-a) + 2c_{21}(y-b) + o((x-a)^2, (y-b)^4)$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 3! c_{30} + o((x-a), (y-b)^4)$$

Al evaluar el punto (a,b) en la última expresión se obtiene

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b) = 3! c_{30}$$

Así, podemos calcular c_{30} mediante la igualdad

$$c_{30} = \frac{1}{3}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 2c_{21} + o((x-a)^2, (y-b)^3)$$

de donde

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a,b) = 2c_{21}$$

lo cual implica que

$$c_{21} = \frac{\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a,b)}{2}$$

Además, de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ podemos obtener que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) + 2c_{21}(x-a) + 2c_{12}(y-b) + o((x-a)^3, (y-b)^3)$$

y de esto

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = 2c_{12} + o((x-a)^3, (y-b)^2)$$

de donde

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a,b) = 2c_{12}$$

con lo que se obtiene el coeficiente

$$c_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a,b)$$

Otro cálculo análogo prueba que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b) = 3! c_{03}$$

es decir,

$$c_{03} = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)$$

Por lo tanto el desarrollo a orden 3 nos quedaría, al sustituir tales coeficientes

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a,b)(x-a)^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(a,b)(x-a)^2(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(a,b)(x-a)(y-b)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a,b)(y-b)^3 + o((x-a)^4,(y-b^4)) \triangleright \end{aligned}$$

Observamos que la relación anterior se puede escribir, al tomar $p = (a,b)$, como

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(p) + \frac{1}{1!0!}\frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a) + \frac{1}{0!1!}\frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2!0!}\frac{\partial f}{\partial x^2}(p)(x-a)^2 + \frac{1}{1!1!}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(x-a)(y-b) + \frac{1}{0!2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)\,(y-b)^2 \\ &+ \frac{1}{3!0!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(p)\,(x-a)^3 + \frac{1}{2!1!}\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(p)(x-a)^2(y-b) + \frac{1}{1!2!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(p)(x-a)(y-b)^2 \\ &+ \frac{1}{0!3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(p)(y-b)^3 + o((x-a)^4,(y-b)^4) \end{aligned}$$

Procediendo inductivamente, es fácil ver que la parte cuártica del polinomio es

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4!0!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(p)(x-a)^4 + \frac{1}{3!1!}\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3}(p)(x-a)^3(y-b) + \frac{1}{2!2!}\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}(p)(x-a)^2(y-b)^2 \\ &+ \frac{1}{1!3!}\frac{\partial^4 f}{\partial y^3 \partial x}(p)(x-a)(y-b)^3 + \frac{1}{0!4!}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(p)(y-b)^4 \end{aligned}$$

Podemos escribir la generalización de toda la discusión anterior en el siguiente resultado.

TEOREMA 5.7 (Taylor). *Si $f(x,y)$ es una función de clase C^r, entonces alrededor del punto $p = (a,b) \in \Omega$ se tiene que la función se escribe como el polinomio de grado r en dos variables*

$$f(x,y) = f(p) + \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{k=i+j}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^k f}{\partial y^j \partial x^i}(p)(x-a)^i(y-b)^j\right) + o((x-a)^{r+1},(y-b)^{r+1})$$

donde la cantidad $o((x-a)^{r+1},(y-b)^{r+1})$ es un error de orden $r+1$ en los monomios $x-a$ y $y-b$.

DEFINICIÓN 5.8. A la expresión (sin error) del lado derecho de la ecuación en el teorema de Taylor 5.7 se le llamará el **polinomio de Taylor** de grado r de la función f en el punto p, en las variables independientes.

EJEMPLO 5.9. Encuentre el polinomio de Taylor de grado 2 alrededor del punto $p = (0,0)$ de la función

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$$

$\triangleleft$ Aquí, $a = 0$, $b = 0$, y al calcular las parciales (hasta las segundas) se tiene

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy), \\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2\operatorname{sen}(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2\operatorname{sen}(xy) \end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes se calculan evaluando en el punto $(a,b) = (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$$

y por la fórmula de Taylor del teorema 5.7 se tiene que,

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!0!}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{1}{0!1!}\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$
$$+ \frac{1}{2!0!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2 + \frac{1}{1!1!}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)(x-0)(y-0) + \frac{1}{0!2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2$$
$$+ o((x-0)^3,(y-0)^3) = xy + o(x^3,y^3)$$

Esto es, hasta el grado 2 la función dada se escribe como

$$\operatorname{sen}(xy) = xy + o(x^3,y^3)$$

Otra forma de realizar el desarrollo anterior, es observando que para una variable z real el desarrollo de la función seno alrededor de $z_0 = 0$ es

$$\operatorname{sin} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + o(8)$$

Ahora, defínase $z = xy$ y considérese $p = (0,0)$. Entonces, $z(0,0) = 0 = z_0$, y sustituyendo la variable z, hasta orden 2, se obtiene

$$\operatorname{sen}(xy) = (xy) - \frac{(xy)^3}{3!} + o(7) = xy + o(3)$$

que es la misma expresión obtenida. ▷

La forma de desarrollar las funciones en varias variables utilizando los conocidos de Taylor para una variable, ayudan en general para omitir una buena cantidad de cálculos. No obstante hay que tener práctica para reconocer las sustituciones apropiadas y los puntos alrededor de los cuales se está desarrollando. Esto se ha mostrado en el ejemplo anterior y se muestra nuevamente en el siguiente.

EJEMPLO 5.10. Desarrolle la función

$$f(x,y) = \ln(1+xy)$$

en polinomio de Taylor hasta el grado 3 alrededor del punto $p = (0,0)$.

◁ Calculamos las derivadas parciales hasta orden 3

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1+xy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{(1+xy)-yx}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-y^2}{(1+xy)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x^2}{(1+xy)^2}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{2y^3}{(1+xy)^3}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{2x^3}{(1+xy)^3}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = -2(1+xy)^{-3}x = \frac{-2x}{(1+xy)^3}$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{-2y(1+xy)^2 + y^2 2(1+yx)x}{(1+xy)^4} = \frac{-2y}{(1+xy)^3}$$

De esta manera

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=0$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^3}(0,0)=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x}(0,0)=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)=0$$

Por lo tanto, alrededor de $p=(0,0)$ se tiene que la función $f(x,y)=\ln(1+xy)$ se escribe

$$\begin{aligned}\ln(1+xy)&=\ln(1+0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)\\&+\frac{1}{2!0!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(x-0)^2+\frac{1}{1!1!}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)(x-0)(y-0)+\frac{1}{0!2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(y-0)^2\\&+\frac{1}{3!0!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)(x-0)^3+\frac{1}{2!1!}\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(0,0)(x-0)^2(y-0)\\&+\frac{1}{1!2!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(0,0)(x-0)(y-0)^2+\frac{1}{0!3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)(y-0)^3\\&+o((x-0)^4,(y-0)^4)=xy+o(x^4,y^4)\end{aligned}$$

Por otro lado, el desarrollo alrededor de $z_0=0$ de la función $\ln(1+z)$ está dado por la igualdad

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+o(3)$$

Por eso, si ponemos $z=xy$, entonces el punto $(a,b)=(0,0)$ corresponde al punto $z_0=0$ y entonces

$$\ln(1+xy)=xy-\frac{(xy)^2}{2}+0(3)=xy-\frac{x^2y^2}{2}+o(5)=xy+o(3)$$

igualdad que se ha obtenido ya, utilizando el teorema 5.7. ▷

Damos ahora un ejemplo del desarrollo de un polinomio alrededor de un punto.

EJEMPLO 5.11. Dé el polinomio de Taylor arededer del punto $p=(1,2)$ de la función polinomial

$$f(x,y)=x^3-2y^3-3xy$$

◁ Calculamos todas las posibles derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-6y^2-3x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-12y$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=6,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}=0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=-12$$

De esta forma, al evaluar en el punto p se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-3,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=-21$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)=6,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2)=-3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)=-24$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1,2)=6,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(1,2)=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(1,2)=0,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(1,2)=-12$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

Por lo tanto por el teorema 5.7, alrededor de $(1,2)$ la función f se escribe

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1,2) - \frac{-3(x-1)}{1!0!} - \frac{21(y-2)}{0!1!} + \frac{6(x-1)^2}{2!0!} - \frac{3(x-1)(y-2)}{1!1!} - \frac{24(y-2)^2}{0!2!} \\ &\quad + \frac{6(x-1)^3}{3!0!} + \frac{0(x-1)^2(y-2)}{2!1!} + \frac{0(x-1)(y-2)^2}{1!2!} - \frac{12(y-2)^3}{0!3!} \\ &= -9 - 3(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 - 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2 \\ &\quad + (x-1)^3 - 2(y-2)^3 \end{aligned}$$

debido a que las derivadas parciales de orden 4 se anulan todas. ▷

Ejercicios 5.2

Desarrolle hasta orden 3 en fórmula de Taylor las funciones indicadas, en los ejercicios 1-5, en los puntos indicados.

1. $f(x,y) = e^{2x}\operatorname{sen} 2y$, $p = (1, \pi/2)$
2. $f(x,y) = \cos(x^2 - y)$, $p = (0, -\pi)$
3. $f(x,y) = \ln(1 + x + y)$, $p = (1,1)$
4. $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$, $p = (0,0)$
5. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $p = (-1,1)$.
6. Encuentre el término de orden 4 de la expresión de Taylor en el punto $p = (0,0)$ del polinomio
$$f(x,y) = y^3 + 4xy^5 + 4x^2y^4$$
7. Se sabe que el polinomio de Taylor de grado 6 de $\arctan x$ y de $\operatorname{sen}^2 x$, en cero es, respectivamente
$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \quad \text{y} \quad x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45}$$
Encuentre el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $f(x) = x\arctan x - \operatorname{sen}^2 x$
8. Encuentre el polinomio de Taylor de grado 6 de la función $f(x,y) = e^{x-y}$ utilizando algún polinomo de Taylor conocido.
9. Encuentre el polinomio de Taylor de grado 10 de la función $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

5.3 Valores extremos de funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

En esta sección iniciamos el análisis local de una función de clase C^r alrededor de un punto p para el caso en que la función está definida en una región Ω del plano $\mathbb{R}^2$. Los resultados aquí obtenidos se generalizan para más variables y damos ejemplos de estas generalizaciones.

Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^r y $p = (a,b)$ un punto en Ω. Entonces, el desarrollo de Taylor de f alrededor de p hasta orden 2 está dado por

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(x-a)(y-b) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y-b)^2 + o((x-a)^3, (y-b)^3) \end{aligned}$$

si el punto variable (x,y) está próximo del punto p en Ω.

5.3.1 Puntos regulares

DEFINICIÓN 5.12. Si se cumple que $\nabla f_p \neq (0,0)$, entonces se dirá que el punto p es un **punto regular** de f.

◁ En este caso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0$$

Por el teorema de Taylor 5.7, la función se escribe localmente como la aproximación

$$z = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y-b)$$

es decir, si $A = f(p)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial x}(p)$, $C = \dfrac{\partial f}{\partial y}(p)$, entonces

$$z = A + B(x-a) + C(y-b)$$

es la ecuación del plano tangente de la gráfica de la función f en el punto $(p, f(p)) = (a, b, f(a,b))$.

En otras palabras, alrededor de un punto regular la función f está aproximada por la ecuación del plano tangente en una vecindad del punto p. La figura 5.1 ilustra esta aproximación. ▷

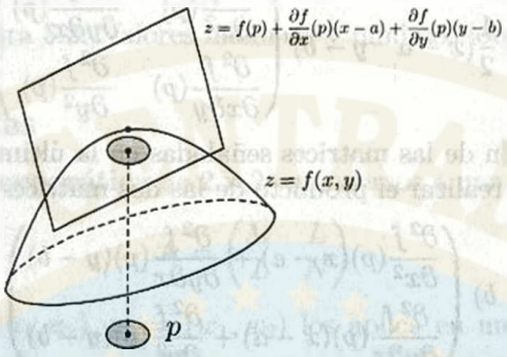


Figura 5.1. Aproximación lineal de f en p.

Esta discusión generaliza el concepto de la recta tangente a la gráfica de una función real de variable real de los cursos de cálculo básico, al del plano tangente a la gráfica (superficie) de una función de dos variables con valores reales. Dicho en otras palabras, la ecuación del plano tangente aproxima a la función alrededor del punto en cuestión.

EJEMPLO 5.13. Calcule aproximadamente $f(1.1, 1.1)$ si

$$f(x,y) = \ln(xy)$$

◁ Aproximamos f alrededor del punto $p = (1,1)$, calculando

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

lo que nos dice que

$$B = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1, \quad C = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,1,0)$ es

$$z = f(1,1) + B(x-1) + C(y-1) = (x-1) + (y-1)$$

De esto, la aproximación se calcula mediante

$$z(1.1, 1.1) = (1.1-1) + (1.1-1) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

esto es,

$$\ln[(1.1)(1.1)] \approx 0.2. \ \triangleright$$

5.3.2 Puntos críticos

Cuando el punto p no es regular, el problema de aproximación se complica. Hacemos un análisis para el caso más simple, en el cual no se tiene un punto regular.

DEFINICIÓN 5.14. Si $\nabla f_p = (0,0)$, es decir, las derivadas parciales de la función f se anulan en el punto p

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$$

entonces se dirá que p es un **punto crítico** de f. Al valor $f(p)$ se le llamará **valor crítico**.

Por el teorema de Taylor 5.7, alrededor del punto p la función f está aproximada por el polinomio cuadrático

$$z = f(p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y-b)^2$$
$$= f(p) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y-b)^2\right)$$

lo cual puede escribirse matricialmente como

$$z = f(p) + \frac{1}{2}(x-a \quad y-b)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

◁ Comprobamos que la multiplicación de las matrices señaladas en la última igualdad conduce a la expresión de la parte cuadrática de la aproximación. Al realizar el producto de las dos matrices finales, se obtiene la expresión

$$(x-a \quad y-b)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x-a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(y-b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(x-a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y-b) \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(y-b)(x-a)$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y-b)^2$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p)(y-b)^2$$

lo que prueba la afirmación, debido a la conmutatividad de las derivadas parciales mixtas. ▷

La matriz cuadrada obtenida de esta manera tiene un nombre y características especiales.

DEFINICIÓN 5.15. La matriz de 2×2 dada por

$$\mathbf{H}f_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix}$$

se llamará la **matriz hessiana** de la función f en el punto crítico p.

Es claro que la matriz hessiana $\mathbf{H}f_p$ es de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} M & L \\ L & N \end{pmatrix}$$

y por lo tanto es una matriz **simétrica**, es decir, coincide con su transpuesta $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$.

Tales matrices simétricas están estrechamente relacionadas con las llamadas **formas cuadráticas**, que definen superficies cuadráticas. En la siguiente subsección mostramos un aspecto básico de las **formas cuadráticas** más simples en dos variables, que ya hemos estudiado en la sección 2.8.

Antes de iniciar la discusión de las formas cuadráticas, definimos los conceptos de valores máximo y mínimo local de una función de argumento vectorial.

DEFINICIÓN 5.16. Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función arbitraria y $p \in \Omega$ un punto en el dominio de f. Decimos que la función f tiene en $f(p)$

1. Un valor **mínimo local**, si existe un número $\epsilon > 0$ tal que para cualquier punto (x, y) contenido en la bola de radio $\epsilon > 0$ y centro en p $(B_\epsilon(p))$, se tiene que $f(p) \leq f(x, y)$.

2. Un valor **máximo local**, si existe un número $\epsilon > 0$ tal que para cualquier $(x, y) \in B_\epsilon(p)$ se cumple que $f(x, y) \leq f(p)$.

La figura 5.2 ilustra esta definición.

Si para cualquier $(x, y) \in \Omega$ se cumple que $f(x, y) \geq f(p)$, entonces $f(p)$ se dirá un **mínimo global** de la función f en Ω. Análogamente se define un **máximo global** de la función f en Ω.

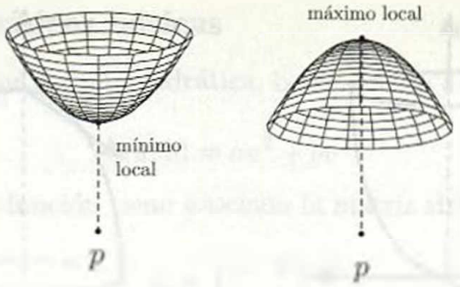


Figura 5.2. Valores máximos y mínimos locales.

5.3.3 Formas cuadráticas básicas

DEFINICIÓN 5.17. Por una **forma cuadrática** de 2×2 entendemos a una matriz simétrica, real, de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} M & L \\ L & N \end{pmatrix}$$

tal que a una pareja de vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ los aplica en un número real $q(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ mediante la regla matricial

$$q(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & L \\ L & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

que denotamos simplemente por $\mathbf{w}^t\mathbf{A}\mathbf{u}$, siendo $\mathbf{u}$ un vector columna y $\mathbf{w}^t$ un vector renglón.

Así, la forma cuadrática aplicará en un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ mediante la fórmula

$$\begin{aligned} q(\mathbf{u}) = q(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{u}^t\mathbf{A}\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & L \\ L & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= M(u_1)^2 + 2Lu_1u_2 + N(u_2)^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.18. Sea la función cuadrática en las variables u, v dada por la expresión

$$q_1(u, v) = u^2 + v^2$$

◁ Entonces, escribiendo al vector $\mathbf{w} = (u, v)$, podemos escribir matricialmente tal expresión como

$$q_1(u, v) = u^2 + 2(0)uv + v^2 = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

de donde q_1 tiene asociada la matriz simétrica (**forma cuadrática**)

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, en $p = (0, 0)$ la función tiene un **valor mínimo local** $q_1(0, 0) = 0$.

Esto se puede apreciar observando que la cuadrática $z = u^2 + v^2$ corresponde a un paraboloide circular que se abre verticalmente en dirección positiva del eje z. Si consideramos valores $c \in \mathbb{R}$ próximos a 0, entonces las imágenes inversas bajo f (curvas de nivel $f^{-1}(c)$) corresponden a curvas cerradas que de hecho son círculos con ecuaciones $u^2 + v^2 = c$.

La figura 5.3a ilustra la gráfica de esta forma cuadrática en una vecindad del origen de coordenadas. ▷

EJEMPLO 5.19. Ahora, consideremos la forma cuadrática dada por

$$q_2(u, v) = -u^2 - v^2$$

◁ Esta tiene un **valor máximo local** en $f(0, 0) = 0$ y tiene asociada la matriz simétrica

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De igual forma que para el caso anterior, se observa que la gráfica de $q_2(u, v)$ es un **paraboloide circular** que se abre verticalmente en dirección negativa del eje z. También, si consideramos los valores $c \in \mathbb{R}$ próximos del valor máximo $f(0) = 0$, las curvas de nivel correspondientes $u^2 + v^2 = -c$ son curvas cerradas, que además son círculos.

La figura 5.3b ilustra la gráfica de $q_2(u, v)$ en una proximidad del origen. ▷

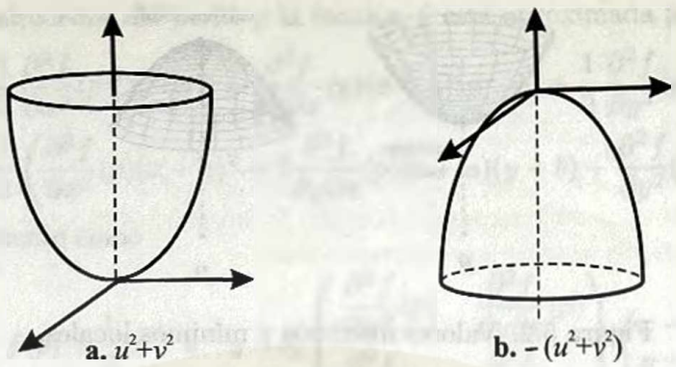


Figura 5.3. Formas cuadráticas $\pm(u^2+v^2)$.

EJEMPLO 5.20. Consideremos la función cuadrática en las variables u, v dada por

$$q_3(u,v) = u^2 - v^2$$

que tiene asociada la matriz simétrica

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

debido a que, si ponemos el vector $\mathbf{w} = (u, v)$ como un vector columna, matricialmente podríamos escribir

$$u^2 - v^2 = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{w}^t A_3 \mathbf{w}$$

Por otro lado, la cuadrática $q_2(u,v) = u^2 - v^2$ corresponde a la gráfica de la superficie **paraboloide hiperbólico**. Por esto, al tomar cualquier valor $c \in \mathbb{R}$ próximo del valor $f(0,0) = 0$, la curva de nivel asociada $u^2 - v^2 = c$ corresponde a una hipérbola, mientras que la curva de nivel $f^{-1}(0)$ está formado por la pareja de rectas $y = \pm x$ que se intersecan en el origen de coordenadas.

Por lo tanto, en $p = (0,0)$ se tiene un **punto silla** $f(0,0) = 0$ para la función q_3 (ni valor máximo, ni valor mínimo). La figura 5.4 ilustra esta forma cuadrática. ▷

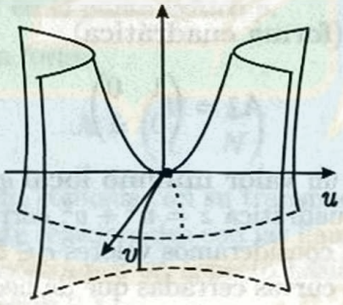


Figura 5.4. Forma cuadrática $u^2 - v^2$.

EJEMPLO 5.21. Análogamente, la forma cuadrática

$$q_4(u,v) = -u^2 + v^2$$

tiene asociada la matriz simétrica

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y en el punto silla $p = (0,0)$ tiene asociado un valor $f(0,0) = 0$ llamado también **punto silla**.

5.3.4 Zoológico de formas cuadráticas básicas

Extendemos ahora el tratado general de una forma cuadrática, bosquejando a todas las formas cuadráticas básicas.

Dada la forma cuadrática

$$q(u,v) = au^2 + bv^2$$

con a, b constantes diferentes de cero, esta función tiene asociada la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

cuya gráfica tiene un comportamiento alrededor del punto $(p, f(p)) = (0,0,0)$, y tiene alguna de las formas mostradas en la figura 5.5.

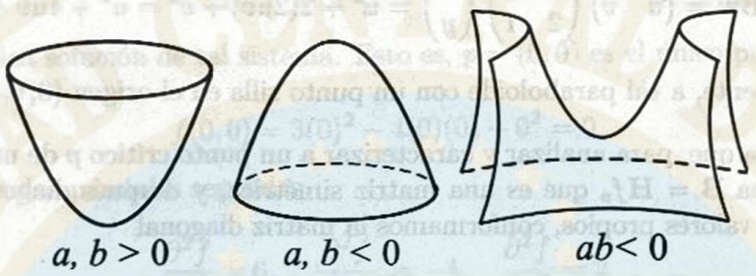


Figura 5.5. Zoológico de formas cuadráticas básicas.

Observamos que las **formas cuadráticas** básicas no tienen términos cruzados en xy, pues si aparecen hay tales términos, estos se pueden omitir mediante el uso del siguiente resultado del **Álgebra lineal** y cuya prueba puede verse en Anton [1].

LEMA 5.22 (de Sylvester de diagonalización). *Sea la matriz simétrica*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} M & L \\ L & N \end{pmatrix}$$

Entonces, bajo un cambio de coordenadas lineal en el plano, puede ser llevada a una **matriz diagonal** *de la forma*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

*donde λ_1, λ_2 son números reales (***valores propios** *de* **A**) *que satisfacen el polinomio cuadrático en la variable λ*

$$\begin{vmatrix} M-\lambda & L \\ L & N-\lambda \end{vmatrix} = (M-\lambda)(N-\lambda) - L^2 = \lambda^2 - (M+N)\lambda + (MN - L^2) = 0$$

Más aún se tiene que,

$$\begin{vmatrix} M & L \\ L & N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2$$

Para ilustrar el alcance del lema de Sylvester 5.22 damos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.23. Sea la matriz simétrica

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante $|B| = -3$.

◁ Procedemos a diagonalizar a la matriz B, calculando sus valores propios al resolver la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

cuyas soluciones son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$.

De esta manera, la matriz diagonalizada es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es $|A| = -3$.

Por otro lado, la matriz $\mathbf{A}$ tiene asociada la forma cuadrática

$$q(u, v) = u^2 - 3v^2$$

que corresponde a un paraboloide hiperbólico en $\mathbb{R}^3$ con un punto silla en el origen $(0, 0, 0)$.

Por lo tanto, la forma cuadrática asociada a la matriz $\mathbf{B}$ está aplicada en los vectores $\mathbf{w} = (u, v)$ matricialmente por

$$\mathbf{w}^t\mathbf{B}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u^2 + 2(2uv) + v^2 = u^2 + 4uv + v^2$$

esta corresponde, cualitativamente, a tal paraboloide con un punto silla en el origen $(0, 0, 0)$. ▷

El ejemplo 5.23 nos muestra que, para analizar y caracterizar a un punto crítico p de una función $f(x, y)$, es suficiente con calcular su matriz hessiana $\mathbf{B} = \mathbf{H}f_p$ que es una matriz simétrica, y después diagonalizarla utilizando el lema de Sylvester 5.22. Al obtener sus valores propios, conformamos la matriz diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

que caracteriza a una forma cuadrática básica de las mencionadas, para el caso en que los valores propios sean ambos diferentes de cero.

5.4 Puntos críticos no degenerados

DEFINICIÓN 5.24. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que en el punto crítico $p \in \Omega$ se tenga que el determinante de la matriz hessiana

$$|\mathbf{H}f_p| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces llamamos al punto p un **punto crítico no degenerado** de f.

Observamos que, si la matriz diagonalizada de $\mathbf{H}f_p$ es la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

entonces será suficiente que ambos valores propios λ_1 y λ_2 sean diferentes de cero para que p sea un punto crítico no degenerado, en virtud de que por el lema de Sylvester, $|\mathbf{A}| = |\mathbf{H}f_p| = \lambda_1\lambda_2$

EJEMPLO 5.25. Sea la función cuadrática en dos variables

$$f(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2$$

Analizamos el comportamiento en sus puntos críticos mediante las matrices hessianas.

◁ El conjunto $\Omega = \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto y conexo. Realizaremos el análisis de los puntos críticos. Hallamos en primer lugar el gradiente, calculando las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 4y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x + 12y$$

Es claro que

$$\nabla f_p = (0,0) \iff \begin{cases} 6x - 4y = 0 \\ y \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

es decir, los puntos críticos se obtienen al resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} 6x - 4y = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

Como el determinante principal del sistema

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4 \neq 0$$

entonces $x = 0$, $y = 0$ es la única solución de tal sistema. Esto es, $p = (0,0)$ es el único punto crítico.

Su valor crítico es

$$f(0,0) = 3(0)^2 - 4(0)(0) + 0^2 = 0$$

Ahora calculamos las derivadas parciales segundas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

y obtenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2$$

Por lo tanto la matriz hessiana de f en el punto crítico $p(0,0)$ es

$$\mathbf{H}f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Después, encontramos los valores propios para diagonalizar la matriz

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda) - 16 = \lambda^2 - 8\lambda - 4 = 0$$

con lo que

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64+16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{80}}{20}$$

de donde

$$\lambda_1 = \frac{8 - \sqrt{80}}{2} < 0, \quad \lambda_2 = \frac{8 + \sqrt{80}}{2} > 0$$

lo que implica que en el punto $(0,0,f(0,0))$ sobre la gráfica de f se tiene un valor silla, además de que el punto crítico $p = (0,0)$ es no degenerado.

Analizamos algunas **curvas de nivel** de f utilizando los resultados de la descripción de una forma cuadrática alrededor del origen de coordenadas.

1. Si se toma el valor $z = 1$ entonces

$$1 = 3x^2 - 4xy + y^2$$

es la ecuación de una hipérbola en el plano $\mathbb{R}^2$.

2. Al tomar el valor $-1 = z$ entonces se tiene,

$$-1 = 3x^2 - 4xy + y^2$$

que es la ecuación de otra hipérbola en $\mathbb{R}^2$.

3. Si se considera $z = 0$, entonces se tiene la ecuación

$$0 = 3x^2 - 4xy + y^2$$

y para resolver en términos de la variable x nos da,

$$x = \frac{4y \pm \sqrt{16y^2 - 12y^2}}{6} = \frac{4y \pm 2y}{6} = \begin{cases} y \\ \frac{1}{3}y \end{cases}$$

es decir, la pareja de rectas

$$\begin{cases} y = x \\ y = 3x \end{cases}$$

que son las asíntotas de las hipérbolas dadas por la familia de ecuaciones

$$3x^2 - 4xy + y^2 = c$$

donde $c \in R$ es un valor arbitrario de la función f.

La figura 5.6 describe la complejidad de la gráfica de la función f, así como sus curvas de nivel. ▷

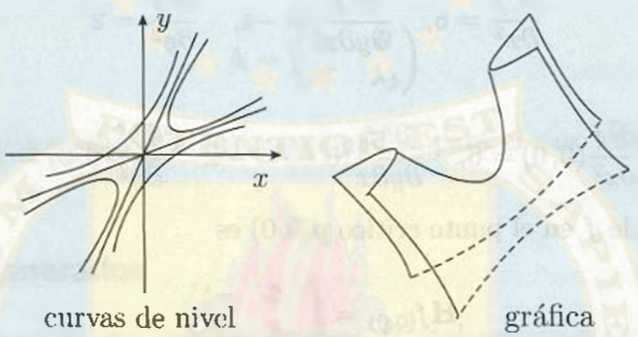


Figura 5.6. Curvas de nivel y gráfica de $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2$.

Utilizamos el ejemplo anterior para hacer la siguiente observación.
◁ La función cuadrática inicial tenía la ecuación

$$f(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2$$

que matricialmente se puede escribir

$$3x^2 - 4xy + y^2 = 3x^2 + 2(-2)xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

siendo la matriz simétrica asociada (forma cuadrática)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, encontramos que la matriz hessiana en el punto crítico era la forma cuadrática

$$\mathbf{H}f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}$$

Esto ocurre debido a que en la construcción de la matriz hessiana durante la discusión general se factorizó el escalar $\frac{1}{2}$ dando paso a tal matriz como se definió. ▷

Utilizamos ahora toda la herramienta que se ha desarrollado, para analizar puntos críticos de funciones suaves de dos variables.

EJEMPLO 5.26. Sea la función polinomial de grado 4 en dos variables dada por la igualdad

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

y cuyo dominio es $\Omega = \mathbb{R}^2$.

◁ Analizamos sus puntos críticos, igualando las coordenadas del gradiente a cero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente, resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases}$$

Si despejamos la variable y de la primera ecuación, y si se sustituye x^3 en la segunda ecuación se tendría $(x^3)^3 - x = 0$, lo que implicaría que $x^9 - x = 0$. Por lo tanto, es necesario resolver la ecuación de grado 9

$$x(x^8 - 1) = 0$$

Al factorizar el lado izquierdo de esta ecuación se tiene que

$$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0 \Longleftrightarrow x(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$$

lo que nos da las raíces $x = 0, 1, -1$.

Al sustituir tales raíces en la ecuación $y = \sqrt[3]{x}$ nos daría que $y = 0, 1, -1$.

Por lo tanto, los puntos críticos son $p_1 = (0,0), p_2 = (1,1), p_3 = (-1,-1)$ y sus valores críticos correspondientes serán

$$f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = -2, \quad f(-1,-1) = -2$$

Al calcular las derivadas parciales segundas de la función f se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

lo que da la matriz hessiana en cada punto crítico p

$$\mathbf{H}f_p = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}_p$$

Procedemos a analizar cada uno de los puntos críticos obtenidos mediante la diagonalización de su correspondiente matriz hessiana

1. Punto crítico $(0,0)$.

   Su matriz hessiana es,

   $$\mathbf{H}f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

   Para calcular los valores propios de esta matriz resolvemos la ecuación cuadrática característica.

   $$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 16$$

   lo que implica que $\lambda = \pm 4$.

   De esta forma, la matriz diagonal es la forma cuadrática

   $$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   lo que nos dice que en el punto $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ hay un **punto silla**.

   Además en una localidad del punto crítico $(0,0)$ las curvas de nivel son hipérbolas cuyas **separatrices** son dos curvas que se intersecan en el punto $(0,0)$, que es no degenerado.

2. Punto crítico $(1,1)$.

Su matriz hessiana es, en este caso.

$$\mathbf{H}f_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Para calcular los puntos críticos resolvemos la ecuación cuadrática

$$0 = \begin{vmatrix} 12-\lambda & -4 \\ -4 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 24\lambda + 128$$

esto es, $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 8$.

Lo anterior implica que $f(1,1) = -2$ es un mínimo local pues la matriz diagonalizada es, en este caso

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

En virtud de que $f(1,1) = -2$ es un mínimo local, se tiene que las curvas de nivel de valores c próximos de -2 (de hecho mayores) son curvas cerradas que encierran al punto crítico no degenerado $(1,1)$.

3. Análogamente al inciso anterior, en virtud de que en el punto crítico $(-1,1)$ la matriz hessiana es

$$\mathbf{H}f_{(-1,1)} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

la función tiene un mínimo local en $f(-1,-1) = -2$.

Una inspección simple de la gráfica de la función mediante los puntos críticos y sus valores críticos nos asegura la forma de las curvas de nivel de la función, las cuales vienen dadas por la familia de ecuaciones

$$x^4 + y^4 - 4xy = c$$

siendo c un valor que está condicionado a que cumpla ser ≥ -2, que es el valor mínimo de la función.

Cuando $c = -2$ las curvas de nivel se reducen a la pareja de puntos críticos

$$p_1 = (1,1) \quad \text{y} \quad p_2 = (-1,1)$$

Si $-2 < c < 0$, entonces la ecuación $x^4 + y^4 - 4xy = c$ describe una pareja de curvas disconexas que son cerradas y encierran a los puntos críticos p_1 y p_2.

Si $c = 0$, la ecuación $x^4 + y^4 - 4xy = 0$ describe una curva que es la unión de otras dos que se intersecan en el punto $(0,0)$ y conforman una figura en forma de "ocho".

Cuando $c > 0$ la curva de nivel asociada se vuelve un circuito que encierra a la figura de "ocho".

Anteriormente habíamos mostrado este ejemplo, y ahora con el uso de la teoría diferenciable se ha podido hacer un análisis más preciso, pero que aún no está totalmente completado. La figura 5.7 ilustra cualitativamente el mapa topográfico de las curvas de nivel de la gráfica de la función. ▷

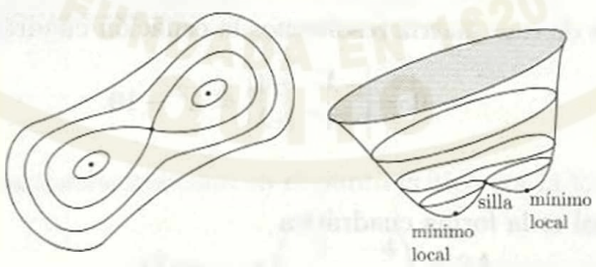


Figura 5.7. Mapa topográfico de $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

De hecho, aun para funciones polinomiales de dos variables, el análisis de una curva de nivel es complicado y requiere de metodología matemática moderna provista por ramas como la **Geometría algebraica**. Hablando con la verdad, estas herramientas están muy fuera de nuestro alcance y apelamos a las construcciones de las gráficas de funciones de

dos variables mediante las computadoras. Este análisis, aunque es cuantitativo y poco analítico, es de gran ayuda en los problemas prácticos.

Estos ejemplos muestran cuán complejas pueden ser las curvas de nivel asociadas a una función de dos variables.

Es claro que el problema se complica para dimensiones mayores, así que en los subsecuentes ejemplos, analizaremos apenas la forma de los puntos críticos, teniendo en cuenta la forma local de la gráfica en una vecindad de cada uno de ellos, cuando éstos son no degenerados.

EJEMPLO 5.27. Analice los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^2 + x^2y + y^2 + 4$$

◁ Como es sabido, los puntos críticos se calculan al resolver la ecuación

$$\nabla f_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0)$$

es decir, al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$

lo que equivale a que

$$\begin{cases} x = 0, \quad y = -1 \\ y = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

lo cual implica que los puntos críticos buscados son

$$p_1 = (0,0), \quad p_2 = (-\sqrt{2}, -1), \quad p_3 = (\sqrt{2}, -1)$$

Calculamos sus valores críticos correspondientes,

$$f(0,0) = 4, \quad f(-\sqrt{2}, -1) = 5, \quad f(\sqrt{2}, -1) = 5$$

La matriz hessiana de f en cualquier punto crítico p es

$$\mathbf{H}f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}_p$$

Pasamos ahora a analizar cada punto crítico obtenido.

1. Punto crítico $p_1 = (0,0)$.

   Su matriz hessiana es

   $$\mathbf{H}f_{(0.0)} = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   que de hecho ya es una matriz diagonal.

   No obstante, para afirmar que su diagonalización es la misma, procedemos a realizar tal diagonalización.

   Para calcular los valores propios de la matriz $\mathbf{H}f_{(0,0)}$ se tiene que resolver la ecuación

   $$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$$

   lo que implica que $\lambda_1 = 2 = \lambda_2 > 0$, y por lo tanto, $f(0,0) = 4$ es un valor mínimo local.

2. Punto crítico $p_2 = (-\sqrt{2}, -1)$.

   Su matriz hessiana es, en este caso

   $$\mathbf{H}f_{(-\sqrt{2},-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2(-\sqrt{2}) \\ 2(-\sqrt{2}) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

de donde, $\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = -2$. Esto es, la diagonal asociada es

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

lo que nos dice que $f(-\sqrt{2}, -1) = 5$ corresponde a un valor crítico silla.

3. Punto crítico $p_3 = (\sqrt{2}, -1)$.

La matriz hessiana es, para este punto crítico,

$$\mathbf{H}f_{(\sqrt{2},-1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2(\sqrt{2}) \\ 2(\sqrt{2}) & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular sus valores propios, es preciso resolver la ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

y obtenemos nuevamente, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$.

Por lo tanto, $f(\sqrt{2}, -1) = 5$ corresponde también a un valor silla.

Observamos que todos los puntos críticos de esta función son no degenerados, ya que todos los valores propios obtenidos no se anulan. ▷

EJEMPLO 5.28. Dada la función

$$f(x, y) = xy(1 - x - y) = xy - x^2y - xy^2$$

Analizamos sus puntos críticos mediante el método mostrado.

◁ El gradiente de la función es

$$\nabla f_p = (y - 2xy - y^2, x - x^2 - 2xy)_p$$

y se anula, si y sólo si se satisface el sistema

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} y = 0 \quad \text{o} \quad 1 - 2x - y = 0 \\ \qquad\quad \text{y} \\ x = 0 \quad \text{o} \quad 1 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

Al resolver tales parejas se obtienen los puntos críticos,

$$p_1 = (0, 0), \quad p_2 = (0, 1) \quad p_3 = (1, 0) \quad \text{y} \quad p_4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

con los valores críticos respectivos

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 1) = 0, \quad f(1, 0) = 0, \quad \text{y} \quad f(1/3, 1/3) = 1/27$$

Procedemos a analizar los puntos críticos sabiendo que la matriz hessiana viene dada por

$$\mathbf{H}f_p = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

1. Punto crítico $p_1 = (0,0)$.
   Su matriz hessiana está dada por
   $$\mathbf{H}f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   y sus valores propios se calculan resolviendo la ecuación
   $$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$
   de donde $\lambda = \pm 1$. Esto dice que $f(0,0) = 0$ corresponde a un valor silla.

2. Punto $p_2 = (0,1)$.
   La matriz hessiana correspondiente es,
   $$\mathbf{H}f_{(0,1)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   y sus valores propios se calculan al resolver la ecuación
   $$0 = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-2-\lambda) - 1 = \lambda^2 + 2\lambda - 1$$
   Encontramos los valores propios λ_1, λ_2 donde
   $$\lambda_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} < 0$$
   y por lo tanto $f(0,1) = 0$ es un valor crítico silla.

3. El punto crítico $p_3 = (1,0)$ tiene asociada la matriz Hessiana
   $$\mathbf{H}f_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
   y sus valores propios se calculan mediante la ecuación
   $$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 1$$
   que tiene soluciones
   $$\lambda_1 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} < 0$$
   lo que hace también de $f(1,0) = 0$ un valor crítico silla.

4. Finalmente, el punto crítico $p_4 = (1/3, 1/3)$ tiene la matriz hessiana
   $$\mathbf{H}f_{(1/3,1/3)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
   y los valores propios se calculan al resolver la ecuación
   $$0 = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}$$
   cuyas soluciones son
   $$\lambda_1 = -1/3, \quad \lambda_2 = -1$$
   que hace de $f(1/3, 1/3) = 1/27$ un valor crítico mínimo.

Nuevamente, en este ejemplo hemos encontrado solamente puntos críticos no degenerados, pues todos los valores propios calculados en cada caso son distintos de cero. ▷

EJEMPLO 5.29. Analicemos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$$

◁ Calculemos sus puntos críticos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}yx^{-1/2} - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^{1/2} - 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

que equivale a (si $x \neq 0$),

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2\sqrt{x}} = 1 \\ \sqrt{x} = 2y - 6 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que el único punto crítico de la función es $p = (4,4)$, y su valor crítico es $f(4,4) = 12$.

La matriz hessiana viene dada por

$$\mathbf{H}f_p = \begin{pmatrix} \dfrac{-y}{4\sqrt{x^3}} & \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & -2 \end{pmatrix}_p$$

y consecuentemente, la matriz hessiana en el único punto crítico es

$$\mathbf{H}f_{(4,4)} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{64} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} & -2 \end{pmatrix}$$

Los valores propios se calculan mediante la solución de la ecuación

$$0 = \lambda^2 + \frac{127}{64}\lambda - \frac{3}{32}$$

que al resolverla nos da

$$\lambda_1 = \frac{-127 + \sqrt{17665}}{128} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{-127 - \sqrt{17665}}{128} < 0$$

lo que hace de $f(4,4) = 12$ un valor silla. Además se tiene que el punto crítico es no degenerado. ▷

Hacemos hincapié en que el análisis de la gráfica de una fimción suave alrededor de un punto crítico no degenerado es simple y está totalmente descrito por el zoológico de las formas cuadráticas básicas y el Lemma de Sylvester. No obstante, cuando la matriz hessiana en el punto crítico tiene un valor propio $\lambda = 0$, el análisis se complica y su estudio sale de nuestras posibilidades. La **teoría de singularidades y catástrofes** establecida por R. Thom nos provee de la herramienta moderna necesaria para analizar el caso mencionado. A los puntos críticos tales que su matriz hessiana tiene un valor propio nulo, se les llama **puntos críticos degenerados**.

Cabe mencionar que la teoría expuesta aquí se extiende a varias variables como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.30. Analice los puntos críticos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$$

◁ Claramente el dominio de la función f es toda la región espacial $\Omega = \mathbb{R}^3$.

El gradiente de f está dado por

$$\nabla f_p = (2x + y, 2y + x + z, 2z + y)$$

de donde $\nabla f_p = (0,0,0)$, si y sólo si se cumple que

$$\begin{cases} 2x + 6y \quad\quad = 0 \\ x + 2y + \ z = 0 \\ \quad\quad y + 2z = 0 \end{cases}$$

El determinante de tal sistema lineal es

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

lo que nos dice que tal sistema sólo tiene la solución trivial $p = (0,0,0)$, que es entonces el único punto crítico.

La matriz hessiana es, para este caso, la matriz simétrica de 3×3,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedamos a calcular los valores propios de la matriz resolviendo la ecuación cúbica,

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$$

Las raíces de tal ecuación cúbica son los números positivos

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$$

como se puede comprobar fácilmente.

De esta manera, la matriz diagonalizada obtenida es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

con la diagonal en números positivos.

Así pues, el valor crítico $f(0,0) = 0$ es un valor mínimo local y el punto crítico $p = (0,0,0)$ es no degenerado. ▷

Ejercicios 5.4

1. Clasifique el punto crítico $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ de la función

$$f(x,y) = x \operatorname{sen} y$$

Calcule los valores extremos locales de cada función de los ejercicios 2–6 utilizando para ello el lema de Sylvester. Clasifíquelos como máximos, mínimos o sillas.

2. $f(x,y) = xy^2(1-x-y)$
3. $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4x$
4. $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$
5. $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$
6. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$

5.5 Multiplicadores de Lagrange y el teorema de Weierstrass

Damos inicio ahora al estudio de los valores extremos de una función que están sujetos a un dominio restringido dentro de su dominio natural. Para ello iniciaremos la discusión pensando que el dominio restringido mencionado tiene una característica adecuada en su forma: es un subconjunto del espacio, que es cerrado, y que está acotado (limitado) en el sentido que la norma de cada uno de sus puntos está superada por un número fijo apropiado.

DEFINICIÓN 5.31. Un conjunto $K \subset R^n$ que es cerrado y acotado se llamará **compacto.**

Hacemos una extensión del teorema de Weierstrass (Reyes [10]) para el caso de una función en varias variables, con un dominio **compacto.**

TEOREMA 5.32 (Weierstrass). *Toda función $f : K \to \mathbb{R}$ continua (con K compacto) alcanza sus valores máximo y su mínimo dentro de K.*

$\triangleleft$ Consideremos el caso en que la función f no sólo es continua, sino además es suave de clase C^r $(r \geq 1)$.
Si los puntos $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son críticos para la función f en el interior de K, calculamos sus valores críticos

$$f(p_1), f(p_2), \ldots f(p_k).$$

Después, se buscan los extremos de f en los puntos $q_1, \ldots, q_l$ de la frontera y en tales puntos obtenemos sus valores

$$f(q_1), f(q_2), \ldots, f(q_l)$$

De entre el conjunto de todos los valores obtenidos

$$\{f(p_1), \ldots, f(p_k),\ f(q_1), \ldots, f(q_l)\}$$

se escogen el máximo y el mínimo (véase la figura 5.8). $\triangleright$

Por el teorema 5.32, para calcular los valores extremos de una función real de argumento vectorial definida en un conjunto compacto K, es necesario buscar en su interior los puntos críticos y evaluarlos, además de buscar en la frontera a aquellos puntos que pudieran dar valores extremos.

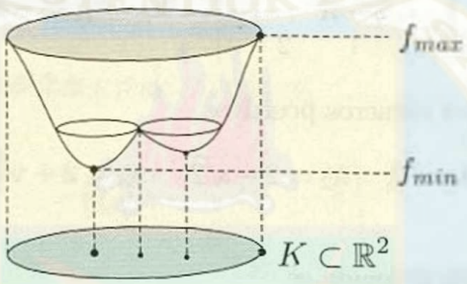


Figura 5.8. El Teorema de Weierstrass.

Procedamos a dar un método para localizar a tales puntos distinguidos en la frontera del conjunto K, suponiendo que tal frontera está definida como una superficie de nivel. A este método se le conoce como el de los **multiplicadores de Lagrange.**

Sea S una superficie definida por una ecuación

$$g(x, y, z) = 0$$

donde g es una función suave en una región Ω que contiene a S y tal que

$$\nabla g_{(x,y,z)} \neq (0, 0, 0)$$

Dada $f : \Omega \to \mathbb{R}$ donde Ω es la región conteniendo a S, se dice que f tiene un **extremo restringido** a S en el punto $p \in S$ si en una vecindad de $p \in S$ se cumple que

$$f(p) \geq f(x, y, z)$$

en cuyo caso se dirá que $f(p)$ es un **máximo local** de f en S. Pero si en tal vecindad ocurre que

$$f(p) \leq f(x, y, z)$$

en este caso se dirá que $f(p)$ es un **mínimo local** de f en S.

El siguiente resultado, debido a Lagrange, nos indica la forma de localizar a los posibles puntos de S donde se alcanzan los valores extremos de f.

TEOREMA 5.33 (Lagrange). *Si f es un extremo en el punto $p \in S$, entonces existe un escalar λ (llamado* **multiplicador de Lagrange***) tal que en el punto p se satisface la ecuación*

$$\nabla f_p = \lambda \nabla g_p$$

◁ Sea $\gamma : J \to S$ una curva diferenciable pasando por $\gamma(0) = p$ y tomemos la composición

$$f \circ \gamma : J \to \mathbb{R}$$

dada por

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$$

Entonces, por la regla de la cadena, la composición es diferenciable y

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t) \rangle$$

Al evaluar en el tiempo $t = 0$, se obtiene que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \langle \nabla f_p, \dot{\gamma}(0) \rangle$$

Ya que $f(p)$ es extremo en S (es decir, un máximo o mínimo local sobre S) se tiene que

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = \langle \nabla f_p, \dot{\gamma}(0) \rangle$$

debido a que para una función real de variable real, cuando alcanza un extremo (local o global) se tiene un punto crítico en $t = 0$.

Como $\dot{\gamma}(0)$ es un vector tangente en p y la curva γ es arbitraria, entonces esto nos dice que $\nabla f_p \perp T_p S$.

Como también $\nabla g_p \perp T_p S$, tendremos entonces que el vector ∇f_p es paralelo a ∇g_p.

Por lo tanto, existe un número real λ diferente de cero tal que $\nabla f_p = \lambda \nabla g_p$ (véase la figura 5.9). ▷

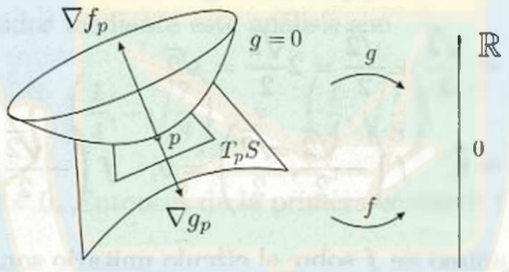


Figura 5.9. Multiplicadores de Lagrange.

EJEMPLO 5.34. Halle los valores máximo y mínimo de la función

$$f(x, y) = x + y$$

sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. En otras palabras, encuentre los valores máximo y mínimo de f sobre el círculo unitario.

◁ Por el teorema de Lagrange 5.33, es necesario resolver la ecuación

$$\nabla f_{(x,y)} = \lambda \nabla g_{(x,y)}$$

con $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ definiendo a $S : g^{-1}(0) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

Como

$$\nabla f_{(x,y)} = (1, 1), \quad \text{y} \quad \nabla g_{(x,y)} = (2x, 2y)$$

entonces, buscamos x, y y λ tal que satisfagan la ecuación

$$(1, 1) = \lambda(2x, 2y)$$

sabiendo además que $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Al resolver el sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \end{cases}$$

usando el hecho de que $\lambda \neq 0$, se tiene que

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ 1 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1,$$

de donde

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De esta forma, obtenemos las soluciones de x, y en el círculo dadas por

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

lo que implica que hay 4 puntos candidatos sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$, que son

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Si evaluamos cada uno de ellos, se tiene que,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo de f sobre el círculo unitario son

$$f_{\max} = \sqrt{2}, \quad \text{alcanzado con} \quad p_M = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f_{\min} = -\sqrt{2}, \quad \text{alcanzado con} \quad p_m = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

La figura 5.10 ilustra este ejemplo. ▷

EJEMPLO 5.35. Dada la función

$$f(x, y) = x + y^2$$

calcule sus valores máximo y mínimo sujetos a la restricción $2x^2 + y^2 = 1$.

◁ Se calcula el gradiente de la función f

$$\nabla f_p = (1, 2y)$$

Definimos la función auxiliar $g(x, y) = 2x^2 + y^2 - 1$. Entonces, la curva plana $2x^2 + y^2 = 1$, que es una elipse, se puede escribir como la imagen inversa de 0 bajo g, es decir $g^{-1}(0)$, además, sobre cada punto (x, y) de tal curva

$$\nabla g(x, y) = (4x, 2y)$$

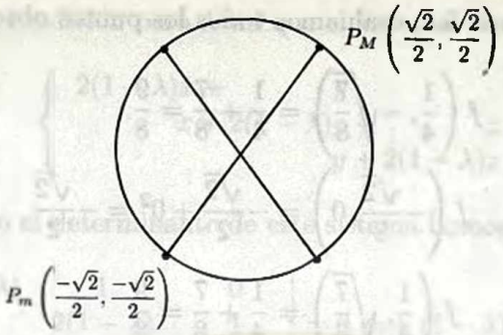


Figura 5.10. Extremos de $x + y$ en el círculo unitario.

Ahora buscamos $\lambda \neq 0$ tal que $\nabla f_p = \lambda \nabla g_p$ para algunos puntos (x, y) sobre la curva, esto es, tal que

$$(1, 2y) = \lambda(4x, 2y)$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \end{cases}$$

sujetas a la condición de restricción $2x^2 + y^2 = 1$

De la segunda ecuación, si $y \neq 0$ entonces $\lambda = 1$, y de la primera ecuación se tiene necesariamente que $1 = 4x$, lo que implica que $x = \frac{1}{4}$.

Al usar la condición con $x = \frac{1}{4}$, obtenemos

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = 1$$

que al resolver para y nos da

$$y = \pm\sqrt{\frac{7}{8}}$$

Por esto, los puntos candidatos obtenidos mediante este análisis son

$$\left(\frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{7}{8}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}}\right)$$

Consideremos ahora el caso cuando $y = 0$. Entonces de la primera ecuación ($\lambda \neq 0$) se tiene que

$$\frac{1}{4\lambda} = x$$

que al sustituir en la ecuación de condición (con $y = 0$) nos da

$$2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 = 1$$

Tal ecuación nos provee de las soluciones para λ

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}$$

y por lo tanto,

$$x = \pm\frac{\sqrt{8}}{4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De aquí que los puntos candidatos sean en este caso

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Usando ahora el teorema de Weierstrass 5.8, evaluamos todos los puntos obtenidos en ambos casos

$$f\left(\frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{7}{8} = \frac{9}{8}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 0^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{7}{8} = \frac{9}{8}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y concluimos que, sobre la elipse $2x^2 + y^2 = 1$, la función tiene los extremos

$$f_{\max} = \frac{9}{8}, \quad f_{\min} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \triangleright$$

Damos ahora un ejemplo en tres variables donde se conjugan el teorema de Weierstrass y el método de los multiplicadores de Lagrange.

EJEMPLO 5.36. Sea la función

$$f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$$

Halle sus valores máximo y mínimo dentro de la bola de radio 1 con centro en el origen de coordenadas.

$\triangleleft$ Ya que la bola de radio 1 con centro en el origen es un cerrado y acotado, utilizamos el teorema de Weierstrass. Éste nos indica que hay que buscar los extremos en el interior $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ a través de los puntos críticos y en la frontera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mediante el método de multiplicadores de Lagrange.

1. Los puntos críticos de la función

   $$f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 + yz + z^2$$

   se han localizado ya en un ejemplo previo (de hecho, en todo $\mathbb{R}^3$), obteniendo apenas el punto crítico no degenerado $q = (0, 0, 0)$ con valor crítico $f(0, 0, 0) = 0$. Esto termina la búsqueda en el interior de la bola.

2. Procedemos entonces a buscar los extremos en la frontera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, es decir, los extremos de f sujetos a esta última restricción.

   La frontera de la bola, que es una esfera de radio 1, está definida por la ecuación

   $$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

   Al calcular el vector gradiente de f se tiene entonces,

   $$\nabla f_p = (2x + y, x + 2y + z, y + 2z)$$

   Al considerar la función auxiliar $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, la esfera está definida como el conjunto $g^{-1}(0)$, y

   $$\nabla g_p = (2x, 2y, 2z)$$

   Buscamos entonces un escalar λ tal que $\nabla f_p = \lambda \nabla g_p$, es decir tal que

   $$(2x + y, x + 2y + z, y + 2z) = \lambda(2x, 2y, 2z)$$

   o equivalentemente, que satisfaga las ecuaciones del sistema

   $$\begin{cases} 2x + y = 2\lambda x \\ \lambda + 2y + z = 2\lambda y \\ y + 2z = 2\lambda z \end{cases}$$

En otras palabras, buscamos una condición para λ tal que el sistema

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)x + y = 0 \\ x + 2(1-\lambda)y + z = 0 \\ y + 2(1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

tenga soluciones no triviales. Pero el determinante de este sistema homogéneo se anula cuando

$$E = \begin{vmatrix} 2(1-\lambda) & 1 & 0 \\ 1 & 2(1-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)\left(4(1-\lambda)^2 - 2\right) = 0$$

lo que nos dice que hay soluciones no triviales para el sistema, sólo para valores del multiplicador λ dados por

$$\lambda = 1, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Buscamos, por lo tanto, las soluciones no triviales considerando el sistema lineal dado por la pareja,

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)x + y = 0 \\ x + 2(1-\lambda)y + z = 0 \end{cases}$$

y para que este sistema tenga soluciones no triviales se necesita que

$$0 \neq \begin{vmatrix} 2(1-\lambda) & 1 \\ 1 & 2(1-\lambda) \end{vmatrix}$$

Pero tal determinante se anula si y sólo si,

$$4(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

es decir, $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.

Por lo tanto si $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, entonces

$$D = \begin{vmatrix} 2(1-\lambda) & 1 \\ 1 & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} \neq 0$$

y el sistema lineal inicial tiene soluciones no triviales, que encontramos a continuación.

Si hacemos $z = t$, entonces para el sistema con parámetro t,

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)x + y = 0 \\ x + 2(1-\lambda)y = -t \end{cases}$$

se tienen los determinantes

$$D_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -t & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} = t, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2(1-\lambda) & 0 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = -2t(1-\lambda)$$

y por lo tanto la solución en general es la recta

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{4(1-\lambda)^2 - 1} \\ y = \dfrac{-2t(1-\lambda)}{4(1-\lambda)^2 - 1} \\ z = t \end{cases}$$

que depende de los valores encontrados de λ.

Ya que tenemos las soluciones del sistema, utilizamos las condiciones de los multiplicadores obtenidos $\lambda = 1$, $\lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda_2, \lambda_3$.

1. Multiplicador $\lambda = 1$.
   Se obtienen en este caso las relaciones

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \\ 1 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

de donde $t^2 + t^2 = 1$, lo que implica que

$$t = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, sustituyendo el valor de t en la ecuación de la recta se tienen los puntos

$$p_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ p_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$$

2. Multiplicador $\lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Se obtiene en este caso

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\sqrt{2t} \\ z = t \\ 1 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

de donde

$$t^2 + 2t^2 + t^2 = 1 \iff t^2 = \frac{1}{4}$$

lo que implica que $t = \pm\frac{1}{2}$.
De esta manera, se tienen entonces los puntos

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right),\quad p_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

3. Multiplicador $\lambda = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Se tiene, en este caso, el sistema

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2t} \\ z = t \\ 1 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

de donde $t^2 + 2t^2 + t = 1$, lo que implica que $t = \pm\frac{1}{2}$.
En consecencia, los puntos obtenidos son

$$p_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right),\ p_6 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Se han obtenido mediante todo el proceso los puntos candidatos de Weierstrass

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Al evaluar tales puntos obtenemos los valores

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1,\quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$$

$$f\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

De esta manera, sobre la frontera (esfera) se tienen los valores máximo y mínimo dados por

$$f_{\text{mín}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f_{\text{máx}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, ya que en el interior se tenía que $f(0,0,0)=0$, entonces los valores máximo y mínimo de f dentro de la bola son

$$f_{\text{mín}}=0\quad\text{y}\quad f_{\text{máx}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ \triangleright$$

Ejercicios 5.5

1. Calcule los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y)=x+y^2$ en el círculo unitario.
2. Calcule el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x,y)=x+y+z$ en la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.
3. Determine los valores extremos de la función $f(x,y,z)=x+2y-2z$ en la bola $x^2+y^2+z^2\leq 1$.
4. Calcule el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x,z)=x-y-z$ dentro de la bola unitaria $x^2+y^2+z^2\leq 1$.
5. Encuentre la mínima distancia que hay entre la elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ y la recta $x+y-4=0$.
6. Encuentre los puntos sobre la hipérbola $xy=1$ que se encuentran más cerca del origen.
7. Encuentre el punto sobre la parábola $y=\frac{x^2}{4}$ más cercano al punto $(0,1)$.
8. Sea un círculo de radio R. Dé las dimensiones del triángulo que se puede inscribir dentro del círculo, y que tenga área máxima.
9. Halle las dimensiones de un paralelepípedo de volumen máximo que tenga fija un área dada A.
10. De entre los rectángulos con área dada A, halle las dimensiones de aquel que tiene perímetro con valor mínimo.
11. Muestre que el volumen del paralelepípedo rectangular más grande (con lados paralelos a los planos coordenados) que puede inscribirse en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

es igual a $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

5.6 Diferencial total de un campo escalar

Para la función $f:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y el punto arbitrario $p=(x,y)\in D$, se tiene el **incremento total** de f en p dado por

$$\Delta f=f(x+h,\,y+k)-f(x,y)$$

donde $h=\Delta x$ y $k=\Delta y$ son incrementos arbitrarios en las variables dadas.

De la definición de diferenciabilidad de f en punto p dada en la sección 4.4, se tiene que f es diferenciable en p si el incremento total Δf puede escribirse en la forma

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}(p)\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(p)\Delta y+o(\|\,(\Delta x,\Delta y)\,\|^2)$$

cuando $\| (\Delta x, \Delta y) \| \to 0$. Podemos escribir lo anterior mediante la notación convencional

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

en virtud de que $o\left(\|(\Delta x, \Delta y)\|^2\right) \to 0$.

DEFINICIÓN 5.37. Para la función diferenciable $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define la **diferencial total** de f por la igualdad

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

EJEMPLO 5.38. Calcule la diferencial total de la función $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ definida en la región plana $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. A continuación calcule, aproximadamente, $\ln\left(0.091^2 + 0.99^2\right)$.

◁ En virtud de que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

se tiene

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \frac{2x}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}\, dy = \frac{2x\, dx + 2y\, dy}{x^2 + y^2}$$

De esta manera, para calcular aproximadamente $\ln(0.091^2 + 0.99^2)$ tomamos $x = 0$ y $y = 1$ obteniendo que $\Delta x = 0.091$, $\Delta y = -0.01$, lo que nos indica que

$$df = \frac{2(0)(0.091) + 2(1)(-0.01)}{0^2 + 1^2} = -0.02$$

y consecuentemente,

$$\ln(0.091^2 + 0.99^2) \approx f(0, 1) + df = \ln(0^2 + 1^2) - 0.02$$

es decir,

$$\ln(0.091^2 + 0.99^2) \approx -0.02 \ \triangleright$$

De manera análoga, para una función diferenciable de tres variables, se tiene una diferencial total

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

EJEMPLO 5.39. Dada la función $T = e^{xyz}$, calcular su diferencial total.

◁ Primero calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial T}{\partial x} = yze^{xyz}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = xze^{xyz}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = xye^{xyz}$$

luego construimos la diferencial total

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\partial T}{\partial x}\, dx + \frac{\partial T}{\partial y}\, dy + \frac{\partial T}{\partial z}\, dz = yze^{xyz}\, dx + xz\, e^{xyz}\, dy + xy\, e^{xyz}\, dz \\ &= e^{xyz}(yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz) \ \triangleright \end{aligned}$$

Para una función de clase C^2 se define la **diferencial total de segundo orden** por $d^2 f$ y se calcula mediante

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2$$

Si escribimos la expresión anterior en notación operacional, se tiene

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dy^2 \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, dx\, dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\, dy^2\right)(f) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^2 (f) \end{aligned}$$

donde la aplicación del operador se realiza mediante la convención

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

EJEMPLO 5.40. Sea $u=\cos x\cos y$. Calcule d^2u.

◁ Calculamos las derivadas parciales, obteniendo.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\operatorname{sen}x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\cos x\operatorname{sen}y$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\cos x\cos y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\cos x\cos y$$

lo cual indica que

$$du^2=-\cos x\cos y\,dx^2+2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\,dx\,dy-\cos x\cos y\,dy^2\ \triangleright$$

De manera inductiva, se tiene para un campo escalar f de clase C^3 la tercera diferencial total $d^3f=d\left(d^2f\right)$, y viene dada por

$$d^3f=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

que en notación convencional operacional podemos escribir

$$d^3f=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3(f)$$

En forma general, en notación convencional, se tiene la **k−ésima diferencial total** del campo escalar de clase C^k dada por

$$d^kf=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k(f)$$

que se desarrolla de acuerdo a la fórmula del binomio de Newton.

EJEMPLO 5.41. Calcule d^4u para la función $u=y\ln x$.

◁ De acuerdo al triángulo de Pascal, los coeficientes del binomio de Newton de grado 4 son $1,4,6,4$ y 1, lo cual nos indica que

$$\begin{aligned}d^4u&=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^4(u)\\&=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}dx^4+4\frac{\partial^4}{\partial y\partial x^3}dx^3\,dy+6\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial x^2}dx^2\,dy^2+4\frac{\partial^4}{\partial y^3\partial x}dx\,dy^3+\frac{\partial^4}{\partial y^4}dy^4\right)(u)\\&=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}dx^4+4\frac{\partial^4 u}{\partial y\partial x^3}dx^3\,dy+6\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}dx^2\,dy^2+4\frac{\partial^4 u}{\partial y^3\partial x}dx\,dy^3+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}dy^4\end{aligned}$$

De esta manera, al calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\ln x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{y}{x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=\frac{2y}{x^3},\ \frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}=-\frac{1}{x^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}=0,\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$$
$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=-\frac{6y}{x^4},\ \frac{\partial^4 u}{\partial y\partial x^3}=\frac{2}{x^3},\ \frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial y^3\partial x}=\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\equiv 0$$

y al sustituirlas se obtiene

$$d^4u=-\frac{6y}{x^4}dx^4+4\left(\frac{2}{x^3}\right)dx^3\,dy=-\frac{6y}{x^4}dx^4+\frac{8}{x^3}dx^3\,dy\ \triangleright$$

Si consideramos el **elemento vectorial diferencial** en $\mathbb{R}^3$, en la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, dado por el vector simbólico

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$$

entonces la diferencial total de una función suave f está dada por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot (dx, dy, dz) = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

Ejercicios 5.6

Calcule df, d^2f y d^3f para cada una de las funciones de los ejercicios 1–5.

1. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} 2y$
2. $f(x, y) = \cos(x^2 - y)$
3. $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$
4. $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$
5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
6. Utilice la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la diferencial para calcular aproximadamente $\sqrt{4.1^2 + 2.97^2}$.
7. Utilice la función $f(x, y) = \sqrt{1 + x} + \sqrt{2 + y}$ y la diferencial para calcular aproximadamente $\sqrt{1.02} + \sqrt{1.96}$.

CAPÍTULO

6 Funciones diferenciables $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

6.1 Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

En este capítulo hacemos un estudio de los aspectos básicos de las funciones vectoriales con argumento vectorial del tipo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. De hecho, los dominios de tales funciones en general serán regiones contenidas en el espacio de dimensión n.

Dada la región (conjunto abierto conexo) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una función de tipo

$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

es una regla que asocia a cada punto $p \in \Omega$ un único punto $q = f(p)$ en $\mathbb{R}^m$.

En los correspondientes sistemas de coordenadas, si $p = (x_1, \ldots, x_n)$, $q = (y_1, \ldots, y_m)$, entonces tal función se escribirá

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Como las coordenadas y_i dependen de p, entonces cada una de ellas es una función real dependiente de p.

$$\begin{cases} y_1 = f_1(p) = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(p) = f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \quad \vdots \\ y_m = f_m(p) = f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

siendo cada una de las funciones f_i reales de variable vectorial definidas en Ω, para $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$f_i : \Omega \to \mathbb{R}$$

y llamadas **funciones componentes** de la función f (véase la figura 6.1).

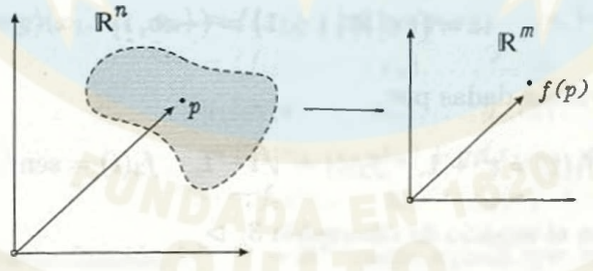


Figura 6.1. Función de tipo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Esto es, la función f se escribe en coordenadas, como

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

EJEMPLO 6.1. Sea la función f, cuya regla de correspondencia está dada por

$$f(x, y) = \left(xy,\ \ln xy^2,\ \frac{y}{1 + x^2}\right)$$

Entonces f está definida en una región Ω de $\mathbb{R}^2$ y toma valores en $\mathbb{R}^3$.

◁ Procedamos a calcular el dominio de la función, analizando cada función coordenada.

Ciertamente la primera componente, xy, y la tercera, $\dfrac{y}{1+x^2}$, no ofrecen alguna restricción. La segunda función componente impone la condición de que el conjunto xy^2 deberá de ser positivo.

Como $xy^2 > 0$, necesariamente se cumple $x > 0$, $y \neq 0$, el dominio es entonces

$$\Omega = \{(x, y) \mid x > 0,\ y \neq 0\}$$

y la función f está bien definida en Ω. Las funciones componentes se escriben explícitamente

$$f_1(x, y) = xy$$
$$f_2(x, y) = \ln xy^2$$
$$f_3(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$$

La figura 6.2 ilustra el dominio de la función. ▷

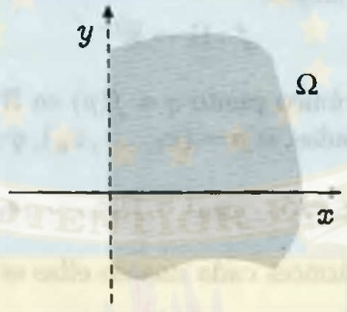


Figura 6.2. Dominio de $(x, y) \to \left(xy,\ \ln xy^2,\ \dfrac{y}{1+x^2}\right)$.

EJEMPLO 6.2. Sea la función vectorial de argumento real

$$\gamma(t) = (t^2 + 1, \sqrt{1-t}, \operatorname{sen} t)$$

Claramente, es una función real con valores en $\mathbb{R}^3$, esto es, de la forma $\Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

◁ Se condiciona la variable t a que $1 - t \geq 0$, lo que nos dice que $1 \geq t$, de donde el dominio de γ es entonces

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t \leq 1\} = (-\infty, 1]$$

Las funciones componentes de γ vienen dadas por

$$f_1(t) = t^2 + 1, \quad f_2(t) = \sqrt{1-t}, \quad f_3(t) = \operatorname{sen} t$$

La figura 6.3 ilustra la imagen de γ en el espacio de dimensión 3. ▷

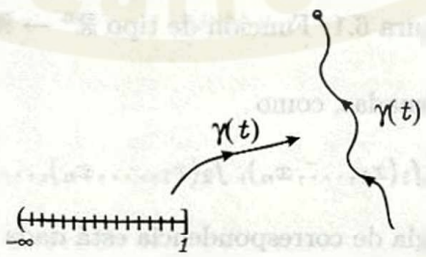


Figura 6.3. Curva como una función vectorial.

EJEMPLO 6.3. Sea la relación

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2, y + \ln xz)$$

Esta función está definida en una región espacial y toma valores en $\mathbb{R}^2$, esto es, f es de la forma $\Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

◁ Para calcular su dominio imponemos la condición $xz > 0$, lo que equivale a

$$\begin{cases} x > 0 & \text{y} \quad z > 0 \\ & \text{o} \\ x < 0 & \text{y} \quad z < 0 \end{cases}$$

lo que implica que el dominio es la región espacial

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x > 0 \text{ y } z > 0, \text{ o } x < 0 \text{ y } z < 0, \ y \in \mathbb{R}\}$$

Las funciones componentes del **campo vectorial** f son, en este caso

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2$$
$$f_2(x, y, z) = \ln xz + y$$

La figura 6.4 ilustra el dominio de la función, que es la unión de 4 octantes en $\mathbb{R}^3$. ▷

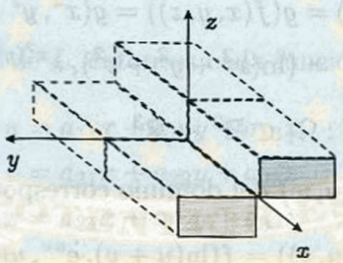


Figura 6.4. Dominio del campo $(x^2 + y^2, \ln xz + y)$.

EJEMPLO 6.4. La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por la regla de correspondencia

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

está definida en $\mathbb{R}^3$ $(n = 3, m = 1)$, y tiene sólo una función componente. ▷

Le damos una estructura aritmética al conjunto de funciones del tipo $\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mediante las propiedades vectoriales del codominio $\mathbb{R}^m$.

Si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ son dos funciones definidas en el mismo dominio en $\mathbb{R}^n$, se puede definir la suma de ellas $f + g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ como la función que en coordenadas del dominio y codominio se calcula mediante la regla

$$\begin{aligned}(f + g)(x_1, \ldots, x_n) &= f(x_1, \ldots x_n) + g(x_1, \ldots, x_n) \\ &= (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ &+ (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= (f_1(x_1, \ldots, x_n) + g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \\ &\cdots, f_m(x_1, \ldots x_n) + g_m(x_1, \ldots, x_n))\end{aligned}$$

Si λ es un escalar, se define la nueva función $\lambda f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ como aquella que en coordenadas se escribe

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x_1, \ldots, x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n) &= \lambda(f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots f_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= (\lambda f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \lambda f_m(x_1, \ldots, x_m))\end{aligned}$$

También definimos una categoría de las funciones vectoriales mediante la composición ordinaria de funciones.

Sean las funciones $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ de tal forma que la imagen de Ω bajo f esté contenida en V: $f(\Omega) \subset U$, entonces se define la composición de la función f con g (véase la figura 6.5), denotada por $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ a través de la igualdad

$$(g \circ f)(p) = g(f(p))$$

A continuación damos ejemplos de la composición de funciones vectoriales de argumento vectorial.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

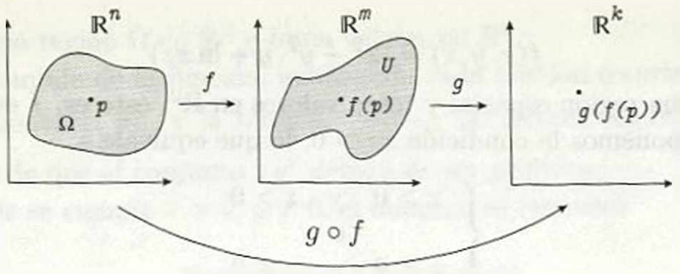


Figura 6.5. Composición de funciones vectoriales.

EJEMPLO 6.5. Sean las funciones vectoriales definidas por

$$f(x,y,z) = (x^2, y^2 + z^2)$$
$$g(u,v) = (\ln(u+v), e^{uv}, uv)$$

1. Calculemos $g \circ f$ en un punto arbitrario (x,y,z) del dominio de esta composición.

$$(g \circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(x^2, y^2 + z^2)$$
$$= (\ln(x^2 + y^2 + z^2),\ e^{x^2(y^2+z^2)}, x^2(y^2 + z^2))$$

de donde, la composición es del tipo $g \circ f : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

2. Calculamos $f \circ g$ en un punto arbitrario (u,w) del dominio correspondiente.

$$(f \circ g)(u,v) = f(g(u,v)) = f(\ln(u+v), e^{uv}, uv)$$
$$= (\ln^2(u+v),\ (e^{uv})^2 + (uv)^2) = (\ln^2(u+v),\ e^{2uv} + u^2v^2)$$

composición que tiene el tipo $f \circ g : \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 6.6. Calcule, si es posible, $g \circ f$. $f \circ g$ para las funciones vectoriales

$$f(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2}, xy + y^2\right), \quad g(u,v,w) = (uv - w,\ u + v + w)$$

1. Ciertamente $g \circ f$ no tiene sentido, pues la imagen de f es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, mientras que el dominio de g es la región espacial $\mathbb{R}^3$.

2. Para el punto (u,v,w) se cumple que

$$(f \circ g)(u,v,w) = f(g(u,v,w)) = f(uv - w, u + v + w)$$
$$= \left(\frac{u+v+w}{1 + (uv-w)^2}, (uv - w)(u + v + w) + (u + v + w)^2\right)$$

la cual es una función del tipo $f \circ g : \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Para optimizar la discusión sobre la continuidad de las funciones vectoriales de argumento vectorial apelamos a la siguiente definición que garantiza la continuidad de los campos vectoriales en los subsecuentes ejemplos.

DEFINICIÓN. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **continua** en Ω, si y sólo si, cada una de sus funciones coordenadas $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ es continua.

Ejercicios 6.1

Determine el dominio de cada una de las funciones de los ejercicios 1–4.

1. $f_1(x,y) = (x^2 + y^2, xy - x^2)$

2. $f_2(x,y) = \left(\sqrt{x^2 - y^2}, xy^3, \ln(xy)\right)$

3. $f_3(x,y,z) = \left(xyz^2, \frac{x}{yz}\right)$

4. $f_4(x, y, z) = (\text{arcsen}(x + y + z), xy, x^2 + y^2 + z^2)$

Utilizando las funciones de los ejercicios 1–4, calcule las composiciones indicadas en los ejercicios 5–9, cuando sea posible.

5. $f_3 \circ f_2$
6. $f_1 \circ f_3$
7. $f_3 \circ f_4$
8. $f_4 \circ f_3$
9. $f_4 \circ f_2$

6.2 Transformaciones lineales

De entre todas las funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se destacan las llamadas **transformaciones lineales**. Estas ayudarán a definir la diferenciabilidad de una función vectorial de variable vectorial.

Iniciamos el tratado básico con las transformaciones lineales más simples $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, obteniendo la mayor información para este tipo de transformaciones y argumentamos inductivamente la generalización de estos resultados para transformaciones lineales más generales del tipo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Sea la función $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$L(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$$

donde cada a_{ij} es un número real.

◁ Es claro que si u, v, w son las componentes de L, entonces cada función se escribirá

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

que matricialmente se escribe

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En otras palabras, si denotamos a los vectores variables dependiente e independiente como los vectores columna,

$$q = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},\ \mathbf{A} = (a_{ij}),\ p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la relación anterior se escribe en la forma

$$q = \mathbf{A}p = L(p)$$

En adelante, abusando de la notación, cada vez que apliquemos una transformación lineal a un vector, tomaremos a tal vector como un vector columna, escribiendo finalmente el resultado del cálculo como un vector renglón elemento del codominio.

Con esta asociación y con la convención de notación se tiene lo siguiente.

1. Si $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$ (considerados como vectores), entonces

$$L(p_1 + p_2) = \mathbf{A}(p_1 + p_2) = \mathbf{A}p_1 + \mathbf{A}p_2 = L(p_1) + L(p_2)$$

es decir, se cumple que

$$L(p_1 + p_2) = L(p_1) + L(p_2)$$

2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $L(\lambda p) = \mathbf{A}(\lambda p) = \lambda(\mathbf{A}p) = \lambda L(p)$, es decir, se satisface la igualdad,

$$L(\lambda p) = \lambda L(p)$$

DEFINICIÓN 6.7. La función L se dice que es una **transformación lineal** por satisfacer las propiedades 1 y 2 anteriores.

Hemos observado que una matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{3\times 3}$ tiene asociada una transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface las propiedades 1 y 2 de la definición 6.7. Recíprocamente, sea la transformación $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que satisface 1 y 2, es decir, es **lineal**, y sean los vectores canónicos en $\mathbb{R}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$, tal que todo punto (x, y, z) se escriba

$$(x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

Definamos a los vectores columna (escrita convencionalmente de esta manera),

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = L(e_1), \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = L(e_2), \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = L(e_3)$$

Afirmamos que la matriz construida por los vectores columna obtenidos, es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

está asociada a la transformación lineal L y la define cuando se evaluan los argumentos del dominio.

$\lhd$ En efecto, al tomar un punto (x, y, z) se tiene

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= L(xe_1 + ye_2 + ze_3) = L(xe_1) + L(ye_2) + L(ze_3) \\ &= xL(e_1) + yL(e_2) + zL(e_3) \\ &= x \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rhd \end{aligned}$$

Podemos generalizar esto para dimensiones m, n haciendo una reconstrucción similar a la utilizada para este caso especial. Una **transformación lineal** $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es aquella aplicación vectorial que satisface las condiciones 1 y 2 de la definición 6.7. Se obtiene el siguiente teorema general.

TEOREMA 6.8. *Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces existe una única matriz real de $m \times n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ asociada a L tal que para todo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se tiene que (utilizando la convención para el cálculo)*

$$L(x) = \mathbf{A}x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathbf{A}$ es tal que si $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ es la base en $\mathbb{R}^n$, entonces, al aplicar L al vector e_j es el vector columna

$$L(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

esto es, el j-ésimo vector columna de la matriz asociada $\mathbf{A}$.

$\lhd$ La unicidad del teorema se deja como un ejercicio para el lector. $\rhd$

Hasta aquí, el lector ya habrá observado que una transformación lineal tendrá en sus funciones componentes expresiones lineales en las variables, sin términos independientes.

En los siguientes ejemplos el lector deberá aprender a reconocer por simple inspección una transformación lineal, y a calcular su matriz asociada.

EJEMPLO 6.9. Sea la transformación $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$L(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

◁ Al considerar la matriz $\mathbf{A}$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y al punto (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ x + z \\ x + y \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $\mathbf{A}$ está asociada a L, lo que dice que L es una transformación lineal.

Más aún, si se toma la base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

entonces, al aplicar $\mathbf{A}$ en cada uno de ellos se obtiene

$$\mathbf{A}(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo que nos da los vectores columnas de la matriz $\mathbf{A}$. ▷

EJEMPLO 6.10. Sea la transformación $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(x, y) = (2x - y, 3x + 4y, 2x)$$

◁ Al considerar la matriz de 3×2 dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3x + 4y \\ 2x \end{pmatrix}$$

lo que indica que $\mathbf{A}$ está asociada a L.

Si se toman los vectores básicos $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, entonces tendremos los vectores columna de la matriz $\mathbf{A}$ mediante los cálculos

$$L(e_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$L(e_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ▷

EJEMPLO 6.11. Consideremos la transformación lineal

$$L(x, y, z) = (-x - y + z, 4z - 2x + 2y)$$

◁ Es claro que su matriz asociada en la base canónica es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \triangleright$$

EJEMPLO 6.12. Sea la transformación lineal

$$L(x, y, z) = 6x - 3y + 2z$$

◁ Si se considera el vector o matriz renglón

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 3}$$

para el punto (x, y, z), se tiene que

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \end{pmatrix}_{1\times 3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = 6x - 3y + 2z$$

lo que dice que $\mathbf{A}$ es la matriz asociada a la tranformación lineal L. $\triangleright$

Damos ahora una interpretación geométrica de una transformación lineal para el caso $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Si consideramos un vector $\mathbf{u}$ en el plano $\mathbb{R}^2$, éste puede escribirse como una **combinación lineal** de los vectores canónicos

$$\mathbf{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2$$

De esta manera, su imagen bajo L se escribiría como

$$L(\mathbf{u}) = L(u_1 e_1 + u_2 e_2) = L(u_1 e_1) + L(u_2 e_2) = u_1 L(e_1) + u_2 L(e_2)$$

lo que nos dice que la imagen de $\mathbf{u}$ es una combinación lineal de los vectores que son imágenes de los vectores canónicos en $\mathbb{R}^3$ (véase la figura 6.6).

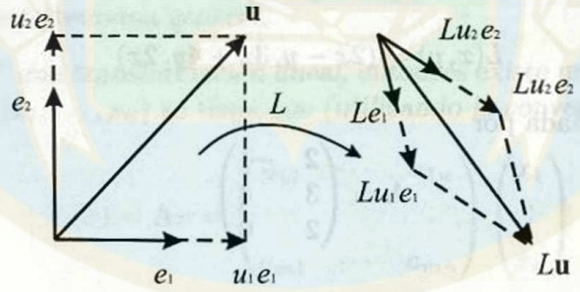


Figura 6.6. Geometría de una transformación lineal.

De esta manera, la imagen del cuadrado en el plano $\mathbb{R}^2$ generado por los vectores e_1, e_2 bajo la transformación L es el paralelogramo en $\mathbb{R}^3$ tendido sobre los vectores $L(e_1)$ y $L(e_2)$, como lo muestra la figura 6.6.

En general, si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es un vector posicionado en el origen, entonces $L(\mathbf{u})$ es también un vector en $\mathbb{R}^m$ posicionado en el origen.

Obtenemos ahora una matriz asociada a la composición de transformaciones lineales, en términos de las matrices asociadas a cada una de las transformaciones que intervienen en la composición. Lo hacemos apenas para el caso especial de las transformaciones lineales del tipo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, generalizando el resultado de manera natural.

Consideremos dos transformaciones lineales del plano en el plano, definidas por

$$L_1(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$
$$L_2(u, v) = (\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$

donde $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números reales.

◁ Al realizar su composición en un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tenemos

$$\begin{aligned}(L_2 \circ L_1)(x, y) &= L_2(L_1(x, y)) = L_2(ax + by, cx + dy) \\ &= (\alpha(ax + by) + \beta(cx + dy), \gamma(ax + by) + \delta(cx + dy)) \\ &= (\alpha ax + \alpha by + \beta cx + \beta dy, \gamma ax + \gamma by + \delta cx + \delta dy) \\ &= ((\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)y, (\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)y)\end{aligned}$$

Como se cumple la igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)y \\ ((\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)y \end{pmatrix}$$

entonces la matriz asociada a la composición $L_2 \circ L_1$ es

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

Por otro lado, las matrices asociadas a L_1 y L_2 son

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

respectivamente, y un cálculo prueba que el producto

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + d \end{pmatrix} = \mathbf{C}$$

lo que nos dice que la composición $L_2 \circ L_1$ tiene asociada al producto de matrices correspondientes en el mismo orden. ▷

Generalizamos la anterior discusión en el siguiente resultado.

TEOREMA 6.13. *Para una pareja de transformaciones lineales, $L_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y $L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ cuyas matrices asociadas son respectivamente $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n}$ y $\mathbf{B} = B_{n\times k}$, entonces la composición $L_2 \circ L_1$ tiene asociada a la matriz producto*

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}_{m\times n}\mathbf{A}_{n\times k} = C_{m\times k}$$

EJEMPLO 6.14. Consideremos las siguientes transformaciones lineales,

$$\begin{aligned}L_1(x, y) &= (2x - y,\ y + x,\ 4y) \\ L_2(x, y, z) &= (-x - y - z,\ z + 3x)\end{aligned}$$

◁ Las matrices asociadas respectivas a L_1 y L_2 son,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por el teorema 6.13, la matriz de la composición $L_2 \circ L_1$ es,

$$\mathbf{C} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, al aplicar convencionalmente en un vector se tiene

$$(L_2 \circ L_1)(x, y) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ 6x + y \end{pmatrix}$$

lo cual se puede escribir en forma transpuesta como

$$(L_2 \circ L_1)(x, y) = (-3x - 4y, 6x + y) \ \triangleright$$

EJEMPLO 6.15. Dadas las transformaciones lineales

$$\begin{aligned} L_1(x,y) &= (6x-2y, 3x+2y) \\ L_2(x,y) &= (-y, x) \\ L_3(x,y,z) &= \left(\frac{x}{2} - 2y + z, 6x - 4y, -x + 2z\right) \\ L_4(x,y,z) &= (x-y-z, x+y+z) \\ L_5(x,y) &= (2x+y, 2x-y, -3x+y) \end{aligned}$$

calcule $L_4 \circ L_3$, $L_3 \circ L_5$, $L_1(-3,4)$, $L_2(0,3)$ y $L_5(1,2)$.

◁ Calculamos $L_4 \circ L_3$, escribiendo, en primer lugar, las matrices correspondientes a cada transformación

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que a la composición $L_4 \circ L_3$ se le asocia el producto $\mathbf{A}_4\mathbf{A}_3$ donde

$$\mathbf{A}_4\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 2 & -1 \\ \frac{11}{2} & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos obtener la imagen de (x,y,z) bajo la transformación composición $L_4 \circ L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \in R^3$ como se muestra

$$\begin{aligned} (L_4 \circ L_3)(x,y,z) &= \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 2 & -1 \\ \frac{11}{2} & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{9x}{2} + 2y - z, \frac{11x}{2} - 6y + 3z\right) \triangleright \end{aligned}$$

◁ Para calcular $L_3 \circ L_5$, procedemos análogamente, asociando las otras matrices respectivas de las transformaciones

$$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y la del producto asociado a la composición $L_3 \circ L_5$

$$\mathbf{A}_3\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & \frac{7}{2} \\ 4 & 10 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

obteniendo la transformación lineal compuesta $L_3 \circ L_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que al ser aplicada en un vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nos da el vector puntualmente denotado

$$(L_3 \circ L_5)(x,y) = \begin{pmatrix} -6 & \frac{7}{2} \\ 4 & 10 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(6x + \frac{7}{2}y, 4x + 10y, -8x + y\right) \triangleright$$

◁ Si $L_1(x,y) = (6x - 2y,\ 3x + 2y)$, entonces, por la regla de aplicación mediante su matriz asociada

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

se tiene que (convencionalmente en el cálculo)

$$L_1(-3,4) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -26 \\ -1 \end{pmatrix} = (-26,-1)$$

Análogamente, los otros vectores se aplican en la misma forma

$$L_2(0,3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3,0)$$

$$L_5(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (4,0,-1) \triangleright$$

Ejercicios 6.2

Considere las transformaciones lineales en los ejercicios 1 y 2.

$L_1(x,y,z) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z)$
$L_2(u,v,w) = (u+3v+5w, 6u+7v+9w)$

1. Calcule $L_1 \circ L_2$ y $L_2 \circ L_1$ como se hizo en la sección anterior.
2. Ahora calcule $L_1 \circ L_2$ y $L_2 \circ L_1$, usando sus matrices asociadas en la base canónica.
3. Haga lo mismo que en los ejercicio 1 y 2 para las transformaciones lineales

   $L_3(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$

   $L_4(u,v,w) = (v+w, u+w, u+v)$

   es decir, calcule $L_3 \circ L_4$ y $L_4 \circ L_3$.

Considere las transformaciones lineales,

$L_5(x,y) = (2x-y, x+3y, x)$
$L_6(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z)$

y considere las transformaciones L_1, L_2, L_3 y L_4 de los ejercicios anteriores. Calcule las transformaciones lineales de los ejercicios 4–6.

4. $L_4 \circ L_5$
5. $L_5 \circ L_6$
6. $L_2 \circ L_5$

Calcule la aplicación de cada transformación lineal dada en el vector indicado usando las transformaciones lineales anteriores.

7. $L_5(\mathbf{u})$, si $\mathbf{u} = (-1,1)$
8. $L_6(\mathbf{u})$, si $\mathbf{u} = (1,0,1)$
9. $L_3(\mathbf{u})$, si $\mathbf{u} = (-1,2,3)$
10. $L_4 \circ L_5(\mathbf{u})$, si $\mathbf{u} = (1,2)$
11. $L_5 \circ L_6(\mathbf{u})$, si $\mathbf{u} = (3,-2,1)$

6.3 La matriz jacobiana

Comenzamos, en esta sección, a discutir la propiedad de diferenciabilidad de una función vectorial de variable vectorial, generalizando lo que se obtuvo para caso de funciones reales de variable vectorial, donde intervenía fuertemente la continuidad de las derivadas parciales que conforman el gradiente. El objeto matemático necesario para generalizar el gradiente viene dado por una matriz cuyas entradas, en cada punto, son las derivadas parciales de las funciones coordenadas, respecto a todas las variables independientes. Esta matriz lleva el nombre de **matriz jacobiana**.
Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que en coordenadas del codominio se escriba

$$f(p) = (f_1(p), \ldots f_m(p)), \text{ para } p \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Cada función componente es real de variable vectorial

$$\begin{cases} f_1 : \Omega \to \mathbb{R} \\ f_2 : \Omega \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ f_m : \Omega \to \mathbb{R} \end{cases}$$

Si cada función $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$ tiene un gradiente en el punto p para toda $i = 1,2,\ldots,m$

$$\nabla(f_i)_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(p), \ldots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(p) \right)$$

entonces podemos formar la siguiente matriz $m \times n$

$$Df_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}_{m\times n}$$

llamada la **matriz jacobiana** de la función f en el punto p.

Damos ahora algunos ejemplos en dimensiones bajas, esto es, para $n, m \leq 3$.

EJEMPLO 6.16. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la regla

$$f(x, y) = (x + y, x^2 y)$$

◁ La matriz jacobiana en cualquier $p \in \mathbb{R}^2$ es

$$Df_p \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}_p$$

debido a que las funciones componentes son $f_1(x, y) = x + y$ y $f_2(x, y) = x^2 y$. De esta manera, en el punto particular del dominio $p = (1, 2)$, se tiene la matriz jacobiana de 2×2

$$Df_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \triangleright$$

EJEMPLO 6.17. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por la regla

$$g(x, y) = (xy, \operatorname{sen} x, x^2 + y^2)$$

◁ Ya que las funciones coordenadas son $g_1(x, y) = xy$, $g_2(x, y) = \operatorname{sen} x$ y $g_3(x, y) = x^2 + y^2$, entonces en cualquier punto p del codominio se tiene una matriz jacobiana de 3×2

$$Dg_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} y & x \\ \cos x & 0 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}_p$$

Por ejemplo, si $(\pi, \pi/2)$ entonces, al evaluar se obtiene la matriz

$$Dg_{(\pi,\pi/2)} = \begin{pmatrix} y & x \\ \cos x & 0 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}_{(\pi,\pi/2)} = \begin{pmatrix} \pi/2 & \pi \\ -1 & 0 \\ 2\pi & \pi \end{pmatrix} \triangleright$$

Ejercicios 6.3

Calcule la matriz jacobiana de cada una de las funciones de los ejercicios 1–4.

1. $f_1(x, y) = (x^2 + y^2, xy - x^2)$
2. $f_2(x, y) = \left(\sqrt{x^2 - y^2}, xy^3, \ln(xy)\right)$
3. $f_3(x, y, z) = \left(xyz^2, \dfrac{x}{yz}\right)$
4. $f_4(x, y, z) = (\operatorname{arcsen}(x + y + z), xy, x^2 + y^2 + z^2)$

Calcule la matriz jacobiana en el punto p para cada una de las funciones de los ejercicios 5–8.

5. $f(x,y,z) = (x^2+y^2,\, x\cos yz)$ en $p = (1,0,\pi/2)$.

6. $f(x,y) = (e^x \operatorname{sen} x,\, e^y \cos x)$ en $p = (0,0)$.

7. $f(x,y,z)\left(\dfrac{x^2}{1+y}, 3x+z^2, y^2 z\right)$ en $p = (1,1,1)$.

8. $f(x,y) = (\ln xy, \operatorname{sen} xy, x^2+y)$ en $p = (2,1)$.

El determinante de la matriz jacobiana de una función de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se llama el jacobiano de la función.

9. Halle los puntos del dominio de la función del ejercicio 6 donde el jacobiano se anula.

10. Halle los puntos del dominio de la función del ejercicio 7 donde el jacobiano se anula.

6.4 Diferenciabilidad

Damos en este momento pauta para iniciar el estudio de la propiedad de diferenciabilidad de una función vectorial de argumento vectorial. Iniciamos recordando la definición de diferenciabilidad de un campo escalar, para luego extender la definición acorde a nuestros propósitos.

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función de variable real vectorial, entonces f es **diferenciable** en p, si existe una función g definida alrededor del vector $\mathbf{0}$, y un vector $\mathbf{w}$ tal que

$$\begin{cases} f(p+h) - f(p) = \mathbf{w}\cdot h + \|h\| g(h) \\ \text{y} \\ \lim\limits_{\|h\|\to \mathbf{0}} g(h) = 0 \end{cases}$$

◁ En realidad el vector de la definición dada en el capítulo 4 es el gradiente de la función en el punto p

$$\mathbf{w} = \nabla f_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

Esto es, f es diferenciable en $p \in \Omega$, si y sólo si se cumplen las condiciones

$$\begin{cases} f(p+h) - f(p) = \nabla f_p \cdot h + \|h\| g(h) \\ \text{y} \\ \lim\limits_{\|h\|\to \mathbf{0}} g(h) = 0 \end{cases}$$

Por otro lado, en coordenadas y matricialmente, éste se puede escribir como

$$\begin{aligned} \nabla f_p \cdot h &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_p \cdot (h_1, \ldots, h_n) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)_{1\times n} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \\ &= L_p(h) \end{aligned}$$

donde L_p es la **transformación lineal** asociada a la matriz (vector renglón)

$$\mathbf{A}_p = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right) \triangleright$$

Por lo tanto, la función f es diferenciable en $p \in \Omega$, si y sólo si existe una función g alrededor del vector $\mathbf{0}$ y una transformación lineal

$$L_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

tales que

$$\begin{cases} f(p+h) - f(p) = L_p(h) + \|h\| g(h) \\ \text{y} \\ \lim\limits_{\|h\|\to \mathbf{0}} g(h) = \mathbf{0} \end{cases}$$

De esta manera, hemos llevado nuestra definición original a la situación de utilizar el concepto de **transformación lineal** que ya conocemos, y que nos permite generalizar a la definición de diferenciabilidad de una función vectorial de argumento vectorial.

DEFINICIÓN 6.18. Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función vectorial de argumento vectorial y un punto $p \in \Omega$. Se dice que f es diferenciable en p si existen, una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y una transformación lineal $L_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tales que

$$\begin{cases} f(p+h) - f(p) = L_p(h) + \|h\| g(h) \\ \text{y} \\ \lim\limits_{\|h\| \to 0} g(h) = 0 \end{cases}$$

Se propone a continuación una condición necesaria y suficiente para la diferenciabilidad de una aplicación vectorial.

TEOREMA 6.19 (de diferenciabilidad). *Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es* **diferenciable** *en el punto p, si y sólo si la matriz jacobiana de f en p existe y las entradas*

$$Df_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_p, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2 \ldots, n$$

son continuas.

Esto es, cada función $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ es continua en p. En este caso la transformación lineal $L_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene asociada la matriz jacobiana.

$\lhd$ Ya que las entradas de la matriz jacobiana son continuas, entonces cada función $f_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el punto p.

Por lo tanto para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ existe una función $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaciendo que

$$\begin{cases} f_i(p+h) - f_i(p) = \nabla(f_i)_p \cdot h + \|h\| \, g_i(h) \\ \lim\limits_{\|h\| \to 0} g_i(h) = 0 \end{cases}$$

lo que se puede escribir matricialmente como

$$\begin{pmatrix} f_1(p+h) \\ f_2(p+h) \\ \vdots \\ f_m(p+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(p) \\ f_2(p) \\ \vdots \\ f_m(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla(f_1)_p \cdot h \\ \nabla(f_2)_p \cdot h \\ \vdots \\ \nabla(f_m)_p \cdot h \end{pmatrix} + \|h\| \begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla(f_1)_p \\ \nabla(f_2)_p \\ \vdots \\ \nabla(f_m)_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \|h\| \begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix}$$

$$= D_{f_p}(h) + \|h\| \begin{pmatrix} g_1(h) \\ g_2(h) \\ \vdots \\ g_m(h) \end{pmatrix}$$

Utilizando términos vectoriales, lo anterior se puede escribir como

$$f(p+h) - f(p) = Df_p(h) + \|h\| g(h)$$

Ya que para cada i se tiene que $\lim\limits_{\|h\| \to 0} g_i(h) = 0$, entonces para todo vector $g(h)$ se cumple que

$$\lim_{\|h\| \to 0} g(h) = (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}$$

Esto termina la prueba del teorema. $\rhd$

DEFINICIÓN 6.20. A la transformación lineal

$$L_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

se le llama la **diferencial** de la función f en el punto p. A su matriz asociada en la base canónica (**jacobiana**)

$$Df_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p$$

se le llamará la **derivada** de la función f en el punto p.

Observemos en realidad que la diferencial L_p está definida en los espacios tangentes ambientales

$$L_p : T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$$

y se aplica en los vectores de posición ξ en el espacio tangente ambiental $T_p\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{u} \to L_p(\mathbf{u})$$

bajo la matriz jacobiana Df_p.

Denotaremos por $L_p = df_p$ a la transformación lineal asociada a Df_p,

$$df_p : T_p\Omega \to T_{f(p)}R^m$$

que define una transformación lineal entre los espacios tangentes ambientales. Esto es, si $\mathbf{u}$ es un vector de $T_p\mathbb{R}^n$ entonces $df_p(\mathbf{u})$ es un vector de $T_{f(p)}R^m$ (véase la figura 6.7).

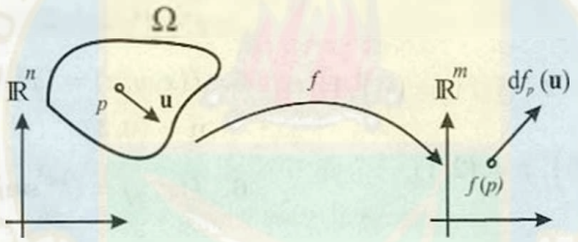


Figura 6.7. Aplicación de un vector $\mathbf{u}$ bajo la diferencial df_p.

A una función que es diferenciable en cada punto de su dominio se le llamará simplemente **diferenciable**.

EJEMPLO 6.21. Sea la función diferenciable

$$f(x, y) = (x\cos, \operatorname{sen} x)$$

el punto $p = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y el vector $\mathbf{u} = (-1, 2)$. Calcule $df_p(\mathbf{u})$.

◁ Calculamos la matriz jacobiana de la función en el punto p,

$$Df_p = \begin{pmatrix} \cos y & -x \operatorname{sen} y \\ x\cos z & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}_p$$

y la evaluamos en el punto $p = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, obteniendo,

$$Df_{(\pi/2,\pi)} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\pi/2 \operatorname{sen}\pi \\ \pi\cos\pi/2 & \operatorname{sen}\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para $\mathbf{u} = (-1, 2)$ se tiene, al aplicar convencionalmente, que

$$df_p(-1, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1, 2) \triangleright$$

EJEMPLO 6.22. Sean, la función diferenciable,

$$f(x,y) = (\ln xy, x^2 + y^2, \sqrt{xy})$$

el punto $p = (4,3)$, y el vector $\mathbf{u} = (2,1)$. Calcule $df_p(\mathbf{u})$.

◁ Calculamos la matriz jacobiana de la función en el punto arbitrario p,

$$Df_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ 2x & 2y \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix}_p$$

de donde, al evaluar en $p = (4,3)$ se tiene que

$$Df_{(4,3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 8 & 6 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 8 & 6 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, al aplicar en el vector $\mathbf{u} = (2,1)$ de manera convencional se obtiene.

$$df_{(4,3)}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 8 & 6 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 22 \\ \frac{5\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{6}, 22, \frac{5\sqrt{3}}{6}\right) \triangleright$$

Ejercicios 6.4

Calcule $df_p(\mathbf{u})$ para cada función, punto y vector de los ejercicios 1–7.

1. $f(x,y) = (x^2 + y^2, xy - x^2)$, $p = (2,-1)$, $\mathbf{u} = (-1,1)$.
2. $f_2(x,y) = \left(\sqrt{x^2 - y^2}, xy^3, \ln(xy)\right)$, $p = (2,1)$, $\mathbf{u} = (0,1)$.
3. $f_3(x,y,z) = \left(xyz^2, \frac{x}{yz}\right)$, $p = (2,1,1)$, $\mathbf{u} = (1,-1,2)$.
4. $f_4(x,y,z) = (\operatorname{arcsen}(x+y+z), xy, x^2 + y^2 + z^2)$, $p = (1/2, 1/2, 0)$, $\mathbf{u} = (3,-1,1)$.
5. $f(x,y,z) = (x^2 + y^2, x\cos yz)$, $p = (1,0,\pi/2)$, $\mathbf{u} = (0,3)$.
6. $f(x,y) = (e^x \operatorname{sen} x,\ e^y \cos x)$, $p = (0,0)$, $\mathbf{u} = (a,b)$.
7. $f(x,y,z)\left(\frac{x^2}{1+y}, 3x + z^2, y^2 z\right)$, $p = (1,1,1)$, $\mathbf{u} = (0,1,1)$.

6.5 Regla de la cadena

En el capítulo 4 dimos una versión general del teorema de diferenciabilidad, para la composición de funciones cuando eran del tipo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (véase el teorema 4.61). En esta sección damos un resultado más general acerca de la diferenciabilidad de la composición de funciones diferenciables del tipo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ (k, n, m enteros arbitrarios), llamada también **regla de la cadena** (véase la figura 6.8).

EJEMPLO 6.23. Sea la pareja de funciones vectoriales

$$f(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2}, xy + y^2\right)$$

$$g(u,v,w) = (uv - w,\ u + v + w)$$

◁ Las matrices jacobianas respectivas están dadas por

$$Df_q = \begin{pmatrix} \frac{-2xy}{(1+x^2)^2} & \frac{1}{1+x^2} \\ y & x + 2y \end{pmatrix}_q$$

$$Dg_p = \begin{pmatrix} v & u & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_p$$

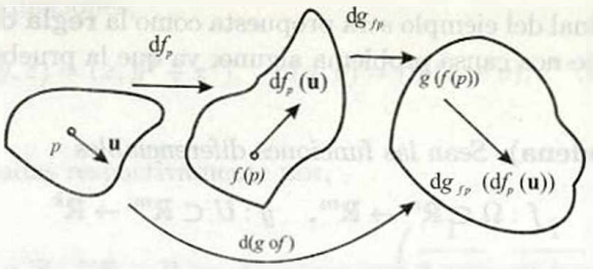


Figura 6.8. Regla de la cadena.

Observamos que sólo tiene sentido la composición dada por

$$f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

la cual ya ha sido calculada y está definida por la regla

$$(f \circ g)(u,v,w) = \left(\frac{u+v+w}{1+(uv \quad w)^2}, (u+v+w)(uv+u+v) \right)$$

y cuya matriz jacobiana de (2×3) se calcula en un punto $p \in \mathbb{R}^3$ mediante

$$D(f \circ g)_p = (b_{ij})$$

donde

$$b_{11} = \frac{1+(w-uv)(uv+w+2v^2+2vw)}{(1+(uv-w)^2)^2}$$

$$b_{12} = \frac{1+(w-uv)(uv+w+2u^2+2uw)}{(1+(uv-w)^2)^2}$$

$$b_{13} = \frac{1+(w-uv)(uv+w+2u+2v)}{(1+(uv-w^2)^2}$$

$$b_{23} = v^2+2u+2v+2uv+w+vw$$

$$b_{22} = u^2+2uv+2u+2v+uw+w$$

$$b_{23} = uv+u+v$$

y cuyo cálculo resulta ser muy complicado.

Por ejemplo, si se toma el punto $p = (1,1,1)$ entonces,

$$D(f \circ g)_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, sabiendo que $g(p) = g(1,1,1) = (0,3) = q$ se tendrá

$$Df_q = Df_{(0,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Dg_p = Dg_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pero al realizar el producto de matrices se tiene que

$$Df_q\, Dg_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 3 \end{pmatrix} = D(f \circ g)_p$$

lo que nos indica que

$$Df_q\, Dg_p = D(f \circ g)_p$$

Ya que el punto $q = g(p)$, entonces lo anterior se escribe de manera más explícita y en términos de p como

$$D(f \circ g)_p = Df_{g(p)}\, Dg_p \quad \triangleright$$

La fórmula que se ha obtenido al final del ejemplo será propuesta como la **regla de la cadena**. El enunciado será dado en términos de diferenciales, lo cual no nos causa problema alguno, ya que la prueba involucrará sus matrices jacobianas asociadas.

TEOREMA 6.24 (Regla de la cadena). *Sean las funciones diferenciables*

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

de tal forma que la imagen de Ω bajo la función f esté contenida en $U \subset \mathbb{R}^m$. Si $p \in \Omega$ es un punto arbitrario, entonces la función compuesta

$$g \circ f : \Omega \to U \to \mathbb{R}^k$$

es diferenciable en el punto p y la diferencial de tal composición en el punto p cumple la igualdad

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p$$

◁ Como las matrices asociadas a las diferenciales son las jacobianas, será suficiente con demostrar la igualdad

$$D(g \circ f)_p = Dg_{f(p)}\, Df_p.$$

Ya que f es diferenciable en $p \in \Omega$, existe una función $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\begin{cases} f(p+h) - f(p) = Df_p(h) + \|h\|\phi(h) \\ \lim\limits_{\|h\| \to 0} \phi(h) = 0 \end{cases}$$

Análogamente, como g es diferenciable en el punto $q \in U$, existe una función $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$ tal que

$$\begin{cases} g(p+k) - g(q) = Dg_q(k) + \|k\|\varphi(k) \\ \lim\limits_{\|h\| \to 0} \varphi(k) = 0 \end{cases}$$

Sea ahora, $q = f(p)$ y considérese el incremento $k = f(p+h) - f(p)$. Entonces,

$$k = f(p+h) - f(p) = Df_p(h) + \|h\|\phi(h)$$

y además

$$\begin{aligned} g(f(p+h)) = g(f(p)+k) = g(f(p)) + Dg_{f(p)}\left((Df_p(h) + \|h\|\phi(h)\right) \\ + \|Df_p(h) + \|h\|\phi(h)\|\psi\left(Df_p(h) + \|h\|\phi(h)\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la linealidad de $Dg_{f(p)}$ se tiene que

$$g(f(p+h)) - g(f(p)) = Dg_{f(p)}Df_p(h) + \varphi(h)$$

donde

$$\varphi(h) = \|h\|Dg_{f(p)}(\phi(h)) + \|Df_p(h) + \|h\|\phi(h)\|\psi(Df_p(h) + \|h\|\phi(h))$$

Como $\lim\limits_{|h| \to 0} \phi(h) = 0$ y $k \to 0 \iff h \to 0$, se tiene que $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \varphi(h) = 0$, sabiendo que $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\ell$.
De esta manera, se cumple la pareja de igualdades

$$\begin{cases} g(f(p+h)) - g(f(p)) = Dg_{f(p)}Df_p(h) + \varphi(h) \\ \lim\limits_{|h\| \to 0} \varphi(h) = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$\begin{cases} (g \circ f)(p+h) - (g \circ f)(p) = Dg_{f(p)}Df_p(h) + \varphi(h) \\ \lim_{\|h\| \to 0} \varphi(h) = 0 \end{cases}$$

lo que demuestra el teorema. ▷

EJEMPLO 6.25. Dada la pareja de funciones,

$$f(x,y,z)=(x,y^2+z^2),\quad g(u,v)=(\ln(u+v),e^{uv},uv)$$

calcule $D(f\circ g)_p$, donde $p=(1,1)$.

◁ Las matrices jacobianas están dadas respectivamente por,

$$Df_q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2y&2z\end{pmatrix}_q,\qquad Dg_p=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{u+v}&\dfrac{1}{u+v}\\ ve^{uv}&ue^{uv}\\ v&u\end{pmatrix}_p$$

Ya que $g(p)=g(1,1)=(\ln 2,e,1)=q$ se tiene

$$Df_{(\ln 2,e,1)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2e&2\end{pmatrix},\quad Dg_{(1,1,1)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ e&e\\1&1\end{pmatrix}$$

Por el teorema de la regla de la cadena 6.24, tenemos finalmente

$$D(f\circ g)_{(1,1)}=Df_{(\ln 2,e,1)}Dg_{(1,1)}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2e&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ e&e\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ 2e^2+2&2e^2+2\end{pmatrix}\ \triangleright$$

EJEMPLO 6.26. Sean $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$ una curva diferenciable y $w=f(x,y,z)$ una función arbitraria real de variable vectorial.

Si $\gamma(t)\subset\Omega$, siendo Ω el dominio de f en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$w(\gamma(t))=f(x(t),y(t),z(t))$$

es una función real de variable real diferenciable de la forma $w\circ\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

◁ Si $p=\gamma(t)$ es un punto sobre la curva, por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d(w(\gamma(t)))}{dt}=D(w\circ\gamma)_t=Dw_{\gamma(t)}D\gamma(t)=Df_{\gamma(t)}D\gamma(t)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\gamma(t)}\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\\ \frac{dz}{dt}\end{pmatrix}_t=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dy}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$=\nabla f_{\gamma(t)}\cdot\gamma'(t)$$

Notamos que esta igualdad es la que se obtiene en el capítulo 4 como caso especial de la regla de la cadena que se presentó en este capítulo. ▷

Ejercicios 6.5

1. Considere las funciones

$$g(x,y,z)=(xy,yz),\ f(u,w)=(2uw,u^2+w^2)$$

   a. Calcule $(f\circ g)(x,y,z)$ y $D(f\circ g)(x,y,z)$ directamente.

   b. Calcule $D(f\circ g)(x,y,z)$ utilizando la regla de la cadena.

2. Considere las funciones

$$f_1(x,y)=(x^2+y^2,xy-x^2)$$

$$f_2(x,y)=\left(\sqrt{x^2-y^2},xy^3,\ln(xy)\right)$$

$$f_3(x,y,z)=\left(xyz^2,\frac{x}{yz}\right)$$

$$f_4(x,y,z)=(\operatorname{arcsen}(x+y+z),xy,x^2+y^2+z^2)$$

Utilice la regla de la cadena para calcular la derivada que se pide en el punto indicado

a. $D(f_1 \circ f_3)(2,1,-1)$

b. $D(f_3 \circ f_2)(2,1)$

c. $D(f_3 \circ f_4)(1/4,1/4,0)$

6.6 Funciones inversas e implícitas

En esta sección mostramos dos de los resultados más importantes del Análisis matemático moderno, los teoremas de la **función inversa**, su variante el de la **función implícita**, y el de la **invarianza de dominio**. Aunque se omiten sus demostraciones, se ilustran sus alcances con ejemplos y se dan referencias para los lectores interesados en la parte teórica.

EJEMPLO 6.27. Consideremos el siguiente sistema lineal de ecuaciones de 3×3

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 2 \\ x \quad\quad + 8z = 3 \end{cases}$$

◁ Si se considera la matriz del sistema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

se tiene que $|\mathbf{A}| = -1$, de donde $\mathbf{A}$ es invertible con inversa

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

la cual puede ser calculada mediante el método de Gauss-Jordan.

Ya que el sistema dado puede escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

entonces el vector columna con las incógnitas puede despejarse mediante la multiplicación de $\mathbf{A}^{-1}$, esto es,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lo que nos indica que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto el punto con coordenadas $(x, y, z) = (3, -6 - 2)$ es la solución a tal sistema.

Veamos el problema desde otro ángulo.

Si consideremos la transformación lineal $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ asociada a la matriz $\mathbf{A}$, entonces el sistema de ecuaciones inicial puede ser visto mediante la ecuación funcional (con notación convencional)

$$L_{\mathbf{A}}(x, y, z) = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)$$

es decir, el problema consiste en encontrar un punto (x, y, z) del dominio de $L_{\mathbf{A}}$ tal que bajo la aplicación de la transformación tenga imagen el punto $(1, 2.3)$

$$L_{\mathbf{A}}(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

Por el proceso mostrado, se tiene que si $|\mathbf{A}| \neq 0$ y $L_{\mathbf{A}^{-1}}$ es la transformación lineal asociada a la matriz $\mathbf{A}^{-1}$, entonces el punto buscado es

$$(x, y, z) = L_{\mathbf{A}^{-1}}(1, 2, 3) = (3, -3, -2)$$

Si se analiza un sistema de ecuaciones más general,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = u \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = v \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = w \end{cases}$$

con la matriz asociada al sistema dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces, una condición para que el sistema tenga solución para las incógnitas (x, y, z) en términos de los números (u, v, w) es que $|\mathbf{A}| \neq 0$. Si este es el caso y se denota por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

entonces la solución al sistema de ecuaciones viene dado por la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

En términos funcionales, si $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la tranformación lineal asociada a la matriz $\mathbf{A}$ y $L_{\mathbf{A}^{-1}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal asociada a la matriz $\mathbf{A}^{-1}$, el sistema de ecuaciones en las incógnitas (x, y, z) y su solución en términos de (u, v, w) vienen dados por la equivalencia funcional

$$L_{\mathbf{A}}(x, y, z) = (u, v, w) \Longleftrightarrow (x, y, z) = L_{\mathbf{A}^{-1}}(u, v, w)$$

Esta equivalencia señala explícitamente las propiedades de invertibilidad de cada transformación lineal mencionada. De hecho, de la igualdad $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, se tiene que

$$L_{\mathbf{A}} \circ L_{\mathbf{A}^{-1}} = L_{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}} = L_{\mathbf{I}} = \mathbf{I}$$

$$L_{\mathbf{A}^{-1}} \circ L_{\mathbf{A}} = L_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}} = L_{\mathbf{I}} = \mathbf{I}$$

lo que nos dice que $L_{\mathbf{A}}$ y $L_{\mathbf{A}^{-1}}$ son mutuamente inversas y que

$$L_{\mathbf{A}^{-1}} = (L_{\mathbf{A}})^{-1} \triangleright$$

Este problema de invertibilidad se puede formular en términos más generales, cuando se tiene una función vectorial de variable vectorial.

Como se entiende del ejemplo precedente, las funciones inversas sirven como operaciones de cancelamiento o despeje (véase capítulo 1 de Reyes [10]).

DEFINICIÓN 6.28. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial de variable vectorial. La función $g : f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n \to \Omega$ se dice ser una **función inversa** de la función f si se cumple que

$$f \circ g : f(\Omega) \to \Omega \to f(\Omega) \text{ es tal que } f \circ g = I$$
$$g \circ f : \Omega \to f(\Omega) \to \Omega \text{ es tal que } g \circ f = I$$

siendo I la función identidad correspondiente (véase la figura 6.9).

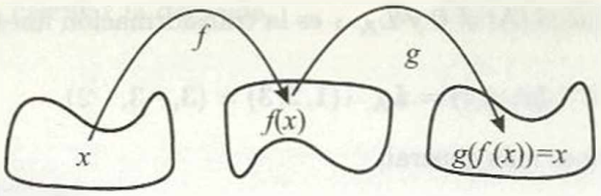


Figura 6.9. Invertibilidad de una función.

EJEMPLO 6.29. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la regla

$$f(x, y) = (e^x \cos y,\ e^x \operatorname{sen} y)$$

◁ Si se escriben las coordenadas de la imagen,

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \operatorname{sen} y$$

entonces, al dividir la segunda ecuación por la primera se obtiene

$$y = \arctan \frac{v}{u}$$

Si se elevan al cuadrado las igualdades en ambos miembros y se suman los lados respectivos, se tendría que

$$u^2 + v^2 = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \operatorname{sen}^2 y = e^{2x}$$

lo que implica que

$$x = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$$

De esta manera, a base de un cálculo realizado mediante despejes, se obtiene una función

$$(x, y) = g(u, v) = \left(\ln \sqrt{u^2 + v^2}, \arctan \frac{v}{u}\right)$$

la cual tiene un dominio de definición

$$D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \mid u \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{eje } v\}$$

En otras palabras, bajo esta regla g obtenida, no todo punto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ acepta solución para la equivalencia

$$f(x, y) = (u, v) \iff (x, y) = g(u, v)$$

Por eso es que llamamos a g una función inversa de f.
Otro cálculo simple nos muestra que la función

$$h(u, v) = \left(\ln \sqrt{u^2 + v^2}, \operatorname{arccot} \frac{u}{v}\right)$$

es una función obtenida mediante el método similar, y que es inversa para f definida en el conjunto

$$D_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{eje } u\}$$

Lo que sí es claro es que un cálculo directo nos mostraría que, en el conjunto

$$D_1 \cap D_2 = D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{ejes } u, v\}$$

las funciones h y g coinciden en sus valores. ▷

EJEMPLO 6.30. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $p \in D$ un punto regular de f, es decir la derivada $f'(p)$ no se anula.

◁ Por el teorema de la función inversa (capítulo 3 de [10]) se tiene que existen intervalos J_p alrededor de p y J_q alrededor de $q = f(p)$ de tal forma que la restricción de la función f a esos intervalos

$$f : J_p \to J_q$$

es invertible y su inversa es diferenciable. Más aun, si $g : J_q \to J_p$ es la función inversa local de f alrededor de $q = f(p)$, entonces la ecuación

$$(g \circ f)(x) = x$$

implica por la regla de la cadena que

$$1 = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Al evaluar en $x = p$ se tiene que la derivada de la función inversa g en el punto $q = f(p)$ se calcula

$$g'(q) = (f'(p))^{-1} = \frac{1}{f'(p)}$$

Decimos en este caso que la función f es un **difeomorfismo** local, pues tiene una inversa local g que también es diferenciable. ▷

Generalizamos estos conceptos a dimensiones mayores.

DEFINICIÓN 6.31. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ una función vectorial de variable vectorial de clase C^r.

1. f se dice ser un **difeomorfismo local** de clase C^r en el punto $p \in \Omega$, si existen vecindades U_p alrededor de p en Ω y V_q alrededor de $q = f(p)$ en $f(\Omega)$ tal que la restricción

   $$f : U_p \to V_q$$

   es invertible y la función inversa local de f denominada por $g : V_q \to U_p$ es también de clase C^r.

2. f se dice un **difeomorfismo local de clase** C^r si es un difeomorfismo local de clase C^r es cada punto de su dominio.

3. f se dirá un **difeomorfismo de clase** C^r si es un difeomorfismo local de clase C^r y como función es invertible, es decir, existe una función inversa $g : f(\Omega) \to \Omega$ tal que es de clase C^r.

El siguiente resultado generaliza el ejemplo precedente y nos provee de una gran cantidad de difeomorfismos locales de clase C^r. La prueba se omite, pero el lector interesado puede referirse al trabajo de Lima [7].

TEOREMA 6.32 (de la función inversa local). *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^r (r \geq 1)$ y $p \in \Omega$ un punto tal que la matriz jacobiana*

$$\mathbf{A} = Df_p = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_p$$

tenga un determinante no nulo, $|\mathbf{A}| \neq 0$. Entonces f es un difeomorfismo local de clase C^r en p. Esto es, en una vecindad de p y en otra vecindad de $q = f(p)$, la función tiene una inversa g que es de clase C^r.

Más aun, si $q = f(p)$ es la imagen, se tiene que la matriz jacobiana de g en q se calcula invirtiendo la matriz Df_p, es decir

$$Dg_q = (Df_p)^{-1}$$

EJEMPLO 6.33. Considerar nuevamente la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$$

analizada en el ejemplo 6.29, de la cual no se puede obtener una función inversa global explícita.

◁ Sea $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto arbitrario del dominio. Su matriz jacobiana viene dada por

$$Df_p = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

lo que nos dice que

$$|Df_p| = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

Por lo tanto, la función f es un difeomorfismo local en cada punto y, dependiendo de éste, tendrá una función inversa local como alguna de las dos que se encontraron anteriormente, según la forma de despejar las variables. ▷

DEFINICIÓN 6.34. Dada la matriz jacobiana en un punto p de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^r, denotada por Df_p, a su determinante $|Df_p|$ le llaman el **jacobiano** de la función f en el punto p y lo denotamos por Jf_p, es decir

$$Jf_p = |Df_p|$$

Así, repasamos el teorema de la función inversa 6.32 diciendo que una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^r cuyos jacobianos no se anulan en todo el dominio es localmente invertible (difeomorfismo de clase C^r).

Para optimizar cálculos utilizaremos la notación clásica que utiliza subíndices variables para denotar la derivación parcial. Por ejemplo,

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

denotarán derivación parcial respecto a la variable indicada.

Por otro lado, si una función $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es denotada por

$$(y_1 \ldots, y_n) = f(x_1 \ldots, x_n),$$

el jacobiano de f en el punto p se denotará por

$$Jf_p = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|_p = \frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1 \ldots, x_n)}(p)$$

EJEMPLO 6.35. En la función suave $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(u, v) = f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \triangleleft \quad u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y \\ v_x &= \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \\ Jf_p &= \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \end{aligned}$$

Particularmente, en el punto $p = (1, 1)$ se tiene que

$$Jf_{(1,1)} = e^2$$

lo cual implica que f es invertible alrededor del punto $(1, 1)$ con una inversa local

$$g(u, v) = \left(\ln \sqrt{u^2 + v^2}, \arctan \frac{u}{v}\right)$$

definida alrededor del punto $f(1, 1) = (e \cos 1, e \operatorname{sen} 1)$ $\triangleright$

EJEMPLO 6.36. Sea la función

$$f(x, y, z) = (xz, xy, yz)$$

Verifique su invertibilidad alrededor del punto $p = (-1, 1, -1)$.

$\triangleleft$ Si denotamos por $(u, v, w) = f(x, y, z) = (xz, xy, yz)$, es decir

$$u = xz, \quad v = xy, \quad w = yz$$

entonces

$$Jf_p = \frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{vmatrix} = 2xyz$$

De esta manera, el jacobiano se anula solamente en los planos coordenados $x = y = z = 0$.

Por lo tanto $Jf_{(-1,1,-1)} = 2 \neq 0$, lo que nos dice que f es invertible en una localidad del punto $(-1, 1, -1)$, y procedemos a calcular en este caso una función inversa local de f.

De las ecuaciones $u = xz$, $v = xy$ se obtiene que $uv = x^2zy$. Al utilizar ahora $w = yz$ en $uv = x^2zy$ se tiene que $uv = x^2w$, lo que nos dice que

$$x^2 = \frac{uv}{w} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{uv}{w}}$$

Análogamente se obtienen

$$y = \pm\sqrt{\frac{vw}{u}},\ z = \pm\sqrt{\frac{uw}{v}}$$

Ya que $q = (1,-1,-1) = f(-1,1,-1)$ está en el dominio para cualquier elección de signos, se tiene que una inversa local g tiene la forma

$$g(u,v,w) = \left(-\sqrt{\frac{vv}{w}}, \sqrt{\frac{vw}{u}}, -\sqrt{\frac{uw}{v}}\right)$$

en virtud de los signos de $p = (-1,1,-1)$. ▷

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región con frontera y sea $f : \Omega \to f(\Omega)$ un **difeomorfismo global**, esto es, una función diferenciable, invertible con una inversa diferenciable $g : f(\Omega) \to \Omega$. El siguiente resultado, cuya prueba se omite (pues requiere de las herramientas de la **Topología Igebraica**), nos indica que los puntos interiores de Ω bajo la aplicación de f son llevados al interior de $f(\Omega)$, y los puntos de la frontera de Ω son llevados en la frontera de $f(\Omega)$ (véase la figura 6.10).

TEOREMA 6.37 (de la invarianza del dominio). *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región con frontera $\partial\Omega$ y $f : \Omega \to f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo global. Entonces $f(\Omega)$ es una región con frontera en $\mathbb{R}^n$. Los puntos interiores de Ω son llevados bajo f en puntos interiores de $f(\Omega)$ y los puntos frontera en $\partial\Omega$ son llevados bajo f en la frontera $\partial f(\Omega)$*(véase la figura 6.10).

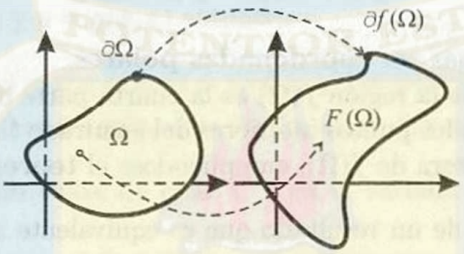


Figura 6.10. Teorema de invarianza del dominio.

EJEMPLO 6.38. Sea la función $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = (ax, by) = (u,v),\ \text{con } a,b > 0$$

◁ Si se considera la región circular con frontera conformada por el disco unitario de radio 1

$$\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

se tiene que bajo la función f la región Ω es transformada en la región elipsoidal con frontera

$$f(\Omega) = \left\{(u,v) \,\middle|\, \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

De las ecuaciones

$$u = ax, \quad v = by$$

se obtienen las coordenadas inversas

$$x = \frac{u}{a}, \quad y = \frac{v}{b}$$

que dan una función inversa $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(u,v) = \left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) = (x,y)$$

Claramente la función $f : \Omega \to f(\Omega)$ es un difeomorfismo que lleva el interior del disco Ω en el interior del elipsoidal $f(\Omega)$, llevando la frontera del disco $x^2 + y^2 = 1$ en la elipse $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, cumpliéndose el teorema de la invarianza del dominio 6.37 (véase la figura 6.11). ▷

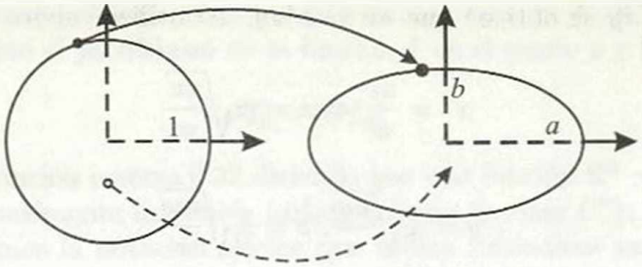


Figura 6.11. Ejemplo del teorema de invarianza del dominio.

EJEMPLO 6.39. Consideremos la transformación $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

donde un punto $p = (r,\varphi)$ toma unidades en números positivos para la primera coordenada y en radianes para la segunda.

◁ Sea Ω la región con frontera en el plano $\mathbb{R}^2$ dada por el cuadrado

$$\Omega = \{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi/4\}$$

entonces de la definición de la función f es claro que en coordenadas x, y del codominio, las relaciones se escriben

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

que es el cambio de coordenadas cartesianas por **coordenadas polares**.

Una simple inspección nos muestra que la región $f(\Omega)$ es la cuarta parte del círculo unitario en el primer cuadrante, con la frontera incluida. Aquí nuevamente los puntos interiores del cuadrado Ω son llevados en los interiores de $f(\Omega)$ bajo la función f, y la frontera de Ω en la frontera de $f(\Omega)$, cumpliéndose el **teorema de invarianza de dominio** 6.37. ▷

Ahora damos paso a la demostración de un resultado que es equivalente al teorema de la función inversa, y que en virtud de que ya se conoce éste, se presenta como una consecuencia: el **teorema de la función implícita**. Iniciamos la discusión con un ejemplo.

EJEMPLO 6.40. Sea la función en dos variables

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

◁ Si $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es un valor arbitrario, se tiene que la curva de nivel $f^{-1}(c)$ está dada por la ecuación $x^2 + y^2 = c$. Sea $(x,y) \in f^{-1}(c)$, entonces al despejar la variable y se tiene que $y = \pm\sqrt{c - x^2}$.

Si y es una coordenada positiva, entonces $y = \sqrt{c - x^2} = h(x)$.

De esta manera la variable y se puede escribir localmente como una función $y = h(x)$ en los puntos $(x,y) \in f^{-1}(c)$, es decir, para tales puntos

$$c = f(x,y) = f(x,h(x))$$

la función $y = h(x)$ se llama una **función implícita** para la función f.

Observamos que la derivada implícita y' se calcula mediante la derivación de la igualdad $x^2 + y^2 = c$, es decir,

$$2x + 2yy' = 0$$

o equivalentemente,

$$y' = \frac{-2x}{2y} = \frac{x}{y} = \frac{-x}{h(x)} = \frac{-x}{\sqrt{c - x^2}}$$

la cual tiene sentido para $-\sqrt{c} < x < \sqrt{c}$.

Por ejemplo, si $x = 0$, entonces $y = \sqrt{c}$, de donde en el punto $(0,\sqrt{c})$ se tendría una pendiente $y'(0) = 0$. ▷

Enunciamos y demostramos el teorema de la función implícita para dos variables. La generalización se muestra con ejemplos subsecuentes.

TEOREMA 6.41 (de la función implícita). *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^r y sea $p = (a, b) \in \Omega$ tal que $f(a, b) = c$ y tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Entonces existe una función $y = h(x)$ de clase C^r definida en una vecindad del punto $x = a$ en $\mathbb{R}$, tal que $h(a) = b$ y todos los puntos de su gráfica están contenidos en el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$, es decir, si $(x, y) = (x, h(x))$ está en la gráfica de h en el plano, entonces*

$$c = f(x, y) = f(x, h(x))$$

◁ Sea la función definida por $\phi(x, y) = (x, f(x, y))$. Se tiene que

$$D\phi_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}_p$$

donde f_x es la derivada parcial de f en la variable x, y f_y la derivada parcial de f respecto a la variable y. De esto, el jacobiano es

$$Jf_p = f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$$

y por el teorema de la función inversa, existen una vecindad de p en Ω y una vecindad de $q = f(p)$ donde está definida para ϕ una función inversa local ψ de clase C^r.

Sean las coordenadas (x, z) en el codominio de ϕ y póngase

$$\psi(x, z) = (x, g(x, z))$$

Si además se denotan por $z = f(x, y)$ y $y = g(x, z)$ entonces

$$(x, y) = \psi \circ \phi(x, y) = \psi(\phi(x, y)) = \psi(x, f(x, y))$$
$$(x, z) = \phi \circ \psi(x, z) = \phi(\psi(x, z)) = \phi(x, g(x, z))$$

Definamos para $c = f(a, b)$, la función suave de clase C^r, en la variable x en una vecindad de $x = a$, mediante la igualdad

$$h(x) = g(x, c)$$

se tiene entonces que

$$\phi(x, h(x)) = \phi(x, g(x, c)) = \phi(\psi(x, c)) = (x, c)$$

y por otro lado, para x en la vecindad de $x = a$ se cumple la igualdad

$$\phi(x, h(x)) = (x, f(x, h(x)))$$

de donde necesariamente $f(x, h(x)) = c$.

Ya que $c = f(a, b)$ y $f(a, h(a)) = c$, entonces $h(a) = b$ lo que termina la prueba del teorema (véase la figura 6.12). ▷

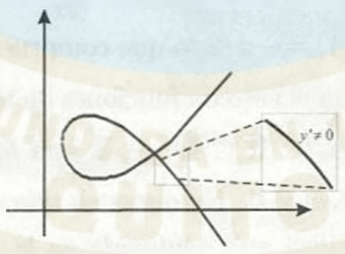


Figura 6.12. Teorema de la función implícita en dos variables.

Observemos que para este caso, si sobre la curva de nivel $f(x, y) = c$ la variable y se puede escribir implícitamente por la función $y = h(x)$ en la vecindad del punto $(x = a, y = b)$, entonces al derivar parcialmente la ecuación de la curva de nivel $f(x, y) = c$ respecto a la variable x se obtiene la derivada implícita ordinaria $y' = h'(x)$ respecto a x.

◁ Si $f(x, y) = c$, entonces por la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

o equivalentemente, sabiendo que $y = h(x)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

que se puede escribir $f_x + f_y y' = 0$.

De esta manera

$$y' = -\frac{f_x}{f_y}$$

sabiendo que $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. ▷

EJEMPLO 6.42. Sea la función en dos variables dada por

$$f(x, y) = x \cos xy$$

◁ Al calcular la derivada parcial respecto a la variable y se tiene

$$f_y(x, y) = -x^2 \operatorname{sen} xy$$

y particularmente en el punto $p = (1, \pi/2)$, obtenemos

$$f_y(1, \pi/2) = 1 \neq 0.$$

De aquí, por el teorema de la función implícita 6.41, existe una función $y = h(x)$ en la cercanía de $x = 1$, tal que $h(1) = \pi/2$ y tal que la derivada de tal función en $x = 1$ se calcula por

$$y'(1) = -\frac{f_x}{f_y}(1, \pi/2) = \frac{\cos xy - xy \operatorname{sen} xy}{-x^2 \operatorname{sen} xy}(1, \pi/2) = -\frac{\pi}{2}$$

Procedamos a calcular en este caso la función implícita resolviendo el caso general para las curvas de nivel. Si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$f(x, y) = x \cos xy = c$$

implica que, si $x \neq 0$, se tiene que

$$\cos xy = \frac{c}{x}$$

o equivalentemente, al despejar la variable y obtenemos

$$y = \frac{1}{x} \arccos \frac{c}{x}$$

En consecuencia, si $x = 1$, $y = \pi/2$ entonces $c = f(1, \pi/2) = 0$, de donde se obtiene el valor de la constante, $c = 0$ y la función buscada es

$$y = h(x) = \frac{1}{x} \arccos(0) = \frac{\pi}{2x}$$

cuya derivada es

$$y' = h'(x) = -\frac{\pi}{2x}$$

De esta manera, $y = h(1) = \pi/2$ y $y' = h'(1) = -\pi/2$ lo que comprueba nuestros cálculos. ▷

El **teorema de la Función Implícita** para el caso de funciones de tres variables se establece de la siguiente manera.

TEOREMA 6.43 (función implícita). *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^r y sea $p = (a, b, c)$ un punto arbitrario de Ω tal que $f(a, b, c) = d$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$. Entonces en una vecindad del punto (a, b) en el plano, existe una función $z = h(x, y)$ de clase C^r tal que su gráfica está contenida en la superficie de nivel $f(x, y, z) = d$. Esto es, para puntos (x, y) cercanos del punto (a, b) se tiene que*

$$f((x, y), h(x, y)) = d \quad y \quad h(a, b) = c$$

Más aun se cumplen las siguientes igualdades para las derivadas parciales de h

$$\frac{\partial h}{\partial x}(a, b) = -\frac{f_x}{f_z}(a, b, c)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(a, b) = -\frac{f_y}{f_z}(a, b, c)$$

El siguiente ejemplo muestra que en general no se puede calcular explícitamente la función h, sino que apenas se muestra su existencia.

EJEMPLO 6.44. Sea la función

$$f(x,y,z) = z^3 - z - xy\operatorname{sen} z$$

Mostrar que en una vecindad del punto $(0,0,0)$ la variable z se puede poner en función de las otras dos variables sobre la superficie de nivel

$$f(x,y,z) = f(0,0,0) = 0$$

◁ Calculamos la derivada parcial de f respecto a z en el punto $(0,0,0)$, obteniendo

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 3z^2 - 1 - xy\cos z\Big|_{(0,0,0)} = -1 \neq 0$$

y por el teorema de la función implícita 6.43, existe en una vecindad del punto $(0,0)$ en el plano, y una función $z = h(x,y)$ de clase C^r tal que.

$$h(0,0) = 0 \quad \text{y} \quad f(x,y,h(x,y)) = f(0,0,0) = 0$$

Por otro lado, las derivadas parciales de h en el punto $(0,0)$ se calculan

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = -\frac{f_x}{f_z}(0,0,0) = \frac{y\operatorname{sen} z}{3z^2 - 1 - xy\cos z}(0,0,0) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = -\frac{f_y}{f_z}(0,0,0) = \frac{x\operatorname{sen} z}{3z^2 - 1 - xy\cos z}(0,0,0) = 0$$

Al tratar de encontrar la función $z = h(x,y)$ a partir de la superficie de nivel $z^3 - z - xy\operatorname{sen} z = 0$, podemos observar que no es simple despejar a z en términos de las otras variables (x,y), lo que nos muestra que, en general, la función h mencionada en el teorema 6.43 no es fácil de encontrar. ▷

Ejercicios 6.6

¿Cuáles de las funciones de los ejercicios 1–5 pueden invertirse localmente en el punto que se indica?

1. $f(x,y) = (x^2y + 1, x^2 + y^2)$ en $p = (1,1)$.
2. $f(x,y) = (x^2 + y^2, \sqrt{y} + \sqrt{x})$ en $p = (4,16)$.
3. $f(x,y) = (e^{xy}, \ln x)$ en $p = (1, \ln 2)$.
4. $f(x,y,z) = (xz, xy, yz)$ en $p = (1,4)$.
5. $f(x,y,z) = (y\cos x, y\operatorname{sen} x, z)$ en $p = (\pi/4, 4, 3)$.
6. Demuestre que la función

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

tiene inversa en todo punto $(a,b) \neq (0,0)$. Calcule explícitamente f^{-1}.

7. Demuestre que la función

$$h(x,y)\,(e^x + e^y, e^x - e^y)$$

es localmente invertible en todo punto (a,b). Calcule explícitamente h^{-1}.

8. Demuestre que la función $f(x,y) = (x^3, y^5)$ tiene inversa global g, la cual puede calcularse fácilmente, sin embargo $Df(0,0)$ es una matriz no invertible, ¿qué nos dice esto último sobre $Dg(0,0)$?

Para cada uno de los ejercicios 9–12 muestre que la función $f(x,y) = c$ define una función implícita $y = h(x)$ alrededor del punto dado $p = (a,b)$. También calcule $y' = h'(a)$.

9. $f(x,y) = y\cos xy$ en $p = (\pi/2, 1)$.
10. $f(x,y) = xe^y - y + 4$ en $p = (-2,1)$.
11. $f(x,y) = xy + y^4 + x^4$ en $p = (1,-1)$.
12. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ en $p = (1,1)$.

Para cada uno de los ejercicios 13–15 muestre que la función $f(x,y,z) = c$ define una función implícita $z = h(x,y)$ en una vecindad del punto $p = (a,b,c)$. También calcule las derivadas $\dfrac{\partial h}{\partial x}(a,b)$ y $\dfrac{\partial h}{\partial y}(a,b)$.

13. $f(x,y,z) = z - z^3 + xy\operatorname{sen} z$ en $p = (0,0,\pi/2)$.
14. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ en $p = (1,1,1)$.
15. $f(x,y,z) = x - y + 2z - e^{xyz}$ en $p = (0,1,1)$.
16. Si $f(x,y,z)$ define cada variable implícitamente como función de las otras dos, demuestre que (vea el ejercicio 16, sección 4.5)

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

CAPÍTULO

7 Sistemas de coordenadas

7.1 Regiones del espacio $\mathbb{R}^3$

En muchas ocasiones, el sistema cartesiano de coordenadas no es bueno para describir objetos geométricos o mecánicos que están incluidos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Debido a lo anterior es conveniente utilizar otro tipo de coordenadas que describen con fórmulas más simples tales objetos. De esta forma, si se conocen las coordenadas que se van a utilizar en lugar de las cartesianas, justo es que se establezca una relación biunívoca entre las colecciones correspondientes a tales sistemas.

Cabe mencionar que en muchas ocasiones, tal relación biunívoca entre tales sistemas puede establecerse en subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$) llamada **región**.

Considérese un sistema de coordenadas euclidianas, x, y, z para un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

DEFINICIÓN 7.1. El subconjunto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

1. se llamará una **región sin frontera**, si para cada punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ existe un número positivo $\epsilon > 0$ tal que todo punto $p = (x, y, z)$ que verifica las desigualdades

$$|x - x_0| < \epsilon, \ |y - y_0| < \epsilon, \ |z - z_0| < \epsilon$$

también está contenido en Ω.

2. se llamará **región con frontera** si es una región sin frontera a la cual se le adhieren sus puntos frontera. Un **punto frontera** $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ de Ω es aquel de tal forma que, para cualquier número positivo $\epsilon > 0$, existe un punto $(x, y, z) \in \Omega$ satisfaciendo las desigualdades

$$|x - q_1| < \epsilon, \ |y - q_2| < \epsilon, \ |z - q_3| < \epsilon$$

así como un punto $(u, v, w) \in \Omega^c$ que cumple las desigualdades

$$|u - q_1| < \epsilon, \ |v - q_2| < \epsilon, \ |w - q_3| < \epsilon$$

En adelante, entenderemos por una **región** un conjunto abierto conexo de $\mathbb{R}^3$ (vea la figura 7.1).

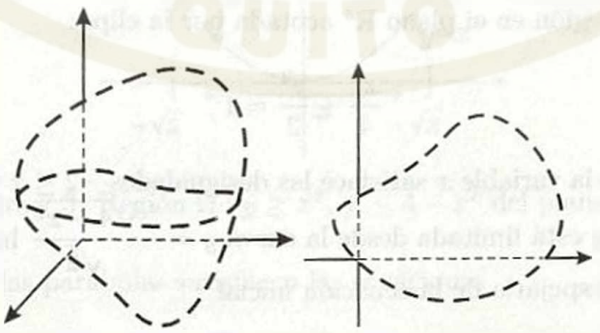


Figura 7.1. Regiones en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

LEMA 7.2. *Considérese cualquier función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciable (de clase C^1). Entonces*

1. *Para $c \in \mathbb{R}$, el conjunto*

$$\Omega_c = f^{-1}(-\infty, c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) < c\}$$

es una región abierta de $\mathbb{R}^3$.

2. *La cerradura de Ω definida por*

$$\overline{\Omega}_c = f^{-1}(-\infty, c] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) \leq c\}$$

es una región con frontera de $\mathbb{R}^3$.

◁ El lector puede verificar esto directamente de la definición y omitimos su prueba. ▷

EJEMPLO 7.3. Consideremos la función diferenciable

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Ya que f es una función suave (por lo tanto continua) se tiene que

$$\Omega_1 = f^{-1}(-\infty, 1) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

es una región abierta de $\mathbb{R}^3$. Esto es la bola de radio 1 con centro en $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ es una región abierta (véase la figura 7.1a).

Análogamente $\overline{\Omega}_1$ la bola cerrada es una región con frontera. ▷

EJEMPLO 7.4. Considere el semiplano superior

$$H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

Este conjunto es una región abierta en $\mathbb{R}^2$, pues $H^+ = f^{-1}(0, \infty)$ para la función continua $f(x, y) = y$ (véase figura 7.1b). Claramente la cerradura del semiplano superior

$$\overline{H^+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$$

es una región con frontera en el plano $\mathbb{R}^2$. ▷

En algunas ocasiones, una región del espacio euclidiano está definida por varias desigualdades. Esto es, cada punto de la región satisface un número finito de desigualdades del tipo

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) \leq c_1 \\ f_2(x, y, z) \leq c_2 \\ \vdots \\ f_n(x, y, z) \leq c_n \end{cases}$$

donde las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son continuas en el espacio $\mathbb{R}^3$, y $c_1, \ldots, c_n$ son números reales.

EJEMPLO 7.5. Consideremos la región en el plano $\mathbb{R}^2$ acotada por la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

◁ Haciendo $y = 0$, se obtiene que la variable x satisface las desigualades $-2 \leq x \leq 2$, es decir, está necesariamente en el intervalo $[-2, 2]$ y que la variable y está limitada desde la curva $y = -\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{2}}$ hasta la curva $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{2}}$.

La definición de y se obtiene al despejarla de la ecuación inicial

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2}$$

De esta forma, la región Ω se puede describir totalmente por las desigualdades

$$-2 \leq x \leq 2 \text{ y } -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}.$$

Estas desigualdades son equivalentes al sistema de desigualdades

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= -x && \leq 2 \\ f_2(x,y) &= x && \leq 2 \\ f_3(x,y) &= -\left(y + \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}\right) && \leq 0 \\ f_4(x,y) &= y - \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}} && \leq 0 \end{aligned}$$

que provienen del par de desigualdades obtenido (véase la figura 7.2). ▷

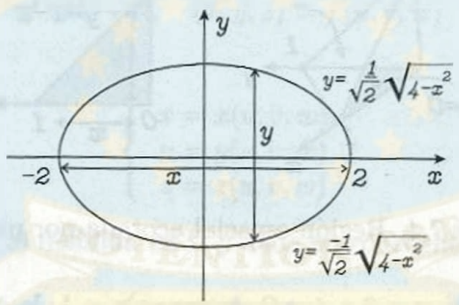


Figura 7.2. Región elíptica en $\mathbb{R}^2$.

En general, entender un sistema de desigualdades como el que se obtuvo en la parte final del ejemplo anterior es díficil y es más cómodo describir a una región por cadenas mínimas de desigualdades como las que se obtuvieron directamente en el ejemplo anterior, las cuales señalan los conjuntos donde es permisible tomar cada una de las variables.

EJEMPLO 7.6. Considérese la región Ω en el plano definida por desigualdades

$$y \geq x^2 \text{ y } y \leq 4 - x^2$$

◁ La figura 7.3 nos muestra que la primera desigualdad se refiere a la región por encima de la parábola $y = x^2$, mientras que la segunda desigualdad se refiere a la región por debajo de la parábola $y = 4 - x^2$. Por lo tanto, la región Ω es aquella acotada inferiormente por $y = x^2$ y acotada superiormente por $y = 4 - x^2$.

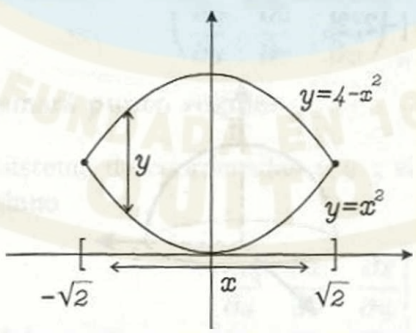


Figura 7.3. Región $\Omega : y \geq x^2$, y $\leq 4 - x^2$ del plano $\mathbb{R}^2$.

Los puntos de intersección entre las parábolas satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$$

que al igualar nos da los puntos $x = \pm\sqrt{2}$.

Esto hace que x esté en el intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, mientras que la variable y es permisible entre las curvas $y = x^2$ hasta $y = 4 - x^2$.

Por lo tanto, la región Ω está completamente descrita por las desigualdades

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \quad x^2 \leq y \leq 4 - x^2 \ \triangleright$$

EJEMPLO 7.7. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ la región espacial acotada por los planos

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$$

$\triangleleft$ Una inspección a la ecuación del plano $x + y + z = 1$, nos muestra que los puntos de intersección con los ejes coordenados son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, como se muestra en la figura 7.4, quedando tal porción del plano en el primer octante: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

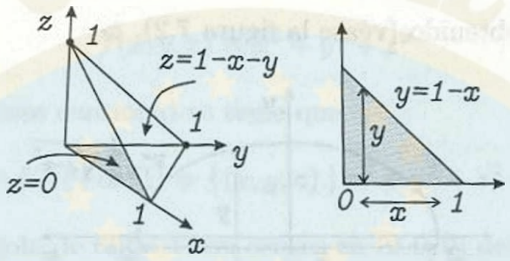


Figura 7.4. Región espacial acotada por planos.

Si en la ecuación $x + y + z = 1$ ponemos $y = 0$ y $z = 0$, entonces $x = 1$, lo que determina el intervalo $[0, 1]$ para x.

Para determinar el dominio de y, hacemos $z = 0$ en la ecuación $x + y + z = 1$, obteniendo $x + y = 1$ o $y = 1 - x$, lo que según se muestra en la misma figura, indica que $0 \leq y \leq 1 - x$.

Finalmente, al despejar z de la ecuación $x + y + z = 1$, se obtiene $z = 1 - x - y$, lo que dice que la variable z debe satisfacer la desigualdad

$$0 \leq z \leq 1 - x - y$$

Por lo tanto, la región espacial V se describe mediante el conjunto

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq 1 - x - y\} \quad \triangleright$$

EJEMPLO 7.8. Consideremos la región espacial acotada por la parte superior de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$\triangleleft$ Al proceder por analogía al ejemplo 7.7 haciendo $y = 0$, $z = 0$ en la ecuación dada, se obtiene $x = \pm 2$, es decir, tenemos que el intervalo numérico para x es $[-2, 2]$.

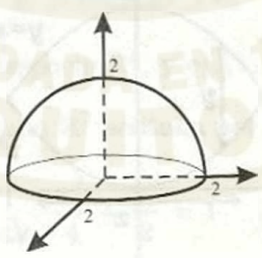


Figura 7.5. Semiesfera superior en $\mathbb{R}^3$.

Por otra parte, si se anula z en la ecuación, se tiene que $x^2 + y^2 = 4$ lo que al despejar a y en términos de x nos da $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, que según la figura 7.5, nos indica el dominio para la variable y:

$$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$$

Finalmente, si en la ecuación inicial se despeja a z, se obtiene que $z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, por lo que según la figura 7.5, la variable z deberá satisfacer la desigualdad

$$0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

pues se considera la parte superior de la esfera.

De esta manera

$$V = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2},\ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}$$

define a tal región.

Situamos un cambio de sistemas coordenados en regiones contenidas en $\mathbb{R}^3$ (o en $\mathbb{R}^2$).

DEFINICIÓN 7.9. Sean x, y, z y u, v, w dos sistemas de coordenadas en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Por el **cambio de sistemas de coordenadas** en una región Ω se entiende una función diferenciable e invertible

$$f : \Omega \to \Omega, \quad (x, y, z) = f(u, v, w)$$

que en coordenadas se escribe

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

con una función inversa $(u, v, w) = g(x, y, z)$ definida en Ω y dada en coordenadas

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$$

Notamos que tal función es un **difeomorfismo** de Ω (véase la definición 6.31).

Sea $(u_0, v_0, w_0) \subset \Omega$ un punto definido en tales coordenadas. Considérese el punto p_0 correspondiente en Ω definido por

$$p_0 = f(q_0)$$

DEFINICIÓN 7.10. El punto $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ se llama un **valor regular** para el cambio de coordenadas $f(u, v, w)$, si la matriz

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}_{q_0}$$

es una matriz no singular. El punto q_0 se llamará **punto regular**.

Esto es, p_0 es un valor regular para el sistema de coordenadas x, y, z si la parte lineal $\mathbf{A}$ es una matriz invertible. Equivalentemente, es necesario que el Jacobiano

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}(q_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}_{q_0} \neq 0$$

El siguiente resultado nos habla de la invertibilidad local alrededor de un punto regular de un cambio de coordenadas. Éste se sigue del **teorema de la función inversa 6.32**.

TEOREMA 7.11. *Si $p_0 = f(u_0, v_0, w_0)$ es un punto regular para el cambio de coordenadas*

$$(x, y, z) = f(u, v, w)$$

entonces en una vecindad de p_0 en Ω se puede definir una transformación inversa

$$(u, v, w) = g(x, y, z)$$

En las siguientes secciones se darán ejemplos de cambios de coordenadas en el plano $\mathbb{R}^2$ y en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se hará uso del teorema 7.11 en cada uno de ellos.

Ejercicios 7.1

1. Dibuje la región descrita por las desigualdades
$$-3 \leq y \leq 3, \quad y^2 - 4 \leq x \leq 5$$

2. Describa mediante un par de desigualdades la región plana encerrada por las curvas
$$x = 0,\ x = 1,\ 2y - x = 2,\ y = 1 - x^3$$

3. Describa mediante desigualdades la región encerrada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por el plano $z = 4$.

4. Describa mediante desigualdades la región encerrada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y los planos $z = 0$, $x = 2$, $x = -2$.

5. Decida la invertibilidad de $f(x, y) = (x - y, y - x)$ y calcule, de ser posible, una inversa.

6. Imponga condiciones para que la transformación $f(x, y) = (xy, x^2 - y^3)$ sea invertible.

7. Determine condiciones para que la transformación
$$(x, y, z) \mapsto (x + y,\ xyz,\ x^2 - y^2 + z^2)$$
sea un cambio de coordenadas.

8. **(Coordenadas pseudoesféricas)**. Sean las coordenadas (ρ, φ, χ) en el espacio real de dimensión 3 relacionadas a las cartesianas mediante las relaciones
$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{senh} \chi \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{senh} \chi \operatorname{sen} \varphi \\ z = \rho \cosh \chi \end{cases}$$
$(\rho, \varphi, \chi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$.
Determine condiciones para que sean un buen sistema de coordenadas en una región de $\mathbb{R}^3$.

7.2 Sistema de coordenadas polares

Considerese en el plano $\mathbb{R}^2$ el sistema de coordenadas cartesianas (x, y). Introducimos ahora en el mismo plano otro sistema de coordenadas (r, φ), donde $r \geq 0$ y $\varphi \in (-\pi, \pi)$. La relación entre los sistemas de coordenadas está dado por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

◁ Dado un punto $(r_0, \varphi_0) = q_0$, procedemos a verificar la condición de invertibilidad local dada en el teorema 6.32, y para ello necesitamos calcular la matriz jacobiana en q_0 :

$$\mathbf{A} = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{q_0} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -r_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \\ \operatorname{sen} \varphi_0 & r_0 \cos \varphi_0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, el determinante de la parte lineal $\mathbf{A}$ se calcula

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 & -r_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \\ \operatorname{sen} \varphi_0 & r_0 \cos \varphi_0 \end{vmatrix} = r_0(\cos^2 \varphi_0 + \operatorname{sen}^2 \varphi_0) = r_0,$$

con lo que, $|\mathbf{A}| \neq 0$ exclusivamente en $\mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi)$.

Un cambio inverso de coordenadas está dado por la pareja de relaciones

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = 2 \arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Esta pareja de funciones nos determinan un difeomorfismo entre los conjuntos $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ y $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$. La figura 7.6 ilustra esto. A este nuevo sistema de coordenadas (r, φ) se le llama de **coordenadas polares**. ▷

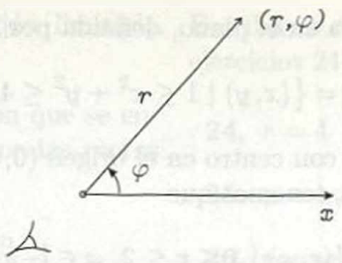


Figura 7.6. Coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 7.12. Consideremos la curva en el plano definida por la ecuación en coordenadas cartesianas

$$25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$$

◁ Al realizar el cambio de coordenadas cartesianas por polares, tenemos que la ecuación anterior se transforma en

$$\begin{aligned} 0 = 25x^2 + 10xy + y^2 - 1 &= 25(r\cos\varphi)^2 + 10r\cos\varphi r\operatorname{sen}\varphi + (r\operatorname{sen}|,\varphi)^2 - 1 \\ &= 25r^2\cos^2\varphi + 10r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi - 1 \\ &= r^2(5\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi)^2 - 1 \end{aligned}$$

o bien, en la relación bivalente

$$r(5\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) = \pm 1 \ \triangleright$$

EJEMPLO 7.13. Consideremos la relación en coordenadas polares dada por

$$r = 1 - \cos\varphi$$

◁ Para pasar a coordenadas cartesianas esta ecuación, procedemos como sigue. De la relación

$$1 - r = \cos\varphi$$

al multiplicar por r en cada miembro de la igualdad, nos lleva a

$$r - r^2 = r\cos\varphi = x$$

o bien

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + x^2 + y^2$$

Consecuentemente (al elevar al cuadrado a cada lado), se tiene la relación polinomial

$$x^4 + y^4 + 2x^3 + 2xy^2 + 2x^2y^2 - y^2 = 0 \ \triangleright$$

EJEMPLO 7.14. Consideremos la función real definida por

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

en la región $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$

◁ Al realizar la transformación de coordenadas cartesianas a polares (r,φ) se tiene una nueva función es una sola variable

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi) &= \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\operatorname{sen}\varphi)^2 - 1} \\ &= \sqrt{r^2 - 1} \end{aligned}$$

por lo que la región Ω se describe, ahora, en cooordenadas polares en el conjunto

$$\Omega = \{(r,\varphi) \mid r \geq 1,\ \varphi \in [-\pi,\pi]\} \ \triangleright$$

EJEMPLO 7.15. Sea Ω la región con frontera en el plano, definida por las coordenadas cartesianas

$$\Omega = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Este conjunto corresponde a una región anular con centro en el origen $(0, 0)$, de radio interior 1 y radio exterior 2.

◁ Al describir a Ω con coordenadas polares, tenemos que

$$\Omega = \{(r, \varphi) \mid 1 \leq r \leq 2,\ \varphi \in [-\pi, \pi]\}$$

pues la relación dada por

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

es equivalente en polares a

$$1 \leq r \leq 2 \ \triangleright$$

Ejercicios 7.2

1. Para obtener la relación de cambio de coordenadas

$$\varphi = 2 \arctan \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

utilizamos las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}}, \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$$

a. Obtenga la relación

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}$$

b. Multiplique dentro de la raíz por $1 + \cos \varphi$ para llegar a

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

c. Finalmente sustituya

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

y despeje la variable φ

2. En ocasiones es conveniente elegir la relación

$$\tan \omega = \frac{y}{x}$$

en el cambio de coordenadas polares, con las siguientes consideraciones:

a. si $\frac{y}{x} > 0$ y $x > 0$, entonces $\varphi = \omega$

b. si $\frac{y}{x} > 0$ y $x < 0$, entonces $\varphi = \omega - \pi$

c. si $\frac{y}{x} < 0$ y $x > 0$, entonces $\varphi = \omega$

d. si $\frac{y}{x} < 0$ y $x > 0$, entonces $\varphi = \omega + \pi$

Cambie a coordenadas polares los puntos en coordenadas cartesianas de los ejercicios 3–8, utilizando la relación vista en el texto.

3. $(1, 1)$

4. $(-1, 1)$

5. $(1, -1)$

6. $(-\sqrt{3}, -1)$

7. $(3, 4)$

8. $(-3, 4)$

9. Repita los ejercicios 3-8 utilizando la relación del ejercicio 2.

Cambie a coordenadas cartesianas los puntos en coordenadas polares de los ejercicios 10-15.

10. $(1, 1)$

11. $\left(2, -\frac{\pi}{4}\right)$

12. $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$

13. $\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$

14. $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

15. $\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$

Describa en coordenadas polares las rectas, de los ejercicios 16–18, dadas en coordenadas cartesianas

16. $y = 3$

17. $x = -2$

18. $y = mx$

19. Describa en coordenadas polares la región limitada por el círculo $x^2 + y^2 \leq -3x$.

20. Describa en coordenadas polares la región limitada por el círculo $x^2 + y^2 \leq 2y$.

21. Describa en coordenadas polares la región que se encuentra dentro del triángulo formado por las rectas $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.

22. Escriba en coordenadas polares la función

$$f(x, y) = \frac{4(R^2 - (x^2 + y^2))}{1 - x^2 - y^2}$$

23. Escriba en coordenadas polares la función

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Escriba en coordenadas cartesianas las curvas dadas, de los ejercicios 24–29, en coordenadas polares.

24. $r = 4$

25. $\varphi = \pi/4$ (Sugerencia: utilice el ejercicio 2.)

26. $r = \sec\varphi$

27. $r = \csc\varphi$

28. $r = \cos\varphi$

29. $r = 2\operatorname{sen}\varphi$

7.3 Coordenadas Cilíndricas

Considérese en $\mathbb{R}^3$ el sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) e introdúzcase el nuevo sistema dado por la tripleta (r, φ, z) donde r, φ son las coordenadas polares de la sección y z es la tercera coordenada cartesiana. Esto es,

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\operatorname{sen}\varphi, \\ z = z \end{cases}$$

Al buscar una condición de invertibilidad dada por el teorema 7.11, se tiene que para cualquier $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$ la matriz jacobiana del cambio de coordenadas es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De igual forma que en la sección anterior, el determinante de $\mathbf{A}$ se calcula

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

y éste es diferente de cero si $r > 0$. El subconjunto de $\mathbb{R}^3$ donde vale la condición anterior es todo el espacio con excepción del eje z. En este conjunto podemos calcular una inversa

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = 2\arctan\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \\ z = z \end{cases}$$

Esta terna de funciones nos determinan un difeomorfismo entre los conjuntos $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) \mid x \leq 0\}$

Este sistema de coordenadas se conoce como **coordenadas cilíndricas** (véase la figura 7.7).

EJEMPLO 7.16. Considérese la relación dada en coordenadas cartesianas por

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$$

◁ En coordenadas cilíndricas (r, φ, z) esta relación se escribe

$$0 = (x^2 + y^2) - 2z^2 = r^2 - 2z^2$$

es decir,

$$r = \pm\sqrt{2}\, z \ \triangleright$$

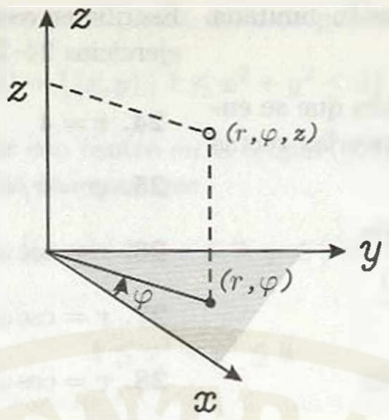


Figura 7.7. Coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 7.17. Consideremos la función de tres variables definida por

$$f(x, y, z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$$

en la región $\Omega = \{(x, y, z) \mid z \geq x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

◁ En coordenadas cilíndricas la función se escribe de la forma más simple

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r, \varphi, z) &= f(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi, z) = \sqrt{z - (r\cos\varphi)^2 - (r\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2} \\ &= \sqrt{z - r^2} \end{aligned}$$

definida en la región Ω, que en coordenadas cilíndricas es escrita como

$$\Omega = \{(r, \varphi, z) \mid z \geq r^2,\ \varphi \in [-\pi, \pi]\} \ \triangleright$$

EJEMPLO 7.18. La región espacial anular-cilíndrica dada por

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

en coordenadas cilíndricas se escribe

$$\Omega = \{(r, \varphi, z) \mid 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1,\ \varphi \in [-\pi, \pi]\}$$

Ejercicios 7.3

Cambie a coordenadas cilíndricas los puntos en coordenadas cartesianas de los ejercicios 1–5.

1. $(-1, 1, 1)$
2. $(1, -1, 1)$
3. $(-\sqrt{3}, -1, -2)$
4. $(3, 4, 8)$
5. $(-3, 4, -3)$

Cambie a coordenadas cartesianas los puntos en coordenadas cilíndricas de los ejercicios 6–9.

6. $\left(2, -\frac{\pi}{4}, 2\right)$
7. $\left(4, \frac{2\pi}{3}, -1\right)$
8. $\left(1, -\frac{3\pi}{4}, 3\right)$
9. $\left(2, -\frac{\pi}{2}, -1\right)$

Describa en coordenadas polares los planos de los ejercicios 10–13, dados en coordenadas cartesianas

10. $y = 3$
11. $x = -2$
12. $y = mx$
13. $z = 3$
14. Describa en coordenadas cilíndricas la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 \leq -3x$.

15. Describa en coordenadas cilíndricas la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 \leq 2y$.

16. Describa en coordenadas cilíndricas la región que se encuentra dentro de los planos $y = 0$, $x = 1$, $y = x$, $z = 1$, $z = 5$.

17. Describa en coordenadas cilíndricas la región dentro del cilindro $x^2 + y^2 = -2x$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

18. Describa en coordenadas cilíndricas la región dentro del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Escriba en coordenadas cartesianas las curvas de los ejercicios 19–22, dadas en coordenadas cilíndricas

19. $r = 4$, $z = 1$

20. $\varphi = \pi/4$, $z = -1$

21. $r = \cos\varphi$, $z = \sqrt{2}$

22. $r = 2\operatorname{sen}\varphi$, $z = 0$

7.4 Coordenadas Esféricas

Sean las coordenadas cartesianas (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ y considere las nuevas coordenadas (r, φ, θ) en $\mathbb{R}^3$, (véase la figura 7.8), dadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

donde

$$r > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ -\pi < \varphi < \pi$$

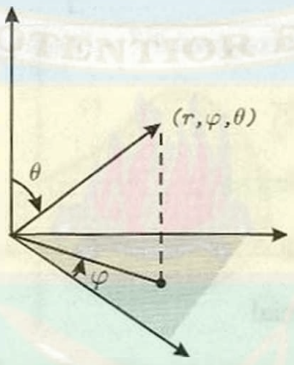


Figura 7.8. Coordenadas co-geográficas esféricas.

La matriz jacobiana para cada punto $(r, \varphi, \theta) \subset \mathbb{R}^3$ es calculada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

y cuyo determinante es

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = |\mathbf{A}| = r^2\operatorname{sen}\theta$$

De esta manera, para buscar el dominio de invertibilidad, se tiene que $|\mathbf{A}| = 0$ si y sólo si $r = 0$ o $\theta = 0, \pi$. Esto define otra vez una transformacion del espacio, excepto el eje z en estas coordenadas.
Un cálculo directo nos demuestra que una transformación inversa en la región de invertibilidad está dada por

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = 2\arctan\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \theta = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

Este sistema se conoce como **coordenadas cogeográficas esféricas**.

EJEMPLO 7.19. Consideremos la ecuación espacial en coordenadas cartesianas dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

◁ En coordenadas esféricas (r, φ, θ), tal ecuación se escribe

$$\begin{aligned} 0 &= (r\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta)^2 + (r\cos\theta)^2 - 4 \\ &= r^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) - 4 = r^2 - 4 \end{aligned}$$

lo cual nos indica que la relación inicial se lleva bajo la transformación de coordenadas en la relación más simple

$$r = 2 \triangleright$$

EJEMPLO 7.20. Considérese la función de tres variables

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$$

definida en la región espacial

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

◁ En coordenadas esféricas, esta función se reduce a la función real de variable real

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r, \varphi, \theta) &= f(r\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta) \\ &= \frac{1}{\ln(1 - (r\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta)^2 - (r\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta)^2 - (r(\cos\theta)^2)} \\ &= \frac{1}{\ln(1 - r^2)} \end{aligned}$$

definida en la misma región con coordenadas esféricas

$$\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 < r < 1,\ -\pi \le \varphi < \pi,\ 0 \le \theta \le \pi\} \triangleright$$

EJEMPLO 7.21. Consideremos la región espacial

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$$

correspondiente a una bola sólida de radio R en el espacio $\mathbb{R}^3$.

◁ En coordenadas esféricas (r, φ, θ) tal región se puede escribir por

$$\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \mid 0 \le r \le R,\ -\pi \le \varphi < \pi,\ 0 \le \theta \le \pi\} \triangleright$$

Ejercicios 7.4

1. Escriba en coordenadas esféricas la función
$$f(x, y, z) = \frac{4(R^2 - (x^2 + y^2 + z^2))}{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

2. Escriba en coordenadas esféricas la función
$$f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

3. Describa en coordenadas esféricas la región que se encuentra dentro de la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

4. Describa en coordenadas esféricas la región en el primer octante que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, esto es para $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

5. Describa en coordenadas esféricas la región dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ para $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$.

6. Describa en coordenadas esféricas la región dentro del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

CAPÍTULO

8 Integrales múltiples

8.1 Integrales dobles

En esta sección introducimos el concepto de integral doble de una función real $z = f(x, y)$ definida en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y lo hacemos resolviendo un problema práctico que se señala en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.1. Supóngase que una región con frontera $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ acotada describe a una placa fina en la que se omite el espesor, de tal forma que para cada punto $(x, y) \in \Omega$ se tenga definida una densidad $\delta = \delta(x, y)$. Nuestro problema es calcular la masa total de la placa Ω.

$\lhd$ Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una región acotada, podemos hacer una división de ella por regiones $D_1, D_2, \ldots, D_n$ que llamaremos elementales, como lo muestra la figura 8.1, tomando una cuadrícula interior.

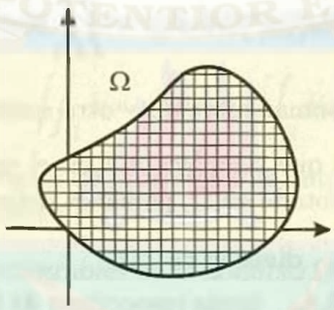


Figura 8.1. División de Ω en regiones elementales.

Cada parte pequeña D_i tiene asociada un área que denotamos por ΔA_i.

Aproximamos la masa de cada región elemental D_i, suponiendo que la densidad en esa región es constante e igual a $\delta(x_i^*, y_i^*)$ donde (x_i^*, y_i^*) es un punto contenido en D_i, si este es el caso, entonces allí vale la fórmula clásica de la densidad constante

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{área}}$$

o bien

$$\text{masa} = \text{densidad} \times \text{área}$$

Esto nos diría que en D_i una aproximación de la masa Δm_i de esta región elemental está dada por

$$\Delta m_i = \delta(x_i^*, y_i^*) \times \text{Área}(D_i) = \delta(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$$

Supongamos además que la división (rejilla) es tan grande que cada D_i es casi un rectángulo con dimensiones Δx_i (base) y Δy_i (altura), es decir

$$\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$$

como lo muestra la figura 8.1.

Entonces para la región elemental D_i, una aproximación de la masa Δm_i se calcularía por

$$\Delta m_i = \delta(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \Delta y_i$$

Así, una aproximación de la masa m de toda la placa estaría dada por

$$m \approx \Delta m_1 + \Delta m_2 + \cdots + \Delta m_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \Delta y_i$$

es decir,

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \Delta y_i$$

Para la división de la región Ω en las regiones elementales $D_1, \ldots, D_n$ consideramos el diámetro d de la división como el máximo de los diámetros de $D_1, \ldots, D_n$. Esto es, si d_i denota al diametro de D_i (distancia mayor entre los puntos de D_i), d es el máximo entre $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Claramente, una igualdad en la aproximación de la masa buscada sería a través del proceso de límite

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \Delta y_i$$

suponiendo que éste existiera y que no dependiera de la división inicial $D_1, \ldots, D_n$ de la región Ω escogida, ni de los puntos (x_i^*, y_i^*) en cada D_i que se eligieron inicialmente.

Por analogía al caso unidimensional (véase Reyes [11]) definiríamos este límite como

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \Delta y_i = \iint_{\Omega} \delta(x, y)\, dx\, dy$$

donde se requiere una suma infinitesimal para sumar sobre dx y otra suma infinitesimal para sumar sobre dy. ▷

Consideremos ahora una función arbitraria que remplace a δ en el ejemplo 8.1. Esto es, si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una región acotada y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es también una función acotada en Ω, podemos definir todos los objetos del ejemplo

$D_1, \ldots, D_n$ división de Ω

$\Delta A_1, \ldots, \Delta A_n$ áreas respectivas de la división

(x_i^*, y_i^*) puntos intermedios en D_i

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \Delta x_i \Delta y_i$$

d = diámetro de la división

DEFINICIÓN 8.2. La función acotada f se dice **integrable** sobre la región Ω si el límite

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_i = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta A_i$$

existe y no depende de la división inicial dada $D_1, \ldots, D_n$, ni de los puntos $(x_i^*, y_i^*) \in D_i$ elegidos.

A este límite se le llamará la **integral doble** de f sobre la región Ω y se le designa como

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_1$$

o bien

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dA = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta A i$$

A la **2-forma diferencial** definida por

$$dA = dx\, dy$$

y obtenida durante el proceso de límite se le llamará **forma diferencial de área** básica en el plano $\mathbb{R}^2$.

En adelante, casi todas las funciones que involucramos son integrables en virtud de los siguientes teoremas, cuyas demostraciones omitimos, pero que siguen los mismos procesos que las referencias dadas después de su mención.

TEOREMA 8.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es integrable en Ω.*

◁ La prueba es semejante al teorema 1.2 de Reyes [11]. ▷

Este teorema es un poco limitante a la hora de las aplicaciones, pero el siguiente remedia esto cuando el conjunto de discontinuidades que puede tener una función, en una región, tiene área cero.

TEOREMA 8.4. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada y continua excepto en un conjunto cuya área es cero, entonces f es integrable en Ω.*

◁ La demostración es análoga a la del corolario 1.2 en Reyes [11]). ▷

Observemos lo siguiente. Si f es una función que ya sabemos es integrable en una región Ω, entonces podemos pensar infinitesimalmente para construir su integral doble Ω, utilizando diferenciales.

EJEMPLO 8.5. Sea $\delta = \delta(x, y)$ una función definida en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que asocia a cada punto $(x, y) \in \Omega$ su densidad puntual. Supongamos además que $\delta = \delta(x, y)$ es una función continua y por lo tanto integrable por el teorema 8.3

◁ Si $(x, y) \in \Omega$ entonces, hasta un infinitésimo del área dA de un rectángulo infinitesimal con centro en (x, y) se cumple que

$$\text{masa infinitesimal} \;=\; \text{densidad} \times \text{área infinitesimal}$$

es decir,

$$dm = \delta(x, y)\, dA = \delta(x, y)\, dx\, dy$$

Al realizar las sumas infinitesimales en dx y dy sobre toda la región Ω, entonces la masa total de Ω se obtiene como sigue

$$m = \int_\Omega dm = \iint_\Omega \delta(x, y)\, dA = \iint_\Omega \delta(x, y)\, dx\, dy \;\triangleright$$

El siguiente resultado acerca de las propiedades de la integral es muy útil en la práctica. Omitimos su prueba, que esencialmente es la misma del teorema 1.3 en Reyes [11].

LEMA 8.6. *Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables en el dominio Ω, entonces*

1. *Si λ, μ son números reales, entonces $\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)$ es una función integrable, y se cumple la* **linealidad** *de la integral*

$$\iint_\Omega (\lambda f) + \mu g)(x, y)\, dx\, dy = \lambda \iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy + \mu \iint_\Omega g(x, y)\, dx\, dy$$

2. *Si Ω es una región acotada con frontera en la cual m y M son los valores mínimo y máximo alcanzados por $f(x, y)$, entonces la integral doble se puede estimar en el intervalo $[m\ \text{Área}(\Omega),\ M\ \text{Área}(\Omega)]$. Esto es,*

$$m\ \text{Área}(\Omega) \leq \iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy \leq M\ \text{Área}(\Omega)$$

3. *Si la región Ω está dividida en dos regiones acotadas con frontera que se intersecan apenas en tal frontera: $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ ($+$ indica la unión), entonces f es integrable en Ω_1 y en Ω_2 y es válida la fórmula*

$$\begin{aligned} \iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy &= \iint_{\Omega_1 + \Omega_2} f(x, y)\, dx\, dy \\ &= \iint_{\Omega_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{\Omega_2} f(x, y)\, dx\, dy \end{aligned}$$

EJEMPLO 8.7. Calcule un intervalo real donde se pueda estimar la integral

$$\iint_\Omega (x + y + 10)\, dx\, dy$$

si la región Ω está definida por $x^2 + y^2 \leq 4$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

◁ Si se considera la función $z = z(x, y) = x+y+10$ sobre el dominio Ω, será suficiente con calcular los valores máximo M y mínimo m de z en Ω y utilizar la fórmula

$$m\ \text{Área}(\Omega) \leq \iint_{\Omega} z(x, y)\, dx\, dy \leq M\ \text{Área}(\Omega)$$

Como Ω es un círculo de radio 2, se tiene que el área de tal región está dada por $\text{Área}(\Omega) = 4\pi$.

La función $z = x + y + 10$ no tiene puntos críticos en el interior de Ω, pues $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = (1, 1) \neq (0, 0)$, por lo que sus extremos se alcanzan en la frontera $x^2 + y^2 = 4$.

Al construir la función de Lagrange con multiplicador λ

$$u(x, y) = (x + y + 10) + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

La solución de tal sistema nos da $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x \pm \sqrt{2}$, $y = \pm\sqrt{2}$, esto es, los puntos candidatos en el círculo son

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

cuyos valores bajo $z(x, y)$ son

$$10 + 2\sqrt{2},\ 10,\ 10,\ 10 - 2\sqrt{2}$$

respectivamente. Lo anterior nos dice que $M = 10 + 2\sqrt{2}$ y $m = 10 - 2\sqrt{2}$ en el círculo Ω.

Por lo tanto,

$$(10 - 2\sqrt{2})4\pi \leq \iint_{\Omega} (x + y + 10)\, dx\, dy \leq (10 + 2\sqrt{2})4\pi$$

o equivalentemente,

$$\iint_{\Omega} (x + y + 10)\, dx\, dy \in [8\pi(5 - \sqrt{2}), 8\pi(5 + \sqrt{2})]\ \triangleright$$

Nuestro problema ahora consiste en calcular las integrales dobles de funciones definidas en regiones acotadas.

Para ello, consideremos la función $F = F(x)$ obtenida de integrar a la función $f(x, y)$ respecto a y en el dominio $[c, d]$, esto es,

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

suponiendo que la función f está definida en una región de la forma $\Omega = [a, b] \times [c, d]$.

Claramente F como función de x es continua si la función $f(x, y)$ es también continua en Ω.

Por lo tanto, $F(x)$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$$

Análogamente, podemos tener una igualdad

$$\int_c^d G(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy$$

cuando ponemos

$$G(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

DEFINICIÓN 8.8. Las integrales definidas por

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

se llaman las **integrales iteradas** de la función $f(x,y)$ definida en $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, las cuales también se escribirán en la forma

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Un resultado útil para el cálculo de una integral doble definida sobre una región $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ es aquél que la r aciona con las integrales iteradas de la función integrando $f(x,y)$.

l EMA 8.9 (Fubini). *Si $f(x,y)$ es una función continua, entonces se cumplen las igualdades*

$$\int\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

◁ Consideremos la integral iterada

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

y hagamos una división uniforme de $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ mediante las particiones uniformes de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

Esto es, con un número igual de subdivisiones en cada intervalo.
Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx &= \int_a^b F(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} F(x)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)\,dy\right] dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)\,dy\right] dx\end{aligned}$$

Como $f(x,y)$ es continua en la variable y en el intervalo $[y_j, y_{j+1}]$, por el teorema del valor medio para integrales de una dimensión, existe $y_j^* \in [y_j, y_{j+1}]$ tal que

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)\,dy = f(x,y_j^*)(y_{j+1} - y_i) = f(x,j_j^*)\,\Delta y_j$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x,y_j^*)\Delta y_j]\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y_j^*)dx\right] \Delta y_j\end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el teorema del valor medio para integrales unidimensionales, se tiene que existe x_k^* en $[x_k, x_{k+1}]$ tal que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y_j^*)\, dx = f(x_k^*, y_j^*)(x_{k+1} - x_k) = f(x_k^*, y_j^*)\, \Delta x_k$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx &= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} [f(x_k^*, y_j^*)\Delta x_k]\, \Delta y_j \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(x_k^*, y_j^*)\, \Delta x_k\, \Delta y_j\end{aligned}$$

Renumerando cada uno de los m^2 rectángulos por $D_1, D_2, \ldots, D_n$ de tal forma que $m \times m = m^2 = n$, se tiene entonces que

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_i$$

Es claro que, debido a que la división de Ω por los rectángulos $D_1, \cdots, D_n$ es uniforme, entonces el diámetro d de la división tiende a cero si y solamente si n tiende a infinito, esto es

$$\begin{aligned}\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy\right] dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_i \\ &= \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i\, \Delta y_i \\ &= \iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy\end{aligned}$$

en virtud de que f es continua (integrable) y por lo tanto el último límite converge a la integral doble.

Análogamente se prueba la igualdad

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx\right] dy = \iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy$$

lo que termina la demostración. ▷

EJEMPLO 8.10. Calcule la integral doble

$$\iint_\Omega xy\, dx\, dy$$

para el dominio $\Omega = [0,1] \times [0,2] \subset \mathbb{R}^2$.

◁ Claramente el dominio Ω se define por

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$$

de donde, por el lema de Fubini 8.9, la integral se calcula mediante

$$\begin{aligned}\iint_\Omega xy\, dx\, dy &= \int_0^2 dy \int_0^1 xy\, dx = \int_0^2 y\, dy \int_0^1 x\, dx \\ &= \int_0^2 y\, dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \int_0^2 \frac{y}{2}\, dy = \frac{y^2}{4}\Big|_0^2 = 1 \ \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 8.11. Calcule la integral doble

$$\iint_{\Omega} e^{x+y}\,dx\,dy$$

para la región $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

◁ Por el lema de Fubini 8.9, se tiene que

$$\begin{aligned}\int\int_{\Omega} e^{x+y}\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 e^{x+y}\,dx = \int_0^1 dy \int_0^1 e^x e^y\,dx \\ &= \int_0^1 e^y\,dy \int_0^1 e^x\,dx = \int_0^1 e^y\,dy\,\left[e^x\right]_0^1 \\ &= \int_0^1 e^y(e-1)\,dy = (e-1)\int_0^1 e^y\,dy \\ &= (e-1)(e-1) = (e-1)^2 \ \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 8.12. Calcule la integral doble

$$\iint_{\Omega} x \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy$$

para la región $\Omega = [0,\pi] \times [0,\pi/2]$.

◁ Por el lema de Fubini 8.9 se tiene, arreglando convenientemente la integral para dejar la iterada respecto a x al final,

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} x \operatorname{sen}(x+y)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen}(x+y)\,dy \\ &= \int_0^{\pi} x\,dx \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x+y)\,dy \\ &= \int_0^{\pi} x\,dx\left[-\cos(x+y)\right]_0^{\pi/2} \\ &= \int_0^{\pi} [-x\cos(x+\pi/2) + x\cos x]dx \\ &= \int_0^{\pi} (x\operatorname{sen} x + x\cos x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\pi} x\cos x\,dx\end{aligned}$$

Al integrar por partes estas últimas integrales se tiene

$$\iint_{\Omega} x\sin(x+y)\,dx\,dy = -\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} x\,dx + \int_0^{\pi} x\cos x\,dx = -\pi + 2 \ \triangleright$$

Dos casos importantes de regiones en el plano ocurren cuando Ω es de alguna de las formas siguientes

$$\Omega_x = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

$$\Omega_y = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

donde las funciones $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas (véase la figura 8.2).

Para ese caso se cumple también la igualdad de integral iterada, generalizando los casos del lema de Fubini 8.9 (la prueba se omite).

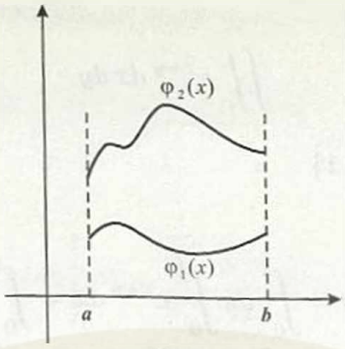


Figura 8.2. Región del tipo Ω_x

TEOREMA 8.13 (Fubini). *Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua definida en Ω. entonces*

1. *Si Ω es del tipo Ω_x se cumple la igualdad*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

2. *Si Ω es del tipo Ω_y se cumple la igualdad*

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

EJEMPLO 8.14. Halle los límites de la integral iterada doble

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

para cualquier función $f(x,y)$, si Ω es la región determinada por las ecuaciones

$$x = 3, \quad x = 5, \quad 3x - 2y + 4 = 0. \quad 3x - 2y + 1 = 0$$

$\lhd$ Al considerar las rectas oblicuas con variable y despejada

$$y_1 = \frac{3}{2}x + 2$$
$$y_2 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

podemos observar que ellas son paralelas y que limitan a la región Ω sobre el intervalo $[3,5]$. Como $y_1 > y_2$ en tal intervalo (véase la figura 8.3), se tiene que la región Ω se puede escribir como la región de tipo Ω_x

$$\Omega = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 3 \le x \le 5,\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \le y \le \frac{3}{2}x + 2 \right\}$$

que es un paralelogramo.

Esto implica necesariamente, por el teorema de Fubini que

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_3^5 dx \int_{\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}x+2} f(x,y)\,dy \rhd$$

EJEMPLO 8.15. Hallar los límites de la integral

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

si Ω está definida por la ecuación $(x-2)^2 + (y-3)^2 \le 4$

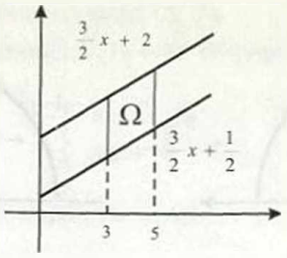


Figura 8.3. Paralelogramo Ω.

Observamos que la frontera de Ω está descrita por la ecuación

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

que es una circunferencia de radio 2 con centro en el punto $(2,3)$.

De esta manera, la figura 8.4 nos muestra que si tomamos a x sobre el intervalo $[0,4]$, entonces al despejar a y de la ecuación del círculo mencionada, se tiene que

$$y = 3 \pm \sqrt{4-(x-2)^2}$$

Por lo tanto, la región Ω está completamente descrita por

$$\Omega = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le 4,\ 3 - \sqrt{4-(x-2)^2} \le y \le 3 + \sqrt{4-(x-2)^2}\right\}$$

con lo que obtenemos los límites de integración y la integral iterada

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx \int_{3-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{3+\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)\,dy \rhd$$

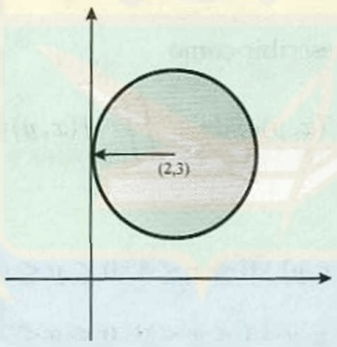


Figura 8.4. Círculo $(x-2)^2 + (y-3)^2 \le 4$.

El teorema de Fubini nos permite calcular una integral sobre una región Ω por medio de cualesquiera de las dos integrales iteradas que aparecen. Ahora bien, si la región Ω es tanto una región de la forma Ω_x como de la forma Ω_y, entonces una integral iterada puede cambiarse por otra si esta última es más sencilla de calcular.

EJEMPLO 8.16. Cambiar el orden de integración en la integral

$$\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$

$\lhd$ Claramente, la región de integración Ω está definida por

$$\Omega = \left\{(x,y) \,\middle|\, -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

que corresponde al semidisco superior de radio 1 con centro en el origen de coordenadas (véase la figura 8.5).

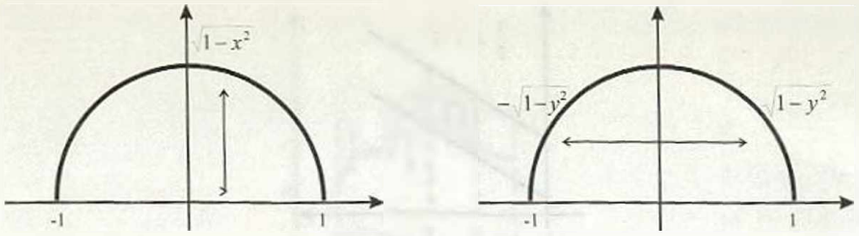


Figura 8.5. Cambios en el orden de integración.

De la ecuación del círculo frontera del disco

$$x^2 + y^2 = 1$$

podemos despejar la variable x con sus respectivos signos

$$x = \pm\sqrt{1 - y^2}$$

haciendo que la variable y esté definida en el intervalo $[0, 1]$ como lo muestra la figura mencionada.

Por lo tanto, la región Ω puede describirse también como

$$\Omega = \left\{(x, y) \,|\, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, \quad 0 \leq y \leq 1\right\}$$

Esto nos indicaría que la integral iterada doble cambia el orden de integración por la ecuación

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx \quad \triangleright$$

EJEMPLO 8.17. Consideremos la suma de las siguientes integrales

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x, y)\, dy + \int_{1}^{3} dx \int_{0}^{\frac{3-x}{2}} f(x, y)\, dy$$

$\triangleleft$ Es claro que tales integrales las podemos escribir como

$$\iint_{\Omega_1} f(x, y) dy dx + \iint_{\Omega_2} f(x, y)\, dy\, dx$$

donde las regiones Ω_1, Ω_2 están definidas por

$$\Omega_1 = \left\{(x, y) \,|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x, y) \,\middle|\, 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{3-x}{2}\right\}$$

La figura 8.6 nos muestra las regiones Ω_1 y Ω_2 que están traslapadas sobre la recta $x = 1$.

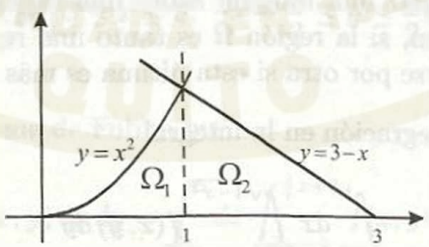


Figura 8.6. Región $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$.

De la misma figura, podemos observar que la unión de Ω_1 y Ω_2 nos provee de una región Ω delimitada por las curvas con ecuaciones

$$y = 0, \quad x^2 = y, \quad y = \frac{3-x}{2}$$

donde las dos últimas ecuaciones tienen el punto en común $(1, 1)$.

De esta manera, si se considera a y en el intervalo $[0, 1]$ y se despeja a x en las dos últimas se tiene el par de relaciones

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{y} \\ x_2 = 3 - 2y, \end{cases}$$

y entonces la región $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ (unión) puede escribirse como

$$\Omega = \{(x, y) \mid \sqrt{y} \leq x \leq 3 - 2y,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

s sobre el intervalo $[0, 1]$ se tiene que $x_1(y) \leq x_2(y)$

De esta manera, la suma de las integrales inicial puede escribirse como

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y)\, dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y)\, dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y)\, dx \quad \triangleright$$

EMPLO 8.18. Calcule la integral

$$\iint_\Omega x^3 y^2\, dx\, dy$$

ıde Ω es el círculo $x^2 + y^2 \leq R^2$.

$\triangleleft$ De la definición de Ω, podemos describir esta región por el conjunto

$$\Omega = \left\{(x, y) \,\middle|\, -R \leq x \leq R,\ -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_\Omega x^3 y^2\, dx dy &= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} x^3 y^2\, dy = \int_{-R}^{R} x^3\, dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2\, dy \\ &= \int_{-R}^{R} x^3\, dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} = \int_{-R}^{R} x^3\, dx \left[\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{3/2}\right] \\ &= \frac{2}{3}\int_{-R}^{R} x^3 \left(R^2 - x^2\right)^{3/2} dx = 0 \end{aligned}$$

es la última integral es impar respecto a x y está evaluada en un intervalo simétrico $[-R, R]$. $\triangleright$

EMPLO 8.19. Calcule la integral

$$\iint_\Omega \frac{x^2}{y^2}\, dx dy$$

Ω es el dominio acotado por las rectas $x = 2$, $y = x$ y la hipérbola $xy = 1$.

$\triangleleft$ De la figura 8.7, tenemos que Ω está definido por

$$\Omega = \left\{(x, y) \,\middle|\, 1 \leq x \leq 2,\ \frac{1}{x} \leq y \leq x\right\}$$

en virtud que la función $y = \dfrac{1}{x}$ es menor o igual a la función $y = x$ en el intervalo $[1, 2]$.

Por esto, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_\Omega \frac{x^2}{y^2}\, dx\, dy &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy = \int_1^2 x^2\, dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^2}\, dy \\ &= \int_1^2 x^2\, dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} y^{-2}\, dy = \int_1^2 x^2\, dx \left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} \\ &= \int_1^2 x^2 \left[x - \frac{1}{x}\right] dx = \int_1^2 (x^3 - x)\, dx = \frac{9}{4} \quad \triangleright \end{aligned}$$

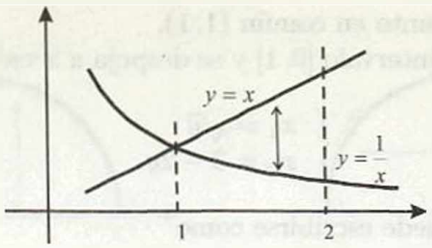


Figura 8.7. Región $\Omega = \left\{(x,y) \,\middle|\, 1 \leq x \leq 2,\ \frac{1}{x} \leq y \leq x\right\}$

Una implicación inmediata que generaliza el teorema del valor medio para integrales y para funciones continuas reales de variable real es el siguiente.

TEOREMA 8.20 (del valor medio). *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en la región acotada con frontera $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entonces existe un punto $(x^*, y^*) \in \Omega$ tal que f alcanza su valor promedio f^* en $f(x^*, y^*)$ y*

$$f^* = f(x^*, y^*) = \frac{1}{\text{Área}(\Omega)} \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

◁ Por el lema 8.6, si m y M son valores mínimo y máximo de f en Ω, se tiene que

$$m \times \text{Área}(\Omega) \leq \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \leq M \times \text{Área}(\Omega)$$

o bien

$$m \leq \frac{1}{\text{Área}(\Omega)} \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \leq M$$

Por lo tanto, como $f(x,y)$ es continua y para cualquier $(x,y) \in \Omega$ se cumple que

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

por el teorema del valor intermedio para $f(x,y)$ se tiene que existe $(x^*, y^*) \in \Omega$ tal que su imagen bajo f es el valor

$$I = \frac{1}{\text{Área}(\Omega)} \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \in [m, M]$$

Esto prueba el teorema. ▷

EJEMPLO 8.21. Calcule el valor intermedio de la función

$$z(x,y) = 12 - 2x - 3y$$

en la región Ω acotada por las rectas

$$2x + 3y = 12,\ x = 0,\ y = 0$$

◁ Claramente, la región Ω está definida por

$$\Omega = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq 6,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{3}(12 - 2x)\right\}$$

y corresponde a un triángulo como lo muestra la figura 8.8.

Tal triángulo tiene medidas, base 6 y altura 4, con lo que

$$\text{Área}(\Omega) = \frac{1}{2}(6)(4) = 12$$

Por el teorema del valor medio 8.20, se tiene que el valor medio z^* de la función $z = z(x,y)$ se calcula por

$$z^* = \frac{1}{\text{área}(\Omega)} \iint_\Omega z(x,y)\,dx\,dy$$

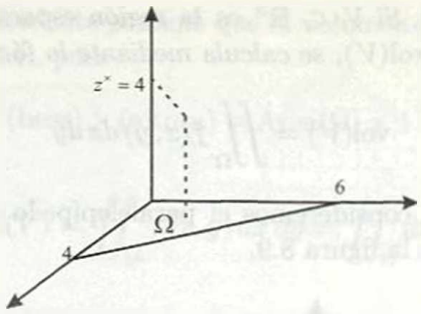


Figura 8.8. Promedio de $z = z(x, y)$ en el triángulo Ω.

con lo que para $z = 12 - 2x - 3y$ se obtiene

$$z^* = \frac{1}{12}\iint_\Omega (12 - 2x - 3y)\,dx\,dy = \frac{1}{12}\int_0^6 dx \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x)} (12 - 2x - 3y)\,dy$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^6 dx \int_0^{\frac{1}{3}(12-2x)} (12 - 2x - 3y)\,dy$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^6 dx \left[12y - 12xy - \frac{3}{2}y^2\right]_0^{\frac{1}{3}(12-2x)}$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^6 \left[12\frac{1}{3}(12 - 2x) - 12x\frac{1}{3}(12 - 2x) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}(12 - 2x)\right)^2\right] dx = 1 \triangleright$$

EJEMPLO 8.22. Calcule el promedio de la función

$$z = 2x + y$$

en el triángulo acotado por los ejes cartesianos y la recta

$$x + y = 3$$

$\triangleleft$ Un análisis gráfico semejante al del ejemplo anterior nos conduciría a que la región triangular Ω está descrita mediante la igualdad

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3 - x\}$$

que tiene una base igual a 3 y altura 3. Por lo tanto el área de Ω se calcula por

$$\text{Área}(\Omega) = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}$$

Consecuentemente, el promedio de $z = z(x, y)$ se calcula en este caso por

$$z^* = \frac{1}{\text{Área}(\Omega)}\iint_\Omega z(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{(9/2)}\int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2x + y)\,dy$$
$$= \frac{2}{9}\int_0^3 dx \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{3-x}$$
$$= \frac{2}{9}\int_0^3 \left[2x(3 - x) + \frac{1}{2}(3 - x)^2\right] dx$$
$$= \frac{2}{9}\int_0^3 \left[6x - 2x^2 + \frac{9}{2} - 3x + \frac{1}{2}x^2\right] dx = 3 \triangleright$$

Consideramos ahora el problema de calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica de una función $z = f(x, y)$ definida en una región del plano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

LEMA 8.23 (Volumen de una región). *Si $V \subset \mathbb{R}^3$ es la región espacial acotada bajo la gráfica de una función integrable, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ entonces su volumen,* $\text{vol}(V)$, *se calcula mediante la fórmula*

$$\text{vol}(V) = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

◁ Sea $(x,y) \in \Omega$ un punto arbitrario y consideremos el paralelepípedo centrado en p de altura $f(x,y)$ y de base infinitesimal $dA = dx\,dy$ como se muestra en la figura 8.9.

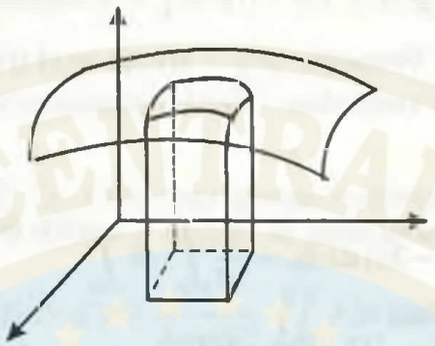


Figura 8.9. Volumen infinitesimal dV.

Entonces el volumen infinitesimal dV de este paralelepípedo infinitesimal es (base $= dx\,dy$) $\times$ altura $= f(x,y)$), es decir,

$$dV = f(x,y)\,dx\,dy$$

Por lo tanto, al sumar infinitesimalmente todos los volúmenes infinitesimales sobre todos los puntos de Ω se tiene que

$$\text{vol}(V) = \iint_\Omega dV = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

lo que prueba el lema. ▷

EJEMPLO 8.24. Calcule el volumen de la región espacial V encerrada por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 3$.

◁ Claramente la región espacial V mencionada puede verse como la región encerrada bajo la gráfica de la función

$$z(x,y) = x^2 - y^2$$

y entre los planos $z = 0$ y $x = 0$. Esto es, ya que la gráfica de $z(x,y)$ corta al plano $z = 0$ en las rectas

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \text{ó} \quad y = \pm x$$

entonces, la región espacial es la gráfica de $z = z(x,y)$ sobre el dominio

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3,\ -x \le y \le x\}$$

De esta manera, el volumen buscado se calcula mediante la integral doble

$$\begin{aligned}\text{vol}(V) &= \iint_\Omega z(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 dx \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\,dy \\ &= \int_0^3 dx \left[x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-x}^{x} = \frac{4}{3}\int_0^3 x^3\,dx = 27 \ \triangleright\end{aligned}$$

Un resultado que es consecuencia del lema 8.23 es el siguiente, el cual nos permite calcular el área de una región Ω.

COROLARIO 8.25. *El área de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, denotada por Área (Ω) se calcula por medio de la integral*

$$\text{Área}(\Omega) = \iint_\Omega dx\,dy$$

◁ Si se toma $f(x,y) = 1$ en el lema precedente se tiene que el volumen de la región V bajo la gráfica de $f(x,y) = 1$ es igual numéricamente al área de la región Ω, pues

$$\text{vol}(V) = (\text{base}) \times (\text{altura}) = \text{Área}(\Omega) \times 1 = \text{Área}(\Omega)$$

Pero

$$\text{vol}(V) = \iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega} dx\,dy$$

esto es,

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \text{vol}(V) = \text{Área}(\Omega) \triangleright$$

EJEMPLO 8.26. Calcule el área de la región Ω acotada por las parábolas

$$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x} \quad \text{y} \quad x = 4$$

◁ Un trazo simple en el sistema de coordenadas nos muestra que la región Ω está definida por

$$\Omega = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 4,\ \sqrt{x} \le y \le 2\sqrt{x}\right\}$$

en virtud que las curvas $y_1 = \sqrt{x}$ y $y_2 = 2\sqrt{x}$ se intersecan apenas en el origen $(0,0)$ y en el intervalo $[0,4]$ se cumple que $y_1(x) \le y_2(x)$

De esta forma, por el corolario 8.25, el área de Ω se calcula por la integral doble

$$\begin{aligned}\text{Área}\,(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx\,dy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 dx(2\sqrt{x} - \sqrt{x}) \\ &= \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4 = \frac{16}{3} \triangleright\end{aligned}$$

En muchas ocasiones es más cómodo cambiar de coordenadas para calcular la integral doble sobre una región. El siguiente resultado nos indica cómo cambia la forma diferencial de área dA cuando se realiza un cambio de coordenadas.

Supongamos que $(u,v) \in \widetilde{\Omega}$ y se tiene la relación

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad (x,y) \in \Omega$$

que nos da un cambio de coordenadas suave en una región del plano, entonces obtenemos el siguiente resultado.

LEMA 8.27. *Si $dA = dx\,dy$ es la diferencial de área en las coordenadas (x,y) de Ω, entonces bajo el cambio de coordenadas dado esta diferencial obedece la regla*

$$dA = dx\,dy = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv, \quad (u,v) \in \widetilde{\Omega}$$

◁ Sea $(u,v) \in \widetilde{\Omega}$ un punto arbitrario, y consideremos los vectores infinitesimales en el punto (u,v) dados por $(du,0)$ y $(0,dv)$. Entonces tales vectores, bajo la derivada de la transformación, son llevados en los vectores infinitesimales

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u\,du \\ y_u\,du \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_v\,dv \\ y_v\,dv \end{pmatrix}$$

situados en el punto $(x,y) \in \Omega$, como se muestra en la figura 8.10.

El área del paralelogramo infinitesimal generado por los vectores $(x_u, y_u)\,du$ y $(x_v, y_v)\,dv$ en el punto (x,y) se calcula mediante la cadena de igualdades

$$dA = \left\|(x_u, y_u, 0)\,du \times (x_v, y_v, 0)\,dv\right\| = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u\,du & y_u\,du & 0 \\ x_v\,dv & y_v\,dv & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_u\,du & y_u\,du \\ x_u\,dv & y_v\,dv \end{vmatrix} = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$

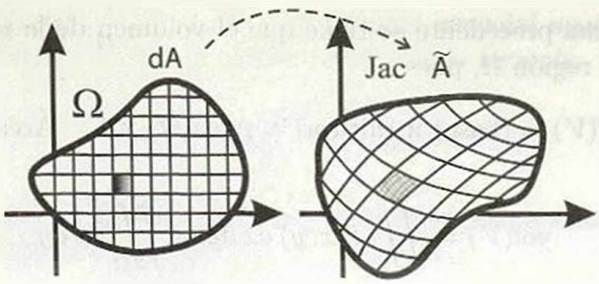


Figura 8.10. Transformación de la diferencial del área.

donde $\times$ es el producto vectorial. $\triangleright$

La notación utilizada aqui para el **jacobiano** de la transformación es

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

Un resultado inmediato a este lema 8.27 es el importante teorema llamado de cambio de variables, el cual permite realizar el cálculo de integrales dobles de una manera más simple, cuando las regiones son "complicadas".

TEOREMA 8.28 (Cambio de variables). *Si $x = x(u,v)$, y $y = y(u,v)$ es una transformación de variables de la región acotada $\tilde{\Omega}$ con variables (u,v) en la región acotada Ω en las variables (x,y), se tiene la siguiente igualdad para la integral doble de la función $f(x,y)$ definida en la región Ω*

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{\Omega}} f(x(u,v),\, y(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv$$

$\triangleleft$ Es consecuencia del hecho que la transformación $\tilde{\Omega} \to \Omega$ es una biyección, y de la fórmula del lema 8.27. $\triangleright$

Anteriormente hemos calculado algunos casos del jacobiano para una transformación de coordenadas. Por ejemplo, al transformar cartesianas por polares se obtuvo

$$dx\,dy = \left|\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right| dr\,d\varphi = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$$

EJEMPLO 8.29. Calcule el área de la región comprendida dentro de la elipse plana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\triangleleft$ Claramente la región Ω mencionada satisface en las coordenadas cartesianas que

$$\Omega = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

o equivalentemente, para $a \geq 0$, $b \geq 0$

$$\Omega = \left\{ (x,y) \,\middle|\, (bx)^2 + (ay)^2 \leq (ab)^2 \right\}$$

Consideremos el cambio de coordenadas a polares (r,φ) dado por

$$\begin{cases} bx = r\cos\varphi \\ ay = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

donde $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $r \in [0, ab]$, o en otras palabras

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{b}\cos\varphi \\ y = \dfrac{r}{a}\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

Tenemos entonces que bajo tal transformación las diferenciales se cambian mediante la cadena de igualdades

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\,dr\,d\varphi = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} dr\,d\varphi$$
$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{b}\cos\varphi & -\frac{r}{b}\operatorname{sen}\varphi \\ \frac{1}{a}\operatorname{sen}\varphi & \frac{r}{a}\cos\varphi \end{vmatrix} dr\,d\varphi = \frac{r}{ab}\,dr\,d\varphi$$

Ya que por el corolario 8.25 el área se calcula mediante

$$\text{Área}\,(\Omega) = \iint_\Omega dx\,dy$$

entonces se tiene que

$$\text{Área}\,(\Omega) = \iint_\Omega dx\,dy = \int_0^{ab} \frac{r}{ab}\,dr \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{1}{ab}(2\pi)\int_0^{ab} r\,dr$$
$$= \frac{1}{ab}(2\pi)\frac{(ab)^2}{2} = \pi ab \triangleright$$

EJEMPLO 8.30. Escriba la integral doble

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

en coordenadas polares, si Ω es la región que en coordenadas cartesianas se escribe

$$\Omega = \left\{(x,y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le ax\right\}$$

$\triangleleft$ Observamos que la ecuación que describe a Ω puede también escribirse como

$$x^2 - ax + y^2 \le 0$$

de donde

$$x^2 - 2x(a/2) + (a/2)^2 + y^2 \le (a/2)^2$$

lo que nos lleva a que

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le a^2/4$$

que es la ecuación de un círculo con centro en el punto $(a/2, 0)$ y radio $r = \frac{a}{2}$.

Por esto, al realizar el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x - \dfrac{a}{2} = r\cos\varphi \\ y = r\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi + \dfrac{a}{2} \\ y = r\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

con $r \in [0, a/2]$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$ y tenemos igualmente definida a la región Ω.

Ya que el cambio de coordenadas tiene jacobiano

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

tenemos que las diferenciales se transforman por

$$dx\,dy = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\,dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$$

Por lo tanto, la integral inicial se transforma en

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{0}^{a/2} f\left(r\cos\varphi + \frac{a}{2}, r\,\mathrm{sen}\,\varphi\right) r\,dr$$

Observamos que de la ecuación $x^2 + y^2 \leq ax$, al sustituir por las coordenadas polares en forma directa, se tiene que

$$r^2 \leq ar\cos\varphi$$

o bien la ecuación de dependencia de r por φ:

$$r \leq a\cos\varphi$$

Esto nos da una manera de escribir a Ω:

$$\Omega = \left\{(r,\varphi)\,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq a\cos\varphi\right\}$$

lo que nos llevaría a escribir la integral inicial como

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{a\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,r\,dr \ \triangleright$$

EJEMPLO 8.31. Transforme la integral doble

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy$$

a una integral en coordenadas polares, si Ω es la región limitada por las rectas $y = x$ y $y = 2x$ y las circunferencias $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$.

$\triangleleft$ De las ecuaciones dadas para los círculos se obtiene que al pasar a polares

$$x^2 + y^2 = 4x \ \Rightarrow r^2 = 4r\cos\varphi \ \Rightarrow\ r = 4\cos\varphi$$
$$x^2 + y^2 = 8x \ \Rightarrow r^2 = 8r\cos\varphi \ \Rightarrow\ r = 8\cos\varphi$$

Por lo tanto, de la figura 8.11 se tiene que la región Ω puede ser descrita angularmente desde el radio cuya tangente es 1 ($y = x$), hasta el radio cuya tangente es 2 ($y = 2x$). Esto es, el ángulo φ está en el intervalo

$$[\arctan 1, \arctan 2] = \left[\frac{\pi}{4}, \arctan 2\right]$$

siendo que la variación radial es desde $r = 4\cos\varphi$ hasta $r = 8\cos\varphi$. En otras palabras, la región se escribe

$$\Omega = \left\{(r,\varphi)\,\middle|\, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \arctan 2,\ 4\cos\varphi \leq r \leq 8\cos\varphi\right\}$$

Por lo tanto, la integral inicial se tranforma en

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\pi/4}^{\arctan 2} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi) r\,dr \ \triangleright$$

EJEMPLO 8.32. Calcule la integral doble

$$\iint_{\Omega} \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}\,dx\,dy$$

utilizando coordenadas polares, si Ω es la región definida por $x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \leq 0$.

$\triangleleft$ Claramente la región Ω está definida por

$$\Omega = \left\{(r,\varphi)\,\middle|\, 0 \leq \varphi \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq 1\right\}$$

en coordenadas polares, y también

$$dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$$

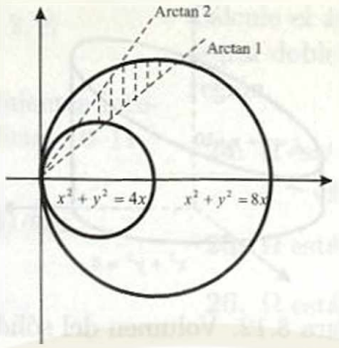


Figura 8.11. Región Ω en coordenadas polares.

Por lo tanto, se tiene que la integral inicial se calcula mediante la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy &= \iint_\Omega \sqrt{\frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}}\,dx\,dy\\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi-2}{4}\right) = \frac{\pi^2-2\pi}{8}\ \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 8.33. Calcule mediante coordenadas polares la integral

$$\iint_\Omega \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

si Ω es el círculo $x^2+y^2 \le 2x$.

$\triangleleft$ Un análisis similar al efectuado en ejemplos anteriores nos lleva a que en coordenadas polares Ω se define por

$$\Omega = \left\{(r,\varphi)\,\middle|\,\frac{-\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos\varphi\right\}$$

y que las diferenciales cambian por

$$dx\,dy = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r\,dr\,d\varphi$$

Por lo tanto, la integral se calcula

$$\begin{aligned}\int\int_\Omega \sqrt{16-x^2-y^2}\,dx\,dy &= \iint_\Omega \sqrt{16-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{4-r^2}\,r\,dr\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (16-r^2)^{1/2}\,r\,dr\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2}\right]_0^{2\cos\varphi}\\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3}\left(8-8\sin^3\varphi\right)d\varphi\\ &= \frac{8}{3}\pi\ \triangleright\end{aligned}$$

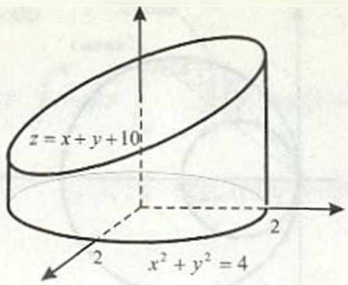


Figura 8.12. Volumen del sólido V.

EJEMPLO 8.34. Calcule el volumen del sólido V limitado por el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos $z=0,\ z=x+y+10$.

◁ El sólido V puede ser visto como la gráfica de la función

$$z = x + y + 10$$

definida sobre la región $\Omega : x^2 + y^2 \leq 4$, en virtud de que el plano no es paralelo al cilindro y en las coordenadas polares (r, φ) de Ω la intersección de ambos está dada por las soluciones del sistema

$$\begin{cases} r^2 = 4 \\ z \ = r(\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi) + 10 \end{cases}$$

es decir, en la elipse dada por

$$\begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\operatorname{sen}\varphi \\ z = 2(\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi) + 10 \end{cases}$$

parametrizada por $\varphi \in [-\pi, \pi]$ (véase la figura 8.12).

Por otro lado la región Ω en polares se escribe por

$$\Omega = \{(r, \varphi) \mid -\pi \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 2\}$$

De esta manera, el volumen de V buscado es

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(V) &= \iint_\Omega z(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Omega (x+y+10)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^2 [r(\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi) + 10]\,dr = 40\pi \ \triangleright \end{aligned}$$

Ejercicios 8.1

1. Una placa fina Ω limitada por las curvas $y = 1 - x^2$, $y = -(x-1)^3$ es tal que en cada punto $p \in \Omega$ su densidad es igual a la diferencia de cuadrados de su ordenada y su abscisa. Escriba la integral que calcula la masa de la placa y obténgala.

2. En cada punto de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ está definida una densidad cuyo valor es inversamente proporcional al radio polar del punto. Escriba la integral que calcula la masa de Ω.

3. En la región $V \subset \mathbb{R}^3$ está definida una densidad puntual cuyo valor en cada punto de la región es igual al cuadrado del radio polar restado de 4. Escriba la integral que calcula la masa de la región V.

4. Escriba los ejercicios 2 y 3 anteriores en coordenadas polares y esféricas respectivamente.

5. Dé un intervalo donde se pueda estimar la integral

$$\iint_\Omega (x^2 + y^2 + 4)\,dx\,dy,\ \ \Omega : x^2 + y^2 \leq 1$$

6. Dé un intervalo donde se pueda estimar la integral

$$\iint_\Omega (x + y - x^2 + y^2)\,dx\,dy,\ \ \Omega = [0,1] \times [0,1]$$

Calcule las integrales dobles en la región indicada para los ejercicios 7–9.

7. $\displaystyle\iint_\Omega x^2 \ln y\,dx\,dy,\ \ \Omega = [0,3] \times [1,e]$

8. $\displaystyle\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{(x+y)^3},\ \ \Omega = [3,4] \times [1,3]$

9. $\iint_\Omega (x^2+y^2-1)\,dx\,dy,\ \Omega=[-1,0]\times[-2,2]$

Intercambie el orden de integración de las siguientes integrales, para la función arbitraria f en los ejercicios 10–11.

12. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$

13. $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$

Calcule la integral doble indicada sobre la región señalada en los ejercicios 14–17.

14. $\iint_\Omega \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$

Ω es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$.

15. $\iint_\Omega \dfrac{y\,dx\,dy}{x^2+y^2}$

Ω es la región acotada por $y=x^2$, $y=x$, $x\geq 0$.

16. $\iint_\Omega (x^2-2y)\,dx\,dy$

$\Omega: y^2-4\leq x\leq 5,\ -3\leq y\leq 3$.

17. $\iint_\Omega x^2y^2\,dx\,dy$

Ω es la región limitada por $x=0$, $y=0$, $x^3+y^3=1$.

18. Calcule el valor promedio de la función

$$f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$$

en el círculo $x^2+y^2\leq 4$.

19. Calcule el valor promedio de la función

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

dentro del círculo $x^2+y^2\leq 2x$.

Calcule el volumen del sólido V mediante una integral doble, si V es la región indicada en los ejercicios 20–23. Haga un dibujo de la región.

20. V está acotada por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y los planos $x=1$, $z=4$, con $x\leq 1$.

21. V está limitado por $x+y+z=6$, $3x+y=6$, $3x+2y=12$, $y=0$, $z=0$.

22. V está acotado por $x^2+y^2=4x$, $z=2x$, $z=-x$.

23. El volumen del sólido que se encuentra dentro de la intersección de los cilindros

$$y^2+z^2+R^2 \ \text{ y } \ x^2+z^2=R^2$$

Sugerencia: Considere la intersección que se encuentra en el primer octante.

Cálcule el área de la región Ω dada, por medio de una integral doble en los ejercicios 24–26. Haga un dibujo de la región.

24. Ω está acotada por las rectas $x=y$, $x=2y$, $x+y=2$, $x+3y=2$.

25. Ω está acotada por $x=4y-y^2$, $x+y=6$.

26. Ω está acotada por $y^2=4x$ y $y=2x$.

Pase a una integral en coordenadas polares las integrales de los ejercicios 27–28.

27. $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$

Ω es la menor de las regiones en las que limitadas por la recta $x+y=2$ y el círculo $x^2+y^2\leq 4$.

28. $\int_1^4 dy\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)\,dx$

Calcule las integrales de los ejercicios 29–33, pasando a coordenadas polares.

29. $\int_0^4 dx\int_0^{\sqrt{16-x^2}} \ln(x^2+y^2)\,dy$

30. $\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$

$\Omega:\ x^2+y^2\leq 4,\ y\geq 0$.

31. $\iint_\Omega \left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx\,dy$

Ω es el círculo $x^2+y^2\leq \pi^2$.

32. $\iint_\Omega \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

Ω está limitada por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$.

33. $\iint_\Omega (x^2+y^2)\,e^(x^2+y^2)^2\,dx\,dy$

Ω es el círculo $x^2+y^2\leq R^2$.

34. Calcule la integral

$$\int_0^1 dx\int_x^{2x} dy$$

mediante el cambio de variables $x=u(1-v)$, $y=uv$.

35. Calcule la integral

$$\iint_\Omega (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy$$

si Ω está acotada por $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ realizando el cambio de coordenadas $u=x+y$, $v=x-y$.

36. Mediante el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{u}{v}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

calcule el área de la región acotada por las curvas

$$y = x,\ y = 3x,\ y = \frac{1}{x},\ y = \frac{2}{x}$$

37. Calcule la integral

$$\int_{\Omega} \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^{1/2} dx\, dy$$

donde Ω es la región que se encuentra en el primer cuadrante limitada por los planos coordenados y la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, utilizando el cambio de variables $u = \sqrt{x}$, $w = \sqrt{y}$.

8.2 Integrales triples

Definimos en esta sección las integrales triples de funciones definidas en regiones espaciales, y se generalizan los resultados obtenidos en la sección 8.1 para este tipo de integrales, extendiéndolos de manera natural.

DEFINICIÓN 8.35. Sea $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función acotada definida sobre la región acotada con frontera $V \subset \mathbb{R}^3$. Entonces la **integral triple** de f sobre la región V es la cantidad

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$$

siendo la 3-forma diferencial $dV = dx\, dy\, dz$ la **diferencial de volumen** básica en $\mathbb{R}^3$.

Acerca de la construcción de la integral triple bajo el proceso de límite como se hizo para la doble, así como su existencia, omitimos los detalles que llevan un proceso similar. Si la integral triple para la función f existe, ésta se dirá **integrable** sobre la región acotada espacial V.

A continuación damos una cadena de resultados que son fácilmente reconocibles como generalizaciones de los mencionados en la sección 8.1.

TEOREMA 8.36. *Si $f : V \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en V.*

TEOREMA 8.37. *Si $f : V \to \mathbb{R}$ es acotada y es continua excepto en algún subconjunto de V que tenga volumen cero, entonces f es integrable en V.*

LEMA 8.38. *Sean $f, g : V \to \mathbb{R}$ integrables en la región $V \subset \mathbb{R}^3$*

1. *Si λ, μ son dos números reales arbitrarios, entonces se cumple la relación de* **linealidad**

$$\iiint_V (\lambda f + \mu g)(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \mu \iiint_V g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

2. *Si $f : V \to \mathbb{R}$ es continua en la región acotada con frontera V, m y M son, respectivamente, los valores mínimo y máximo de f en V, entonces*

$$m \times \text{vol}\,(V) \leq \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leq M \times \text{vol}\,(V)$$

3. *Si la región V se descompone en las regiones V_1 y V_2: $V_1 + V_2 = V$ (donde $+$ denota la unión), de tal forma que V_1 y V_2 se intersecan apenas en un conjunto de volumen cero, entonces se cumple la igualdad de aditividad*

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_{V_1 + V_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{V_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \end{aligned}$$

Un resultado que se sigue del lema 8.38 es el **teorema del valor medio** para integrales triples, de la misma forma que el teorema 8.20 para las integrales dobles.

TEOREMA 8.39 (del valor medio). *) Si $f : V \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región acotada con frontera V, entonces existe un punto $(x^*, y^*, z^*) \in V$ donde f alcanza su valor promedio f^*, y tal que*

$$f^* = f(x^*, y^*, z^*) = \frac{1}{\text{vol}(V)} \iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Una región espacial $V \subset \mathbb{R}^3$ se dirá del tipo V_z, si puede escribirse de la forma

$$V_z = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),\ \psi_1(x, y) \le z \le \psi_2(x, y)\}$$

donde $y = \varphi_1(x)$ y $y = \varphi_2(x)$ son dos curvas definidas en el intervalo $[a, b]$; $z_1 = \psi_1(x, y)$ y $z_2 = \psi_2(x, y)$ son las gráficas de dos funciones definidas en la región plana

$$\Omega = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

como lo muestra la figura 8.13.

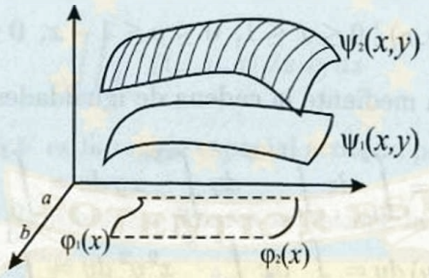


Figura 8.13. Región espacial del tipo V_z.

De manera análoga se definen las regiones del tipo V_y y V_x:

$$V_x = \{(x, y, z) \mid \psi_1(y, z) \le x \le \psi_2(y, z),\ a \le y \le b,\ \varphi_1(y) \le z \le \varphi_2(y)\}$$
$$V_y = \{(x, y, z) \mid \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y),\ \psi_1(x, y) \le y \le \psi_2(x, y),\ a \le z \le b\}$$

En las definiciones anteriores puede cambiar el orden de dependencia para las variables que son el argumento de ψ_1 y ψ_2, lo importante es que estén definidas en una región que pueda definirse mediante dos desigualdades que contengan a las curvas φ_1 y φ_2.

Mencionamos a continuación el **teorema de Fubini** para una integral triple de una función definida en una región espacial del tipo V_z. Para los otros tipos mencionados de regiones espaciales se cumple la igualdad correspondiente de las integrales iteradas.

TEOREMA 8.40 (Fubini). *Si $f : V \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región $V \subset \mathbb{R}^3$, que es del tipo V_z, entonces la integral triple de f sobre V se calcula por las integrales iteradas*

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

que reduce tal integral triple en una doble cuya forma de cálculo se conoce.

◁ Se omite la prueba que es una generalización del lema 8.9. ▷

EJEMPLO 8.41. Calcule la integral iterada triple

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{xy} x^3 y^3 z\, dz\, dy\, dx$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

◁ Por el teorema de Fubini 8.40 para integrales triples, se tiene

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{xy} x^3y^3z\,dz\,dy\,dx = \int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^3z\,dz$$
$$= \int_0^a dx \int_0^x dy \left[x^3y^3\frac{z^2}{2}\right]_0^{xy} = \int_0^a dx \int_0^x x^3y^3\frac{(xy)^2}{2}\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a dx \int_0^x x^5y^5\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a dx \left[x^5\frac{y^6}{6}\right]_0^x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a \frac{1}{6}x^5x^6\,dx = \frac{1}{12}\int_0^a x^{11}\,dx = \frac{1}{12}\,\frac{x^{12}}{12}\Big]_0^a = \frac{a^{12}}{144} \quad \triangleright$$

EJEMPLO 8.42. Calcule la integral

$$\iiint_V xy\,dx\,dy\,dz$$

donde V es la región limitada por el paraboloide hiperbólico $z = xy$ y los planos $x + y = 1$ y $z = 0$ con $x \geq 0$.

◁ La región puede escribirse en la forma

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq z \leq xy\}$$

Por lo tanto, la integral triple se calcula mediante la cadena de igualdades,

$$\iiint_V xy\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{xy} xy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy\, xy\big[z\big]_0^{xy}$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(xy)\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2y^2\,dy = \int_0^1 x^2\,dx \int_0^{1-x} y^2\,dy$$
$$= \int_0^1 x^2\,dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} = \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx = \frac{1}{180} \quad \triangleright$$

Otro resultado importante es el cálculo de volúmenes mediante la integral triple.

COROLARIO 8.43. *Si $V \subset \mathbb{R}^3$ es una región acotada con frontera, entonces su volumen* $\mathrm{vol}\,(V)$ *se calcula por la fórmula*

$$\mathrm{vol}\,(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

◁ La prueba es análoga a la del corolario 8.25 para el cálculo del área de una región plana. ▷

EJEMPLO 8.44. Calcule, utilizando una integral triple, el volumen de la región espacial acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2$ y los planos $y = x, y = 2x$ y $x = 1$.

◁ Es claro que la definición de la región espacial está dada por las desigualdades en las coordenadas cartesianas

$$0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x,\ x^2 + y^2 \leq z \leq x^2 + 2y^2$$

Ya que el volumen de una región sólida V en el espacio se calcula mediante la fórmula

$$\mathrm{vol}\,(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

entonces el volumen de la región indicada es

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz$$
$$= \int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 7x^3\,dx = \frac{7}{12} \quad \triangleright$$

Finalmente, enunciamos el teorema de cambio de variable para integrales triples, generalizando el teorema 8.28.

TEOREMA 8.45 (Cambio de variable). *Sea la transformación de las regiones $\tilde{V} \to V$ (cambio de coordenadas) dada por las relaciones*

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

Entonces, bajo tal cambio de coordenadas, la integral triple de la función $f(x,y)$ definida en la región espacial V se transforma por la igualdad

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{V}} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

donde

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

es el jacobiano de la transformación de coordenadas.

EJEMPLO 8.46. Dada una función $w = f(x,y,z)$ arbitraria, pasemos la integral

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

a una integral en coordenadas cilíndricas, si V es la región espacial acotada por el cilindro $x^2+y^2=2x$, el plano $z=0$ y el paraboloide $z = x^2+y^2$.

◁ Al escribir el círculo $x^2+y^2=2x$ en coordenadas polares se obtiene la ecuación

$$r^2 = 2r\cos\varphi \quad \text{o} \quad r = 2\cos\varphi$$

definido en $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $r \in [0, 2\cos\varphi]$, como se ha mencionado antes.

Por otro lado $z = x^2+y^2 = r^2$, lo que hace que la región V se escriba como

$$V = \left\{(r,\varphi,z) \mid -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 2\cos\varphi,\ 0 \le z \le r^2\right\}$$

De esta manera, la integral queda en coordenadas cilíndricas como

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_0^{r^2} f(r\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi, z)\,r\,dz$$

en virtud que la diferencial cambia por la regla

$$dx\,dy\,dz = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r\,dr\,d\varphi dz = r\,dz\,dr\,d\varphi \quad \triangleright$$

EJEMPLO 8.47. Calcule la integral

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$$

utilizando coordenadas cilíndricas.

◁ La región de integración está definida por

$$0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2},\ 0 \le z \le a$$

Analizando las desigualdades, comprobamos que la región plana Ω que la define es la parte superior de la semicircunferencia de radio 1 con centro en $(2,0)$.

De hecho, la ecuación $y = \sqrt{2x-x^2}$ que define la frontera de Ω es la circunferencia $y^2+x^2 = 2x$ (véase ejemplo anterior).

Por lo tanto, la región espacial donde se integra la función se define en coordenadas cilíndricas por

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 2\cos\varphi,\ 0 \leq z \leq a$$

De esta forma, la integral se calcula en estas coordenadas mediante

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} dr \int_0^a z\sqrt{r^2}\,r\,dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr \int_0^a z\,dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\varphi}$$

$$= \frac{8a^2}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{8a^2}{9} \quad \triangleright$$

EJEMPLO 8.48. Transforme la integral

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

a una integral en coordenadas esféricas, si V es la parte de la bola $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ situada en el primer octante.

$\triangleleft$ De las ecuaciones de cambio de coordenadas y su definición, se tiene que V está definida por coordenadas cogeográficas por

$$0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

como lo muestra la figura 8.14.

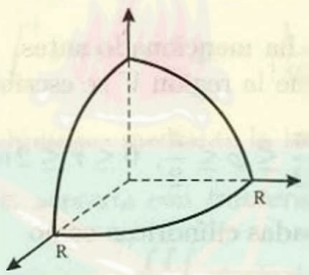


Figura 8.14. Un octante de la esfera en $\mathbb{R}^3$.

De esta manera, como el cambio de diferenciales está dado por

$$dx\,dy\,dz = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}\,dr\,d\varphi\,d\theta = r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

entonces la integral se transforma en

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R f(r\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta, r\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta)r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr$$

EJEMPLO 8.49. Calcule la integral

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx$$

$\triangleleft$ La región de integración está definida por las desigualdades

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

que nos dice que es la parte de la bola limitada por la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ contenida en el primer octante.

Tal región, en coordenadas cogeográficas, se escribe

$$0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

lo que nos lleva la integral en

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{r^2} r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \frac{\pi}{2}(1)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \triangleright$$

EJEMPLO 8.50. Utilizando coordenadas esféricas calcule la integral

$$\iiint_V (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$$

donde la región V está definida por

$$z \ge 0,\ a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2$$

$\triangleleft$ La región V corresponde a la semicúpula esférica superior limitada por dos semiesferas superiores de radios a y b respectivamente, con $0 < a < b$.

En coordenadas esféricas V está descrita por las desigualdades

$$a \le r \le b,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Ya que las diferenciales se relacionan mediante la ecuación

$$dx\, dy\, dz = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)}\, dr\, d\varphi\, d\theta = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

entonces la integral se convierte en

$$\iiint_V (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_a^b (r^2 \operatorname{sen}^2\theta)\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b r^4\, dr = \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} 2\pi \left[\frac{r^5}{5}\right]_a^b$$
$$= \left[1 - \frac{1}{3}\right] 2\pi \frac{1}{5}(b^5 - a^5) = \frac{4}{15}(b^5-a^5)\pi \triangleright$$

Ejercicios 8.2

1. Dé un intervalo donde se pueda estimar la integral

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$$

donde $V : x^2+y^2+z^2 \le 1$

2. Dé un intervalo donde se pueda estimar la integral

$$\iiint_V (x-y-z)\, dx\, dy\, dz$$

donde $V : [0,1] \times [0,1] \times [-1,1]$

Calcule las integrales de los ejercicios 3–4 en el rectángulo indicado.

3. $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z)^2}$
donde $V = [0,1] \times [-1,1] \times [-1,0]$

4. $\displaystyle\iiint_V (x^2-y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$
donde $V = [-1,2] \times [0,3] \times [4,5]$

Calcule las integrales de los ejercicios 5–7 en la región indicada.

5. $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z)}$

donde V está acotada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

6. $\iiint_V (x + y - z^2)^3 \, dx\, dy\, dz$

V es el interior del cilindro $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

7. $\iiint_V y \cos(z + x) \, dx\, dy\, dz$

donde V es el interior cilindro $y = x^2$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + z = \pi/2$.

8. Calcule el valor promedio de $f(x, y, z) = xyz$ dentro del cilindro limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 4$.

Mediante una integral triple, calcule el volumen de V si la región se define como se indica en los ejercicios 9–11.

9. V está acotada por $y^2 = 4 - 3x$, $y^2 = x$, $z = -1$, $z = 1$.

10. V está acotada por $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$ (cilindro) y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (dentro del cilindro).

11. V está acotada por $z^2 = x^2 + y^2$, $z = x^2 + y^2$.

Calcule las integrales de los ejercicios 12–14 pasando a las coordenadas cilíndricas.

12. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^4 xyz \, dz\, dy\, dx$

13. $\displaystyle\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

donde V es el cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$, $|z| \leq 4$.

14. $\iiint_V (x^2 + y + z^2)^3 \, dx\, dy\, dz$

Ω está acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y $y = 0$, $y = 1$.

Calcule las integrales de los ejercicios 15–17, pasando a coordenadas esféricas.

15. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) \, dz\, dy\, dx$

16. $\iiint_V x^2 \, dx\, dy\, dz$

donde V: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

17. $\iiint_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, dx\, dy\, dz$

donde $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

18. A una esfera de radio R se le hace un agujero de radio r a través de uno de sus diámetros. Utilice coordenadas esféricas para encontrar el volumen que se quitó de la esfera.

19. Calcule el volumen del sólido que se encuentra dentro del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

CAPÍTULO

9 Campos escalares y vectoriales en una región del espacio $\mathbb{R}^3$

9.1 Campos escalares

En este capítulo mostramos la utilidad del cálculo vectorial para resolver problemas que aparecen frecuentemente en la Física y en la Ingeniería. Para ello, damos una caracterización a las aplicaciones (funciones) definidas en alguna región de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y utlizamos conceptos y resultados ya conocidos con anterioridad en los capítulos 5, 6 y 7.

EJEMPLO 9.1. Considere una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con coordenadas x, y, z, de tal forma que para un punto arbitrario $p \in \Omega$, se tiene asignado un valor de temperatura $T = T(p)$.

$\lhd$ En este caso, esto corresponde a una función

$$T : \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que a cada $p \in \Omega$ le asocia la temperatura $T(p)$ registrada en ese punto. En coordenadas se escribe

$$(x, y, z) \mapsto T(x, y, z) \quad \rhd$$

EJEMPLO 9.2. Sea Ω una región (sólida) de $\mathbb{R}^3$ tal que a cada punto $p \in \Omega$ le asociamos una densidad de masa $\delta(p)$.

$\lhd$ Esto induce una función $\delta : \Omega \to \mathbb{R}$ determinada por la densidad correspondiente a cada punto p de la región $\Omega : p \mapsto \delta(p)$

Si x, y, z son las coordenadas de Ω, entonces la función mencionada se escribe

$$(x, y, z) \mapsto \delta(x, y, z) \quad \rhd$$

Los dos anteriores ejemplos son casos particulares de los llamados **campos escalares** definidos en una región del espacio $\mathbb{R}^3$.

DEFINICIÓN 9.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región que tiene coordenadas x, y, z. A una función real suave, definida en Ω

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

se le llamará el **campo escalar** definido en Ω por la función f. En las coordenadas dadas se escribe:

$$f = f(x, y, z)$$

EJEMPLO 9.4. Defina en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la función distribución de la carga eléctrica

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que a cada punto $p \in \Omega$ le asocia su densidad de carga. Entonces, por definición f es un campo escalar.

Sean, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar suave definido en Ω. Para $c \in \mathbb{R}$ se define el **conjunto de nivel** de f al nivel c como

$$f^{-1}(c) = \{p \in \Omega \mid f(p) = c\}$$

es decir, el subconjunto de puntos de Ω que tienen definido el mismo valor bajo el campo escalar f (véase la figura 9.1 y la sección 4.3).

Tales conjuntos no se traslapan entre sí. Esto es, dados $c_1 \neq c_2$, los conjuntos de nivel $f^{-1}(c_1)$ y $f^{-1}(c_2)$ no tienen puntos comunes. En otras palabras, los conjuntos de nivel folian (dividen) a la región Ω mediante estos conjuntos de nivel.

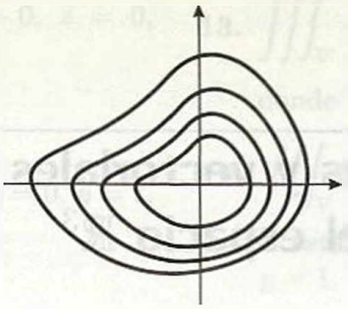


Figura 9.1. Conjuntos de nivel de un campo escalar suave.

EJEMPLO 9.5. Considere el campo escalar δ definido en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tal que en cada punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto al origen y en el punto $(1,0,0)$ tiene valor $1/2$.

◁ Si x, y, z son las coordenadas en Ω, entonces el campo δ se escribe

$$\delta(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2}$$

donde k se determina por la ecuación condicional

$$\frac{1}{2} = \delta(1,0,0) = \frac{k}{1^2+0^2+0^2} = k$$

Esto es, el campo escalar tiene la regla de correspondencia

$$\delta(x,y,z) = \frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)}$$

Analizamos al conjunto de nivel $\delta^{-1}(c)$ para apenas los valores positivos c, en virtud de que el campo toma únicamente valores positivos.

De la definición de conjunto de nivel tenemos que

$$\delta^{-1}(c) = \left\{(x,y,z) \in \Omega \mid c = \delta(x,y,z) = \frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)}\right\}$$

lo que nos dice que $(x,y,z) \in \delta^{-1}(c)$ si y solamente si satisface la ecuación

$$c = \frac{1}{2(x^2+y^2+z^2)}$$

o equivalentemente

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{2c}$$

que es la ecuación de una esfera de radio $\sqrt{\frac{1}{2c}}$ con centro en el origen de coordenadas.

Dicho de otra forma, para cada nivel $c > 0$, el conjunto $\delta^{-1}(c)$ es una esfera de radio $\sqrt{\frac{1}{2c}}$ contenida en Ω.

Es claro que $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, ya que es el dominio maximal de δ (véase la figura 9.2).

Bajo la transformación de coordenadas euclidianas (x,y,z) por las esféricas (r,φ,θ), el campo escalar δ se puede escribir de una manera más simple, donde se involucra apenas a la variable radial r, esto es

$$\widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}(r) = \frac{1}{2r^2} \triangleright$$

EJEMPLO 9.6. Sea $\delta : \Omega \to \mathbb{R}$ el campo escalar definido por las densidades de masa puntuales, de tal forma que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de su distancia (altura respecto) al plano xy.

◁ Claramente $\delta = \delta(x,y,z)$ en las coordenadas (x,y,z) de Ω se escribe como

$$\delta = kz^2$$

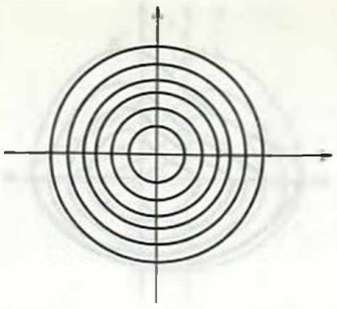


Figura 9.2. Conjuntos de nivel de δ.

Para analizar los conjuntos de nivel $\delta^{-1}(c)$, supondremos que la constante k es positiva. Entonces los valores de δ en todo $\Omega\,(=\mathbb{R}^3)$ son positivos, de donde es suficiente con considerar valores de nivel $c > 0$.

Tenemos entonces que para $c > 0$

$$\delta^{-1}(c) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \delta(x, y, z) = kz^2 = c\right\}$$

con lo que $(x, y, z) \in \delta^{-1}(c)$ si y solamente si

$$kz^2 = c$$

o bien

$$z = \pm\sqrt{\frac{c}{k}}$$

que es la ecuación del par de planos paralelos al plano xy a las alturas $-\sqrt{\frac{c}{k}}$ y $\sqrt{\frac{c}{k}}$.

Así, el conjunto de nivel δ asociado al valor c resulta ser un par de planos paralelos al plano xy (vea la figura 9.3). $\triangleright$

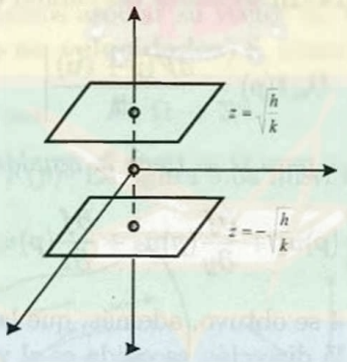


Figura 9.3. Niveles para $\delta = kz^2$, con $k > 0$.

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar suave definido en Ω región de $\mathbb{R}^3$.

$\triangleleft$ Ya se ha visto en la sección 4.3 que Ω está foliado (dividido) por los conjuntos de nivel $f^{-1}(c)$, donde c es un valor para f.

Por ejemplo, si f asigna el campo de temperaturas en la región Ω, para la temperatura c, el conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ corresponde a los puntos en Ω con la misma temperatura c (**puntos isotermales** de nivel c).

Usando este mismo ejemplo, sea $p \in \Omega$ un punto arbitrario y sea $T_0 = f(p)$ su temperatura, entonces p está en el conjunto de nivel $f^{-1}(T_0)$. De esta manera, si un objeto está situado en este punto y quiere variar su temperatura (ya sea para ganar o perder calor), deberá moverse de ese nivel a otro.

Por otro lado para moverse de ese punto p a otro nivel, tiene que hacerlo mediante la elección de una dirección $\mathbf{u}$ (vector unitario con un extremo naciente en p).

De esta forma, si t es un parámetro real pequeño y $\mathbf{u}$ es un vector unitario (dirección escogida), entonces el punto

$$p + t\mathbf{u}$$

está sobre la recta con vector director $\mathbf{u}$ pasando por p, y su temperatura es $f(p + t\mathbf{u})$. La figura 9.4 ilustra esto.

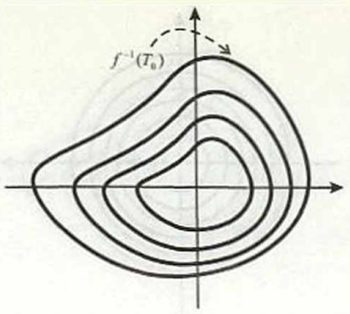


Figura 9.4. Campo escalar de temperatura.

De esta manera, la variación instantánea de la temperatura f en el punto p, tomada en la dirección del vector $\mathbf{u}$, está dada por la igualdad

$$D_{\mathbf{u}}f(p) = \left.\frac{df(p+t\mathbf{u})}{dt}\right|_{t=0}$$

donde $D_{\mathbf{u}}f(p)$ es la variación instantánea definida y la función $t \mapsto f(p+t\mathbf{u})$ es una función real de variable real.

Al usar coordenadas cartesianas, tenemos que si $p = (x_0, y_0, z_0)$, entonces

$$p + t\mathbf{u} = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, z_0 + tu_3)$$

siendo el vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Por la regla de la cadena se tiene que la derivada de f en la dirección $\mathbf{u}$ se calcula mediante

$$D_{\mathbf{u}}f(p) = \left.\frac{df(p+t\mathbf{u})}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x}(p)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)u_3 \ \triangleright$$

De esta manera, dado un campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$ en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, si $p \in \Omega$ es un punto arbitrario y $\mathbf{u}$ es un vector unitario arbitrario, se define **la derivada direccional** del campo escalar f en el punto p, en la dirección $\mathbf{u}$, como la cantidad (véase la sección 4.9)

$$D_{\mathbf{u}}f(p) = \left.\frac{dF(p+t\mathbf{u})}{dt}\right|_{t=0}$$

LEMA 9.7. *En coordenadas cartesianas x, y, z para Ω se tiene la igualdad*

$$D_{\mathbf{u}}f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(p)u_3 = \langle \nabla f(p), \mathbf{u} \rangle$$

De los resultados obtenidos en el Capitulo 4 se obtuvo, además, que la derivada direccional de un campo escalar f en un punto arbitrario p es maximizada, cuando la dirección escogida es el vector $\nabla F(p)$. Si se escoge el vector $-\nabla f(p)$, la derivada direccional se minimiza.

Si $\mathbf{u}$ es un vector tangente en p al conjunto de nivel $f^{-1}(c)$, entonces $\langle \nabla F(p), \mathbf{u} \rangle = 0$. Esto nos dice que $\nabla f(p)$ es un vector que es normal al conjunto de nivel $f^{-1}(c)$, donde $f(p) = c$.

EJEMPLO 9.8. Sea $T : \Omega \to \mathbb{R}$ el campo escalar de temperaturas mencionado arriba, y sea $p \in \Omega$ un punto arbitrario al nivel $T^{-1}(c)$.

$\triangleleft$ Entonces cualquier objeto posicionado en $p \in \Omega$ deberá moverse en la dirección $\nabla T(p)$ para ganar calor más rápidamente; y por otro lado, deberá moverse en dirección de $-\nabla T(p)$ para perderlo más rápidamente.

Si el objeto se mueve en dirección tangencial a su conjunto de nivel, conservará su temperatura. La figura 9.5 ilustra este ejemplo. $\triangleright$

Ejercicios 9.1

Dibuje las curvas o superficies de nivel del campo escalar indicado, con los valores señalados para los ejercicios 1–6.

1. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ para $c = 1, 2, 3$.

2. $f(x,y) = xy$ para $c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$.

3. $f(x,y) = y(x^2+4)$ para $c = -3, -2, \ldots, 2, 3$.

4. $f(x,y,z) = x + y + z$ para $c = -3, -2, -1, 0.\ 1, 2$.

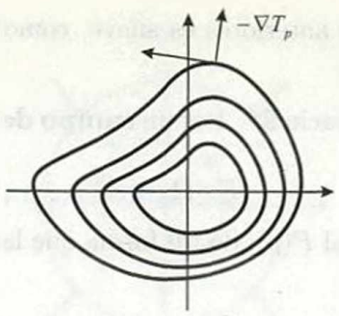


Figura 9.5. Campo escalar de temperaturas.

5. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$ para $c = -3,-2,-1,0,1,2$.

6. $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y^2+z^2}$ para $c = -2,-1,0,1,2,3,4$.

Calcule la derivada direccional del campo escalar f señalado en el punto p que se menciona y en la dirección dada $\mathbf{u}$ en los ejercicios 7–10.

7. $f(x,y) = x^2 - xy - y^2$, $p = (1,1)$, $\mathbf{u} = (-1,2)$.

8. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^3+y^3}$, $p = (1,2)$, $\mathbf{u} = (1,3)$.

9. $f(x,y,z) = \ln(e^x + y + e^z)$, $p = (-1,3,-1)$, $\mathbf{u} = (1,0,1)$.

10. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, $p = (1,1,3)$, $\mathbf{u} = (5,5,15)$.

9.2 Campos vectoriales

Considérese una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de tal forma que a cada punto $p \in \Omega$ se le asocia un vector espacial $F(p) \in \mathbb{R}^3$. Entonces diremos que está definido un campo de vectores en Ω (véase la sección 6.1)

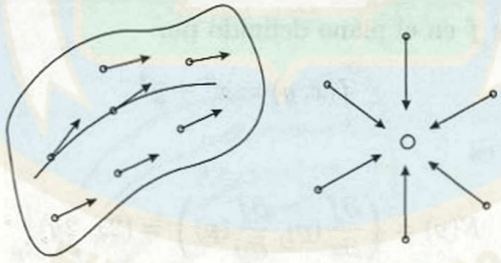
$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

EJEMPLO 9.9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región que ocupa el flujo de un líquido estacionario.

◁ Es claro que a cada punto $p \in \Omega$ le podamos asociar su vector de velocidad $F(p)$. De esta forma, se construye el campo de vectores velocidad del flujo (**campo de velocidades**) S, como la función

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

que a cada $p \in \Omega$ le asocia el vector velocidad $F(p)$. La figura 9.6a ilustra el ejemplo. ▷



a. b.

Figura 9.6. a. Campo de velocidades b. Campo gravitacional.

EJEMPLO 9.10. Consideremos la fuerza de atracción ejercida por un cuerpo de masa m situado en el origen de coordenadas.

◁ Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región del espacio no conteniendo el origen, entonces para cada objeto situado en el punto $p \in \Omega$, se le asocia el vector (**fuerza gravitacional**) ejercido por la atracción hacia el cuerpo de masa m.

Si se denota tal vector por $F(p)$, entonces se está construyendo un campo de vectores (fuerzas gravitacionales) en Ω, definido por la función

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

tal que a cada punto $p \in \Omega$ le asocia el vector gravitacional $F(p)$ (véase la figura 9.6b). ▷

Si la asociación $p \mapsto F(p)$ en los ejemplos anteriores es suave, como una función vectorial de argumento vectorial, diremos que los campos vectoriales son suaves.

DEFINICIÓN 9.11. Sea Ω una región del espacio $\mathbb{R}^3$. Por un **campo de vectores** suave F actuando en Ω entenderemos una función

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

que asocia a cada punto $p \in \Omega$ el vector espacial $F(p)$. de tal forma que la asociación es suave como una función vectorial de argumento vectorial.

En la práctica, para visualizar un campo de vectores definido en una región Ω. se trazan los vectores asociados $F(p)$ a los puntos $p \in \Omega$, teniendo a p como punto donde nace el vector $F(p)$. La figura 9.6 ilustra esta forma de visualizar los campos de velocidades y gravitacional.

EJEMPLO 9.12. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar arbitrario suave en Ω.

$\triangleleft$ Podemos asociar a cada punto $p \in \Omega$ el vector gradiente $\nabla f(p)$, creando entonces un campo vectorial X definido por

$$F = \nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

donde $F(p) = \nabla f(p)$.

Ya se ha visto en la sección pasada que si $\nabla f(p) \neq (0, 0, 0)$, entonces es un vector ortogonal al conjunto de nivel $f^{-1}(c)$ contenido a p.

El campo $F = \nabla f$ se llama **campo gradiente** del campo escalar f. $\triangleright$

Un campo de vectores X, sobre Ω tiene la forma

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

donde P, Q y R son funciones reales de argumento vectorial:

$$P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$$

Por ejemplo, el campo gradiente del escalar f se escribe en coordenadas cartesianas x, y, z como

$$F(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)$$

siendo en este caso

$$P = \frac{\partial f}{\partial x}, \; Q = \frac{\partial f}{\partial y}, \; R = \frac{\partial f}{\partial z}$$

EJEMPLO 9.13. Sea el campo escalar f en el plano definido por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$\triangleleft$ Entonces el campo gradiente de f es

$$F(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) = (2x, 2y)\Big|_p$$

Para ilustrar como actúa el campo. calculamos en algunos puntos sus vectores correspondientes.

$$X(0, 0) = (0, 0)$$
$$X(1, 0) = (2, 0)$$
$$X(1, 1) = (2, 2)$$
$$X(0, 1) = (0, 2)$$

Sabemos que para un valor positivo $c \in \mathbb{R}$, los conjuntos de nivel

$$x^2 + y^2 = c$$

corresponden a círculos concéntricos al origen, y que los gradientes son ortogonales a ellos. La figura 9.7 ilustra este ejemplo. $\triangleright$

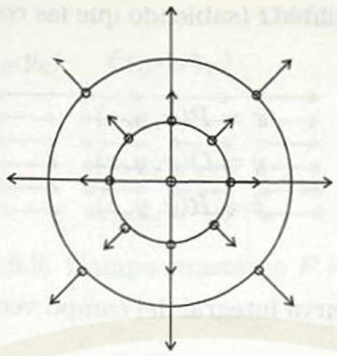


Figura 9.7. Campo gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Ahora mostramos que un campo de vectores crea una *dinámica* dentro de la región Ω contenida en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 9.14. Consideremos nuevamente el campo de velocidades F del líquido dentro de la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Bajo la influencia de tal campo, cualquier punto se "moverá" por la acción de la velocidad del líquido, creando una trayectoria. En los puntos de tal trayectoria también se ejercen tangencialmente velocidades que son vectores del campo que actúa en Ω.

Si se denota por $\gamma_p(t)$ la trayectoria (curva) que se realiza desde el punto $p\,(t=0)$, para tiempos $t > 0$, se tiene que la velocidad $\dot{\gamma}_p(t)$ de la curva en el punto $\gamma_p(t)$, pertenece al campo F. Esto es, el punto $\gamma_p(t)$ de la trayectoria tiene asociado al vector $X(\gamma_p(t))$ que es la velocidad en $\dot{\gamma}_p(t)$, es decir,

$$\dot{\gamma}_p(t) = F(\gamma_p(t))$$

Diremos que la curva $t \mapsto \gamma_p(t)$ es una **curva integral** del campo vectorial F, condicionada a pasar por $\gamma_p(0) = p$. Esto es, una curva integral del campo X de velocidades es una curva cuyos vectores tangentes pertenecen al campo X (véase la figura 9.8).

DEFINICIÓN 9.15. Sea F un campo de vectores suave en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, y sea

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to \Omega \quad \text{con} \quad \epsilon > 0$$

una curva suave definida del intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ a Ω. Decimos que γ es una **curva integral** de F si para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ se satisface la igualdad

$$\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$$

Esto es, γ es una curva integral de F si sus vectores tangentes $\dot{\gamma}(t)$ forman parte del campo vectorial (vea la figura 9.8).

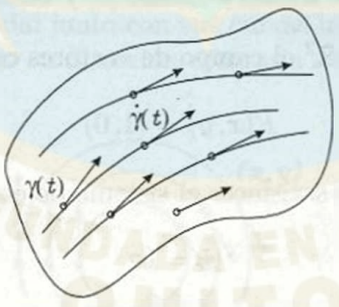


Figura 9.8. Curvas integrales de un campo vectorial.

Si x, y, z es un sistema de coordenadas arbitrario en la región Ω y el campo vectorial F se escribe

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

entonces la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ será una curva integral del campo si para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ se cumple la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) &= \dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) \\ &= (P(x(t), y(t), z(t)), Q(x(t), y(t), z(t)), R(x(t), y(t), z(t)))\end{aligned}$$

Esto es equivalente, a que suprimiendo la variable t (sabiendo que las coordenadas dependen de tal variable) se cumpla el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y, z) \\ \dot{y} &= Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= R(x, y, z), \end{aligned} \tag{9.1}$$

para $(x, y, z) \in \Omega$.

De esta forma, para que una curva sea una curva integral del campo vectorial $F = (P, Q, R)$, debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales (9.1).

El problema es ahora sobre la existencia de curvas integrales de un campo vectorial suave definido en una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Esto es, el conjunto de tales curvas integrales conformarían el **flujo** asociado al campo de vectores en el cual un objeto se podría mover libremente bajo la acción de tal campo.

El siguiente teorema, el cual no demostraremos aquí, nos muestra la existencia de una curva integral del campo, la cual pasa por un punto condicionado y que está determinada de manera única.

TEOREMA 9.16. *Sea Ω una región de $\mathbb{R}^3$ y sea F un campo de vectores suave definido en Ω. Entonces, para todo punto $p \in \Omega$,*

1. *Existe una curva integral suave*

$$\gamma : (a, b) \to \Omega$$

del campo integral F, definida en un intervalo máximo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ conteniendo a 0 y $\gamma(0) = p$.

2. *La curva γ es única en el sentido de que cualquier otra curva integral integral suave del campo*

$$\tilde{\gamma} : (a', b') \to \Omega$$

pasando por p, coincide con γ en el conjunto $(a, b) \cap (a', b')$, suponiendo que $0 \in (a', b')$.

La prueba del teorema 9.16 es objeto de la teoría de las ecuaciones diferenciales y sale del alcance de este libro. El lector interesado en la prueba puede referirse a Arnold [2].

A continuación, damos ejemplos de curvas integrales para campos vectoriales en el plano. La búsqueda de tales curvas integrales obedece en general a la solución del sistema de ecuaciones diferenciales mencionado. Se hace mención al lector que en general no es simple resolver un sistema de este tipo para encontrar las curvas integrales del campo que actúa en la región Ω, además de que los métodos de solución que se conocen merecen un trabajo aparte. El lector interesado en este tópico puede referirse a los libros básicos de Hirsch y Smale [6] y Braun [4].

EJEMPLO 9.17. Considere en la región $\Omega = \mathbb{R}^2$ el campo de vectores constante

$$F(x, y) = (1, 0)$$

◁ Entonces sus curvas integrales deberán de satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones tienen la forma

$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = t + x_0 \\ t(t) = y_0 \end{cases} \quad \text{con} (x_0, y_0) \in \Omega$$

Esta curva integral

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = (t + x_0, y_0)$$

es la correspondiente a una recta paralela al eje x, que en el tiempo $t = 0$ pasa por el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$.

La figura 9.9 ilustra el campo vectorial de este ejemplo, junto con sus curvas integrales (flujo del campo). ▷

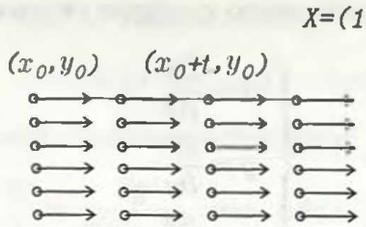


Figura 9.9. Campo constante $F = (1, 0)$.

EJEMPLO 9.18. Sea en $\Omega = \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido por

$$F(x, y) = (-y, x)$$

◁ El sistema de ecuaciones diferenciales asociado al campo es

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) = -y \\ \dot{y} = Q(x, y) = \ \ x \end{cases}$$

Mediante métodos del Álgebra lineal (véase Hirsch y Smale [6]) se puede comprobar que una solución al tiempo $t = 0$ pasando por el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, tiene la forma

$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t \\ y(t) = x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t \end{cases}$$

Por ejemplo, para el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ se tiene que la curva integral por él está definida por

$$\gamma(t) = (\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t)$$

Ya que

$$\|\gamma(t)\|^2 = (\cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 = 2$$

se tiene que la curva integral por el punto $(1, 1)$ es un círculo de radio $\sqrt{2}$ con centro en el origen. De manera análoga, la curva integral de X que pasa por el punto arbitrario (x_0, y_0) satisface que

$$\|\gamma(t)\|^2 = (x_0 \cos t - y_0 \operatorname{sen} t)^2 + (x_0 \operatorname{sen} t + y_0 \cos t)^2 = x_0^2 + y_0^2$$

lo que nos indica que también es un círculo con centro en el origen de radio $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

La figura 9.10 nos ilustra este campo vectorial junto con sus curvas integrales, que conforman una familia de círculos concéntricos sobre los cuales se mueve el campo en dirección contraria a las manecillas del reloj. ▷

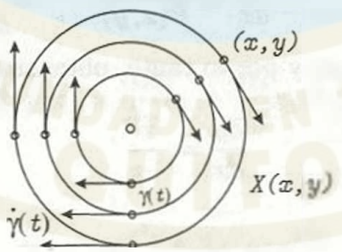


Figura 9.10. Curvas integrales del campo $X(x, y) = (-y, x)$.

EJEMPLO 9.19 (Campo gradiente). Considere un campo escalar f definido en la región Ω de $\mathbb{R}^3$, y el campo gradiente asociado F en las coordenadas x, y, z

$$F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{(x,y,z)}$$

◁ Entonces las ecuaciones diferenciales para este campo gradiente vienen dadas por

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dot{y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dot{z} = \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

Como es sabido, el vector tangente de una curva integral

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

es el vector

$$\nabla f(x(t), y(t), z(t))$$

y éste es ortogonal al conjunto de nivel donde se encuentra el punto $\gamma(t)$.

Ya que el campo gradiente es ortogonal a los conjuntos de nivel de f, entonces el flujo (conjunto de curvas integrales) de $F = \nabla f$ es ortogonal a los conjuntos de nivel de f.

Particularmente si $f = T$ es el campo de temperaturas del ejemplo 9.1, entonces un objeto situado sobre un conjunto de nivel $T^{-1}(t_0)$ tenderá a moverse de manera natural hacia la dirección del gradiente $F = \nabla T$ para ganar calor, llevado por la acción misma del campo gradiente. ▷

De esta forma, el teorema 9.16 muestra que cuando en una región Ω actúa un campo de vectores, la acción de éste en cualquier punto conlleva a movimientos naturales vía las curvas integrales del campo. Cualquier otra trayectoria que no sea dentro de una curva integral deberá requerir de un *trabajo*. Esto será revisado en el próximo capítulo.

Una forma más simple de obtener las curvas integrales sin la expresión explícita del parámetro t para un campo vectorial se muestra a continuación.

EJEMPLO 9.20. Determine las líneas de flujo del campo vectorial plano del ejemplo 9.18,

$$F(x, y) = -ye_1 + xe_2$$

◁ Para encontrar las líneas de flujo del campo vectorial plano

$$F(x, y) = P(x, y)e_1 + Q(x, y)e_2$$

debemos resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$$

es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

En nuestro ejemplo $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$, y por lo tanto, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{-y}$$

o equivalentemente, al separar variables

$$\int (-y)\, dy = \int x\, dz \iff \frac{-y^2}{2} + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2$$

Reacomodando los términos, concluimos que las líneas de flujo son de la forma

$$x^2 + y^2 = c$$

es decir, son circunferencias con centro en el origen. ▷

EJEMPLO 9.21. Encuentre las líneas de flujo del campo vectorial

$$F(x,y) = e_1 + x(y-1)e_2$$

◁ Las líneas de flujo se obtienen resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x(y-1)} \iff xdx = \frac{dy}{y-1}$$

Integrando en ambos lados obtenemos

$$\int x\,dx = \int \frac{dy}{y-1}$$

es decir, siendo c una constante de integración, la solución se escribe implícitamente como

$$\frac{x^2}{2} = \ln|y-1| + c \ \triangleright$$

DEFINICIÓN 9.22. Un campo vectorial F es **conservativo** si existe un campo escalar f definido en el mismo dominio tal que $F = \nabla f$. En tal caso, llamamos a f una función **potencial** para F.

EJEMPLO 9.23. Demuestre que el campo vectorial gravitacional es conservativo.

◁ El campo vectorial gravitacional está dado por

$$F(x,y,z) = \frac{km(xe_1 + ye_2 + ze_3)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

es decir,

$$F(x,y,z) = \frac{kmxe_1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{kmye_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{kmze_3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Definiendo la función

$$f(x,y,z) = \frac{km}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

y calculando el gradiente, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}e_2 + \frac{\partial f}{\partial z}e_3 \\ &= \frac{kmxe_1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{kmye_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{kmze_3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = F\end{aligned}$$

con lo cual se concluye que el campo F es conservativo. $\triangleright$

EJEMPLO 9.24. Determine el campo gradiente definido por el campo escalar

$$R(x,y,z) = zxe^{x^2y}$$

◁ Ya que el campo gradiente es de la forma

$$\nabla R(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial x}e_1 + \frac{\partial R}{\partial y}e_2 + \frac{\partial R}{\partial z}e_3$$

calculemos primero las derivadas parciales

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x} &= ze^{x^2y} + 2x^2yz\,e^{x^2y} \\ \frac{\partial R}{\partial y} &= x^3ze^{x^2y} \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= xe^{x^2y}\end{aligned}$$

De esta manera, el campo gradiente de $R(x,y,z)$ es

$$\nabla R(x,y,z) = (ze^{x^2y} + 2x^2yze^{x^2}y)e_1 + x^3 + x^3ze^{x^2y}e_2 + xe^{x^2y}e_3 \ \triangleright$$

EJEMPLO 9.25. Si el campo escalar

$$T(x,y,z) = \frac{23}{(1+x^2+y^2+4z^2)}$$

define la temperatura en el punto (x,y,z) del espacio, determine el campo gradiente ∇T y la dirección en la cual aumenta más rápido la temperatura en el punto $(1,1,0)$.

◁ Calculemos primero las derivadas parciales de $T(x,y,z)$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-46x}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2}$$
$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-46y}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2}$$
$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{-184z}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2}$$

El campo gradiente de T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}e_1 + \frac{\partial T}{\partial y}e_2 + \frac{\partial T}{\partial z}e_3$$

es decir,

$$\nabla T = \frac{-46xe_1}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2} + \frac{-46ye_2}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2} + \frac{184ze_3}{(1+x^2+y^2+4z^2)^2}$$

Calculemos ahora el campo gradiente en el punto $(1,1,0)$,

$$\nabla T(1,1,0) = \frac{-46e_1}{9} + \frac{-46e_2}{9} + 0e_3$$
$$= -\frac{46}{9}e_1 - \frac{46}{9}\epsilon_2 + 0e_3$$

De este cálculo se sigue que la temperatura aumenta más rápido en la dirección $\mathbf{u} = \left(-\frac{46}{9}, -\frac{46}{9}, 0\right)$. ▷

Ejercicios 9.2

Evaluando en algunos puntos del plano o el espacio, dibuje la acción de los campos vectoriales que se señalan en los ejercicios 1–5.

1. $F(x,y) = (x,y)$
2. $F(x,y) = (x^2,-y)$
3. $F(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}(x,y)$
4. $F(x,y,z) = (x,y,z)$
5. $F(x,y,z) = (x,-y,z)$
6. Calcule las curvas integrales de los campos vectoriales de los ejercicio 1–3. (Sugerencia: calcule las ecuaciones diferenciales y realice la integración, que es directa.)

Dibuje e integre, sin usar el parámetro temporal, los campos vectoriales de los ejercicios 7–13.

7. $F(x,y) = (x,y)$
8. $F(x,y) = (-x,y)$
9. $F(x,y) = (x,-y)$
10. $F(x,y) = (-x,-y)$
11. $F(x,y) = (x^2,y)$
12. $F(x,y) = (x^2,-y)$
13. $F = \nabla f$, donde $f(x,y) = x^2 - y^2$

9.3 Divergencia, gradiente y rotor

En esta sección damos algunas fórmulas que son importantes para la teoría del análisis vectorial, y se hace con el espíritu de desarrollar un cálculo operacional en los campos escalares y vectoriales mediante el vector simbólico de Hamilton. Sobre sus sentidos físico y geométrico se dará la explicación en los siguientes capítulos.

El **vector de Hamilton** definido por

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

actúa en los campos vectoriales F por las siguientes ecuaciones convencionales.

Para un campo vectorial $F = (P, Q, R)$ se define su **divergencia**, definida por $\operatorname{div} F$, como el campo escalar definido por

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$$

donde el producto escalar se calcula convencionalmente

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Este campo escalar $\operatorname{div} F$ mide, cuando se evalúa en el punto p, los posibles desagües o manantiales del campo F en tal punto, como se muestra en la figura 9.11. Un análisis más profundo de este concepto se realiza mediante los métodos del análisis vectorial en los siguientes capítulos.

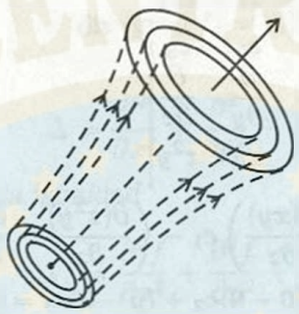


Figura 9.11. Divergencia de un campo vectorial.

Para el campo vectorial $F = (P, Q, R)$ se define su **campo de rotación** o **rotor**, denotado por $\operatorname{rot} F$, como el campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F$$

donde el producto vectorial indicado se calcula convencionalmente

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} X = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) e_1 - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e_3 \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e_3 \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

El campo vectorial $\operatorname{rot} F$ mide, cuando se evalúa en el punto p, las posibles rotaciones que tiene el campo durante su acción en tal punto. La figura 9.12 ilustra este concepto.

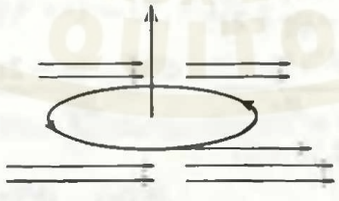


Figura 9.12. Rotor de un campo vectorial.

Si f es un campo escalar suave, podemos efectuar la operación de ∇ en F definiendo el **campo vectorial gradiente**

$$\operatorname{grad} f = \nabla f$$

donde el vector simbólico de Hamilton ∇ actúa en f mediante la igualdad

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

EJEMPLO 9.26. Calcule la divergencia y el rotor del campo vectorial

$$F = (x^2, xy, z^2y) = x^2e_1 + xye_2 + z^2ye_3$$

◁ Mediante cálculos directos se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F(x,y,z) = \nabla \cdot X &= \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2y)}{\partial z} \\ &= 2x + x + 2zy = 3x + 2zy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F(x,y,z) = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & z^2y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial(z^2y)}{\partial y} - \frac{\partial(xy)}{\partial z}\right)e_1 - \left(\frac{\partial(z^2y)}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial z}\right)e_2 + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right)e_3 \\ &= (z^2 - 0)e_1 - (0 - 0)e_2 + (y - 0)e_3 = (z^2, 0, y) \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 9.27. Calcule $\operatorname{grad}(\operatorname{div} F)$ y $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F)$ para el campo

$$F(x,y,z) = (z^2x, x^2 - y^2, y^2 + z^2)$$

◁ Mediante cálculos directos se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F(x,y,z) &= \frac{\partial(z^2x)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial z} \\ &= z^2 - 2y + 2z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F(x,y,z) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2x & x^2 - y^2 & y^2 + z^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial z}\right)e_1 - \left(\frac{\partial(y^2 + z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2x)}{\partial z}\right)e_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(z^2x)}{\partial y}\right)e_3 \\ &= (2y - 0)e_1 - (0 - 2zx)e_2 + (2x - 0)e_3 = (2y, 2zx, 2x)\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\operatorname{div} F) &= \nabla(z^2 - 2y + 2z) \\ &= \left(\frac{\partial(z^2 - 2y + 2z)}{\partial x}, \frac{\partial(z^2 - 2y + 2z)}{\partial y}, \frac{\partial(z^2 - 2y + 2z)}{\partial z}\right) \\ &= (0, -2, 2z + 2)\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \nabla \cdot (2y, 2zx, 2x) = \frac{\partial(2y)}{\partial y} + \frac{\partial(2zx)}{2y} + \frac{\partial(2x)}{\partial z} = 0 \triangleright$$

Del ejemplo anterior, para el campo dado X se obtuvo la igualdad $\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$. La siguiente proposición nos indica que esta igualdad se cumple en general para cualquier campo vectorial. Se obtienen más relaciones entre los operadores grad, div y rot.

LEMA 9.28. *Para los campos vectoriales F y G, y los campos escalares suaves f y g actuando en una región $V \subset \mathbb{R}^3$ se cumplen las identidades básicas del cálculo operacional vectorial*

1. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv 0$
2. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) \equiv 0$
3. $\operatorname{div}(fF) = \nabla f \cdot F + f\nabla \cdot F$
4. $\operatorname{grad}(f\,g) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$
5. $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + \nabla f \times F$
6. $\operatorname{div} F \times G = G \cdot \operatorname{rot} F - F \cdot \operatorname{rot} G$
7. *Para un campo escalar f de clase C^2*

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$$

donde se define el operador laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

actuando en el campo escalar f mediante la igualdad

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

◁ Damos la demostración de algunas de las afirmaciones, dejando el resto para el lector. Como ya se mencionó, el espíritu de la prueba es puramente operacional.

1. La siguiente relación es válida

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = 0$$

pues los vectores ∇ y ∇f son paralelos.

2. Por un cálculo directo

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \nabla \cdot (\nabla \times F) = (\nabla, \nabla, F) = 0$$

donde $(*,*,*)$ es el triple producto escalar, y en la expresión dada se repite el vector ∇.

3. De la relación de divergencia, se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(fF) = \nabla \cdot (fF) &= \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR) \\ &= f\frac{\partial P}{\partial x} + f\frac{\partial Q}{\partial y} + f\frac{\partial R}{\partial z} + P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} \\ &= f\,\nabla \cdot F + F \cdot \nabla f\end{aligned}$$

6. De la definición del triple producto escalar, se tiene,

$$\operatorname{div} F \times G = (\nabla, F, G) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{vmatrix}$$

donde $F = (P, Q, R)$, $G = (P', Q', R')$. Pero un cálculo directo en los determinantes (identidad de Jacobi) muestra que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P' & Q' & R' \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P' & Q' & R' \end{vmatrix}$$

o bien

$$(\nabla, F, G) = (F, \nabla, G) - (G, \nabla, F)$$

lo que prueba la afirmación 6.

Los incisos 4, 5 y 7 se dejan al lector como ejercicio. ▷

Consideremos un cambio de coordenadas en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dado por el sistema

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

entonces, en cada punto $p \in \Omega$, la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ se transforma bajo la matriz jacobiana

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

en el conjunto de vectores básicos $\{\mathbf{A}e_1, \mathbf{A}e_2, \mathbf{A}e_3\}$, es decir, en la base $\{b_u, b_v, b_w\}$ dada por

$$b_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \mathbf{A}e_1$$

$$b_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \mathbf{A}e_2$$

$$b_w = \left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w}\right) = \mathbf{A}e_3$$

Al normalizar cada uno de esos vectores se tiene una base de vectores $\{e_u, e_v, e_w\}$, donde

$$e_u = \frac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2}} = \frac{b_u}{\|b_u\|}$$

$$e_v = \frac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}} = \frac{b_v}{\|b_v\|}$$

$$e_w = \frac{\left(\dfrac{\partial x}{\partial w}, \dfrac{\partial y}{\partial w}, \dfrac{\partial z}{\partial w}\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial w}\right)^2}} = \frac{b_w}{\|b_w\|}$$

Calculemos las normas de la imagen de los vectores iniciales

$$h_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} = \|b_u\|$$

$$h_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} = \|b_v\|$$

$$h_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} = \|b_w\|$$

esto es,

$$h_u e_u = b_u,\ h_v e_v = b_v,\ h_w e_w = b_w$$

Supongamos que el conjunto de vectores $\{e_u, e_v, e_w\}$ es ortogonal, es decir, ortogonal entre sí por pares.
El elemento de desplazamiento infinitesimal vectorial $d\vec{r}$, en las coordenadas (x, y, z) está dado por

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz) = dxe_1 + dye_2 + dze_3$$

Al cambiar el sistema coordenado, el **desplazamiento infinitesimal vectorial** $d\vec{r}$ en las coordenadas (u, v, w) está dado en la base $\{b_u, b_v, b_w\}$ por

$$d\vec{r} = b_u du + b_v dv + b_w dw$$

esto es, en la base unitaria $\{e_u, e_v, e_w\}$ las coordenadas de $d\vec{r}$ son

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= h_u\, e_u\, du + h_v\, e_v\, dv + h_w\, e_w\, dw \\ &= h_u\, du\, e_u + h_v\, dv\, e_v + h_w\, dw\, e_w \\ &= (h_u\, du, h_v\, dv, h_w\, dw) \end{aligned}$$

En otras palabras, bajo el cambio de coordenadas, los elementos infinitesimales son, $h_u du$ para la primera coordenada, $h_v dv$ para la segunda, y $h_w dw$ para la tercera.
Sea f un campo escalar tal que su gradiente en coordenadas (x, y, z) se escribe

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} e_1 + \frac{\partial f}{\partial y} e_2 + \frac{\partial f}{\partial z} e_3$$

entonces, para las coordenadas (u, v, w) se tiene la relación

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{\partial f}{\partial w} dw \\ &= \left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) h_u du + \left(\frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) h_v dv + \left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right) h_w dw \end{aligned}$$

lo que indica que las coordenadas del gradiente en la base $\{e_u, e_v, e_w\}$ son

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)$$

Cálculos más complicados nos demuestran que para un campo vectorial $F = (P, Q, R)$, el cambio de coordenadas nos lleva la divergencia de F en las coordenadas x, y, z

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

en la expresión

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(P h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(Q h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(R h_u h_v)\right]$$

en las coordenadas (u, v, w).

Por otro lado, el rotor del campo F en las coordenadas x, y, z dado por

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e_3$$

se transforma en

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F = &\frac{1}{h_v h_w}\left(\frac{\partial(R h_w)}{\partial v} - \frac{\partial(Q h_v)}{\partial w}\right) e_u \\ &+ \frac{1}{h_w h_u}\left(\frac{\partial(P h_u)}{\partial w} - \frac{\partial(R h_w)}{\partial u}\right) e_v \\ &+ \frac{1}{h_u h_v}\left(\frac{\partial(Q h_v)}{\partial x} - \frac{\partial(P h_u)}{\partial z}\right) e_w \end{aligned}$$

en las coordenadas (u, v, w).

EJEMPLO 9.29. Consideremos las coordenadas esféricas cogeográficas en el espacio

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ y = r\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

◁ Entonces,

$$\begin{aligned} f_r &= (\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta,\ \operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\ f_\varphi &= (-r\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta, 0) \\ f_\theta &= (r\cos\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ -r\operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

Al calcular las normas se tiene

$$\begin{aligned} h_r &= \|f_r\| = 1 \\ h_\varphi &= \|f_\varphi\| = r\operatorname{sen}\theta \\ h_\theta &= \|f_\theta\| = r \end{aligned}$$

De esta manera, los vectores básicos en las coordenadas (r, φ, θ) son

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{f_r}{h_r} = (\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \\ e_\varphi &= \frac{f_\varphi}{h_\varphi} = (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi, 0) \\ e_\theta &= \frac{f_\theta}{h_\theta} = (\cos\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

y un cálculo directo prueba que $\{e_r, e_\varphi, e_\theta\}$ es un sistema ortogonal.

De esta forma, para un campo escalar f, en las coordenadas (r, φ, θ) se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &= \left(\frac{1}{h_r}\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{h_\varphi}\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \end{aligned}$$

mientras que para un campo vectorial $F = (P, Q, R)$ se cumplen las fórmulas

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{1}{h_r h_\varphi h_\theta}\left[\frac{\partial(P h_\varphi h_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(Q h_r h_\theta)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(R h_r h_\varphi)}{\partial \theta}\right] \\ &= \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial(r^2\operatorname{sen}\theta P)}{\partial r} + \frac{\partial(rQ)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(r\operatorname{sen}\theta R)}{\partial \theta}\right] \\ &= \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{\partial(r^2P)}{\partial r} + r\frac{\partial Q}{\partial \varphi} + r\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta R)}{\partial \theta}\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2P)}{\partial r} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial Q}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta R)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \frac{1}{h_\varphi h_\theta}\left(\frac{\partial(R h_\theta)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(Q h_\varphi)}{\partial \theta}\right) e_r \\ &+ \frac{1}{h_\theta h_r}\left(\frac{\partial(P h_r)}{\partial \theta} - \frac{\partial(R h_\theta)}{\partial r}\right) e_\varphi + \frac{1}{h_r h_\varphi}\left(\frac{\partial(Q h_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial(P h_r)}{\partial_\varphi}\right) e_\theta \\ &= \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial(rR)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r\operatorname{sen}\theta Q)}{\partial \theta}\right) e_r \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial(rR)}{\partial r}\right) e_\varphi + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial(r\operatorname{sen}\theta Q)}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial \varphi}\right) e_\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left(r\frac{\partial R}{\partial \varphi} - r\frac{\partial(\operatorname{sen}\theta R)}{\partial \theta}\right) e_r$$
$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{\partial(rR)}{\partial r}\right) e_\varphi + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial(rQ)}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial \varphi}\right) e_\theta$$

Dejamos como ejercicio al lector verificar que en las coordenadas (u, v, w) se cumple la siguiente igualdad para el laplaciano de un campo escalar f

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

Consecuentemente, si f es un campo escalar entonces, en coordenadas esféricas

$$\Delta f = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) \triangleright$$

La ecuación de calor

Consideremos un cuerpo físico $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, y designemos su temperatura en el punto (x, y, z) en el instante t por el campo escalar

$$u = u(x, y, z, t)$$

Afirmamos que el campo u satisface la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

donde $(x, y, z) \in \Omega$ y $a \in \mathbb{R}$.

Al utilizar el operador de Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

lo anterior equivale a que la función u debe satisfacer la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

llamada **ecuación de conducción de calor**.

$\triangleleft$ Al tomar un cubo infinitesimal σ del cuerpo Ω (véase la figura 9.13), la cantidad de calor que atraviesa la cara izquierda de σ de derecha a izquierda durante el tiempo $(t, t + \Delta t)$ es

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z, t)\Delta y\, \Delta z\, \Delta t$$

donde α es el coeficiente de conductibilidad térmica del cuerpo que se considera constante en cualquiera de sus puntos.

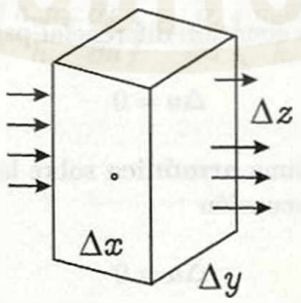


Figura 9.13. Calor atravesando el cubo infinitesimal en Ω.

Lo anterior se debe a que la cantidad indicada de calor es proporcional al número α, al área $\Delta y\,\Delta z$ de la cara que se examina, al incremento de tiempo Δt y a la velocidad de variación de la temperatura en la dirección del eje x, que es igual a la derivada parcial $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. La derivada parcial varía dentro de los límites de la cara, pero, despreciando infinitésimos de orden superior, se puede suponer que en toda la cara es igual a $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ en el punto (x, y, z).

La cantidad de calor que pasa por la cara derecha de σ de derecha a izquierda es, análogamente, igual a

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, t)\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$$

De esta forma, la cantidad de calor que entra en el cubo σ por sus caras izquierda y derecha durante el lapso indicado es igual a

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, t)\Delta y\,\Delta z\,\Delta t - \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z)\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$$

pero, por el teorema del valor medio para u en la variable x, se tiene que

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, t)\Delta y\,\Delta z\,\Delta t - \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z)\Delta y\,\Delta z\,\Delta t = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, z, t)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$$

En virtud de que en las otras caras del cubo ocurre igual, entonces la cantidad total de calor que entra en σ en el lapso $(t, t + \Delta t)$ es, la suma de las cantidades de calor que entra durante este tiempo por todas las caras de σ

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$$

Por las mismas consideraciones, hasta un infitésimo del volumen $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ de σ, este número (cantidad de calor) es igual también a

$$\beta \frac{\partial u}{\partial t}\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$$

donde β es el calor específico del cuerpo que suponemos constante en todos sus puntos.

Igualando, obtenemos, después de las simplificaciones, la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden mencionada, donde

$$a^2 = \frac{\alpha}{\beta}$$

Se ha mostrado que la temperatura del cuerpo Ω es la función $u = u(x, y, z, t)$ que satisface la ecuación de conducción del calor, donde a^2 es una constante positiva. Nos hemos limitado al caso cuando el cuerpo tiene en todos sus puntos un calor específico constante y un coeficiente de conductibilidad que no varía.

La ecuación diferencial obtenida tiene un conjunto infinito de soluciones, y para encontrar entre ellas una solución determinada es necesario imponer sobre la función u condiciones adicionales, llamadas **condiciones iniciales y de frontera**. Este problema sale del alcance de este trabajo.

La distribución del calor en un cuerpo se llama **estacionaria** si la temperatura u del cuerpo depende de la posición del punto (x, y, z) y no depende del tiempo t. Es decir, si $u = u(x, y, z)$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

lo que implica que el campo escalar u satisface la ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$\Delta u = 0$$

DEFINICIÓN 9.30. La función $u(x, y, z)$ se llama **armónica** sobre la región Ω si tiene derivadas parciales continuas de segundo orden sobre Ω y satisface sobre Ω la ecuación

$$\Delta u = 0$$

llamada **ecuación de Laplace**.

LEMA 9.31. *Suponga que la región acotada Ω tiene como frontera suave a la superficie S sobre la cual se da la función continua $f(x, y, z)$. Entonces en la cerradura $\bar{\Omega}$ existe una única función continua $u(x, y, z)$ armónica sobre la región Ω, tal que*

$$u\Big|_S = f(x, y, z)$$

Este resultado tiene una interpretación física sencilla: Si sobre la frontera superficial S del cuerpo Ω se mantiene una temperatura u, tal que $u|_S = f(x, y, z)$ es la función continua dada sobre S, entonces dentro del cuerpo se establece una única temperatura bien determinada, armónica $u(x, y, z)$.

Desde el punto de vista físico esta afirmación es obvia, aunque puede darse una demostración matemática. Este problema, llamado **problema de Dirichlet**, está parcialmente investigado y se conocen diferentes métodos numéricos de solución.

Ejercicios 9.3

Calcule la divergencia y el rotor de los campos vectoriales de los ejercicios 1–7.

1. $F(x, y) = (x, y)$
2. $F(x, y) = (-x, y)$
3. $F(x, y) = (x, -y)$
4. $F(x, y) = (-x, -y)$
5. $F(x, y) = (x^2, y)$
6. $F(x, y) = (x^2, -y)$
7. $F = \operatorname{grad} f$, donde $f(x, y) = x^2 - y^2$

Calcule la divergencia y el rotor de los campos vectoriales de los ejercicios 8–11.

8. $F_1(x, y, z) = (y - x, x + y, yz)$
9. $F_2(x, y, z) = (x^2 e^{-yz}, y^2 e^{-xz}, z^2 e^{-xy})$
10. $F_3(x, y, z) = (z^2 y - x, x^2 z + y, y^2 x - z)$
11. $F_4(x, y, z) = (x^x \operatorname{sen} zy, e^y \cos xz, e^z \operatorname{sen} yx)$
12. Verifique las siguientes igualdades para los campos vectoriales de los ejercicios 8–11.
    a. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0, \quad F = F_1, F_2, F_3, F_4$
    b. $\operatorname{div} F_1 \times F_2 = F_2 \cdot \operatorname{rot} F_1 - F_1 \cdot \operatorname{rot} F_2$
    c. $\operatorname{div} F_3 \times F_4 = F_4 \cdot \operatorname{rot} F_3 - F_3 \cdot \operatorname{rot} F_4$
13. Si $f(x, y, z) = x + y^2 + z^2$, verifique las siguientes igualdades usando los campos vectoriales F_1 y F_2 de los ejercicio 8 y 9.
    a. $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + \nabla f \times F$
    b. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$
    c. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f = \nabla^2 F$
14. Calcule la divergencia y el rotor de cualquier campo vectorial F, y el gradiente de un campo escalar, en los siguientes sistemas de coordenadas.
    a. En coordenadas cilíndricas.
    b. En las coordenadas (u, v, w), donde,
    $$\begin{cases} x = ue^{vw} \\ y = ve^{uw} \\ z = we^{uv} \end{cases}$$
    c. En las **coordenadas pseudoesféricas** (r, χ, φ) definidas mediante
    $$\begin{cases} x = r \cosh \chi \\ y = r \operatorname{senh} \chi \cos \varphi \\ z = r \operatorname{senh} \chi \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$
    donde $r > 0$, $\chi > 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.
15. Demuestre que en las coordenadas (u, v, w) se cumple la siguiente igualdad para el laplaciano de un campo escalar f arbitrario
$$\Delta f = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo

10 Integrales de línea

10.1 Integrales de línea de primer género

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (o en $\mathbb{R}^2$) una región con frontera y un campo escalar suave definido en Ω. $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Consideremos, por ejemplo, que f es un campo de densidad de masas puntuales en la región Ω. Sea $\Gamma \subset \Omega$ una curva arbitraria y procedamos a calcular su masa.

Dado un punto $p \in \Gamma$, hasta un infinitésimo del arco $d\ell$ en p, la masa infinitesimal en p denotada por dm se calcula (véase la figura 10.1) por

$$dm = f(p)d\ell$$

donde $f(p)$ es la densidad en el punto p y $d\ell$ es la diferencial de longitud (debido a que, lineal mente la densidad constante f se calcula

$$f = \frac{m}{\ell}$$

siendo m la masa puntual y ℓ la medida lineal).

De esta manera, la masa total m sobre toda varilla $\Gamma \subset \Omega$ será la suma infinitesimal de dm a lo largo de Γ

$$m = \int_\Gamma dm = \int_\Gamma f(p)\, d\ell$$

Si x, y, z son las coordenadas cartesianas en Ω, entonces $f(p) = f(x, y, z)$ y $d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, con lo que m se calcula

$$m = \int_\Gamma f(x, y, z)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Por otro lado, si Γ es una varilla parametrizada sobre el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, bajo la curva regular

$$\gamma(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t)), \quad t \in [a, b]$$

entonces la masa m se calcularía finalmente como

$$\int_\Gamma f(x, y, z)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b f(x(t),\, y(t),\, z(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$

pues $dx = \dot{x}\, dt$, $dy = \dot{y}\, dt$ y $dz = \dot{z}\, dt$ en $[a, b]$.



Figura 10.1. Integral de línea de primer género

El lado izquierdo de la última igualdad es lo que a continuación definiremos como la **integral de primer género** o de un campo escalar sobre la curva Γ. Ésta está definida por la integral del lado derecho que es una integral común del tipo

$$\int_a^b g(t)dt$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

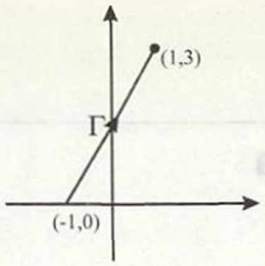


Figura 10.2. La curva Γ.

mostradas en los cursos básicos del cálculo (véase Reyes [11]).

DEFINICIÓN 10.1. Sea f un campo escalar suave definido en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\Gamma^+ \subset \Omega$ una curva orientada parametrizada por

$$\gamma : [a, b] \to \Omega$$

Se define la **integral de línea de primer género** o del campo escalar f a lo largo de la curva Γ a la cantidad

$$\int_{\Gamma^+} f \, d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

Si x, y, z son las coordenadas en Ω y $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces tal cantidad está completamente definida por el lado derecho de la igualdad

$$\int_{\Gamma^+} f \, d\ell = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} \, dt$$

La figura 10.1 ilustra esta definición.

EJEMPLO 10.2. Consideremos en la región del plano $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) | \, y = x\}$ el campo escalar $f(x, y) = \dfrac{1}{x - y}$.

Dado el segmento de la recta Γ comprendido entre los puntos $(-1, 0)$ y (1.3), calcule

$$\int_{\Gamma^+} f \, d\ell$$

◁ Sea Γ el segmento de recta mencionado. Es claro que la ecuación de la recta por esos puntos es (véase la figura 10.2)

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{con } x \in [-1, 1]$$

Consideremos en este caso la parametrización donde $x = t$, es decir, la propia variable x sirve como parámetro, observando que el segmento está contenido en Ω.

Entonces se cumple sobre Γ que $dy = \frac{3}{2}dx$, con lo que

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{9}{4}dx^2} = \sqrt{\frac{13}{4}} \, dx$$

Por lo tanto, la integral buscada se calcula mediante la cadena de igualdades

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} f d\ell &= \int_{\Gamma^+} \frac{d\ell}{x - y} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\frac{13}{4}} dx}{x - \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right)} = \frac{\sqrt{13}}{2} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x} \\ &= \frac{-\sqrt{13}}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3 + x} = -\sqrt{13} \, \ln(3 + x) \Big|_{-1}^{1} = -\sqrt{13} \ln 2 \quad \triangleright \end{aligned}$$

Consideremos ahora a Γ^- como la misma curva parametrizada Γ, pero orientada en sentido contrario por una reparametrización $t = t(\lambda)$, donde λ cambia la orientación del intervalo $[a, b]$. Entonces, por el teorema de cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^-} f\,d\ell &= \int_b^a f(\gamma(t(\tau)))\|\gamma'(t(\tau))\|\,d\tau = \int_b^a f(\gamma(t(\tau)))\,\|\dot\gamma(t)\|\left|\frac{dt}{d\tau}\right|\,d\tau\\ &= -\int_b^a f(\gamma(t(\tau)))\,\|\dot\gamma(t)\|\left(-\left|\frac{dt}{d\tau}\right|\,d\tau\right)\\ &= \int_b^a f(\gamma(t(\tau)))\,\|\dot\gamma(t)\|\left(\frac{dt}{d\tau}d\tau\right)\\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_{\Gamma^+} f\,d\ell\end{aligned}$$

Aquí, en la antepenúltima igualdad se ha usado que $\dfrac{dt}{d\tau} < 0$ (lo que implica que $-\left|\dfrac{dt}{d\tau}\right| = \dfrac{d\lambda}{d\tau}$).

Con esto hemos mostrado el siguiente lema.

LEMA 10.3. *La integral del primer género no depende de la orientación de la curva, esto es*

$$\int_{\Gamma^+} f\,d\ell = \int_{\Gamma^-} f\,d\ell$$

Por el lema 10.3, cada vez que calculamos una integral de primer género sobre una curva, ya no anotaremos su orientación.

EJEMPLO 10.4. Calcule la integral de primer género

$$\int_\Gamma (x^2+y^2)^k\,d\ell$$

donde Γ es el círculo de radio R con centro en el origen, y k un número entero positivo arbitrario.

◁ Claramente, la parametrización canónica de Γ es

$$\Gamma:\begin{cases} x = R\cos t\\ y = R\operatorname{sen} t\end{cases}\quad \text{con } t\in[0,2\pi]$$

de donde

$$\begin{aligned}d\ell &= \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{(-R\operatorname{sen} t)^2+(R\cos t)^2}dt\\ &= \sqrt{R^2(\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t)}\,dt = R\,dt\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (x^2+y^2)^k\,d\ell &= \int_0^{2\pi}\left[(R\cos t)^2+(R\operatorname{sen} t)^2\right]^k R\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left[R^2(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)\right]^k R\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} R^{2k}R\,dt = 2R^{2k+1}\pi\quad\triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 10.5. Calcule la integral de primer género

$$\int_\Gamma \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)d\ell$$

donde Γ es la primera vuelta de la helicoidal cónica

$$\Gamma:\begin{cases} x = t\cos t\\ y = t\operatorname{sen} t\\ z = t\end{cases}$$

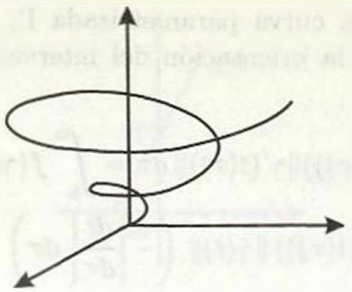


Figura 10.3. Curva helicoidal cónica.

◁ Evidentemente (véase la figura 10.3) la primera vuelta se obtiene cuando $t \in [0, 2\pi]$, es decir

$$\begin{aligned} d\ell &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(-t\,\mathrm{sen}\,t + \cos t)^2 + (t\cos t + \mathrm{sen}\,t)^2 + 1}\,dt \\ &= \sqrt{t^2+2}\,dt \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right) d\ell &= \int_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\,\mathrm{sen}\,t)^2}\right)\sqrt{t^2+2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2t - \sqrt{t^2}\right)\sqrt{t^2+2}\,dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\left(t^2+2\right)^{3/2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3}\left[(4\pi^2+2)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right] \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(2\pi^2+1)^{3/2} - 1\right] \quad \triangleright \end{aligned}$$

EJEMPLO 10.6. Halle la masa de un fragmento de la línea $y = \ln x$ comprendida entre los puntos cuyas abcisas son x_1 y x_2, si la densidad δ de la línea en cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

◁ Para calcular la masa del segmento de línea calculamos la integral

$$m = \int_\Gamma \delta(x,y)\,d\ell = \int_{x_1}^{x_2} \delta(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$$

La densidad de cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto, o sea $\delta(x,y) = x^2$.

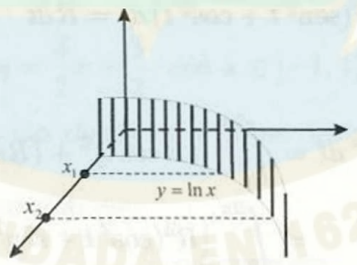


Figura 10.4. Masa de la curva $y = \ln x$.

Parametrizamos la curva $y = \ln x$ (véase la figura 10.4), haciendo $\gamma(t) = (t, \ln t)$ y obtenemos que

$$\dot{\gamma}(t) = \left(1, \frac{1}{t}\right)$$

de donde

$$m = \int_{x_1}^{x_2} t^2\sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \int_{x_1}^{x_2} t^2\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\,dt$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} t\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x_1}^{x_2}$$
$$= \frac{1}{3}\left[(x_2^2+1)^{\frac{3}{2}} - (x_1^2+1)^{\frac{3}{2}}\right] \quad \triangleright$$

EJEMPLO 10.7. Halle la masa de la primera espira de hélice $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\,t$, $z = bt$, cuya densidad en cada punto es igual al cuadrado del radio polar de este punto.

$\triangleleft$ Denotemos la densidad puntual por $\delta = \delta(x,y,z)$, entonces la masa de la espira se calcula por la integral de la línea de primer género

$$m = \int_\Gamma \delta(x,y,z)\,d\ell = \int_0^{2\pi} \delta(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}\,dt$$

La densidad es igual al radio polar al cuadrado del punto, lo que se escribe

$$\delta(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

de donde al evaluar la curva se tiene

$$\delta(\gamma(t)) = a^2\cos^2 t + a^2\,\mathrm{sen}^2\,t + b^2t^2 = a^2+b^2t^2$$

Por otro lado, un cálculo directo prueba que $d\ell = \sqrt{a^2+b^2}dt$ y por lo tanto

$$m = \int_\Gamma \delta(x,y,z)\,d\ell = \int_0^{2\pi} (a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} \left(a^2+b^2t^2\right)\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\left[a^2t + \frac{b^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[2a^2\pi + \frac{b^2(2\pi)^3}{3}\right] \quad \triangleright$$

EJEMPLO 10.8. Halle la masa del arco de la línea $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\mathrm{sen}\,t$, $z = e^t$ desde el punto correspondiente a $t = 0$ hasta un punto cualquiera, si la densidad del arco es inversamente proporcional al cuadrado del radio polar y en el punto $(1,0,1)$ es igual a 1.

$\triangleleft$ Si se denota por δ la densidad puntual, la masa está dada por

$$m = \int_\Gamma \delta(x,y,z)\,d\ell = \int_\Gamma \delta(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}$$

donde

$$\dot{x}(t) = -e^t\,\mathrm{sen}\,t + e^t\cos t = e^t(\cos t - \sin t)$$
$$\dot{y}(t) = e^t\cos t + \mathrm{sen}\,te^t = e^t(\cos t + \mathrm{sen}\,t)$$
$$\dot{z}(t) = e^t$$

lo que implica además que $d\ell = \sqrt{3}e^t\,dt$.

La densidad del arco es inversamente proporcional al cuadrado del radio y en el punto $(1,0,1)$ es igual a 1. Esto es, tiene la forma

$$\delta(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2}$$

donde la constante k es calculada por la condición

$$1 = \delta(1,0,1) = \frac{k}{1^2+0^2+1^2} = \frac{k}{2}$$

de la cual se deduce que $k = 2$.

Por lo tanto, la densidad es el campo escalar

$$\delta(x,y,z) = \frac{2}{x^2+y^2+z^2}$$

De esta manera, se tiene que

$$\delta(\gamma(t)) = \frac{2}{(e^t\cos t)^2 + (e^t \sin t)^2 + e^{2t}} = \frac{2}{2e^{2t}}$$

lo que implica que la masa de $t = 0$ hasta un punto arbitrario $t = T$ se calcula mediante las igualdades

$$\begin{aligned} m &= \int_\Gamma \delta d\ell = \int_\Gamma \frac{2}{x^2+y^2+z^2}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} \\ &= \int_0^T \frac{1}{e^{2t}}\sqrt{3}e^t\,dt = \int_0^T \frac{1}{e^t}\sqrt{3}\,dt = \sqrt{3}\int_0^T e^{-t}\,dt \\ &= -\sqrt{3}e^{-t}\Big|_0^T = \sqrt{3}(1-e^{-T}) \quad \triangleright \end{aligned}$$

Ejercicios 10.1

Calcule las integrales de primer género en los ejercicios 1–5.

1. $\int_\Gamma xy^2\,d\ell$, donde Γ es el triángulo con vértices $(-1,1)$, $(1,1)$ y $(0,-1)$

2. $\int_\Gamma y\,d\ell$, donde Γ es la curva cerrada formada por las parábolas $y = 4x^2$ y $x = 4y^2$

3. $\int_\Gamma (x+y)\,d\ell$, donde Γ es la parte de la circunferencia $x^2+y^2+z^2 = 9$, $y = x$ en el primer octante

4. $\int_\Gamma (x-y)\,d\ell$, $\Gamma : x^2+y^2 = 4x$

5. $\int_\Gamma \frac{z^2}{x^2+y^2}\,d\ell$, $\Gamma : x = 3\cos t,\ y = 3\,\mathrm{sen}\,t,\ z = 3t$

6. Calcule la masa de la curva $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ desde el punto $x = 0$ hasta $x = 1/2$, si la densidad en cada punto es $\delta(x,y) = x^2$.

7. Calcule la masa de la mitad superior de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, si la densidad puntual es $\delta(x,y) = xy$.

10.2 Integrales de línea de segundo género

En la sección anterior definimos la integral de un campo escalar a lo largo de una curva parametrizada orientada, mostrando que tal cantidad no se alteraba con el cambio de orientación de la curva. En esta sección definimos la integral de un campo de vectores a lo largo de una curva parametrizada suave orientada.

Consideremos una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (o en $\mathbb{R}^2$) y sea $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial suave definido en Ω.

EJEMPLO 10.9. Supongamos que el campo F actúa en Ω como un campo de fuerzas y un objeto se mueve en una trayectoria $\Gamma \subset \Omega$. Hasta un infinitésimo del arco vectorial (desplazamiento) del objeto en el punto $p \in \Gamma$ denotado por $\vec{d\ell}$ (vector desplazamiento) el trabajo infinitesimal dW efectuado se calcula mediante (véase la figura 10.5)

$$dW = F(p)\cdot \vec{d\ell}$$

debido a que para una fuerza constante F_0, y el desplazamiento $\vec{\ell}$, el trabajo realizado se calcula con la fórmula clásica, $W = F_0 \cdot \vec{\ell}$.

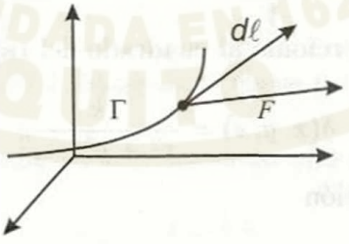


Figura 10.5. Cálculo del trabajo realizado a lo largo de una trayectoria.

◁ De esta manera, el trabajo realizado sobre toda la trayectoria Γ del cuerpo moviéndose en el campo de vectores X es la suma infinitesimal de los trabajos infinitesimales a lo largo de toda la curva Γ, esto es

$$W = \int_{\Gamma^+} dW = \int_{\Gamma^+} F\cdot\vec{d\ell} = \int_\Gamma F\cdot v\,d\ell$$

donde el vector desplazamiento infinitesimal $\vec{d\ell}$ se extiende como un infinitésimo del vector tangente unitario v en el punto $p \in \Gamma$, es decir, $\vec{d\ell} = v\, d\ell$.

Si x, y, z son las coordenadas en la región Ω y $\gamma : [a, b] \to \Omega$ parametriza a Γ mediante la relación $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces un cálculo directo prueba que

$$\begin{aligned}\vec{d\ell} = v\, d\ell &= \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\, d\ell = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt \\ &= \dot{\gamma}(t)\, dt = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))\, dt\end{aligned}$$

además de que el campo X tiene una expresión

$$F(p) = F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

De esta manera, el trabajo efectuado a lo largo de Γ en estas coordenadas y en la parametrización de Γ se calcula mediante la siguiente cadena de igualdades

$$W = \int_{\Gamma^+} F \cdot \vec{d\ell} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b [P(\gamma(t))\dot{x}(t) + Q(\gamma(t))\dot{y}(t) + R(\gamma(t))\dot{z}(t)]\, dt$$

donde el campo F se evalúa a lo largo de Γ^+ mediante las igualdades

$$\begin{aligned}P(\gamma(t)) &= P(x(t), y(t), z(t)) \\ Q(\gamma(t)) &= Q(x(t), y(t), z(t)) \\ R(\gamma(t)) &= R(x(t), y(t), z(t)) \quad \triangleright\end{aligned} \tag{10.1}$$

DEFINICIÓN 10.10. Sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial suave en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ provista de un sistema de coordenadas x, y, z y sea Γ una curva suave contenida en Ω. Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ parametriza suavemente a Γ, definimos la **integral de línea de segundo género** del campo F a lo largo de la curva orientada Γ^+ como la cantidad

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^+} F \cdot \vec{d\ell} &= \int_{\Gamma} F \cdot v\, d\ell = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt \\ &= \int_a^b [P(\gamma(t))\dot{x}(t) + Q(\gamma(t))\dot{y}(t) + R(\gamma(t))\dot{z}(t)]\, dt\end{aligned}$$

donde P, Q y R se evaluán a lo largo de la curva según las fórmulas 10.1 (véase la figura 10.5).

Observamos que para las coordenadas en Ω, la parametrización de Γ y del hecho que $dx = \dot{x}(t)\, dt$, $dy = \dot{y}(t)\, dt$ y $dz = \dot{z}(t)\, dt$, la integral de segundo género del campo X a lo largo de la curva orientada Γ^+ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^+} F \cdot \vec{d\ell} &= \int_a^b [P(\gamma(t)\dot{x}(t) + Q(\gamma(t))\dot{y}(t) + R(\gamma(t))\dot{z}(t)]\, dt \\ &= \int_{\Gamma^+} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz\end{aligned}$$

De esta manera, la última integral de esta cadena podría servirnos para definir la integral del campo F a lo largo de Γ, esto es, la integral de segundo genéro podría escribirse como

$$\int_{\Gamma^+} P dx + Q dy + R dz$$

Consideremos ahora la otra orientación de la curva Γ, por el vector unitario $-v$. Entonces la integral de segundo género sobre la curva Γ^- es

$$\int_{\Gamma^-} F \cdot \vec{d\ell} = \int_{\Gamma} F \cdot (-v)\, d\ell = -\int_{\Gamma} F \cdot v\, d\ell = -\int_{\Gamma^+} F \cdot \vec{d\ell}$$

De esta manera se tiene el siguiente resultado.

LEMA 10.11. *La integral del segundo género depende de la orientación de la curva* Γ*, esto es*

$$\int_{\Gamma^-} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

EJEMPLO 10.12. Considere el campo vectorial en $\Omega = R^2$ definido por

$$F(x,y) = (y^2 + 2xy, 2xy + x^2)$$

y sea la curva $\Gamma_1 : y^2 = x$ uniendo los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ en esa dirección.

Claramente se puede tomar a y como parámetro para definir a Γ_1 en el intervalo $[0,1]$ por la curva

$$\gamma(y) = (y^2, y)$$

y por lo tanto, tenemos que la integral del campo X a lo largo de Γ_1 se calcula mediante

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dx &= \int_{\Gamma_1} (y^2 + 2xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy \\ &= \int_0^1 (y^2 + 2y^2 y)\,2y\,dy + (2y^2 y + y^4)\,dy \\ &= \int_0^1 (4y^3 + 5y^4)\,dy = 2\end{aligned}$$

Aquí en las 1-formas diferenciales se ha usado el hecho de que $dx = 2y\,dy$, ya que $x = y^2$.

Ahora, con el mismo campo calculamos, para la curva $\Gamma_2 : y = x^2$ pegando los mismos puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, la integral

$$\int_{\Gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\Gamma_2} (y^2 + 2xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy$$

◁ Como $y = x^2$, entonces podemos utilizar en esta ocasión x como parámetro para la curva dada, con $x \in [0,1]$. Ya que sobre Γ_2 se cumple que $dy = 2x\,dx$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy &= \int_{\Gamma_2} (y^2 + 2xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy \\ &= \int_0^1 (x^4 + 2xx^2)\,dx + (2xx^2 + x^2)\,2x\,dx \\ &= \int_0^1 (5x^4 + 4x^3)\,dx = 2 \quad \triangleright\end{aligned}$$

De esta manera la integral del campo F a lo largo de las dos distintas curvas pegando los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ coinciden. Esto no es una casualidad, de hecho, en la siguiente sección probaremos que la integral siempre es la misma para cualquier curva que una tales puntos, debido a que el campo tiene una característica fundamental: *ser el gradiente de un campo escalar*. Para este tipo de campos vectoriales llamados **conservativos**, se probará que la integral a lo largo de una trayectoria uniendo los puntos es independiente de la trayectoria recorrida.

EJEMPLO 10.13. Sea Γ la parte superior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y consideremos el campo vectorial $F(x,y) = (y,x)$. Supongamos además que Γ está orientada según la regla de la mano derecha (en sentido contrario a las manecillas del reloj). Procedamos a calcular

$$\int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma^+} y\,dx + x\,dy$$

◁ Una parametrización simple de Γ está dada por

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0,\pi]$$

De esta forma, $dx = -a\sin t\,dt$ y $dy = b\cos t\,dt$, lo que lleva la integral en

$$\begin{aligned}\int_\Gamma y\,dx + x\,dy &= \int_0^\pi (b\,\mathrm{sen}\,t)(-a\,\mathrm{sen}\,t\,dt) + (a\cos t)(b\cos t)\,dt \\ &= ab\int_0^\pi (\cos^2 t - \mathrm{sen}^2\,t)dt = ab\int_0^\pi \cos 2t\,dt \\ &= \frac{ab}{2}\,\mathrm{sen}2t\,\Big|_0^\pi = 0 \quad \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 10.14. Supongamos que un campo de fuerzas F actúa sobre los puntos de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, de tal forma que la magnitud de F en un punto es igual a la distancia que hay entre el punto y el centro de la elipse, y está dirigida hacia este centro (véase la figura 10.6). Procedamos a calcular el trabajo realizado al recorrer media elipse en sentido contrario a las manecillas del reloj.

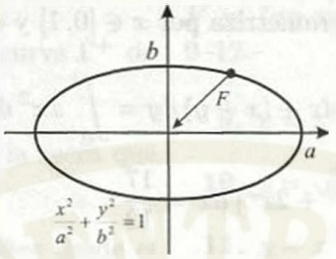


Figura 10.6. Campo X actuando en la elipse.

◁ Claramente, el campo que actúa está definido por

$$F(x,y)=-(x,y)$$

debido a las condiciones del problema. De esta forma, el trabajo realizado sobre media elipse

$$\Gamma^+=\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,\middle|\,y\geq 0\right\}$$

se calcula mediante

$$\int_{\Gamma^+}P\,dx+Q\,dy=-\int_{\Gamma^+}x\,dx+y\,dy$$

Ya que la parametrización de Γ^+ recorrida en sentido contrario a las manecillas del reloj es

$$\gamma(t)=(x(t),y(t))=(a\cos t,b\operatorname{sen}t),\quad t\in[0,\pi]$$

y $dx=a\operatorname{sen}t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$, entonces

$$\begin{aligned}-\int_{\Gamma^+}x\,dx+y\,dy&=-\int_0^{\pi}(a\cos t)(-a\operatorname{sen}t\,dt)+(b\operatorname{sen}t)(b\cos t\,dt)\\&=-(b^2-a^2)\int_0^{\pi}\cos t\operatorname{sen}t\,dt=-(b^2-a^2)\,\frac{\operatorname{sen}2t}{2}\Big|_0^{\pi}=0\end{aligned}$$

Por otro lado, si se quiere calcular el trabajo en apenas la primera cuarta parte de la elipse, entonces $t\in[0,\pi/2]$ y el trabajo sería

$$W=-(b^2-a^2)\,\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a^2-b^2}{2}\quad\triangleright$$

EJEMPLO 10.15. En el plano $\mathbb{R}^2$ actúa un campo de fuerzas

$$F(x,y)=(xy,x+y)$$

Calcule el trabajo correspondiente para desplazarse del punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$ bajo las siguientes curvas.

1. $\Gamma_1: y=x$
2. $\Gamma_2: y=x^2$
3. $\Gamma_3: y^2=x$

◁ Si Γ es una curva arbitraria, el trabajo necesario para desplazarse del punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$, bajo la acción del campo $F(P,Q)$ es

$$W=\int_{\Gamma^+}P\,dx+Q\,dy=\int_{\Gamma^+}xy\,dx+(x+y)\,dy$$

De esta forma, y en cada caso se obtiene:

1. Si $\Gamma_1 : y = x$, entonces la curva está parametrizada por $x \in [0,1]$ y el trabajo es

$$W_1 = \int_{\Gamma_1^+} xy\,dx + (x+y)\,dy = \int_0^1 xx\,dx + (x+x)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 + 2x\right) dx = \frac{4}{3}$$

2. Si $\Gamma_2 : y = x^2$, una vez más la curva se parametriza por $x \in [0,1]$ y el trabajo realizado a lo largo de esta curva es

$$W_2 = \int_{\Gamma_2^+} xy\,dx + (x+y)\,dy = \int_0^1 xx^2\,dx + \left(x + x^2\right) 2x\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(3x^3 + 2x^2\right) dx = \frac{17}{12}$$

3. Si $\Gamma_3 : y^2 = x$, en esta ocasión la curva se parametriza por la variable $y \in [0,1]$ y el trabajo se calcula como

$$W_3 = \int_{\Gamma_3^+} xy\,dx + (x+y)\,dy = \int_0^1 y^2 y2y\,dy + \left(y^2 + y\right) dy$$
$$= \int_0^1 \left(2y^4 + y^2 + y\right) dy = \frac{37}{30}$$

Por lo tanto, se observa que el trabajo realizado al moverse de $(0,0)$ a $(1,1)$ por las diferentes curvas dadas resulta ser diferente. ▷

EJEMPLO 10.16. Sea Γ la curva obtenida al intersecar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $z = 1$. Calcule la integral de segundo género

$$\int_\Gamma xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$$

◁ Claramente Γ^+ es la circunferencia en $\mathbb{R}^3$ orientada por el parámetro t:

$$\Gamma^+ : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \quad \text{con } t \in [0, 2\pi] \\ z = 1 \end{cases}$$

Debido a que a lo largo de la curva orientada se tiene que $dx = -\operatorname{sen} t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$, $dz = 0$, entonces

$$\int_\Gamma xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz = \int_0^{2\pi} \cos t \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\,dt) + \operatorname{sen} t(1)\cos t\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen} t \cos t - \cos t \operatorname{sen}^2 t\right) dt$$
$$= \left(\frac{\operatorname{sin}^2 t}{2} - \frac{\operatorname{sin}^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0 \ \triangleright$$

Ejercicios 10.2

Calcule las integrales de segundo género de los ejercicios 1–5.

1. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} 2xy\,dx + x^2\,dy$

$\Gamma : y = x^3$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$.

2. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} y\,dx - x\,dy$

Γ es la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

3. $\displaystyle\int_{\Gamma^-} x^2 y\,dx + x^3\,dy$

si Γ es la curva cerrada formada por las parábolas $y = 3x^2$, $x = 9y^2$.

4. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$

donde Γ es el segmento de recta que une los puntos $(1,1,1)$ a $(1,-3,4)$.

5. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$

si Γ es la curva que se obtiene de intersecar la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ con el cilindro $x^2+y^2=5$, orientada positivamente.

Integre el campo vectorial F a lo largo de la curva Γ^+ de los ejercicios 6–7.

6. $F(x,y) = (-x\cos y, y\operatorname{sen} x)$, donde Γ es la recta que une los puntos $(0,0)$ y $(\pi, 2\pi)$.

7. $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$, siendo Γ la hélice desde el punto $(0,0,0)$ a $(1,0,2\pi)$.

8. Calcule el trabajo que realiza una partícula que se mueve sobre la mitad de la circunferencia, positivamente, si el campo de fuerzas es $F(x,y) = (x,-y)$.

Calcule el trabajo que realiza una partícula cuando se mueve del punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$ en el campo de fuerzas $F = (xy, x+y)$, si la trayectoria se da en los ejercicios 9–12.

9. $y = x^2$

10. $y = \sqrt{x}$

11. $y = x^3$

12. La curva poligonal rectilínea que une $(0,0)$ con $(1,0)$ y luego $(1,0)$ con $(1,1)$.

10.3 Campos conservativos

Sean Ω una región del espacio $\mathbb{R}^3$ y $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores suave actuando en Ω. Si x, y, z son las coordenadas cartesianas de la región Ω, entonces X se escribe

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

donde P, Q y R son funciones reales definidas en Ω.

Un caso importante es cuando el campo X es el gradiente de un campo escalar

$$U : \Omega \to R$$

es decir $F(x,y,z) = \operatorname{grad} U(x,y,z)$.

Dicho de otra forma, en coordenadas cartesianas el campo F se escribe

$$P(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z),\ Q(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z),\ R(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z)$$

DEFINICIÓN 10.17. Decimos que un campo F actuando en Ω es **conservativo**, si existe un campo escalar suave $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$F = \operatorname{grad} U$$

La función U se conoce como el **potencial** del campo F.

EJEMPLO 10.18. Sea $F(x,y) = (y^2 + 2xy, 2xy + x^2)$ el campo de vectores actuando en el plano $\Omega = \mathbb{R}^2$

◁ Este campo es conservativo, pues tiene como potencial a la función

$$U(x,y) = xy^2 + x^2y$$

como se verifica fácilmente

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + 2xy = P \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + x^2 = Q \quad \triangleright$$

EJEMPLO 10.19 (Campo Coulombiano). Supongamos que en el origen del espacio tridimensional está situada una partícula con carga eléctrica unitaria. Si en las coordenadas cartesianas x, y, z para cualquier punto $p = (x,y,z)$ se sitúa otra partícula con carga del mismo signo y unitaria, entonces la fuerza repulsiva entre las cargas dadas es el vector actuando en p y dado por

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}(x,y,z)$$

cuya magnitud (norma) es

$$\|F(x,y,z)\| = \frac{\|(x,y,z)\|}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2}} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

No es difícil ver que si se define el potencial

$$U(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$$

entonces

$$\operatorname{grad} U_{(p)} = \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right) = F(p)$$

es decir, F es un campo conservativo.

Al utilizar coordenadas esféricas (r,φ,θ) tenemos que el potencial y el campo se escriben

$$U(r) = U(r,\varphi,\theta) = \frac{-1}{r}$$

$$F(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r^2}(\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

y además, en estas coordenadas la magnitud de F es

$$\|F(r,\varphi,\theta)\| = \frac{1}{r^2} \quad \triangleright$$

Pasamos ahora a estudiar las condiciones necesarias y suficientes para determinar si el campo F actuando en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un campo conservativo, con potencial U.

Sean p_0 y p_1 dos puntos arbitrarios en Ω y Γ^+ una curva orientada arbitraria uniendo p_0 con p_1 bajo la parametrización

$$\gamma : [a,b] \to \Omega, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

donde $\gamma(a) = p_0$ y $\gamma(b) = p_1$

Entonces, al calcular la integral del campo conservativo $X = (P,Q,R)$ a lo largo de Γ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz &= \int_{\Gamma^+} \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz \\
&= \int_a^b \frac{\partial U}{\partial x}(\gamma(t))\,\dot{x}(t)\,dt + \frac{\partial U}{\partial y}(\gamma(t))\,\dot{y}(t)\,dt + \frac{\partial U}{\partial z}(\gamma(t))\,\dot{z}(t)\,dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial U}{\partial x}(\gamma(t))\,\dot{x}(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(\gamma(t))\,\dot{y}(t) + \frac{\partial U}{\partial z}(\gamma(t))\,\dot{z}(t) \right] dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{d}{dt} U(\gamma(t)) \right] dt = U(\gamma(t))\Big|_a^b = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) \\
&= U(p_1) - U(p_0)
\end{aligned}$$

Aquí, en la primera igualdad se ha utilizado el hecho que $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $R = \dfrac{\partial u}{\partial z}$, en la segunda igualdad se ha evaluado el campo a lo largo de Γ. En la cuarta igualdad se ha utilizado la regla de la cadena para la función real $t \to U(\gamma(t))$, y en la quinta igualdad se ha utilizado el teorema fundamental del cálculo para $U(\gamma(t))$.

De esta manera, para cualquier curva orientada Γ pegando los puntos p_0 con p_1 se tiene que

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(p_1) - U(p_0)$$

esto es, la integral del campo F a lo largo de cualquier curva es la misma cantidad. Hemos demostrado el siguiente lema.

LEMA 10.20. *Si F es un campo conservativo, entonces la integral a lo largo de cualquier curva orientada suave pegando dos puntos en Ω es la misma cantidad (no depende de la trayectoria)*

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(p_1) - U(p_0)$$

donde U es el potencial del campo F.

EJEMPLO 10.21. Sea F el campo coulombiano en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ definido en el ejemplo 10.19 por

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

◁ Dados los puntos $p_0 = (1,1,-1)$ y $p_1 = (0,1,1)$, una partícula cargada que se mueva desde p_0 hasta p_1 sobre cualquier curva Γ realiza un trabajo dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_\Gamma \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{y\,dy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} + \frac{z\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ &= U(x,y,z)\Big|_{p_0}^{p_1} = U(p_1) - U(p_0) = U(1,1,-1) - U(0,1,1) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

en virtud de que el campo F es conservativo con un potencial definido por

$$U(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \triangleright$$

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial F actuando en una región del plano o del espacio sea conservativo.

TEOREMA 10.22. *Sea $F = F(x,y,z)$ un campo vectorial suave actuando en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, entonces son equivalentes las siguientes proposiciones:*

1. *F es un campo conservativo en Ω.*
2. *Para cualquier par de puntos en Ω ligados por una curva Γ, la integral del campo F tomada a lo largo de Γ no depende de la curva que une los puntos.*
3. *La integral del campo F a lo largo de cualquier curva cerrada Γ es nula.*

◁ Primero probaremos la equivalencia de la proposiciones 1 y 2.

El lema 10.20 establece que la proposición 1 implica la proposición 2.

Ahora, supongamos que se cumple la propiedad 2 para cualquier curva Γ pegando los puntos $p_0 = (x_0,y_0,z_0)$ y $p = (x,y,z)$, es decir, la integral de X a lo largo de Γ depende sólo del punto extremo variable (x,y,z), es decir

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(x,y,z)$$

para alguna función $U : \Omega \to \mathbb{R}$.

Particularmente, tomemos la curva $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (véase la figura 10.7) donde Γ_1 es una curva arbitraria pegando el punto $p_0 = (x_0,y_0,z_0)$ con el punto (x_1,y,z), y Γ_2 es el segmento de recta paralelo al eje x pegando los puntos (x_1,y,z) con (x,y,z) siendo $x_1 < x$.

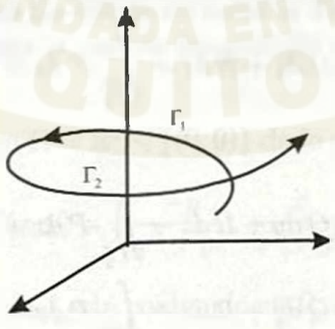


Figura 10.7. Curva $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Claramente Γ_2 está parametrizada por: $t \to (t,y,z)$ con $t \in [x_1,x]$, dejando constantes a las variables y,z.

Sobre el segmento Γ_2 se cumple que $dx = dt$, $dy = 0$ y $dz = 0$, y de esta manera, para $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ podemos definir la función escalar

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= k + \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = k + \int_{\Gamma_2} P\,dt \\ &= k + \int_{x_1}^{x} P(t,y,z)\,dt \end{aligned}$$

donde k es la constante dada por $\displaystyle\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ que quedó al fijar el punto $p_1 = (x_1, y, z)$.

Por lo tanto, por el teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} P(t,y,z)\,dt = P(x,y,z)$$

Procedimientos análogos nos prueban que

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z)$$

lo que implica que la función U es diferenciable y el campo F es conservativo, ya que

$$F(x,y,z) = \operatorname{grad} U(x,y,z)$$

lo que además implica la proposición 1.

Consecuentemente, las proposiciones 1 y 2 son equivalentes.

Ahora demostramos que las proposiciones 2 y 3 son equivalentes.

Sea Γ una curva cerrada arbitraria orientada en Ω y supongamos que vale la proposición 2. Esto es, la integral no depende de la trayectoria que une dos puntos. Sean p_0 y p_1 dos puntos arbitrarios en Γ y sea $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ (véase la figura 10.8) donde Γ_1 une a p_0 con p_1 (en ese orden) y Γ_2 une a p_1 con p_0 (en ese orden).

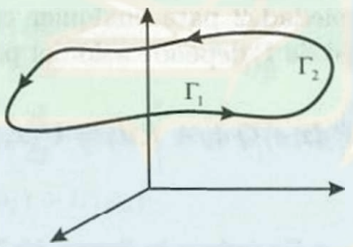


Figura 10.8. Curva cerrada orientada.

Entonces, de la propiedad 2 se tiene que, según las orientaciones de Γ_1 y Γ_2 se cumple la igualdad

$$\int_{\Gamma_1^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma_2^-} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_1^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{\Gamma_2^-} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_{\Gamma_1^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{\Gamma_2^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \end{aligned}$$

lo que prueba la proposición 3, pues Γ es una curva cerrada arbitraria.

Por otro lado, si se supone que es válida la propiedad 3, al tomar dos puntos arbitrarios p_0 y p_1 y dos curvas orientadas Γ_1^+ y Γ_2^+ uniéndolos (véase la figura 10.8), la curva $\Gamma = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^-$ es una curva cerrada.

De esta manera

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^-} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_{\Gamma_1^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{\Gamma_2^-} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ &= \int_{\Gamma_1^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{\Gamma_2^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \end{aligned}$$

lo cual implica que para las curvas Γ_1^+ y Γ_2^+ orientadas arbitrarias uniendo p_0 y p_1 se cumple que

$$\int_{\Gamma_1^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma_2^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

lo que prueba la proposición 2.

Esto termina la demostración del teorema. ▷

EJEMPLO 10.23. Consideremos una vez más el campo coulombiano en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ del ejemplo 10.19 dado por

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

◁ Observamos lo siguiente.

1. Es un campo conservativo, pues es el gradiente del potencial

$$U(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

2. Por lo tanto, la integral a lo largo de cualquier curva orientada en Ω pegando los puntos p_1 con p_2 en Ω no depende de la trayectoria Γ^+ y se cumple que

$$\int_\Gamma P dx + Q dy + R dz = U(p_2) - U(p_1)$$

3. Si $\Gamma \subset \Omega$ es una curva orientada cerrada, se tiene que

$$\int_\Gamma \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0 \ \triangleright$$

A pesar de que el teorema 10.22 da condiciones necesarias y suficientes para que un campo sea conservativo, es poco útil en la práctica a la hora de decidir cuando un campo suave tiene tal propiedad, en virtud de que, por ejemplo con la propiedad 3, se tendría que calcular sobre todas las curvas cerradas la integral del campo, y verificar que se anulan. Por otro lado, si existiera alguna curva cerrada para la cual la integral del campo no se anula, automáticamente el campo sería no conservativo.

EJEMPLO 10.24. Consideremos el campo en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dado por

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

◁ Si se toma $\Gamma = S^1$ el círculo unitario, el cual está contenido en Ω, se tiene que su parametrización con orientación en contra de las manecillas del reloj está dada por

$$\Gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

donde, $dx = -\operatorname{sen} t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$. Esto implicaría que

$$\begin{aligned}\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy &= \int_\Gamma \frac{-y dx + x dy}{x^2+y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t\, dt) + \cos t(\cos t\, dt)}{\cos^2 t + \operatorname{sin}^2 t} \\ &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\end{aligned}$$

De esta manera, la integral del campo F a lo largo de la curva cerrada Γ no se anula. Esto nos dice que F no es conservativo en Ω. ▷

Buscamos ahora una propiedad con la que podamos identificar fácilmente los campos conservativos.

Para ello, en la sección 9.3 introducimos el operador rot en el conjunto de campos vectoriales suaves F definidos en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, definido en coordenadas cartesianas por

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} F(x,y,z) &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) e_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) e_3 \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \nabla \times F\end{aligned}$$

donde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_1 + \frac{\partial}{\partial y} e_2 + \frac{\partial}{\partial z} e_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

es el **vector operador de Hamilton** y $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base ordenada de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 10.25. Consideremos el campo $F = (y^2 + 2xy,\ 2xy + x^2)$ actuando en $\mathbb{R}^2$.

◁ La rotación de X es el nuevo campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = (0, 0,\ (2y + 2x) - (2y - 2x)) = (0, 0, 0)$$

en virtud que $R(x, y, z) = 0$ y $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} = 0$ ▷

EJEMPLO 10.26. Para el campo $F = (y^2 + 2xy, 2xy + x^2)$ actuando en $\Omega = \mathbb{R}^2$ se tiene

$$\begin{aligned}\triangleleft \quad \operatorname{rot} F = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & 3_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + 2xy & 2xy + x^2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy + x^2)\right) e_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + 2xy)\right) e_2 \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(2xy + x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 2xy)\right) e_3 \\ &= 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Recordamos que en el ejemplo 10.18 mostramos que este campo es conservativo con potencial

$$U(x, y, z) = xy^2 + x^2 y \quad \triangleright$$

EJEMPLO 10.27. Sea el campo en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dado por

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

◁ Un cálculo directo nos lleva a que

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F = \nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right) e_1 - \left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) e_2 \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right) e_3 \\
&= 0e_1 + 0e_2 + \left(\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) e_3 = (0,0,0)
\end{aligned}$$

Recordemos que en el ejemplo 10.24 mostramos que este campo no es conservativo. ▷

Estos ejemplos muestran que la condición de que un campo tenga rotación cero no es una condición suficiente para que el campo sea conservativo. Mostramos ahora que la obstrucción para completar la característica de ser conservativo la resuelve la geometría del dominio donde actúa el campo. En el ejemplo 10.26, el dominio $\Omega = \mathbb{R}^2$ no tiene defectos geométricos pues además de ser de una sola pieza (**conexo**) no tiene hoyos. En tanto, en el ejemplo 10.27, el dominio donde actúa el campo allí mencionado es $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que tiene el defecto de tener un "hoyo" en el origen. A un conjunto de este tipo se le dice no ser **simplemente conexo**. Por el contrario, a $\Omega = \mathbb{R}^2$ que no tiene "hoyos" se le denomina **simplemente conexo.**

La definición de conexidad simple para un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$) es bastante técnica y sale de nuestro alcance, y damos apenas una idea de la definición, junto con algunos ejemplos de **regiones simplemente conexas.**

DEFINICIÓN 10.28. Una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^2$) se dice **simplemente conexa** si para cualquier punto $p \in \Omega$, toda curva cerrada simple por p se pueda deformar hacia p sin salirse de Ω, siendo realizado este proceso de manera continua. La figura 10.9 ilustra esta definición.

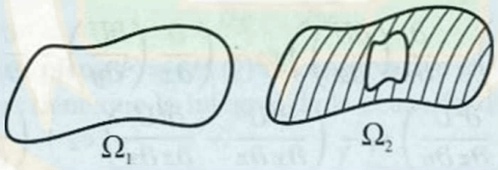


Figura 10.9. La región Ω_1 es simplemente conexa; la región Ω_2 no lo es.

EJEMPLO 10.29. Una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sin puntos removidos es simplemente conexa.

EJEMPLO 10.30. Una región abierta $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ menos un punto q no es simplemente conexa.

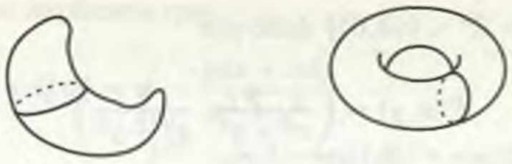
◁ Al tomar $p \in \Omega$ y una curva cerrada Γ por p que circunde al punto q, esta curva no puede deformarse hacia p pues tendría que pasar sobre q y salirse de la región. ▷

EJEMPLO 10.31. Una región abierta $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que tenga removida una subregión no es simplemente conexa.

◁ El argumento es similar al ejemplo anterior (véase la figura 10.9). ▷

EJEMPLO 10.32. Una región abierta $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con un punto removido q es simplemente conexo.

◁ Dado un punto arbitrario $p \in \Omega$ y una curva cerrada Γ por p, esta se puede deformar sin pasar por q debido a que existe otra dimensión que ayuda a evitar pasar por q (véase la figura 10.10a). ▷



a. Superficie de un croissant b. Superficie de un toro

Figura 10.10. a. Conjunto simplemente conexo; b. Conjunto no simplemente conexo.

EJEMPLO 10.33. Una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ a la que se le retira una curva Λ que la atraviesa de un extremo hasta el otro (pudiendo ser infinita) es un conjunto no simplemente conexo.

$\lhd$ Al dar un punto $p \in \Omega$ y una curva Γ por él que enrede a Λ, no es posible deformarlo hacia p sin salirse de Ω (véase 10.10b). $\rhd$

El siguiente resultado es una generalización del teorema fundamental del cálculo para funciones continuas reales de variable real. El ingrediente anexo es la característica geométrica del dominio del campo vectorial.

TEOREMA 10.34 (primer teorema de Cohomología). *Sea F un campo vectorial suave actuando en una región simplemente conexa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (o en $\mathbb{R}^2$), entonces son equivalentes las proposiciones*

1. $\operatorname{rot} F \equiv 0$ *en* Ω.
2. F *es un campo conservativo en* Ω.

$\lhd$ Probaremos apenas en esta parte que B implica A. La otra implicación se sigue del **teorema de Green** para el caso $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, o del **teorema de Stokes** para el caso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, siendo demostrados estos teoremas más adelante.

Supongamos que el campo suave F actuando en Ω es conservativo. Entonces existe un potencial $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$F = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} F &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right) e_1 \\
&\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right) e_2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right) e_3 \\
&= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y}\right) e_1 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\right) e_2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}\right) e_3 \\
&= (0,0,0)
\end{aligned}$$

pues las parciales mixtas son iguales por ser F un campo suave. $\rhd$

Nuestro problema ahora es acerca del cálculo del potencial U de un campo F que actúa en una región simplemente conexa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, que tiene la propiedad de ser conservativo.

Consideremos el caso cuando el integrando de la integral de segundo género es cero en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, es decir, para todo $p = (x, y) \in \Omega$ se tiene que

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

En otras palabras, el integrando define la **ecuación diferencial** dada por esta relación.

Por otro lado, el campo vectorial $F = (P, Q)$ actuando en Ω también define esta ecuación diferencial.[1]

Si Ω es un conjunto simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$ y $\operatorname{rot} F = 0$, entonces existe un potencial $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{grad} U = F$.

[1] De hecho, lo que define el campo vectorial $X = (P, Q)$ es la 1-forma diferencial

$$d\omega = P\,dx + Q\,dy$$

que se conoce como la **forma diferencial dual** asociada a X. No hacemos descripción general alguna de este objeto geométrico.

Esto es

$$P(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y), \quad Q(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$$

lo que nos llevaría la **ecuación diferencial exacta** de la forma

$$0 = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)\,dy = dU(x,y)$$

Al integrar la diferencial del lado derecho, obtenemos que para una constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene la relación

$$C = U(x,y)$$

que nos da las curvas integrales de la ecuación diferencial.[2]

De esta manera, si el campo $F = (P,Q)$ que induce la ecuación diferencial tiene rotación cero sobre el dominio simplemente conexo, la ecuación diferencial

$$Pdx + Qdy = 0$$

es **exacta**. Es decir, existe una función $U = U(x,y)$ (**potencial**) tal que las soluciones de la ecuación diferencial son las curvas de la forma

$$U(x,y) = C$$

siendo C una constante real. Esto nos da una forma de calcular el potencial U del campo F.

Para calcular explícitamente el potencial U tenemos que, la rotación de F es cero si y sólo si

$$0 = \nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

es decir, si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Hemos demostrado de esta manera el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 10.35. *La ecuación diferencial definida en la región simplemente conexa* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$Pdx + Qdy = 0$$

es exacta, si y sólo si se cumple la igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

◁ Más aun, ya que el campo vectorial plano $F = (P,Q)$ es conservativo en Ω, entonces para un punto fijo $p_0 = (x_0, y_0)$ y un punto arbitrario $p = (x,y)$ en Ω se tiene que la integral de la ecuación diferencial se calcula por

$$U(x,y) - U(x_0,y_0) = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$

donde Γ es una curva orientada arbitraria uniendo p_0 con p.

Particularmente, sea $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, donde Γ_1 es el segmento de recta que une el punto $p_0 = (x_0, y_0)$ con el punto $p_1 = (x, y_0)$ y Γ_2 es el segmento de recta que une el punto $p_1 = (x, y_0)$ con el punto $p = (x,y)$ como lo indica la figura 10.11.

---

[2] Como ya hemos mencionado, los conjuntos de nivel

$$U(x,y) = c$$

que son soluciones de la ecuación diferencial

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

son ortogonales al campo gradiente $F = \operatorname{grad} U$. Por lo tanto las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dot{y} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

son ortogonales a los conjuntos de nivel $U(x,y) = C$.

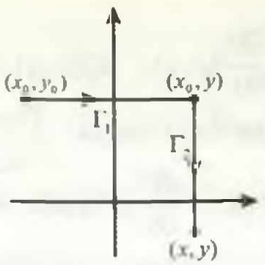


Figura 10.11. Cálculo de la integral $U = U(x, y)$.

Claramente, la parametrización de Γ_1 es

$$t \to (t, y_0) \quad \text{con} \quad x_0 \leq t \leq x$$

y donde se tiene que $dx = dt$ y $dy = 0$.

Análogamente, la parametrización de Γ_2 es, para x fija,

$$s \mapsto (x, s) \quad \text{con} \quad y_0 \leq s \leq y$$

y donde se tiene que $dx = 0$ y $dy = ds$.

Por lo tanto, al sustituir en la expresión del potencial, se obtiene

$$\begin{aligned} U(x, y) - U(x_0, y_0) &= \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy \\ &= \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy \\ &= \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, s)\,ds \end{aligned}$$

Tomando el punto apropiado (x_0, y_0), se tiene que la integral de la **ecuación diferencial exacta** tiene la expresión

$$U(x, y) - \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, s)\,ds = C \quad \triangleright$$

La discusión anterior nos da el método para calcular el potencial $U(x, y)$ del campo conservativo F actuando en una región simplemente conexa del plano.

EJEMPLO 10.36. Resuelva la ecuación diferencial en el plano dada por

$$(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy = 0$$

$\triangleleft$ En este caso, $P(x, y) = x^2 - 2xy^2 + 3$ y $Q(x, y) = y^2 - 2x^2y + 3$, lo que nos dice que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -4xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -4xy$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial es exacta y está definida en el plano $\mathbb{R}^2$ que es simplemente conexo.

De acuerdo al método anterior, y tomando el punto $p_0 = (1, 1) = (x_0, y_0)$, se tiene que

$$P(t, 1) = t^2 - 2t + 3 \quad \text{y} \quad Q(x, s) = s^2 - 2x^2s + 3$$

lo que nos lleva a que

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_1^x (t^2 - 2t + 3)\,dt + \int_1^y (s^2 - 2x^2s + 3)\,ds \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{7}{3}\right) + \left(\frac{y^3}{3} - x^2y^2 + 3y + x^2 - \frac{10}{3}\right) \\ &= \frac{x^3 + y^3}{3} - x^2y^2 - x^2 + 3(x + y) - \frac{17}{3} \end{aligned}$$

Consecuentemente, las curvas integrales (potenciales de $F = (x^2 - 2xy^2 + 3,\ y^2 - 2x^2y + 3)$) tienen la expresión general

$$C = U(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{3} - x^2y^2 - x^2 + 3(x + y)$$

donde C es una constante real. Aquí hemos omitido la otra constante $-\frac{17}{3}$, en virtud que puede ser absorbida por la constante más general C. ▷

EJEMPLO 10.37. Resuelva la ecuación diferencial

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

◁ Claramente, la ecuación diferencial está definida en $\mathbb{R}^2$ menos los ejes coordenados y

$$P(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\ Q(x,y) = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}$$

Tenemos entonces que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$$

lo que dice que la ecuación diferencial es exacta en el conjunto simplemente conexo (sin hoyos, véase la figura 10.12)

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0 \text{ o } y = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{ejes coordenados}\}$$

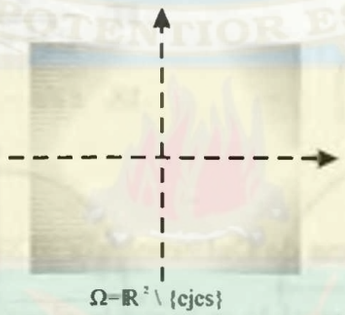


Figura 10.12. Conjunto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0 \text{ o } y = 0\}$.

De esta forma, si (x,y) está en el primer cuadrante, el potencial $U(x,y)$ se calcula por

$$U(x,y) = \int_1^x P(t,1)dt + \int_1^y Q(x,s)ds$$

tomando $p_0 = (1,1)$ como punto prefijado en tal cuadrante.

Pero

$$P(t,1) = \frac{1}{t} + 1 \quad \text{y} \quad Q(x,s) = \frac{2}{s} - \frac{x}{s^2}$$

de donde, el potencial obtenido es

$$U(x,y) = \int_1^x \left(\frac{1}{t} + 1\right)dt + \int_1^y \left(\frac{2}{s} - \frac{x}{s^2}\right)ds = \ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} - 1$$

Por lo tanto, las curvas integrales de la ecuación diferencial tienen la forma

$$U(x,y) = \ln x + 2\ln y + \frac{x}{y} = C$$

donde una vez más la constante C absorbe a -1. ▷

Como ya hemos mencionado en los ejemplos anteriores, al resolver la ecuación diferencial se obtendrá el potencial $U(x,y)$ del campo conservativo $F = (P,Q)$.

Ejercicios 10.3

Calcule el dominio y la rotación de los campos vectoriales de los ejercicios 1–5.

1. $F(x,y) = \dfrac{(x^2, y^2)}{x^2+y^2}$
2. $F(x,y) = (z-y, x-z, y-x)$
3. $F(x,y) = (y^2+z^2, z^2+x^2, x^2+y^2)$
4. $F(x,y) = \dfrac{(x^2, y^2, z^2)}{1-x^2-y^2-z^2}$
5. $F(x,y) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$

¿Cuáles de los conjuntos de los ejercicios 6–10 son simplemente conexos? Haga un dibujo.

6. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,1), (3,2), (0,0)\}$
7. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \,|\, x^2 \le y\}$
8. $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0), (-1,0,0), (1,0,0)\}$
9. $V = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2 = \dfrac{1}{2},\ z \le 0\right\}$
10. $V = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2 = \dfrac{1}{2},\ z \in \mathbb{R}\right\}$
11. ¿Cuáles campos de los ejercicios 1–5 son conservativos?

¿Cuáles de los campos vectoriales de los ejercicios 12–15 son conservativos?

12. $F(x,y) = (y,x)$
13. $F(x,y) = \dfrac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$
14. $F(x,y,z) = (x, -y^2, z)$
15. $F(x,y,z) = (yz, zx, xy)$

Resuelva las ecuaciones diferenciales, de los ejercicios 16–18, que sean exactas.

16. $y\,dx + x\,dy = 0$
17. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy = 0$
18. $x\,dx - y^2\,dy + z\,dz = 0$

10.4 El teorema de Green

En esta sección demostramos el **primer teorema de Cohomología** 10.34 para el caso cuando la región Ω está contenida en el plano.

Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial suave actuando en la región plana $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

DEFINICIÓN 10.38. Una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se dice ser de tipo Ω_x-región si está limitada a la derecha y a la izquierda por dos curvas suaves de la forma

$$x = \gamma_1(y) \le x = \gamma_2(y) \quad \text{con} \quad y \in [a,b]$$

y limitada superior e inferiormente por las rectas paralelas al eje x: $y = a$, $y = b$ (véase la figura 10.13a).

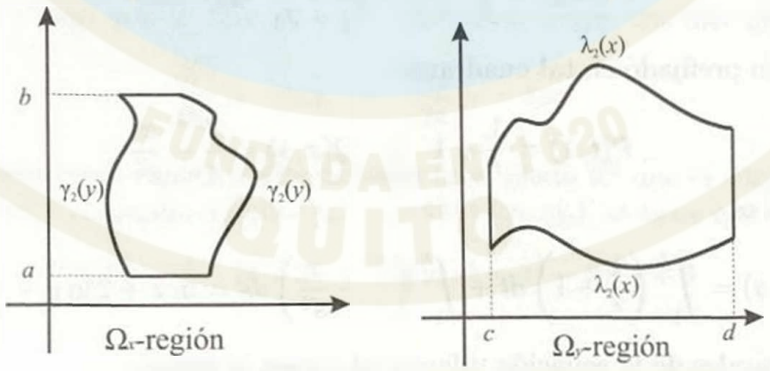


Figura 10.13. a. Ω_x-región b. Ω_y-región.

Análogamente, una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se dice de tipo Ω_y-región si está limitada superior e inferiormente por dos curvas suaves de la forma

$$y = \lambda_1(x) \le y = \lambda_2(x) \quad \text{con} \quad x \in [c,d]$$

y acotada por la derecha y la izquierda por las rectas paralelas al eje y: $x = c$, $x = d$. (véase la figura 10.13b).

Estamos interesados en el caso cuando una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es tanto del tipo Ω_x-región como del tipo Ω_y-región.

EJEMPLO 10.39. Consideramos el disco cerrado unitario plano

$$D_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

1. D_1 es Ω_x-región. En efecto, D_1 puede definirse como

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2},\ y \in [-1,1]\right\}$$

De esta manera, las curvas

$$x = \gamma_1(y) = -\sqrt{1-y^2} \leq x = \gamma_2(y) = \sqrt{1-y^2}$$

limitan inferior y superiormente a D_1. Las rectas $y = -1$, $y = 1$, se limitan a ser los puntos $(0,-1)$ y $(0,1)$ sobre la frontera de D_1 (véase la figura 10.14).

2. D_1 es Ω_y-región. En efecto, D_1 también se puede definir por el conjunto

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]\right\}$$

De igual forma, las curvas

$$y = \lambda_1(x) = -\sqrt{1-x^2} \leq y = \lambda_2(x) = \sqrt{1-x^2}$$

limitan por la derecha y la izquierda a D_1. Las rectas $x = -1$, $x = 1$ son los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ sobre la frontera de D_1 (véase la figura 10.14). ▷

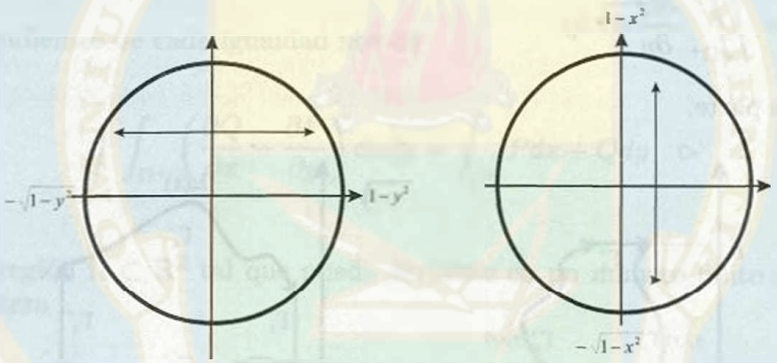


Figura 10.14. D_1 como Ω_x y Ω_y-Región.

Tenemos para la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que es una Ω_x y una Ω_y región el siguiente resultado importante.

LEMA 10.40 (fórmula de Green). *Para el campo vectorial suave $F = (P, Q)$ actuando en la Ω_x y Ω_y región orientada $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ se cumple la igualdad*

$$\iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{\Gamma^+} P\, dx + Q\, dy \tag{10.2}$$

donde Γ es la curva frontera de Ω que le orienta.

◁ Supongamos que $\Gamma = \Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \Gamma_3^+ + \Gamma_4^+$ es la curva cerrada frontera de Ω que orienta a la región.
Si Ω es una Ω_x-región, entonces en un intervalo $[a,b]$ la región Ω se puede definir como

$$\Omega = \{(x,y) \mid a \leq y \leq b,\ \gamma_1(y) \leq x \leq \gamma_2(y)\}$$

donde γ_1 y γ_2 son las curvas que limitan a Ω por la derecha e izquierda respectivamente, y $y = a$, $y = b$ son las rectas limitantes inferior y superior de Ω.

Claramente, las parametrizaciones de Γ están dadas según la orientación por

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1: \ x = \gamma_1(y) \text{ donde } y \in [b, a] = [a, b]^- \\
&\Gamma_2: \ y = a \\
&\Gamma_3: \ x = \gamma_2(y) \text{ donde } y \in [a, b] \\
&\Gamma_4: \ y = b
\end{aligned}$$

Ya que en Γ_2 y Γ_4 se tiene que $dy = 0$, entonces a lo largo de esas curvas se cumple

$$\int_{\Gamma_2^+} Q\,dy = \int_{\Gamma_4^+} Q\,dy = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} Q(x,y)\,dy &= \int_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \Gamma_3^+ + \Gamma_4^+} Q(x,y)\,dy \\
&= \int_{\Gamma_1^+} Q\,dy + \int_{\Gamma_2^+} Q\,dy + \int_{\Gamma_3^+} Q\,dy + \int_{\Gamma_4^+} Q\,dy \\
&= \int_{\Gamma_1^+} Q(x,y)\,dy + \int_{\Gamma_3^+} Q(x,y)\,dy = \int_b^a Q(\gamma_1(y), y)\,dy + \int_a^b Q(\gamma_2(y), y)\,dy \\
&= \int_a^b Q(\gamma_2(y), y)\,dy - \int_a^b Q(\gamma_1(y), y)\,dy = \int_a^b [Q(\gamma_2(y), y) - Q(\gamma_1(y), y)]\,dy \\
&= \int_a^b \left[\int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx \right] dy = \int_a^b dy \int_{\gamma_1(y)}^{\gamma_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \\
&= \iint_{\Omega^+} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

La figura 10.15 ilustra esta parte.

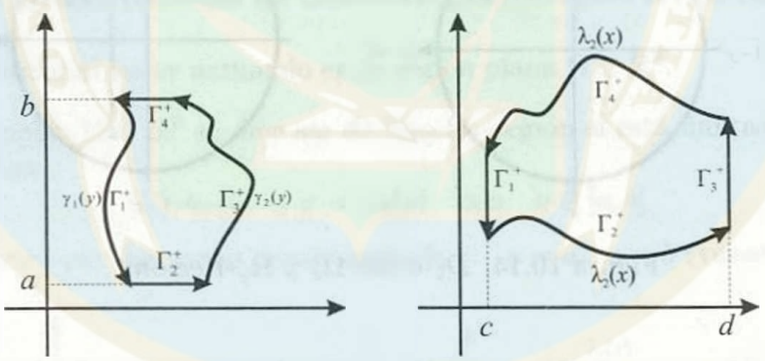


Figura 10.15. Integrales para las regiones Ω_x y Ω_y.

Análogamente, si Ω es una región del tipo Ω_y definida sobre un intervalo $[c, d]$, se tendría que las parametrizaciones de la curva Γ serían

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1: \ x = c \\
&\Gamma_2: \ y = \lambda_1(x) \text{ donde } x \in [c, d] \\
&\Gamma_3: \ x = d \\
&\Gamma_4: \ y = \lambda_2(x) \text{ donde } x \in [d, c] = [c, d]^-
\end{aligned}$$

y como en Γ_1 y Γ_3, se cumple que $dx = 0$, entonces

$$\int_{\Gamma_1^+} P dx = \int_{\Gamma_3^+} P dx = 0$$

Por lo tanto, de forma análoga al caso anterior

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma^+} P dx &= \int_{\Gamma_1^+ + \Gamma_2^+ + \Gamma_3^+ + \Gamma_4^+} P(x,y)\,dx \\ &= \int_{\Gamma_1^+} P\,dx + \int_{\Gamma_2^+} P\,dx + \int_{\Gamma_3^+} P\,dx + \int_{\Gamma_4^+} P\,dx \\ &= \int_{\Gamma_2^+} P(x,y)\,dx + \int_{\Gamma_4^+} P(x,y)dx = \int_c^d P(x,\lambda_1(x))\,dx + \int_d^c P(x,\lambda_2(x))\,dx \\ &= \int_c^d P(x,\lambda_1(x))\,dx - \int_c^d P(x,\lambda_2(x))\,dx = \int_c^d [P(x,\lambda_1(x)) - P(x,\lambda_2(x))]\,dx \\ &= \int_c^d \left[\int_{\lambda_2(x)}^{\lambda_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right] dx = \int_c^d \left[-\int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right] dx \\ &= \iint_{\Omega^+} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx\end{aligned}$$

Por lo tanto, si Ω es tanto una región Ω_x como Ω_y se tienen las igualdades

$$\iint_{\Omega^+} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\Gamma^+} Q\,dy$$
$$\iint_{\Omega^+} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\Gamma^+} P\,dx$$

y al sumar los lados correspondientes de cada igualdad nos da

$$\int\int_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy \quad \triangleright$$

Ahora consideremos una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que pueda dividirse en un número finito de regiones $\Omega_1, \ldots \Omega_n$ que se intersequen en apenas la frontera

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots + \Omega_n$$

y tal que teniendo fronteras $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ que orientan a las regiones Ω_i, todas sean del tipo Ω_x y Ω_y regiones.

Es claro que si Γ_i y Γ_j son fronteras comunes de las regiones Ω_i y Ω_j, entonces al orientarse tienen direcciones opuestas y la integral de cualquier campo a lo largo de ellas se anulará al efectuar la suma (véase la figura 10.16).

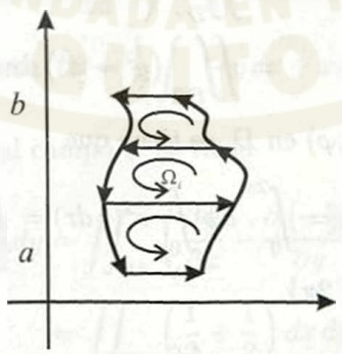


Figura 10.16. Orientación de las regiones Ω_i.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

De esta manera, al realizar el cálculo

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy &= \iint_{\Omega_1^+ +\ldots+\Omega_n^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\\ &= \iint_{\Omega_1^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\\ &+ \iint_{\Omega_2^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\\ &+\cdots+\iint_{\Omega_n^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\end{aligned}$$

Ya que cada Ω_i es región Ω_x y Ω_y, se tiene que allí vale la fórmula de Green (10.2), y por lo tanto, la última igualdad se convierte en

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_1^+}(P dx+Q dy)+\int_{\Gamma_2^+}(P\,dx+Q\,dy)+\cdots+\int_{\Gamma_n^+}(P\,dx+Q\,dy)\\ &\qquad=\int_{\Gamma_1^+ +\Gamma_2^+ +\cdots+\Gamma_n^+}P\,dx+Q\,dy=\int_{\Gamma^+}P\,dx+Q\,dy\end{aligned}$$

siendo $\Gamma^+=\Gamma_1^+ +\Gamma_2^+ +\cdots+\Gamma_n^+$ la frontera orientada de la región Ω.

De esta manera, si Ω es una región en el plano que se puede dividir en un número finito de regiones Ω_i del tipo Ω_x y Ω_y, entonces para el campo vectorial $X=(P.Q)$ que actúa suavemente en Ω se cumple la fórmula

$$\iint_{\Omega^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\Gamma^+}P\,dx+Q\,dy$$

donde Γ^+ es la frontera orientada de Ω.

Más aun, es posible demostrar el hecho más general sobre regiones limitadas en $\mathbb{R}^2$ teniendo como frontera a una curva cerrada simple.

TEOREMA 10.41 (de Green). *Para el campo vectorial suave $F=(P,Q)$ actuando en la región acotada Ω con frontera una curva cerrada simple Γ, es válida la* **fórmula de Green**

$$\iint_{\Omega^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\Gamma^+}P\,dx+Q\,dy \tag{10.3}$$

EJEMPLO 10.42. Calcule la integral

$$\int_{\Gamma}-x^2y\,dx+xy^2dy$$

a lo largo de la curva $\Gamma: x^2+y^2=1$, orientada a la derecha (esto es, en sentido contrario a las manecillas del reloj).

◁ Claramente Γ acota al disco unitario

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

Como $P(x,y)=-x^2y$ y $Q(x,y)=xy^2$, por el teorema de Green 10.41 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma}-x^2y\,dx+xy^2\,dy&=\iint_{D^+}\left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}-\frac{\partial(-x^2y)}{\partial y}\right)dx\,dy\\ &=\iint_{D^+}\left(y^2+x^2\right)dx\,dy\end{aligned}$$

Si se introducen las coordenadas polares (r,φ) en D, se tiene que

$$\iint_{D^+}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2(r\,dr)=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3\,dr=\frac{\pi}{2}$$

debido a que $D=\{(r,\varphi)\mid 0\le r\le 1 \text{ y } 0\le\varphi\le 2\pi\}$.

De esta manera,

$$\int_{\Gamma^+}-x^2\,dx+xy^2\,dy=\iint_{D^+}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\frac{\pi}{2}\quad\triangleright$$

EJEMPLO 10.43. Sea $F(x,y) = \left(x + \ln(x^2+y^2), y + \ln\left(x^2+y^2\right)\right)$ actuando en la región orientada $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ cuya frontera orientada es una curva cerrada Γ.

Calcule la integral de segundo género

$$\int_{\Gamma^+} \left(x + \ln\left(x^2+y^2\right)\right) dx + \left(y + \ln\left(x^2+y^2\right)\right) dy$$

a lo largo de la curva Γ.

◁ De acuerdo a la fórmula de Green (10.3) se tiene la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma^+} \left(x + \ln\left(x^2+y^2\right)\right) dx + \left(y \ln\left(x^2+y^2\right)\right) dy \\
&= \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial\left(y + \ln\left(x^2+y^2\right)\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(x + \ln\left(x^2+y^2\right)\right)}{\partial y} \right) dx\, dy \\
&= \iint_{\Omega^+} \left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2} \right) dx\, dy = \iint_{\Omega^+} \frac{x-y}{x^2+y^2}\, dx\, dy \quad \triangleright
\end{aligned}$$

Observamos que, en la expresión dada por la fórmula de Green (10.3)

$$\int_{\Gamma^+} P\, dx + Q\, dy = \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

podemos identificar de inmediato al integrando $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ como la tercera coordenada de la rotación del campo

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Sea $F = (P, Q)$ un campo vectorial suave actuando sobre la región simplemente conexa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Si γ es una cerrada simplemente conexa contenida en Ω, entonces encierra una región $\omega \subset \Omega$ donde vale que

$$\int_{\gamma^+} P\, dx + Q\, dy = \iint_{\omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Si $\operatorname{rot} F = 0$, se tendría que

$$\int_{\gamma^+} P\, dx + Q\, dy = \iint_{\omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_{\omega^+} 0\, dx\, dy = 0$$

para la curva cerrada arbitraria $\gamma \subset \Omega$.

Por el teorema 10.22 el campo F es conservativo, lo que prueba el teorema de Cohomología para el caso plano.

El teorema de Green tiene también aplicaciones geométricas, pues ayuda a calcular áreas de regiones.

COROLARIO 10.44. *Sea el campo vectorial* $F = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$ *actuando en la región plana acotada orientada* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, *cuya frontera orientada* Γ *es una curva cerrada simple. Entonces el área de* Ω *se calcula mediante la fórmula*

$$\text{Área}\,(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} -y\, dx + x\, dy$$

◁ Por el teorema de Green 10.41 aplicado al campo F se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^+} -\frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy &= \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial \frac{x}{2}}{\partial x} - \frac{\partial\left(-\frac{y}{2}\right)}{\partial y} \right) dx\, dy \\
&= \iint_{\Omega^+} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dx\, dy = \iint_{\Omega^+} dx\, dy \\
&= \text{Área}\,(\Omega) \quad \triangleright
\end{aligned}$$

EJEMPLO 10.45. Calcule el área del disco de radio R

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

◁ Su frontera Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = R$, parametrizada por $x = R\cos t$, $y = R\operatorname{sen} t$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Ya que sobre Γ tenemos que $dx = -R\operatorname{sen} t\, dt$, $dt = R\cos t\, dt$, entonces, por el corolario 10.44 se sigue la cadena de igualdades

$$\begin{aligned}\text{Área}\,(D) &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma^+} -y\,dx + x\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-R\operatorname{sen} t)(-R\operatorname{sen} t\,dt) + (R\cos t)(R\cos t\,dt) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(R^2\operatorname{sen}^2 t + R^2\cos^2 t\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2 = \pi R^2 \ \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 10.46. Calcule el área de la región adyacente al origen limitada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$.

◁ Sea $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ la curva cerrada formada por las curvas orientadas

$$\Gamma_1 : \ y = x^2 \text{ con } x \in [0, 1]$$
$$\Gamma_2 : \ x = y^2 \text{ con } y \in [1.0] = [0, 1]^-$$

entonces, el área encerrada por la región Ω limitada por Γ se calcula con

$$\begin{aligned}\text{Área}\,(\Omega) &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma^+} -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1^+} (-y\,dx + x\,dy) + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2^-} (-y\,dx + x\,dy) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-x^2\right) dx + x\,(2x\,dx) + \frac{1}{2}\int_1^0 -y\,(2y\,dy) + y^2\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 -y^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 y^2\,dy = \frac{1}{3} \ \triangleright\end{aligned}$$

Ejercicios 10.4

Calcule la integral indicada en los ejercicios 1–3, directamente y también usando la fórmula de Green.

1. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} (x^2 + y^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$

   Γ^+ es el triángulo con vértices $(0, 0), (1, -1), (1, 3)$ orientado positivamente

2. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} -x^2 y\,dx + xy^2\,dy$

   Γ^+ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ recorrida positivamente.

3. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \sqrt{x^2 + y^2}\,dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]dy$

   donde Γ^+ es la frontera de la región

   $$\Omega = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

   orientada positivamente.

4. Utilice el teorema de Green para calcular la integral

   $$\int_{\Gamma^+} y^2\,dx - x\,dy$$

   donde Γ^+ es la frontera del triángulo que tiene vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

5. Utilice el teorema de Green para calcular la integral

   $$\int_{\Gamma^+} y\,dx + x^2\,dy$$

   donde Γ^+ es la frontera del cuadrado que tiene vértices (1.0), (0.1), $(-1, 0)$ y $(0, -1)$.

6. Utilice el teorema de Green para calcular la integral

   $$\int_{\Gamma^+} \left(1 + y^2\right) dx + y\,dy$$

   donde Γ^+ está formada por las gráficas de las funciones $y = \cos x$ y $y = 2\cos x$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Calcule el área de las regiones Ω que se mencionan en los ejercicios 4 y 5 mediante la fórmula de Green.

4. Ω es la región acotada por la astroide

   $$x = 2\cos^3 t, \ \ y = 2\operatorname{sen}^3 t$$

5. Ω es la región acotada por la cardioide

   $$x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$$

Capítulo

11 Superficies regulares y poliédricas en $\mathbb{R}^3$

11.1 Superficies regulares

En esta sección tratamos de dar una descripción rápida de la necesidad de construir la idea de superficie en un espacio euclidiano de dimensión 3. Un tratamiento más preciso puede verse en el libro de Palmas y Reyes [8].

La idea de superficie tiene sus orígenes en la construcción de mapas que describen un lugar específico de la Tierra. El problema de describir una región del planeta obedeció a que, durante los inicios del comercio entre las naciones, era necesario trazar los viajes que se efectuaban para no tener que hacerlos más largos y costosos. La realización de un mapa se efectuaba de acuerdo a las siguientes reglas necesarias para que fuese útil a cualquier persona que pudiera obtener una copia de él. Si S denota la región que se quería describir con el mapa:

1. Cada punto de la región $p \in S$ tiene un punto y sólo un punto correspondiente en el mapa Ω que se denota por $q \in \Omega$.
2. La asociación entre los puntos del mapa y los puntos de la region es uno a uno y es tal que puntos cercanos del mapa corresponden a puntos cercanos de la región y reciprocamente.
3. La región y el mapa tenían correspondencias sin admitir arrugas, esto es, no se puede construir un mapa arrugado de una región de la tierra, ni tampoco una mapa sin arrugas puede describir una región arrugada del planeta.

La figura 11.1 describe esta relación para la construcción de un mapa.



Figura 11.1. Construcción de un mapa para una región de la Tierra.

DEFINICIÓN 11.1. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para cualquier punto $p \in S$ existen una vecindad $V \subset \mathbb{R}^3$ de p, una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y una aplicación

$$r : \Omega \to S \cap V$$

que satisface

1. r es una función diferenciable.
2. Para cualquier punto $q \in \Omega$ la diferencial de la aplicación en cada punto

$$dr_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

es inyectiva.

Claramente esta definición resuelve la necesidad que se tenía de construir un mapa.

Asociando coordenadas $(u, v) \in \Omega$ y coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la función r se puede escribir como

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

y se llamará la **parametrización** de S por las coordenadas u, v bajo la funcion r. La figura 11.2 describe la definición de superficie regular.

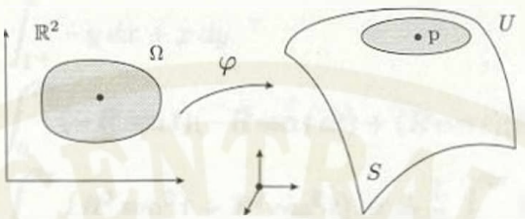


Figura 11.2. Superficie regular y una parametrizacion.

En la sección 6.3 vimos que la diferencial de una función es una transformación lineal entre los espacios tangentes, y que lleva vectores tangentes a los puntos del dominio en vectores tangentes a los puntos del codominio. A partir de esto, damos una interpretación al hecho de que la diferencial sea inyectiva. Intuitivamente esto se entiende como que la superficie no está arrugada en el punto correspondiente.

Si $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica del espacio tangente $T_q\mathbb{R}^2$ en el punto $q = (u_0, v_0) \in \Omega$, ya que la matriz

$$Dr_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

es la correspondiente a la **diferencial** (transformación lineal) en la base mencionada, se tiene que

$$dr_q(e_1) = Dr_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial r}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u) = r_u$$

$$dr_q(e_2) = Dr_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial r}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v) = r_v$$

De esta manera, tenemos que la transformación lineal dr_q es una función inyectiva si solamente si, la matriz jacobiana Dr_q tiene rango 2, pero esto es equivalente a que

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0 \text{ o bien } \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \neq 0 \text{ o bien } \frac{D(z, x)}{D(u, v)} \neq 0$$

o equivalentemente a que

$$\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 \neq 0$$

o lo que es lo mismo, a la condición

$$r_u \times r_v = \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, -\frac{D(x, z)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right) \neq 0$$

Esto último condiciona a que los vectores r_u y r_v no sean colineales, es decir, que sean linealmente independientes, lo cual garantiza que una región del mapa Ω va a ser aplicada en la región de la superficie S sin arrugas (véase la figura 11.2).

EJEMPLO 11.2. Sea P un plano en el espacio determinado por la ecuación

$$P : ax + by + cz = d \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } c \neq 0$$

◁ De la ecuación que define el plano mencionado, se tiene que

$$z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y$$

De esta forma, la parametrización de P está dada por

$$r(u,v): \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{d}{c} - \dfrac{c}{a}u - \dfrac{b}{c}v \end{cases}$$

donde $(u,v) \in \Omega = \mathbb{R}^2$.

Claramente se tiene que

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{a}{c} & -\dfrac{b}{c} \end{vmatrix} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{a}{c} & -\dfrac{b}{c} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{b}{c}$$

lo que implica que

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \neq 0$$

Lo anterior nos dice que $r(u,v)$ es tal que su derivada $Dr_{(u,v)}$ tiene rango 2 en cada punto (u,v) del plano $\Omega = \mathbb{R}^2$. ▷

EJEMPLO 11.3. Considérese la esfera $\mathbb{S}^2$ de radio R con centro en el origen de coordenadas en $\mathbb{R}^3$. Esta puede ser descrita por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

en las coordenadas cartesianas x, y, z.

◁ Sea la parametrización de $\mathbb{S}^2$ en coordenadas esféricas, dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta \\ y = R\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

con $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < \theta < \pi$ (véase la figura 11.3).

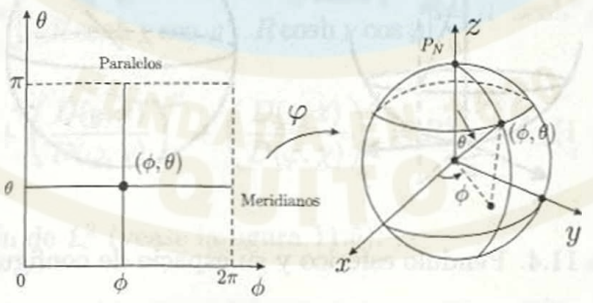


Figura 11.3. Coordenadas co-geográficas de la esfera.

Claramente $r : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ es tal que $r(D) \subset \mathbb{S}^2$ pues

$$\|r(\varphi,\theta)\|^2 = \|(R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, R\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, R\cos\theta)\|^2 = R^2$$

lo que nos indica que la parametrización r está bien definida.

Al calcular los jacobianos

$$\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\theta \\ y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & R\cos\varphi\cos\theta \\ R\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & R\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \end{vmatrix} = -R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\frac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} y_\varphi & y_\theta \\ z_\varphi & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -R\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ 0 & -R\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} = -R^2\cos\varphi\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\frac{D(z,x)}{D(\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} z_\varphi & z_\theta \\ x_\varphi & x_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -R\operatorname{sen}\theta \\ -R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & R\cos\varphi\cos\theta \end{vmatrix} = -R^2\operatorname{sen}\varphi\sin^2\theta$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\frac{D(y,z)}{D(\varphi,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(\varphi,\theta)}\right)^2 + \left(\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)}\right)^2 \\ &= R^4\cos^2\varphi\operatorname{sen}^4\theta + R^4\operatorname{sen}^2\varphi\sin^4\theta + R^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta \\ &= R^4\sin^4\theta\,(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) + R^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta \\ &= R^4\sin^2\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= R^4\sin^2\theta\end{aligned}$$

Lo cual implica que $\|\dot{r}_\theta \times \dot{r}_\varphi\| = 0$ es equivalente a que $\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir, a que $\theta = 0$ o bien $\theta = \pi$. Tales puntos corresponderían a los polos norte $P_N = (0,0,1)$ y sur $P_S = (0,0,-1)$. Tales puntos no serían cubiertos regularmente con esta parametrización. ▷

Observamos que, después de haber parametrizado una porción de una superficie mediante las coordenadas $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, cada vez que intervenga algún objeto sobre la parte parametrizada de la superficie, tal objeto será estudiado en las coordenadas (u,v), ignorando las coordenadas que tenía en el espacio ambiente donde está incluida la superficie.

Así, por ejemplo, si alguna función está definida sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ y las coordenadas en $\mathbb{S}^2$ son las del mapa: (φ,θ), entonces la función se definirá en estas coordenadas y no en las del espacio ambiente x, y, z.

EJEMPLO 11.4 (Péndulo esférico). Considere el sistema mecánico obtenido por el movimiento de un péndulo espacial, cuya masa tiene la libertad de moverse en el espacio, sostenido por una cuerda sin peso y de longitud ℓ, desde el punto O situado en el espacio tridimensional.

◁ Claramente cada posición desviada del estado de equilibrio puede caracterizarse por dos ángulos (φ,θ) que corresponden a los que se mencionan en la figura 11.4. El ángulo φ corresponde al ángulo que forma el segmento P_ℓ con el eje de abscisas, siendo P_ℓ la proyección del segmento pendular en el plano horizontal.

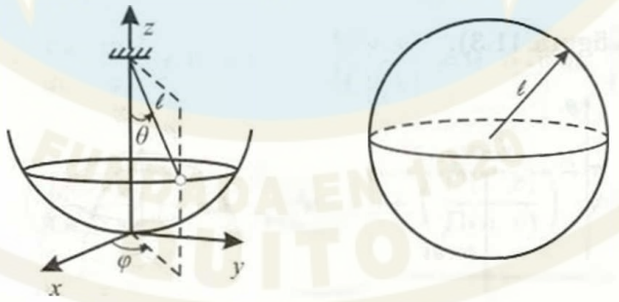


Figura 11.4. Péndulo esférico y su espacio de configuración.

Por lo otro lado, el ángulo θ es el formado por el segmento pendular, con el segmento pendular correspondiente a estado de equilibrio.

Claramente el **espacio de configuración** del sistema mécanico es el conjunto de estados (φ,θ) formado por

$$\mathbb{S}^2_\ell = \{(\varphi,\theta) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\}$$

que es una esfera bidimensional de radio ℓ contenida en $\mathbb{R}^2$. ▷

EJEMPLO 11.5. Sea $C^2 \subset \mathbb{R}^3$ el cilíndro circular recto con generatriz en dirección del eje z y con radio R, definido por $x^2 + y^2 = R^2$ con $z \in \mathbb{R}$.

◁ Tomemos las coordenadas polares en el plano (r, φ), para hacer una parametrización de C^2

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\operatorname{sen}\varphi \\ z = z \end{cases}$$

con $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

En esta caso, se tendrá que

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 0 & -R\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & R\cos\varphi \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{D(y,z)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 0 & R\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -R\cos\varphi$$

$$\frac{D(z,x)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = -R\operatorname{sen}\varphi$$

lo que implicaría que

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(r,\varphi)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(r,\varphi)}\right)^2 = R^2 \neq 0$$

debido a lo cual se tiene una parametrización del cílindro C^2. ▷

EJEMPLO 11.6. Considérese el **hiperboloide de dos hojas** en $\mathbb{R}^3$, definido por la ecuación

$$R^2 = z^2 - x^2 - y^2, \ R > 0$$

Si consideramos la hoja superior $z > 0$ denotado por L^2, entonces una parametrización viene dada por **coordenadas pseudoesféricas** como

$$\begin{cases} x = R\operatorname{senh}\chi\cos\varphi \\ y = R\operatorname{senh}\chi\operatorname{sen}\varphi \\ z = R\cosh\chi \end{cases} \tag{11.1}$$

donde $(\varphi, \chi) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R} = \Omega$.

Cálculos directos nos muestran que

$$\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\chi)} = \begin{vmatrix} -R\operatorname{senh}\chi\operatorname{sen}\varphi & R\cosh\chi\cos\varphi \\ R\operatorname{senh}\chi\cos\varphi & R\cosh\chi\operatorname{sen}\varphi \end{vmatrix} = -R^2\operatorname{senh}\chi\cosh\chi$$

$$\frac{D(y,z)}{D(\varphi,\chi)} = \begin{vmatrix} R\operatorname{senh}\chi\cos\varphi & R\cosh\chi\operatorname{sen}\varphi \\ 0 & R\operatorname{senh}\chi \end{vmatrix} = R^2\operatorname{senh}^2\chi\cos\varphi$$

$$\frac{D(z,x)}{D(\varphi,\chi)} = \begin{vmatrix} 0 & R\operatorname{senh}\chi \\ -R\operatorname{senh}\chi\operatorname{sen}\varphi & R\cosh\chi\cos\varphi \end{vmatrix} = R^2\operatorname{senh}^2\chi\operatorname{sen}\varphi$$

de donde

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\chi)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,x)}{D(\varphi,\chi)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(\varphi,\chi)}\right)^2 = R^4\operatorname{senh}^2\chi(1 + 2\operatorname{senh}^2\chi)$$

el cual es diferente de cero si $\chi \neq 0$.

Esto hace de r una parametrización de L^2 (véase la figura 11.5). ▷

LEMA 11.7. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. La gráfica de f contenida en $\mathbb{R}^3$ es una superficie regular.*

◁ Es suficiente con definir la parametrización de la superficie como

$$x = u, \ y = v, \ z = f(x,y) = f(u,v) \ \triangleright$$

De esta manera, conforme al Lema 11.7, la gráfica de cualquier función suave de dos variables con valores reales es una superficie en $\mathbb{R}^3$. Los siguientes ejemplos ilustran este resultado.

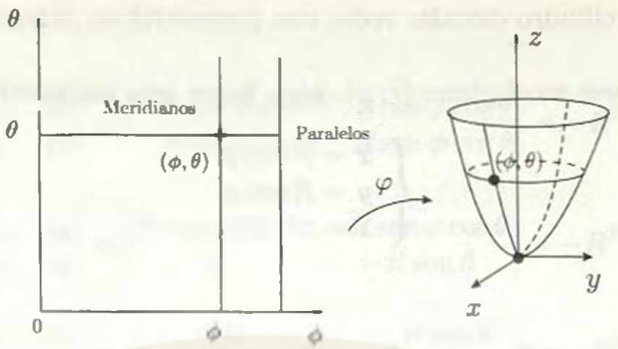


Figura 11.5. Hoja superior del hiperboloide.

EJEMPLO 11.8. La gráfica del **paraboloide circular**

$$z = x^2 + y^2$$

es una superficie parametrizada contenida en $\mathbb{R}^3$ bajo la parametrización

$$(x, y) \to (x, y, z) = \left(x, y, x^2 + y^2\right)$$

definida en $\Omega = \mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 11.9. La gráfica del **paraboloide hiperbólico (silla de montar)**

$$z = x^2 - y^2$$

es una superficie parametrizada contenida en $\mathbb{R}^3$ con la parametrización

$$(x, y) \to (x, y, z) = \left(x, y, x^2 - y^2\right)$$

que está definida en todo el plano $\mathbb{R}^2$.

DEFINICIÓN 11.10. Sea $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in V$. El punto p se dice **regular** para F si DF_p tien rango máximo. En coordenadas, si $F : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, entonces

$$DF_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

de donde F tiene rango 1 (máximo) si y sólo si

$$\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0, \ \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \ \text{ o bien } \ \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$$

A continuación damos otra forma de definir localmente a una superficie regular a través de la imagen inversa del valo regular de una función suave definida en una región de $\mathbb{R}^3$ y con valores reales.

Sea $a \in \mathbb{R}$, tal que $a \in F(V)$ y defina el conjunto de nivel

$$F^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in V \mid F(x, y, z) = a\}$$

LEMA 11.11. *Sea $a \in F(v)$ un valor regular entonces $S = F^{-1}(a)$ es una superficie regular.*

◁ Supongamos que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(p_0) \neq 0$$

con $p_0 \in F^{-1}(a)$.

Por el Teorema de la función implícita 6.41, en vecindades apropiadas de $z_0 = z(p_0)$ y $(x_0, y_0) = (x(p_0), y(p_0))$, tiene que $z = z(x, y)$ sobre el conjunto $F^{-1}(a)$. Esto es, existe una vecindad de (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$, donde vale que

$$F(x, y, z(x, y)) = a$$

Esto es, localmente $F^{-1}(a)$ se puede escribir como la gráfica de la función $z = f(x, y)$. Por el Lema 11.7 se tiene qu $F^{-1}(a)$ es una superficie regular (véase la figura 11.6). ▷

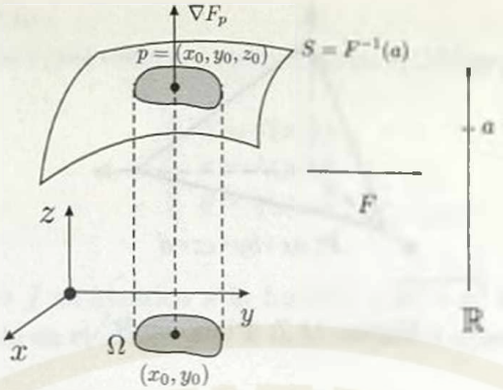


Figura 11.6. Superficie de nivel de una función suave.

EJEMPLO 11.12. Sea E el **elipsoide** bidimensional contenido en $\mathbb{R}^3$

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

◁ Se tiene que $E = F^{-1}(0)$, donde la función

$$F(x, y, z) = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

Claramente, un cálculo directo muestra que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{2x}{a^2},\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2},\ \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z}{c^2}\right) = (0, 0, 0)$$

si y sólo si $x = y = z = 0$.

Pero el punto $(0, 0, 0)$ no está contenido en E, de donde todos los puntos de E son regulares. Por el Lema 11.7 se sigue que E es una superficie regular. ▷

EJEMPLO 11.13. Sea el **hiperboloide de dos hojas** en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$H : 1 = -x^2 - y^2 + z^2$$

◁ Si definimos la función

$$F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

entonces

$$H = F^{-1}(1) = \left\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = z^2 - y^2 - x^2 = 1\right\}$$

Por el Lema 11.7 la superficie H es regular, pues $\nabla F = (-2x, -2y, 2z)$ se anula solamente si $(x, y, z) = (0.0.0)$. Tal punto no está contenido en la superficie H, lo que hace del hiperboloide de dos hojas una superficie regular. ▷

EJEMPLO 11.14. Considera cualquier plano $P \subset \mathbb{R}^3$ definido por alguna ecuación de la forma

$$P : ax + by + cz = d$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

◁ Sea la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x, y, z) = ax + by + cz$$

Entonces, $\nabla F = (a, b, c)$ es no nulo, si cualquiera de los parámetros a, b o c es diferente de cero.

En este caso, el plano P se puede definir como $P = F^{-1}(d)$, que lo hace una superficie regular parametrizada en $\mathbb{R}^3$, siendo $d \in \mathbb{R}$ un valor regular (véase la figura 11.7). ▷

A continuación se prueba la afirmación recíproca del Lema 11.7 para condiciones locales en una superficie.

LEMA 11.15. *Toda superficie parametrizada es localmente la gráfica de una función de dos variables.*

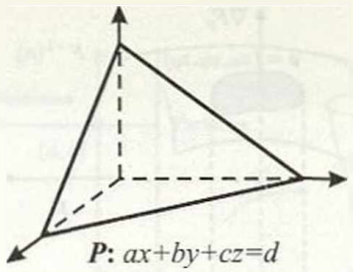


Figura 11.7. Plano en $\mathbb{R}^3$.

$\lhd$ Suponga que para la parametrización $(x, y, z) = (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))$ se tiene que

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$$

Considere la aplicación

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2_{(x,y)}$$

donde $\pi(x, y, z) = (x, y)$ es la proyección canónica en las variables x, y.

Denotemos por $r : \Omega \to S$ a la parametrización, y consideremos la composición $\pi \circ r : \Omega \to \mathbb{R}^2$. Entonces

$$D(\pi \circ r)_q = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det D(\pi \circ x)_q = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$$

esto pues,

$$(\pi \circ r)(u, v) = \pi(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)) = (x(u, v),\ y(u, v))$$

Por el Teorema de la función inversa 6.32, existen vecindades $V_1 \subset \mathbb{R}^2$ de q y $V_2 \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ de $\pi(p)$ tales que $\pi \circ r : V_1 \to V_2$ es un difeomorfismo, con una inversa satisfaciendo

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

La afirmación se sigue de la igualdad (véase la figura 11.8)

$$z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = f(x, y) \ \rhd$$

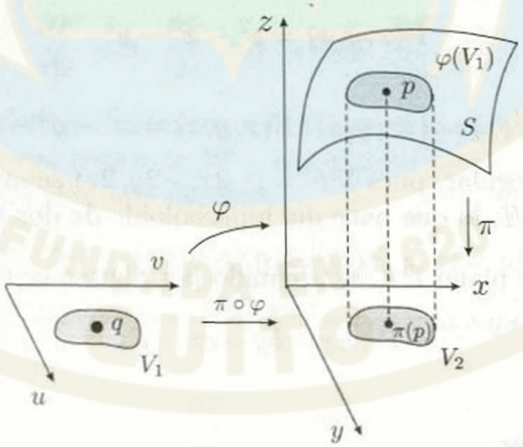


Figura 11.8. Superficie regular vista como una gráfica en $\mathbb{R}^3$.

El siguiente ejemplo nos muestra la utilidad del Lema 11.15 para el caso en que se quiere demostrar que un objeto en $\mathbb{R}^3$ no es una superficie regular.

EJEMPLO 11.16. El **cono** circular recto definido en el espacio tridimensional por la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2$$

no es superficie regular en el punto $(0,0,0)$.

◁ Suponga que es regular en tal punto y que entonces (por el Lema 11.15) se puede parametrizar localmente de alguna de las siguientes formas.

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = h(y,z) \\ y = g(x,z) \end{cases}$$

en una vecindad del punto $(0,0,0)$.

Es claro que si $z = f(x,y)$, entonces f es identica a la función $\sqrt{x^2+y^2}$ en una vecindad de $(0,0,0)$. Esto no es posible pues $\sqrt{x^2+y^2}$ no es diferenciable en el origen y f si lo sería por el mencionado Lema (véase la figura 11.9). ▷

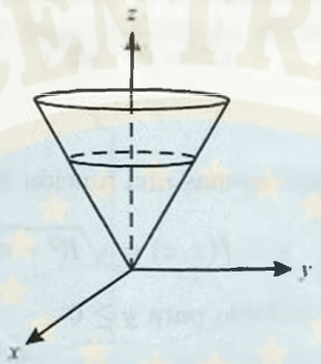


Figura 11.9. Cono circular recto en $\mathbb{R}^3$.

De los Lemas 11.7, 11.11 y 11.15 se obtiene el siguiente Teorema.

TEOREMA 11.17. *Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ se puede definir localmente de alguna de las siguientes tres maneras.*

1. *La imágen inversa de un valor regular de una función real de clase C^1 definida en una vecindad de S en $\mathbb{R}^3$.*
2. *La gráfica de una función real diferenciable definida en una región del plano $\mathbb{R}^2$.*
3. *La imagen de una función diferenciable regular al espacio de tres dimensiones, definida en una región del plano.*

Este teorema nos ayuda a definir a una superficie regular, utilizando apenas argumentos locales. Así, en adelante se usará cualquiera de estas tres equivalencias para definir o denotar a una superficie regular.

Los siguientes ejemplos muestran que la definición local de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ no necesariamente la define globalmente. Esto depende de la forma (**topología**) misma de S. No obstante, cuando se tiene una definición paramétrica local de una superficie, las partes no cubiertas por la parametrización se pueden definir paramétricamente de igual forma.

EJEMPLO 11.18. Sea $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera bidimensional. Es sabido que este conjunto es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^3$ (**compacto**). Por eso es que

1. La parametrización regular $r : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dada por las coordenadas co-geográficas (φ, θ) no la pueden definir globalmente pues no cubre a los polos P_N y P_S.
2. La función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por
$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
la define globalmente como la imagen inversa $S^2 = F^{-1}(R^2)$.
3. De la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ se puede apenas conseguir una función del tipo
$$z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$
cuya gráfica en $\mathbb{R}^3$ apenas es la semi-esfera superior que contiene al polo norte P_N.

Para cubrir totalmente a $\mathbb{S}^2$ con gráficas de este tipo, se necesitan 6 funciones como la que se menciona. ▷

EJEMPLO 11.19. Considere un cilindro circular recto $C^2 \subset \mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2,\ z \in \mathbb{R}$$

1. La parametrización regular dada por

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{con } (r,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi)$$

no cubre totalmente a C^2, pues omite a la recta $x = R$.

2. La función $F(x,y,z) = x^2 + y^2$ si define globalmente a C^2 debido a que

$$C^2 = F^{-1}(R^2)$$

siendo R un valor regular.

3. De la ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ se puede obtener apenas una función del tipo

$$y = f(x,z) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

que define solamente el semicilindro de C^2 definido para $y \geq 0$.

Por esto es que el cilindro C^2 no puede ser definido globalmente como la gráfica de una función de dos variables. ▷

EJEMPLO 11.20. Considerese el hiperboloide de dos hojas en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$z^2 - x^2 - y^2 = R^2$$

1. La parametrización dada por coordenadas pseudoesféricas (φ, χ), $r : \Omega \to \mathbb{R}^3$ parametriza la hoja superior L^2.

2. La función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$$

define completamente al hiperboloide con sus hojas desconectadas como $F^{-1}(R^2)$, siendo R un valor regular de F.

3. Finalmente, la hoja superior L^2 se puede definir globalmente como la gráfica de la función

$$z = f(x,y) = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2}$$

con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ▷

En los tres últimos ejemplos se pudo notar que la manera de apreciar a una superficie en su forma global, es teniéndola como una **superficie de nivel** de una función suave: $F(x,y,z) = c$.

Damos ahora otro ejemplo importante de superficie regular en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 11.21 (Superficies de revolución). Considérese una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2_{(x,z)}$ tal que no interseca al eje z, y que puede definirse en un intervalo (a,b) como

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(u) \\ z = g(u) \end{cases}$$

con $u \in (a,b)$ y donde sin pérdida de generalidad se puede suponer que $f(u) > 0$. Al hacer rotar esta curva Γ alrededor del eje z en $\mathbb{R}^3$, se obtiene una superficie S cuya parametrización local viene dada por

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\,\mathrm{sen}\,v \\ z = g(u) \end{cases}$$

donde $(u,v) \in (a,b) \times (0, 2\pi) = \Omega$.

No es difícil probar que r es una parametrización de la **superficie de revolución** S. Omitimos la prueba, que sigue la misma forma que para la esfera y el hiperboloide.

Para ilustrar estas superficies, consideremos el círculo de radio R con centro en $(a,0)$ en el plano (x,z), cuya ecuación en coordenadas polares tiene la forma

$$\Gamma : \begin{cases} x = R\cos u + a \\ z = R\sin u \end{cases}$$

con $u \in (0, 2\pi)$, $0 < R < a$.

De esta manera, la superficie de revolución obtenida al hacer girar Γ alrededor del eje z tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x = (R\cos u + a)\cos v \\ y = (R\cos u + a)\operatorname{sen} v \\ z = R\operatorname{sen} u \end{cases} \tag{11.2}$$

donde $(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi) = \Omega$.

A la superficie de revolución obtenida se le llama el **toro de dimensión 2** y se le denota por $\mathbb{T}^2$ (véase la figura 11.10). ▷

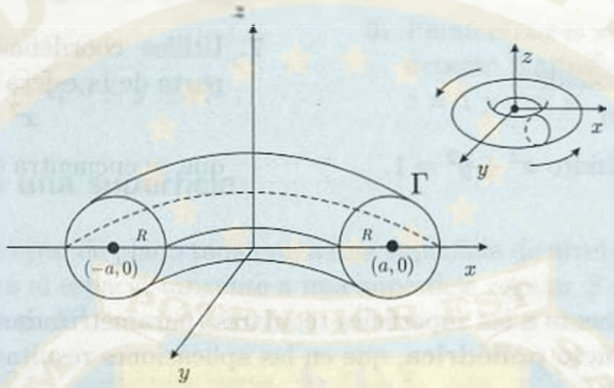


Figura 11.10. El toro de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 11.22 (Péndulo plano doble). Al considerar un sistema mecánico formado por dos péndulos planos ligados, éste está definido en el espacio de configuración formado por las parejas de ángulo (u,v), donde u y v se muestran en la figura 8.11. Tal espacio de configuración para el sistema está descrito por el conjunto

$$P = \{(u,v) \mid u, v \in [0, 2\pi]\}$$

Aquí suponemos, sin pérdida de generalidad que las longitudes de cada péndulo son unitarias (véase la figura 11.11). De la definición del problema, es claro que P puede escribirse como el producto cartesiano

$$P = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \left\{(u,v) \,\middle|\, u \in \mathbb{S}^1,\ v \in \mathbb{S}^1\right\}$$

Comparando con el ejemplo anterior, se sigue que la parametrización de este conjunto es idéntica a la del toro que está definido con las mismas coordenadas en $\mathbb{R}^3$ (véase figura 11.11).



Figura 11.11. Péndulo plano doble.

De esta forma, el espacio de configuración del movimiento de un péndulo plano doble es el toro $\mathbb{T}^2$. ▷

Ejercicios 11.1

1. Parametrice, mediante coordendas polares, la superficie acotada que se obtiene al intersecar el paraboloide
$$z - x^2 - y^2 = 0$$
con el plano $z = 9$. Verifique que es una parametrización regular.

2. Parametrice la parte del plano
$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$
que se encuentra en el primer octante.

3. Parametrice la superficie plana elíptica que se obtiene sobre el plano $z + x + y = 1$ cuando le interseca el cilindro $x^2 + z^2 = 4$.

4. Parametrice la parte del paraboloide
$$z - x^2 - y^2 = 0$$
que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

5. Parametrice la parte del paraboloide
$$z = 4 - x^2 - y^2$$
que se encuentra en el primer cuadrante
   a. Vista como la gráfica de una función $f(x, y)$.
   b. Vista como la gráfica de una función $g(y, z)$.
   c. Vista como la gráfica de una función $h(x, z)$.

6. Parametrice la parte del cilindro
$$x^2 + z^2 = 1$$
que se encuentra sobre el primer cuadrante limitada por el plano $y = 1$.

7. Utilice coordenadas esféricas para parametrizar la parte de la esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$
que se encuentra dentro del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

11.2 Superficies poliédricas

Hasta aqui, hemos considerado solamente a las superficies regulares (parametrizadas) contenidas en una región $V \subset \mathbb{R}^3$. Damos ahora la definición de **superficie poliédrica**, que en las aplicaciones resultan ser de gran utilidad.

DEFINICIÓN 11.23. Por una **superficie poliédrica** S contenida en $\mathbb{R}^n$ entendemos la unión $(+)$ de un número finito de superficies regulares
$$S_1, S_2, \ldots, S_k$$
con fronteras $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$, de tal forma que al tomar dos de ellas que están unidas: S_i y S_j, la unión $(+)$ se hace (uniendo isométricamente) en las partes de frontera común a ambas (véase la figura 11.12 a).

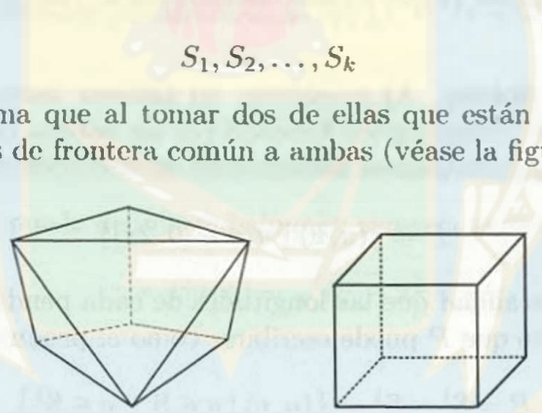


Figura 11.12. a. Superficie poliédrica. b. Superficie cúbica unitaria.

EJEMPLO 11.24. Sea S la superficie cúbica unitaria obtenida al intersecar los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ $z = 0$, $z = 1$.

$\triangleleft$ S resulta ser una superficie poliédrica pues es la unión $(+)$ de las 6 superficies regulares $S_1, S_2, \cdots, S_6$ (con frontera) definidas por

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid y = 0,\ 0 \leq x, z, \leq 1\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \mid x = 1,\ 0 \leq y, z, \leq 1\}$$
$$S_3 = \{(x, y, z) \mid y = 1,\ 0 \leq x, z, \leq 1\}$$
$$S_4 = \{(x, y, z) \mid x = 0,\ 0 \leq y, z, \leq 1\}$$
$$S_5 = \{(x, y, z) \mid z = 0,\ 0 \leq x, y, \leq 1\}$$
$$S_6 = \{(x, y, z) \mid z = 1,\ 0 \leq x, y, \leq 1\}$$

Claramente la unión se hace en las fronteras comunes. Por ejemplo, S_6 y S_1 se pegan (+) en la frontera común Γ_{16} definida por

$$\Gamma_{16} = \{(x, y, z) \mid y = 0,\ z = 1,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

La figura 11.12 b ilustra al poliedro cúbico S. ▷

Ejercicios 11.2

1. Parametrice la superficie poliédrica S obtenida cuando se interseca el paraboloide $z = x^2 + y^2$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2. Parametrice la superficie poliédrica S obtenida cuando se unen, el semi-elipsoide

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1,\ y \leq 0\right\}$$

con el cilindro

$$S_2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

3. Parametrice la superficie poliédrica S que es la superficie piramidal formada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.
4. Parametrice la superficie poliédrica S, que se encuentra en el primer octante, formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, los planos coordenados y $z = 4$.
5. Parametrice la superficie que se encuentra en el primer octante limitada por los planos $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $z = 1$ y $x = y$.

11.3 El espacio tangente a una superficie

En la sección 4.8 se introdujo el concepto de plano tangente a una superficie de nivel de una función suave. Generalizamos aquí ese concepto al definir lo que es el espacio tangente a una superficie regular S en uno de sus puntos p.

Defínase al conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$

$$T_pS = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid \text{existe una curva } \gamma : J \to S, \text{ con } \gamma(0) = p \text{ y } \dot{\gamma}(0) = \mathbf{u}\}$$

A tal conjunto se le llama **el espacio tangente** a S en p, y es el conjunto de vectores tangentes a la superficie S en el punto p.

La siguiente proposición nos muestra a T_pS como la imagen de los vectores tangentes al punto $q \in \Omega$ bajo la diferencial dr_q de la parametrización (véase la figura 11.13).

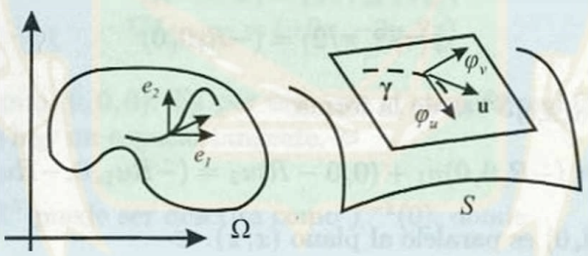


Figura 11.13. Espacio tangente T_pS a la superficie S en el punto p.

PROPOSICIÓN 11.25. *Sea $r : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización regular de la superficie S en el punto $q = r^{-1}(p) \in \Omega$, entonces*

$$T_pS = dr_q(\mathbb{R}^2)$$

◁ Sea $\mathbf{u} \in T_pS$. Entonces existe una curva $\gamma : J \to S$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{u}$. Considérese la curva $\beta = r^{-1} \circ \gamma : J \to \Omega$, entonces $\gamma = r \circ \beta$, de donde $\beta(0) = q$.

Así, se tiene entonces que para $t \in J$

$$\dot{\gamma}(t) = dr_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t))$$

De donde, si $\dot{\beta}(0) = \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, entonces existe el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $dr_q(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$, lo que demuestra la primera parte.

Considerese ahora la recta $\beta(t) = q + t\mathbf{v}$ pasando por q en $t = 0$ y tal que $\dot{\beta}(0) = \mathbf{v}$. Definase $\gamma(t) = r(\beta(t))$.

Se tiene entonces que

$$\dot{\gamma}(t) = dr_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t)) = dr_{\beta(t)}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$$

de donde $\dot{\gamma}(0) = dr_{\beta(0)}(\mathbf{v}) = dr_q(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \in T_pS$ lo que concluye la prueba. ▷

Sea S una superficie regular y sea $r : \Omega \to S$ una parametrización suave de S.
Dada una curva $\gamma : J \to S$ se tiene que existe $\beta : J \to \Omega$ tal que $\gamma(t) = r(\beta(t))$.
Si $\beta(t) = (u(t), v(t))$ y $r = r(u, v)$ se tiene entonces que

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} r(u(t), v(t)) = r_u \dot{u}(t) + r_v \dot{v}(t)$$

donde

$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u}, \; r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$

Por lo tanto, ya que γ es una curva arbitraria que genera el vector tangente $\mathbf{u} = \dot{\gamma}(0) \in T_p S$ en el punto $p = r(q)$ se tiene que las coordenadas son

$$\mathbf{u} = r_u(q)\dot{u}(0) + r_v(q)\dot{v}(0) = (\dot{u}(0), \dot{v}(0))$$

usando como base de $T_p S$ a los vectores

$$\{r_u, r_v\} = \left\{ \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \right\}$$

De esta forma, si $r : \Omega \to S$ es una parametrización regular entonces el espacio tangente en el punto $p \in S$ está generado como un 2-espacio lineal real por los vectores $\{r_u, r_v\}_q$.

EJEMPLO 11.26 (La esfera). Considérese la esfera $\mathbb{S}^2$ de dimensión 2 en $\mathbb{R}^3$. La parametrización co-geográfica es tal que

$$r(\varphi, \theta) \mapsto (R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, R\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, R\cos\theta)$$

de donde

$$r_\varphi = (-R\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, 0)$$
$$r_\theta = (R\cos\varphi\cos\theta, R\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, -R\operatorname{sen}\theta)$$

◁ Así, por ejemplo en el punto $r(\pi/2, \pi/2) = (0, R, 0)$ la base del espacio tangente $T_{(0,R,0)}\mathbb{S}^2$ está formada por los vectores

$$r_\varphi(\pi/2, \pi/2) = (0, 0, -R)$$
$$r_\theta(\pi/2, \pi/2) = (-R, 0, 0)$$

Con lo que cualquier vector $\mathbf{u} \in T_{(0,R,0)}S^2$ es de la forma

$$\mathbf{u} = (-R, 0, 0)u_1 + (0, 0 - R)u_2 = (-Ru_1, 0, -Ru_2)$$

Esto es, el plano tangente en $(0, R, 0)$ es paralelo al plano (x, z). ▷

EJEMPLO 11.27 (El hiperboloide de dos hojas). Consideremos la hoja superior L^2 del hiperboloide de dos hojas, parametrizado por las ecuaciones (11.1).

◁ Se tiene que, si $q \in \Omega$ y $p = r(q)$, entonces

$$r_\varphi = (-R\operatorname{senh}\chi \operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{senh}\chi\cos\varphi, 0)$$
$$r_\chi = (R\cosh\chi\cos\varphi, R\cosh\chi\operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{senh}\chi)$$

lo que nos dice que cada vector $\mathbf{u} \in T_p L^2$ tiene la forma

$$\begin{aligned}\xi &= a_1 (-R\operatorname{senh}\chi \operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{senh}\chi\cos\varphi, 0)\big|_q \\ &+ a_2 (R\cosh\chi\cos\varphi, R\cosh\chi\operatorname{sen}\varphi, R\operatorname{senh}\chi)\big|_q \\ &= a_1 r_\varphi(q) + a_2 r_\chi(q) \;\; \triangleright\end{aligned}$$

Ahora considérese el caso cuando la superficie puede escribirse localmente por una ecuación

$$S : f(x, y, z) = 0$$

Si $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una curva sobre la superficie S se tiene que

$$0 = f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$$

de donde

$$0 = \frac{d}{dt} f(r(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}(t)$$

Con lo que el **vector gradiente**

$$\nabla f_{\gamma(t)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\right)$$

es normal al plano tangente $T_{\gamma(t)}S$, pues el vector $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ es tangente a $\gamma(t)$ por definición.

De esta forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\dot{z}(t)\Big|_{t=0} = \nabla f_p \cdot \mathbf{u} = 0$$

define la ecuación de tal plano tangente, tomando cualquier $\mathbf{u} \in T_pS$.[1]

EJEMPLO 11.28. Consideremos un cono con vértice en el origen de coordenadas, definido en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas por la ecuación

$$z^2 - x^2 - y^2 = 0$$

◁ Entonces la función

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

define al cono por la imagen inversa de 0, es decir, $f^{-1}(0)$.

Sin embargo el gradiente de F es

$$\nabla f_{(x,y,z)} = (-2x, -2y, 2z)$$

que se anula en el punto vértice del cono $(0, 0, 0)$. Es por esto que el número real 0 no es un valor regular de f y por lo tanto en el punto $(0, 0, 0)$ del cono no hay un espacio tangente. ▷

EJEMPLO 11.29. La esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ puede ser descrita como $f^{-1}(0)$, donde

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

De esta forma, si $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$ entonces $\nabla f_p = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ con lo que si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es un vector en T_pS se tiene que

$$0 = \nabla f_p \cdot \mathbf{u} = (2x_0, 2y_0, 2z_0) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 2x_0u_1 + 2y_0u_2 + 2z_0u_3$$

Particularmente, si $p = (0, R, 0)$ entonces $\nabla F_p = (0, 2R, 0)$, de donde la ecuación normal del plano tangente a $\mathbb{S}^2$ en $(0, R, 0)$ es

$$0 = (0, 2R, 0) \cdot (u_1, u_2, u_3) = 2Ru_2$$

o en otras palabras, $v_2 \equiv 0$, que es la ecuación del plano (x, z) que ya se había obtenido anteriormente.

[1] Este hecho demuestra lo que se había mencionado en la sección 4.8: Los conjuntos de nivel (curvas o superficies) de una función suave son ortogonales al campo gradiente.

Ejercicios 11.3

1. Calcule el plano tangente a la superficie S en el punto $p \in S$, cuando,

   $S:\ \text{sen}\,(x^2+y^2+z^2)=1$ y $p=(\pi/2,0,0)$.

2. Calcule el plano tangente a la superficie S en el punto $p \in S$, cuando,

$$S:\ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{9},\ p=(1,-1,1)$$

3. Calcule el plano tangente a la superficie S en el punto $p \in S$ cuando

$$S:\begin{cases} x=3u+v^2+1 \\ y=2u+v^2-1 \\ z=-u+2v \end{cases}$$

con $p=(1,-1,0)$

11.4 Orientación

Damos en esta sección la definición de una superficie regular orientada. La idea básica de orientación es aquella que obedece a la **regla de la mano derecha** utilizada en la Mecánica, así como la orientación del plano tomada en contra de las manecillas del reloj (véase la sección 2.4). Se darán sólo algunos aspectos básicos de este concepto.

La orientación canónica del espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$ está dada por la elección de la base unitaria ordenada

$$\{e_1=i,\ e_2=j,\ e_3=k\}$$

que al formar la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

tiene determinante positivo: $|\mathbf{A}|=1$.

Esta elección de la orientación en $\mathbb{R}^3$ es justamente la regla de la mano derecha, donde los vectores mencionados satisfacen las relaciones vectoriales

$$e_1\times e_2=e_3,\ e_3\times e_1=e_2,\ e_2\times e_3=e_1$$

que, en esencia, son permutaciones cíclicas del determinante de la matriz $\mathbf{A}$ (véase la figura 11.14 a).

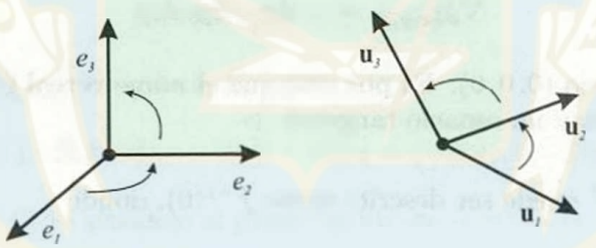


Figura 11.14. a. Sistema canónico a la derecha b. Sistema a la derecha.

En este caso diremos que el espacio $\mathbb{R}^3$ tiene una **orientación positiva a la derecha**.

En forma más general, se dirá que una base $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ ordenada, induce en $\mathbb{R}^3$ una orientación positiva a la derecha, si la matriz formada en el orden de la base

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$$

tiene determinante positivo (véase la figura 11.14 b).

De esto se desprenden necesariamente las relaciones

$$\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_3\times\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_1$$

Ya que $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ y $\{e_1,e_2,e_3\}$ son bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ induciendo la misma orientación a la derecha, existe una transformación lineal

$$L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

tal que $L(e_i) = \mathbf{u}_i$. Esto es, la matriz $\mathbf{B}$ asociada a L tiene como renglones a los vectores $\mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$$

y tiene determinante positivo: $|\mathbf{B}| > 0$.

DEFINICIÓN 11.30. Una transformación lineal

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

se dice que **preserva la orientación** a la derecha, si su matriz asociada $\mathbf{B}$ en base canónica tiene determinante positivo: $|\mathbf{B}| > 0$.

EJEMPLO 11.31. Considere la transformación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada en coordenadas cartesianas por

$$L(x, y, z) = (3x + 2y + 2z, x + 3y + z, 5x + 3y + 4)$$

Entonces L tiene asociada (en base canónica) a la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ya que $|\mathbf{B}| = 4$, se sigue que L preserva la orientación positiva a la derecha de $\mathbb{R}^3$. ▷

EJEMPLO 11.32. Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por

$$L(x, y) = (-2x + y, x + y)$$

que en base canónica tiene asociada a la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $|\mathbf{B}| = -3$, lo que implica que L cambia la orientación del plano $\mathbb{R}^2$. ▷

Pasamos ahora a la definición de superficie orientada, siguiendo la idea básica de orientación que acabamos de mencionar.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular parametrizada. Entonces, en cada $p \in S$ existe el plano tangente T_pS, el cual tiene una orientación natural al escoger la base $\{r_u, r_v\}$ inducida por una parametrización $r : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Tal orientación natural define localmente una orientación en una vecindad V_p de p en S. Esto es, en una vecindad de p podemos elegir curvas cerradas encerrando p, orientadas en contra de las manecillas del reloj. Esto, para hablar de una orientación, deberá ser preservado cuando se cambia de un sistema de cordenadas por otro. En otras palabras, la orientación deberá ser la misma cuando se cambia de un sistema de coordenadas por otro. Dicho en otras palabras, la orientación alrededor de p debiera ser la misma para una intersección de vecindades arbitrarias de p (véase figura 11.15).

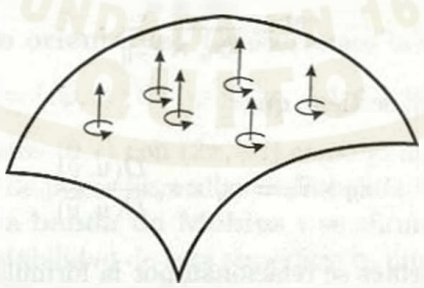


Figura 11.15. Orientación en una vecindad de un punto.

Otra forma de entender lo anterior es como sigue: *si en cada vecindad sobre cada punto se pone un reloj que orienta contra sus manecillas, en la intersección de las vecindades la orientación de los relojes en cada punto coincide.*

Si $r : \Omega \to S$ es una parametrización en las variables (u, v) alrededor del punto p, y $\widetilde{r} : \widetilde{\Omega} \to S$ es otra parametrización en las variables $(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, entonces el plano tangente T_pS está generado por las bases

$$\{r_u, r_v\} \quad \text{y} \quad \{\widetilde{r}_{\widetilde{u}}, \widetilde{r}_{\widetilde{v}}\}$$

De allí que para los vectores $\{\widetilde{r}_{\widetilde{u}}, \widetilde{r}_{\widetilde{v}}\}$ se cumplen las fórmulas

$$\widetilde{r}_{\widetilde{u}} = r_u \frac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \widetilde{u}}$$
$$\widetilde{r}_{\widetilde{v}} = r_u \frac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \widetilde{v}}$$

o equivalentemente, en forma matricial, el cambio de base es

$$\begin{pmatrix} \widetilde{r}_{\widetilde{u}} \\ \widetilde{r}_{\widetilde{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \widetilde{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial \widetilde{u}} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \widetilde{v}} & \dfrac{\partial v}{\partial \widetilde{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$$

donde $u = u(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, $v = v(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ es el cambio de coordenadas (intersección de vecindades coordenadas) alrededor de p.

Por esto es que si el jacobiano del cambio de coordenadas $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \mapsto (u, v)$

$$\frac{D(u, v)}{D(\widetilde{u}, \widetilde{v})} = \begin{vmatrix} u_{\widetilde{u}} & u_{\widetilde{v}} \\ v_{\widetilde{u}} & v_{\widetilde{v}} \end{vmatrix}$$

es positivo, entonces conserva la orientación al cambiar las bases del espacio tangente T_pS.

DEFINICIÓN 11.33. Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ se dice **orientable** si se puede cubrir con un número finito de parametrizaciones de tal forma que en cada punto p contenido en dos vecindades coordenadas, el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo. La elección de las parametrizaciones se llamará una **orientación** para S.

Si $S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regular no tiene esta propiedad, se llamará **no orientable**.

Como ejemplo de una superficie orientable se tiene a L^2 la hoja superior del hiperboloide, la cual puede coordenarse sólo con la función

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

En general, toda superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que pueda definirse globalmente como la gráfica de una función

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

es trivialmente orientable, pues sólo existe una vecindad de coordenadas para ella.

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Entonces cada punto $p \in S$ tiene un espacio tangente T_pS el cual está generado por los vectores $\{r_u, r_v\}$, siendo $r = r(u, v)$ la parametrización.

Damos una orientación al espacio tangente $T_p\mathbb{R}^3$, basándonos en la orientación de T_pS, al escoger un vector normal unitario a este plano tangente, definido por

$$N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

Si se escoge otra parametrización $\widetilde{r} = \widetilde{r}(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, se tiene que

$$\widetilde{r}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{r}_{\widetilde{v}} = r_u \times r_v \frac{D(u, v)}{D(\widetilde{u}, \widetilde{v})}$$

lo que implica que los normales correspondientes se relacionan por la fórmula

$$\widetilde{N} = \frac{\widetilde{r}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{r}_{\widetilde{v}}}{\|\widetilde{r}_{\widetilde{u}} \times \widetilde{r}_{\widetilde{v}}\|} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} \operatorname{signo}\left(\frac{D(u, v)}{D(\widetilde{u}, \widetilde{v})}\right) = \pm N \tag{11.3}$$

Así pues, en una superficie S orientable, los cambios se coordenadas no afectan la definición de un vector normal n.

DEFINICIÓN 11.34. Sea $V \subset S$ una región de la superficie regular S. Por un **campo de vectores normales unitarios** entenderemos una función

$$N : V \to \mathbb{S}^2$$

tal que a cada $p \in V$ le asocia un vector unitario $N(p)$ normal a T_pS, contenido en la esfera $\mathbb{S}^2$.

El siguiente teorema provee de una gran cantidad de ejemplos de superficies regulares que admiten una orientación.

TEOREMA 11.35. *Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo si, existe un campo normal unitario*

$$N : S \to \mathbb{S}^2$$

el cual es diferenciable en toda la superficie S.

◁ Demostramos primero la suficiencia del teorema.

Sea $n : S \to \mathbb{S}^2$ un campo normal unitario diferenciable, y considérese una familia de vecindades coordenadas que forman una cubierta de la superficie S.

Tomamos $p \in r(\Omega)$, donde $r = (u, v)$ es una parametrización local de S alrededor del punto p.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$N(p) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

pues N es continua en el conjunto conexo $r(\Omega)$.

De esta manera, si $r = r(u, v)$ y $\tilde{r} = \tilde{r}(\tilde{u}, \tilde{v})$ realizan un cambio de parámetro, ya se mostró en la relación (11.3) que los normales correspondientes satisfacen la relación

$$\tilde{N} = \pm N$$

Como se ha escogido el mismo vector $\tilde{N} = N$ en $r(\Omega) \cap r(\tilde{\Omega})$ se tiene que

$$\text{signo}\left(\frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})}\right) = 1$$

lo que nos dice que el jacobiano del cambio de coordenadas es positivo

$$\frac{D(u, v)}{D(\tilde{u}, \tilde{v})} > 0$$

Como las vecindades coordenadas son arbitrarias, se sigue que la superficie S es orientable.

La prueba de la parte necesaria se realiza al tomar el campo unitario

$$N(p) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}(p) \quad \triangleright$$

EJEMPLO 11.36. La esfera $\mathbb{S}^2$ es orientable.

◁ Ya que $\mathbb{S}^2 = F^{-1}(1)$, donde $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, defínase el campo normal

$$N(p) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{2(x, y, z)}{2\|(x, y, z)\|} = \frac{p}{\|p\|} = p$$

Claramente $N : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ es la identidad y por lo tanto el campo normal es diferenciable. Esto hace de $\mathbb{S}^2$ una superficie orientable. ▷

EJEMPLO 11.37. (Superficie en $\mathbb{R}^3$ no orientable) Consideremos la superficie $\mathbb{M}^2$ que se obtiene del rectángulo

$$\bar{\Omega} = \{(\varphi, t) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ -1 \leq t \leq 1\}$$

en el plano, identificando (pegando) los puntos $(0, t)$ con $(2\pi, -t)$ como lo muestra la figura 11.16.

Brevemente, la superficie $\mathbb{M}^2$ se obtiene de pegar las orillas de la banda $\bar{\Omega}$ torciendo una vez este conjunto.

A la superficie obtenida $\mathbb{M}^2$ se le llama la **banda de Möbius** y se afirma que es no orientable.

◁ La demostración formal de la no orientabilidad de esta superficie es un poco complicada, pero para dar una idea de este hecho, tomamos el círculo central Γ en $\mathbb{M}^2$ dado por los puntos con coordenadas $(\varphi, 0)$ y escogemos un punto $p \in \Gamma$.

Tomemos el vector normal $N = N(p)$ y lo deslizamos a lo largo de Γ, esto es, construimos un campo normal en Γ iniciando en $N(p)$. Es fácil darse cuenta que cuando se cierra el circuito Γ el vector normal de retorno a p es $-N(p)$.

De esta forma, en algún lugar de Γ, durante un cambio de coordenadas debió haber cambiado el signo del jacobiano del cambio de coordenadas. ▷

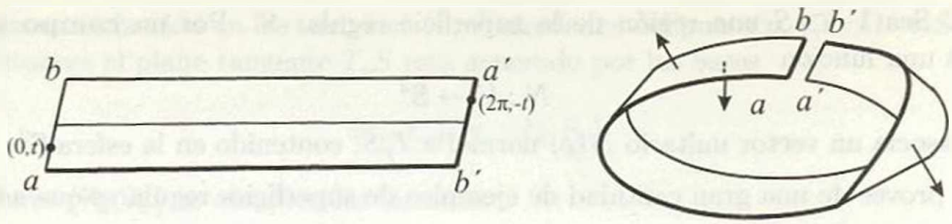


Figura 11.16. Banda de Möbius.

A continuación, mostramos en un sentido práctico la forma de orientar una superficie a través de un campo normal unitario, y mediante su frontera si es que tiene.

Sea S una superficie orientable, con un campo unitario normal $N : S \to \mathbb{S}^2$. Si $p \in S$ es un punto arbitrario, al tomar una vecindad pequeña V_p de p en S con frontera γ_p, damos la orientación local de S alrededor de p por el vector normal y la frontera γ_p orientada según la regla de la mano derecha (véase la figura 11.17).

Para orientar la frontera Γ de una superficie S, escogemos puntos $p \in S$ próximos de la frontera y vecindades V_p tal que la frontera γ_p de la vecindad y la frontera Γ de S tengan puntos comunes. Después orientamos Γ mediante el normal $N(p)$ y la curva γ_p siguiendo la regla de la mano derecha (véase la figura 11.17).

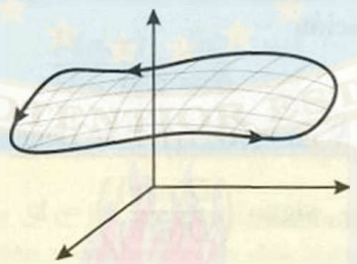


Figura 11.17. Orientación de una superficie con frontera.

Este método de orientar prácticamente a una superficie nos conduce a orientar a aquellas superficies que se componen de la unión de un número finito de superficies suaves (superficies suaves por pedazos): las superficies poliédricas.

Sea $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ una superficie poliédrica que es la unión $(+)$ de las superficies $S_1, \ldots, S_n$ orientadas por sus fronteras $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$, y donde la coincidencia de las superficies adyacentes S_i, S_j es a lo largo de un segmento de frontera común $\Gamma_i \cap \Gamma_j$. Damos la orientación a S a través de las orientaciones $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ entendiendo que para los segmentos de coincidencia de fronteras, las direcciones son opuestas y se anulan entre sí (véase la figura 11.18).

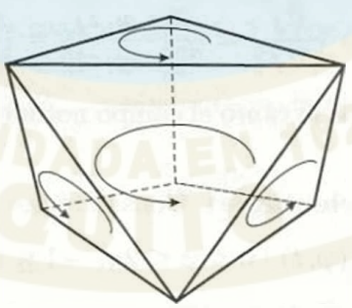


Figura 11.18. Orientación de una superficie poliédrica.

Por ejemplo, un cubo S está formado por la unión de las seis superficies regulares $S_1, S_2, \ldots, S_6$, donde cada S_i es un rectángulo regular, y la intersección de los rectangulos adyacentes es en apenas segmentos de sus fronteras (las aristas o lados del cubo).

Si $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$ son las fronteras orientadas respectivas de $S_1, S_2, \ldots, S_6$, entonces estas orientan a S como lo muestra la figura 11.18.

Ejercicios 11.4

Dé una orientación a las caras de las superficies poliédricas que se dan a continuación.

1. S es la superficie que está formada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$, los planos coordenados y el plano $z = 4$.
2. S es la unión del semi-elipsoide

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 1,\ y \leq 0\right\}$$

con el cilindro

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$$

3. S es la intersección del paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

11.5 Formas diferenciales

Considere un sistema de coordenadas en el plano (u, v) en el cual también se considera una orientación a la derecha. La pregunta obligada es en este momento acerca de la relación que existe entre las expresiones

$$du\,dv \quad \text{y} \quad dv\,du$$

cuando se considera tal orientación en la región dada del plano.

◁ Para la primera expresión, la base ordenada es $\{e_1, e_2\}$, mientras que para la segunda es $\{e_2, e_1\}$.

Si se considera que la transformación lineal que cambia las bases es

$$(u, v) \mapsto (v, u)$$

cuya matriz asociada es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\frac{D(v, u)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} v_u & v_v \\ u_u & u_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

lo que nos lleva a la fórmula

$$dv\,du = \frac{D(v, u)}{D(u, v)}\,du\,dv = -du\,dv$$

Esto es, considerando orientación se tiene que

$$du\,dv = -dv\,du \ \triangleright$$

Análogamente se puede comprobar que, considerando una orientación, se cumple la fórmula

$$du\,du = dv\,dv = 0$$

◁ De hecho, al considerar la transformación lineal

$$(u, v) \mapsto (u, u)$$

se tiene que

$$\frac{D(u, u)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} u_u & u_v \\ u_u & u_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

de donde

$$du\,du = \frac{D(u, u)}{D(u, v)}\,du\,dv = 0\,du\,dv = 0 \ \triangleright$$

No es difícil mostrar que en una región orientada del espacio $\mathbb{R}^3$ se cumplen las igualdades

$$dx\,dy\,dz = \quad dz\,dx\,dy = \quad dy\,dz\,dx$$
$$dx\,dy\,dz = -dy\,dx\,dz = -dx\,dz\,dy$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

◁ Por ejemplo,

$$dz\,dx\,dy = \frac{D(z,x,y)}{D(x,y,z)}\,dx\,dy\,dz = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} dx\,dy\,dz = dx\,dy\,dz$$

la demostración de las otras igualdades son dejadas como un ejercicio al lector. ▷

Hacemos hincapié que en la literatura clásica más avanzada, el considerar orientación para las **formas diferenciales**[2] se escribe distinguidamente por el operador $\wedge$ el cual distingue a una **forma diferencial ordinaria**[3] de una forma diferencial con una orientación provista al espacio ambiente. Por ejemplo,

$$du \wedge dv = -dv \wedge du$$
$$du \wedge du = 0$$

Ejercicios 11.5

1. Demuestre que en una orientación a la derecha de $\mathbb{R}^3$ se cumplen las fórmulas
   - **a.** $dx \wedge dy \wedge dz = -dy \wedge dx \wedge dz$
   - **b.** $dx \wedge dy \wedge dz = -dx \wedge dz \wedge dy$.

11.6 Áreas de regiones sobre superficies regulares

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $r : \Omega \to S$ parametrización de una cierta región $R \subset S$. Dado un punto $p \in R$ y $q \in \Omega$ tal que $r(q) = p$, se tiene que $\{r_u(q),\, r_v(q)\}$ generan al plano tangente T_pS. Si se considera dA un infinitésimo del área de R alrededor del punto p, se tiene que

$$dA = \|r_u\,du \times r_v\,dv\|$$

con lo que, hasta un infinitésimo (véase la figura 11.19), en cualquier punto $p \in R$ se cumple que

$$dA = \|r_u \times r_v\|\,du\,dv$$

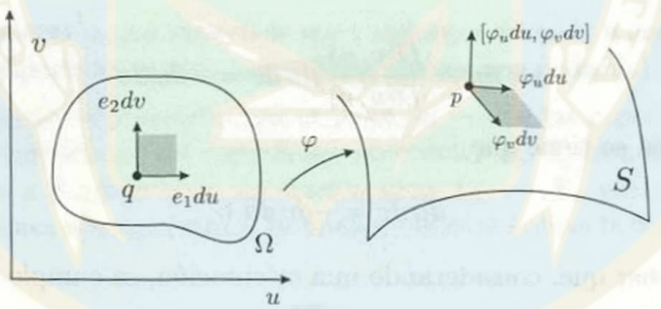


Figura 11.19. Área de una superficie regular.

De esta manera, para calcular el área de la región R es necesario realizar la integral de esta expresión sobre todo el dominio, es decir,

$$\text{Área}(R) = \int_\Omega dA = \int_\Omega \|r_u \times r_v\|\,du\,dv$$

Se define el **área de la región** R como la última integral.

EJEMPLO 11.38 (Área del toro). Considérese la parametrización del toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$, dada por $r : \Omega \to \mathbb{R}^3$, y definida por las coordenadas

$$r(u,v) = ((a + R\cos u)\cos v, (a + R\cos u)\operatorname{sen} v, R\operatorname{sen} u)$$

donde el dominio de parametrización es $\Omega = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

Claramente r parametriza al toro menos un meridiano y un paralelo, conjunto cuya área es nula.

[2] En la literatura ordinaria también son conocidas como **tensores antisimétricos** (véase Dubrovine et al. [5] para mayor información).
[3] También son conocidas como **tensores simétricos** (véase nuevamente Dubrovine et al. [5] para más información).

Para $\varepsilon > 0$ considere al conjunto

$$\Omega_\varepsilon = (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \times (\varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \subset \Omega$$

Calculamos el área de $r(\Omega_\varepsilon)$, y después, calculamos el límite cuando $\varepsilon \to 0$ para obtener el área del toro. Esto es, considere

$$\int_{\Omega_\varepsilon} R\,(a + R\cos u)\,du\,dv = \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} R\,(a + R\cos u)\,du\,dv$$

Por el Teorema de Fubini 8.13, se tiene que la última integral doble es igual a

$$\int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} dv \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} R\,(a + R\cos u)\,du = (2\pi - 2\varepsilon)\,R\,(2\pi - 2a\varepsilon + R\,(\operatorname{sen}(2\pi - \varepsilon) - \operatorname{sen}\varepsilon))$$

Ya que sólo un meridiano y un paralelo no son cubiertos por la parametrización y este conjunto tiene área cero en el toro, se sigue que el área de $\mathbb{T}^2$ es

$$\begin{aligned}
\text{Área}\,(\mathbb{T}^2) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} R\,(a + R\cos u)\,du\,dv \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} (2\pi - 2\varepsilon) R\,(2\pi a - 2a\varepsilon + R\,(\operatorname{sen}(2\pi - \varepsilon) - \operatorname{sen}\varepsilon)) \\
&= 4\pi^2 aR \quad \triangleright
\end{aligned}$$

EJEMPLO 11.39 (Área de la esfera $\mathbb{S}^2$). Para calcular el área de la esfera $\mathbb{S}^2$, utilizamos la parametrización por coordenadas co-geográficas. Debido a que la parametrización dada omite apenas el polo norte y el polo sur, entonces el área buscada es

$$\begin{aligned}
\text{Área}\,(\mathbb{S}^2) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sqrt{R^4 \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = 4\pi R^2 \quad \triangleright
\end{aligned}$$

Ejercicios 11.6

Calcule el área de las siguientes superficies.

1. La parte del cono $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ que se encuentra dentro del cilindro $z^2 = 4y$.
2. La parte del cilindro parabólico $z^2 = 4x$ recortada por el plano $x = 1$ y el cilindro $y^2 = 4x$.
3. La parte de la esfera
$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 5$, fuera del cilindro.
4. La parte del cono $y^2 + z^2 = x^2$ recortada por el cilindro hiperbolico $x^2 - y^2 = 4$ y por los planos $y = \pm 2$.

11.7 Campos escalares y vectoriales en superficies

En este capítulo definimos los conceptos de campos escalares y vectoriales sobre superficies, haciendo referencia a los conceptos ya mencionados en el capítulo 9. Estos objetos serán utilizados en el siguiente capítulo para resolver problemas asociados con la Mecánica, la Ingeniería y la Física.

DEFINICIÓN 11.40. Sea $f : V \subset S \to \mathbb{R}^n$, $V \subset S$ una función definida en un subconjunto abierto de la superficie S. La función f se dice **diferenciable** en el punto $p \in V$ si para alguna parametrización de la superficie $r : \Omega \to S$ con $r(\Omega) \subset V$ la composición dada por

$$f \circ r : \Omega \to \mathbb{R}$$

es diferenciable en el punto $q = r^{-1}(p)$.

Se dice simplemente que la función f es diferenciable si lo es que en cada punto de $V \subset S$.

No es difícil mostrar que la definición de diferenciabilidad dada en 11.40 no depende de la parametrización escogida y omitimos la demostración (véase Palmas y Reyes [8]).

Acorde a lo que ya señalamos , la diferenciabilidad de la función queda en términos de las coordenadas de la parametrización de la superficie, omitiendo las variables del espacio ambiente.

EJEMPLO 11.41 (Proyección estereográfica de $\mathbb{S}^2$). Sea $\mathbb{S}^2$ la esfera unitaria con centro en el origen en $\mathbb{R}^3$, y tómese la parametrización de $\mathbb{S}^2$ por coordenadas co-geográficas (φ, θ).

Definimos, para cada punto $(\varphi, \theta) \in \mathbb{S}^2$ un punto en el plano con coordenadas polares (r, φ) de la siguiente forma.

Considérese la recta que pasa por los puntos $P_N = (0, 0, 1)$ y (φ, θ). Sea (r, φ) el punto de intersección de tal recta con el plano $z = 0$ con coordenadas (r, φ). De la figura 11.20 se tiene que

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{r} \quad \text{o} \quad r = \cot \frac{\theta}{2}$$

De donde, se puede definir una función $P : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$(\varphi, \theta) \to \left(\cot \frac{\theta}{2}, \varphi \right) = (r, \varphi)$$

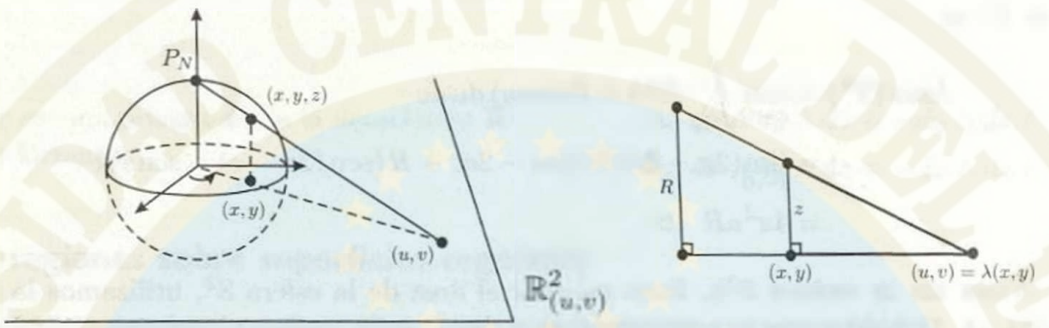


Figura 11.20. Proyección estereográfica de S^2.

Ya que la parametrización co-geográfica es suave, entonces la función P es diferenciable. P se llama la **proyección estereográfica** de la esfera $\mathbb{S}^2$ en el plano $\mathbb{R}^2$. Claramente P tiene una función inversa local definida por $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$, definida por

$$(r, \varphi) \to (\varphi, 2 \operatorname{arccot} r) = (\varphi, \theta)$$

y es tal que la preimagen del polo norte $P_N = (0, 0, 1)$ corresponde al punto al infinito en $\mathbb{R}^2$. ▷

EJEMPLO 11.42 (Proyección estereográfica de L^2). Considérese el hiperboloide de dos hojas en $\mathbb{R}^3$, definido por la ecuación en coordenadas cartesianas

$$R^2 = z^2 - y^2 - x^2$$

Al punto $P_N = (0, 0, R)$ le llamaremos el **polo norte** del hiperboloide (y está contenido en L^2), a $P_S = (0, 0, -R)$ le llamaremos el **polo sur**.

Hacemos al **proyección estereográfica** de la hoja L^2 en el plano $\mathbb{R}^2_{(u,v)}$ de la siguiente forma.

Considere un punto $P = (x, y, z) \in L^2$ y la línea recta que lo une con el polo sur P_S. Sea q el punto de intersección de tal recta con el plano horizontal. Si las coordenadas del punto q son (u, v) en tal plano, entonces, de la figura 11.21 se siguen las relaciones de equivalencia de los triángulos congruentes allí señalados:

Despejando u y v, tenemos la proyección estereográfica de L^2, dada en ecuaciones

$$P : \begin{cases} u = \dfrac{xz}{z + R} \\ v = \dfrac{yz}{z + R} \end{cases}$$

No es difícil ver que tal proyección $P : L^2 \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva y diferenciable. Utilizando el hecho de que

$$R^2 = z^2 - x^2 - y^2$$

también un cálculo prueba que la relación inversa $P^{-1} : \mathbb{R}^2 \to L^2$ está dada por

$$\begin{cases} x = \dfrac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2} \\ y = \dfrac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2} \\ z = -R \left(1 + \dfrac{2R^2}{u^2 + v^2 - R^2} \right) \end{cases}$$

la cual está definida en el interior del disco

$$D^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 < R^2\}$$

Esto es, la proyección estereográfica de L^2 desde el polo sur al plano horizontal tiene como imagen al disco D^2. La frontera de tal disco corresponde al infinito de L^2.

$$\frac{z+R}{z} = \frac{x}{u}, \quad \frac{z+R}{z} = \frac{y}{v}$$

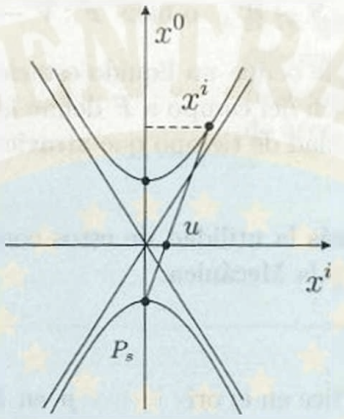


Figura 11.21. Proyección estereográfica de L^2.

Ya que todas las funciones que intervienen en la definición de P (a través de las coordenadas) son diferenciables, de igual forma que para P^{-1}, se sigue que P y P^{-1} son funciones diferenciables. ▷

EJEMPLO 11.43. Sea $f : V \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable, $V \subset \mathbb{R}^3$ abierto, y suponga que $S \subset V$. Entonces la restricción de f a S

$$f|_S : S \to \mathbb{R}^n$$

es una función diferenciable, lo cual se sigue directamente de la definición.

Del Ejemplo 11.43 se sigue que cualquier función suave definida en una región $V \subset \mathbb{R}^3$ con valores en $\mathbb{R}^n$

$$f : V \to \mathbb{R}^n$$

restringida a una superficie $S \subset V$, induce una función suave de la superficie

$$f|_S : S \to \mathbb{R}^n$$

lo cual nos ayuda a dar la siguiente definición.

DEFINICIÓN 11.44. Por un **campo escalar** suave en la superficie regular S contenida en la región V del espacio $\mathbb{R}^3$, entendemos la restricción de un campo f definido suavemente en la región V

$$f : V \to \mathbb{R}$$

Sin pérdida de generalidad, escribimos para el campo en S por la misma notación

$$f : S \to \mathbb{R}$$

EJEMPLO 11.45. Consideremos un campo suave de densidades puntuales en una región $V \subset \mathbb{R}^3$, que inducen el campo de densidades suave en la superficie $S \subset V$.

$$\delta : S \to \mathbb{R}$$

Este campo δ define la **masa superficial** de S. El cálculo de ésta será objeto de estudio del próximo capítulo.

EJEMPLO 11.46. El campo de temperaturas T definido en una región $V \subset \mathbb{R}^3$ induce en la superficie $S \subset V$ un campo de temperaturas

$$T : S \to \mathbb{R}$$

Observamos que un campo escalar en una superficie está definido independientemente de un sistema de coordenadas.

De igual forma, para una superficie regular S contenida en una región V de $\mathbb{R}^3$ definimos el concepto de campo vectorial suave, como la restricción de un campo suave actuando en V.

DEFINICIÓN 11.47. Sea S una superficie regular contenida en la región V del espacio $\mathbb{R}^3$. Por un **campo vectorial** suave F, actuando en S, entendemos la restricción a S de un campo vectorial (denotado igualmente por) F actuando en V

$$F : S \to \mathbb{R}^3, \quad \text{o bien} \quad F : V \to \mathbb{R}^3$$

EJEMPLO 11.48. Si $V \subset \mathbb{R}^3$ es la región que ocupa un líquido estacionario que fluye según su campo de velocidades F, para la superficie regular $S \subset V$ la restricción del campo a F define la cantidad de líquido que atraviesa por S.

El cálculo de la cantidad de líquido por unidad de tiempo que atraviesa la superficie es objeto de estudio también del próximo capítulo.

En el próximo capítulo mostraremos además la utilidad de estos conceptos: **campos escalares y vectoriales**, en problemas asociados a la Ingeniería, la Física y la Mecánica.

Ejercicios 11.7

1. Demuestre que el cono completo, C, vértice en el origen dado por la ecuación
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$
no es una superficie topológica. Si sólo consideramos los puntos $(x, y, z) \in C$ tales que $z \geq 0$, determine dos parametrizaciones distintas de este conjunto.

2. Dé las parametrizaciones explícitas (U, φ) de las siguientes superficies y determine los dominios de diferenciabilidad.
   a. El elipsoide
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
   mediante coordenadas esféricas.
   b. El paraboloide hiperbólico
   $$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$
   con coordenadas cartesianas.
   c. El paraboloide elíptico
   $$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$
   con coordenadas cartesianas.
   d. El cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, como superficie de revolución.
   e. El paraboloide elíptico del inciso (c), como superficie de revolución.
   f. El cono del inciso (d), con coordenadas cilíndricas.
   g. El paraboloide $z = x^2 + y^2$, con coordenadas cilíndricas.

3. Para cada superficie S del ejercicio anterior, elija un punto arbitrario $p \in S$ y determine una vecindad de p en S que se vea como la gráfica de una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

4. ¿Cuál es el número mínimo de parametrizaciones necesarias para cubrir un toro? (Sugerencia: El dominio de una parametrización puede tener "hoyos".)

5. Sea $\mathbb{S}^2$ la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$. Un **círculo máximo** en $\mathbb{S}^2$ es la intersección de esta superficie con un plano que contiene al origen de $\mathbb{R}^3$. Muestre que la curva
$$\alpha(s) = \cos s(0, -b, a) + \operatorname{sen} s(1, 0, 0)$$
donde $a^2 + b^2 = 1$ y $s \in [0, 2\pi]$, es un círculo máximo en $\mathbb{S}^2$.

6. Halle las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie S en el punto dado.
   a. El paraboloide hiperbólico dado por
   $$\varphi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$$
   en el punto $(u, v) = (1, 1)$.
   b. El helicoide dado por
   $$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, u)$$
   en el punto $(u, v) = (\pi/2, 1)$.
   c. La superficie de Enneper, dada por
   $$\varphi(u, v) = \left(u - \frac{3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right)$$
   en el punto $(u, v) = (-1, 1)$.
   d. El elipsoide $F^{-1}(0)$, donde
   $$F(x, y, z) = 3x^2 + 6y^2 + 3z - 12$$
   en el punto $(1, 1, 1)$.

e. El hiperboloide $F^{-1}(0)$, donde

$$F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 + 1$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

7. Calcule el área del cilindro

$$x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 3$$

8. Una superficie es **compacta** si es un conjunto cerrado y acotado. ¿Cuáles de las siguientes superficies son compactas?

a. $x^2 + y^2 z^2 = 1$.

b. $x^2 + y^4 + z^4 = 1$.

c. $x^2 - y^4 + z^6 = 1$.

d. $x^2 - 3x + y^2 + z^4 = 1$.

9. Considere la parametrización del toro de dimensión dos dada por las ecuaciones (11.2). Demuestre que esta transformación no preserva la longitud de las curvas.

10. Un difeomorfismo $f : S \to S$ preserva el área si y sólo si para toda región $R \subset S$ se cumple que el área de R es igual al área de su imagen. Demuestre que un difeomorfismo conforme que preserva área es necesariamente una **isometría**, es decir, preserva la longitud de arco.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Capítulo

12 Integrales de superficie

Damos en este capítulo los resultados básicos y las aplicaciones inmediatas de la integración de los campos vectoriales y los campos escalares que actúan sobre una superficie orientable con frontera.

12.1 Integral de superficie de primer género

En esta sección introducimos el concepto de integral de superficie de primer género, la cual está definida para campos escalares actuando en una región Ω que contiene a la superficie.

EJEMPLO 12.1 (Masa superficial). Supongamos que en la región $V \subset \mathbb{R}^3$ está definido el campo escalar de densidad puntual δ, y que la superficie S está contenida en la región V.

$\lhd$ Al tomar un punto $p \in S$ y un infinitésimo del área vecina de p denotada por dA, se tiene que la masa superficial infinitesimal dm se calcula por

$$dm = \delta(p)\, dA$$

en virtud de que para una densidad uniforme constante δ en la superficie S, es válida la igualdad

$$\delta = \frac{\text{masa superficial}}{\text{área}} = \frac{m}{A}$$

Por esto, para calcular la masa superficial m de $S \subset V$ es necesario realizar la suma infinitesimal de las masas infinitesimales dm a lo largo de toda la superficie S, véase la figura 12.1.

$$m = \int_S dm = \int_S \delta(p)\, dA$$

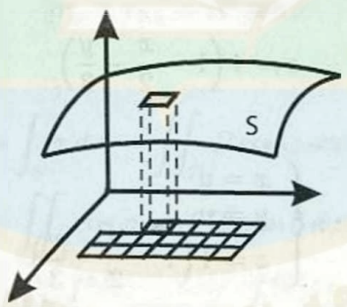


Figura 12.1. Área y masa infinitesimales.

Si $r : \Omega \to S$ es una parametrización de la superficie S en las coordenadas cartesianas de V

$$r(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))$$

entonces la masa de la superficie S bajo el campo escalar de densidades δ se escribe

$$m = \int_S \delta(p)\, dA = \iint_\Omega \delta(r(u,v)) \|[r_u, r_v]\|\, du\, dv$$

$$= \iint_\Omega \delta(r(u,v)) \sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\, du\, dv$$

pues $dA = \|r_u \times r_v\|\, du\, dv$ según se estableció en la sección 11.6.

Por otro lado, ya que

$$\|r_u \times r_v\|^2 = \left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2$$

se sigue la última igualdad para la mencionada cadena de igualdades. La primera integral y la última de tal cadena definen a una integral de primer género sobre una superficie. ▷

Tomemos ahora en general un campo escalar suave f actuando en la región $V \subset \mathbb{R}^3$, donde se encuentra la superficie regular S.

Para la parametrización $r : \Omega \to S$ de la superficie en las coordenadas cartesianas de $V \subset \mathbb{R}^3$,

$$r(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))$$

tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 12.2. Se define la **integral de primer género** del campo escalar f a lo largo de la superficie S como la cantidad

$$\int_S f(x,y,z)\, dA, \quad \text{con} \quad (x,y,z) \in S$$

que bajo la parametrización de S en coordenadas $(u,v) \in \Omega$ se calcula por

$$\int_S f(x,y,z)\, dA = \iint_\Omega f(r(u,v))\, \|r_u \times r_v\|\, du\, dv$$

EJEMPLO 12.3. Consideremos el campo escalar actuando en $\mathbb{R}^3$, dado por

$$f(x,y,z) = z + 2x + \frac{4y}{3}$$

Calcule

$$\int_S f(x,y,z)\, dA$$

donde S es la parte del plano $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$ que queda en el primer octante de $\mathbb{R}^3$.

◁ De la ecuación que define a S se tiene que

$$z = 4\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)$$

lo que define la parametrización de S por

$$r : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4\left(1 - \dfrac{u}{2} - \dfrac{v}{3}\right) \end{cases}$$

donde la región Ω está dada por

$$\Omega = \left\{(u,v) \,\middle|\, 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 3\left(1 - \frac{u}{2}\right)\right\}$$

De esta manera,

$$r(u,v) = \left(u, v, 4\left[1 - \frac{u}{2} - \frac{v}{3}\right]\right), \quad \text{con} \quad (u,v) \in \Omega$$

lo que implica que

$$r_u = (1, 0, -2) \ \text{ y } \ r_v = \left(0, 1, -\frac{4}{3}\right)$$

Por lo tanto

$$\|r_u \times r_v\| = \left\|\left(2, \frac{4}{3}, 1\right)\right\| = \frac{\sqrt{61}}{3}$$

De esta forma, de la definición se tiene que

$$\begin{aligned}\int_S \left(z + 2x + \frac{4y}{3}\right) dA &= \iint_\Omega \left(4\left[1 - \frac{u}{2} - \frac{v}{3}\right] + 2u + \frac{4v}{3}\right) \|r_u \times r_v\| \, du\, dv \\ &= \int_0^2 du \int_0^{3\left(1-\frac{u}{2}\right)} 4\frac{\sqrt{61}}{3}\, dv = \frac{4}{3}\sqrt{61} \int_0^2 3\left(1 - \frac{u}{2}\right) du \\ &= 4\sqrt{61} \ \triangleright\end{aligned}$$

EJEMPLO 12.4. Sea el campo escalar $f(x, y, z) = x$ actuando en $\mathbb{R}^3$. Calcule

$$\int_S f(x, y, z)\, dA$$

donde S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ situada en el primer octante.

$\triangleleft$ De inicio, damos una parametrización para S por coordenadas esféricas

$$r(\varphi, \theta) = (R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, R\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, R\cos\theta)$$

donde

$$\Omega = \left\{(\varphi, \theta) \,\middle|\, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} r_\varphi &= (-R\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, R\cos\varphi \operatorname{sen}\theta, 0) \\ r_\theta &= (R\cos\varphi\cos\theta, R\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, -R\operatorname{sen}\theta)\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} r_\varphi \times r_\theta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & R\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & 0 \\ R\cos\varphi\cos\theta & R\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & -R\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} \\ &= \left(-R^2\cos\varphi\operatorname{sin}^2\theta, -R^2\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sin}^2\theta, -R^2\operatorname{sin}\theta\cos\theta\right)\end{aligned}$$

lo que nos dice que

$$\|r_\varphi \times r_\theta\| = R^2\operatorname{sen}\theta$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_S f(x, y, z)\, dA = \int_S x\, dA &= \iint_\Omega R\cos\varphi\operatorname{sen}\theta \, \|r_\varphi \times r_\theta\| \, d\varphi\, d\theta \\ &= \iint_\Omega \cos\varphi\operatorname{sen}\theta R^2\operatorname{sen}\theta\, d\varphi\, d\theta \\ &= R^3 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sin}^2\theta\, d\theta = \frac{\pi R^3}{4}\end{aligned}$$

Mencionamos que en la cuarta igualdad se ha utilizado, para simplificar, el **teorema de Fubini** 8.13. $\triangleright$

EJEMPLO 12.5. Consideremos el campo escalar suave definido en $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ definido por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Calcule

$$\int_S f(x, y, z)\, dA$$

donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ limitado por los planos $z = 0$ y $z = 1$

◁ Al parametrizar la superficie S por coordenadas cilíndricas se tiene

$$r : \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\operatorname{sen}\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{con } (\varphi, z) \in \Omega$$

donde $\Omega = \{(\varphi, z) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

De esta manera

$$\begin{aligned} r(\varphi, z) &= (R\cos\varphi, R\operatorname{sen}\varphi, z) \\ r_\varphi &= (-R\operatorname{sen}\varphi, R\cos\varphi, 0) \\ r_z &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$r_\varphi \times r_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R\operatorname{sen}\varphi & R\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\cos\varphi, R\operatorname{sen}\varphi, 0)$$

y por lo tanto que $\|r_\varphi \times r_z\| = R$.

Consecuentemente

$$\begin{aligned} \int_S f(x,y,z)\,dA &= \int_S \frac{dA}{x^2+y^2+x^2} = \iint_\Omega \frac{\|r_\varphi \times r_z\|}{R^2+z^2}\,d\varphi\,dz \\ &= \iint_\Omega \frac{R}{R^2+z^2}\,d\varphi\,dz = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{dz}{R^2+z^2} \\ &= 2\pi \arctan\left(\frac{1}{R}\right) \triangleright \end{aligned}$$

Ejercicios 12.1

1. Calcule la masa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, si la densidad puntual $\delta(x, y, z)$ en cada punto es la distancia que hay entre este punto y un diámetro fijo de la esfera.

2. Halle la masa de la superficie del cubo unitario si la densidad puntual es $\delta(x, y, z) = xyz$.

Calcule las integrales de superficie de primer género de los ejercicios 3–6.

3. $\displaystyle\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$ donde S es la parte del plano $x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{4} = 1$ en el primer octante.

4. $\displaystyle\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$ donde S es la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $0 \leq z \leq 4$.

5. $\displaystyle\iint_S x\,dS$ donde S es la parte de la superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

6. $\displaystyle\int\int_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donde S es la parte del hiperboloide $z = xy$ recortada por $x^2 + y^2 = 4$.

12.2 Integral de superficie de segundo género

En esta sección damos la definición de la **integral de segundo género** a lo largo de una superficie orientada S de un campo vectorial suave F actuando en una región $V \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a la superficie regular S.

Antes de iniciar con la discusión de esta sección introducimos el concepto de integración de una función sobre una región orientada.

Sea $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$ una región orientada por su frontera Γ^+, como se ha mencionado en la sección 11.1. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función real suave definida en Ω, definimos la **integral orientada** de F sobre Ω^+ como

$$\iint_{\Omega^+} f(u,v)\,du\,dv = \iint_\Omega f(u,v)\,du\,dv = -\iint_{\Omega^-} f(u,v)\,du\,dv$$

Notamos que la definición no depende del cambio de coordenadas, pues si $\widetilde{\Omega}^+$ es otra región orientada y existe una biyección diferenciable $\widetilde{\Omega}^+ \to \Omega$ dada en coordenadas

$$\begin{cases} u = u(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \\ v = v(\widetilde{u}, \widetilde{v}) \end{cases} \quad \text{con } (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in \widetilde{\Omega}$$

por el teorema de cambio de variables 8.28, se tiene que

$$\iint_{\Omega^+} F(u,v)\,du\,dv = \iint_{\widetilde{\Omega}^+} F(u(\widetilde{u},\widetilde{v}), v(\widetilde{u},\widetilde{v})) \left|\frac{D(u,v)}{D(\widetilde{u},\widetilde{v})}\right| d\widetilde{u}\,d\widetilde{v}$$

Por lo tanto, si

$$\frac{D(u,v)}{D(\widetilde{u},\widetilde{v})} > 0$$

entonces se conserva la orientación al aplicar $\widetilde{\Omega}^+$ en $\widetilde{\Omega}$, lo que prueba nuestra afirmación sobre la independencia de la definición de la integral orientada.

Iniciamos nuestra discusión con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 12.6 (flujo de velocidades de un líquido). Supongamos que en la región $V \subset \mathbb{R}^3$ se mantiene en movimiento un líquido cuyo campo de velocidades puntuales denotamos por $F = F(p)$, donde $p \in V$.

Para la superficie orientada $S^+ \subset V$ nos interesa conocer la cantidad de líquido que atraviesa por ella en una unidad de tiempo.

◁ Sea $p \in S$ un punto arbitrario en V donde el vector velocidad del líquido es $F(p)$. Entonces, hasta un infinitésimo del área vecina dA en el punto p, la cantidad de líquido pasando en una unidad de tiempo es igual al volumen del paralelepípedo tendido sobre el área vecina considerada (véase la figura 12.2).

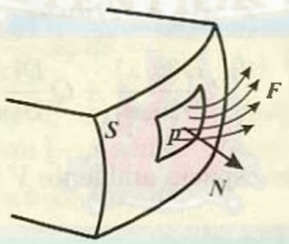


Figura 12.2. Flujo infinitesimal del líquido estacionario.

Pero tal volumen infinitesimal dI se calcula en forma básica multiplicando el área de la base dA del paralelepípedo infinitesimal, por su altura.

Por otro lado, la altura mencionada no es otra cosa que la proyección del vector $F(p)$ en el normal unitario $N(p)$ que orienta a S en el punto p, y tal proyección se calcula por el producto escalar

$$F(p) \cdot N(p)$$

De esta manera, el volumen infinitesimal buscado es

$$dI = F(p) \cdot N(p)\,dA$$

Por lo tanto, la cantidad de líquido I atravesando por la superficie orientada $S^+ \subset V$ en una unidad de tiempo se obtiene realizando la suma infinitesimal de los infinitésimos dI

$$I = \int_{S^+} dI = \int_S F(p) \cdot N(p)\,dA = \int_{S^+} F(p) \cdot \vec{dA}$$

donde se ha definido la diferencial vectorial del área $\vec{dA}$ como el vector

$$\vec{dA} = N(p)\,dA$$

En la última cadena de igualdades, la segunda y tercera integrales definen la **integral de segundo género** del campo X a lo largo de la superficie S :

$$\int_{S^+} F(p) \cdot n(p)\,dA$$

Si se parametriza a la superficie S mediante la aplicación

$$r : \Omega \to S$$

al escoger el normal unitario

$$N(p) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

se tiene que $dA = \|r_u \times r_v\|\, du\, dv$, lo que implicaría que

$$\begin{aligned}\int_{S^+} F(p)\cdot N(p)\, dA &= \iint_{\Omega^+} F(r(u,v))\cdot (r_u \times r_v\, du\, dv)\\ &= \iint_{\Omega^+} F(r(u,v))\cdot (r_u \times r_v)\, du\, dv\\ &= \iint_{\Omega^+} (F, r_u, r_v)\, du\, dv\end{aligned}$$

donde $(*,*,*)$ es el triple producto escalar.

Por otro lado, en la sección 11.1 se calculó que

$$r_u \times r_v = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, -\frac{D(x,z)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$$

de donde, si en coordenadas el campo F se escribe como $X = (P, Q, R)$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\int_{S^+} F(p)\cdot N(p)\, dA &= \iint_{\Omega^+} F\cdot (r_u \times r_v)\, du\, dv\\ &= \iint_{\Omega^+} \left(P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right) du\, dv\end{aligned}$$

Finalmente, usando las coordenadas (x, y, z) del espacio ambiente V y las igualdades

$$\begin{aligned}\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\, du\, dv &= dy\, dz\\ \frac{D(x,z)}{D(u,v)}\, du\, dv &= dz\, dx\\ \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\, du\, dv &= dx\, dy\end{aligned}$$

podemos escribir sobre la superficie orientada S^+ tal cantidad como

$$\begin{aligned}I &= \int_{S^+} F(p)\cdot N(p)\, dA\\ &= \iint_{\Omega^+} P\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\, du\, dv + Q\,\frac{D(x,z)}{D(u,v)}\, du\, dv + R\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\, du\, dv\\ &= \iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy \quad \triangleright\end{aligned}$$

A continuación damos la definición general de la integral de superficie para un campo X actuando en la superficie orientada S^+.

DEFINICIÓN 12.7. Sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial suave actuando en una región espacial conteniendo a la superficie S^+ orientada por un campo normal $N = N(p)$ con $p \in S$, se define la **integral de segundo género** del campo vectorial F a lo largo de S^+ como

$$\int_{S^+} F(p)\cdot N(p)\, dA = \iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$$

Si $r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ es una parametrización de S definida en la región orientada $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que la integral de segundo género se calcula por la integral orientada

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$
$$= \iint_{\Omega^+} \left[P(r(u,v)) \frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q(r(u,v)) \frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R(r(u,v)) \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right] du\,dv$$

EJEMPLO 12.8. Sea el campo vectorial actuando en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = (0, 0, x^2y^2z)$$

Calcule

$$\iint_{S^+} F \cdot N\,dA = \iint_{S^+} x^2y^2z\,dx\,dy$$

si S es el lado positivo de la mitad inferior de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

◁ Debido a la regla de la mano derecha, claramente S^+ la superficie mencionada y orientada negativamente por el vector normal interior, se parametriza mediante

$$S^+ : r(\varphi,\theta) = (R\cos(-\varphi)\operatorname{sen}\theta, R\operatorname{sen}(-\varphi)\operatorname{sin}\theta, R\cos\theta)$$

definida en $\Omega = \left\{ (\varphi,\theta) \mid 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \right\}$

De esta manera

$$dx\,dy = \frac{D(x,y)}{D(\varphi,\theta)}\,d\varphi\,d\theta = \begin{vmatrix} x_\varphi & x_\theta \\ y_\varphi & y_\theta \end{vmatrix} d\varphi\,d\theta$$
$$= \begin{vmatrix} R\operatorname{sen}(-\varphi)\operatorname{sen}\theta & R\cos(-\varphi)\cos\theta \\ -R\cos(-\varphi)\operatorname{sen}\theta & R\operatorname{sen}(-\varphi)\cos\theta \end{vmatrix} d\varphi\,d\theta$$
$$= R^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta$$

Por lo tanto

$$\int\int_{S^+} x^2y^2z\,dx\,dy$$
$$= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{2\pi} (R\cos(-\varphi)\operatorname{sen}\theta)^2 (R\operatorname{sen}(-\varphi)\operatorname{sen}\theta)^2 R\cos\theta\, R^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta$$
$$= R^7 \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}^5\theta\cos^2\theta\,d\theta \int_0^{2/\pi} \cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi = \frac{2\pi R^7}{105} \triangleright$$

Sea ahora la superficie poliédrica S^+ que es la unión $(+)$ de las superficies regulares $S_1^+, \ldots, S_k^+$ orientadas por sus respectivas fronteras $\Gamma_1^+, \ldots, \Gamma_k^+$:

$$S^+ = S_1^+ + S_2^+ \cdots + S_k^+$$

Entonces, para el campo vectorial suave $F = (P,Q,R)$ actuando en una región conteniendo a S^+, se define

$$\int_{S^+} F \cdot N\,dA = \int_{S_1^+ + \cdots + S_k^+} F \cdot N\,dA = \int_{S_1^+} F \cdot N\,dA + \cdots + \int_{S_k^+} F \cdot N\,dA$$

EJEMPLO 12.9. Considérese el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

actuando en el espacio tridimensional. Sea S^+ el cubo obtenido al intersecarse los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, orientado con los normales exteriores. Calcule

$$\int_{S^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

◁ Hacemos una descomposición de S^+ en las superficies regulares que conforman sus caras, orientadas por el normal exterior:

$$S^+ = S_1^+ + S_2^+ + \cdots + S_6^+$$

donde

S_1^+ está contenida dentro del plano $x = 0$
S_2^+ está contenida dentro del plano $y = 0$
S_3^+ está contenida dentro del plano $z = 0$
S_4^+ está contenida dentro del plano $x = 1$
S_5^+ está contenida dentro del plano $y = 1$
S_6^+ está contenida dentro del plano $z = 1$

La figura 12.3 ilustra esta descomposición.

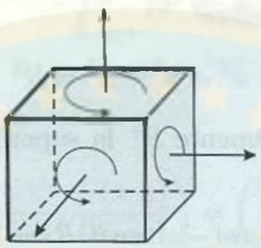


Figura 12.3. Orientación del cubo por el normal exterior.

Tenemos entonces que

$$\int_{S^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \int_{S_1^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy + \cdots + \int_{S_6^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

Calculamos cada integral confirmando la orientación exterior en cada cara orientada, utilizando las parametrizaciones apropiadas.

S_1^+: En este caso $x = 0$, lo que implica que $dx = 0$, teniéndose un integrando nulo.

$$\int_{S_1^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 0$$

S_2^+: Análogamente, como $y = 0$ y $dy = 0$, se tiene otra integral que se anula

$$\int_{S_2^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 0$$

S_3^+: En este caso, $z = 0$, $dy = 0$ generan igualmente un cero en la integral correspondiente

$$\int_{S_3^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 0$$

S_4^+: Ya que en este caso $x = 1$, $dx = 0$, y la integral se reduce a

$$\int_{S_4^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \int_{S_4^+} x\,dy\,dz = \int_{S_4^+} dy\,dz$$

Para obtener el normal exterior, es suficiente con parametrizar a S_4^+ por $x = 1$, $y = u$, $z = v$ con $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. De esta forma el valor de la integral es

$$\int_{S_4^+} dy\,dz = \int_0^1 dv \int_0^1 du = 1$$

S_5^+: En este caso $y = 1$, lo que indica $dy = 0$, reduciendo la integral

$$\int_{S_5^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \int_{S_5^+} y\,dz\,dx = \int_{S_5^+} dz\,dx$$

Una parametrización de S_5^+ que orienta con el normal exterior es

$$x = 1 - u,\ y = 1,\ z = v \ \text{ con } \ (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

de donde se deduce que

$$\frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \ \text{ y } \ dz\,dx = du\,dv$$

y por lo tanto

$$\int_{S_5^+} dz\,dx = \int_0^1 dv \int_0^1 du = 1$$

S_6^+: Al realizar la parametrización de S_6^+ por

$$x = u,\ y = v,\ z = 1$$

la integral reducida (con $dz = 0$) se calcula

$$\int_{S_6^+} x\,dx\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \int_{S_6^+} z\,dx\,dy = \int_{S_6^+} dx\,dy = \int_0^1 dv \int_0^1 du = 1$$

Consecuentemente, al sumar las integrales se obtiene finalmente

$$\int_{S^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 3 \quad \triangleright$$

EJEMPLO 12.10. Sea S^+ la superficie poliédrica en el primer octante formada por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, orientada por el normal exterior. Calcule

$$\int_{S^+} y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dz\,dx$$

$\triangleleft$ Claramente S^+ es la unión (+) de las superficies orientadas regulares $S_1^+, S_2^+, S_3^+, S_4^+$ y S_5^+, donde

S_1^+ está contenida en el plano $x = 0$
S_2^+ está contenida en el plano $y = 0$
S_3^+ está contenida en el plano $z = 0$
S_4^+ está contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$
S_5^+ está contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Véase la figura 12.4 para ilustrar a S^+.

De igual forma que en el ejemplo precedente, es necesario calcular

$$\int_{S_i^+} y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dz\,dx$$

para $i = 1, 2, \cdots, 5$, y luego realizar la suma para obtener la integral buscada.

S_1^+: La superficie orientada S_1^+ está condicionada a $x = 0$, lo que implica que $dx = 0$ y por lo tanto la integral se anula:

$$\int_{S_1^+} y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dz\,dx \equiv 0$$

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR SIB - UCE

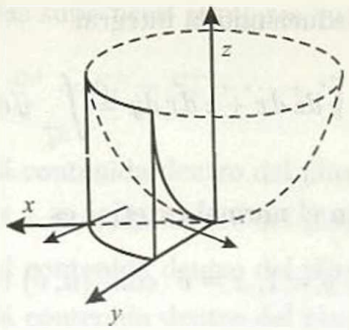


Figura 12.4. Orientación de S^+ por el normal exterior.

S_2^+ y S_3^+: Las condiciones para S_2^+ : $y = 0$, $dy = 0$, y para S_3^+ : $z = 0$, $dz = 0$, implican igualmente que

$$\int_{S_2^+} y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dz\,dx = \int_{S_3^+} y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dz\,dx \equiv 0$$

S_4^+: Para la superficie S_4^+, una parametrización que hace que esté orientada por el normal exterior es

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \\ z = r^2 \end{cases} \quad \text{con} \quad (r,\varphi) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

lo que nos dice que

$$\begin{aligned} dx\,dy &= \quad r\,dr\,d\varphi \\ dy\,dz &= -2r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi \\ dz\,dx &= -2r^2\,\text{sen}\,\varphi\,dr\,d\varphi \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &\int_{S_4^+} y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dz\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^5\left(\text{sen}^2\varphi - 2\cos^2\varphi - 2\cos^2\varphi\,\text{sen}^2\varphi\right)dr\,d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(\text{sen}^2\varphi - 2\cos^4\varphi\right)dr\,d\varphi \\ &= \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{3\pi}{48} \end{aligned}$$

S_5^+: Para S_5^+ una parametrización que orienta con el normal exterior es:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \text{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \text{con} \quad (\varphi, z) \in [0, \pi/2] \times [0,1]$$

lo que implicaría que

$$\begin{aligned} dx\,dy &= 0 \\ dy\,dz &= \cos\varphi\,d\varphi\,dz \\ dz\,dx &= \text{sen}\,\varphi\,d\varphi\,dz \end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral se reduce a un término:

$$\int_{S_5^+} y^2 z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2 y\,dz\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{S_5^+} xz\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx \\
&= \int_0^1 z\,dz \int_0^{\pi/2} (\cos^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\cos^2\varphi + \cos^2\varphi \operatorname{sen}^2\varphi)\,d\varphi \\
&= \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}
$$

En consecuencia la integral buscada es

$$\int_{S^+} y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx = \frac{3\pi}{16} - \frac{3\pi}{48} = \frac{6\pi}{48} = \frac{\pi}{8} \quad \triangleright$$

Sea ahora S^- la superficie orientada negativamente mediante por el normal $-n$, entonces, para el campo $F = (P, Q, R)$ actuando en la región que contiene a S es válida la cadena de igualdades

$$
\begin{aligned}
\int_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy &= \int_{S^+} F \cdot N\,dA \\
&= \int_{S^-} F \cdot (-N)\,dA \\
&= -\int_{S^-} F \cdot N\,dA \\
&= -\int_{S^-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy
\end{aligned}
$$

lo que nos indica que para la superficie orientada negativamente S^-, se cumple la igualdad

$$\int_{S^-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = -\int_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

lo cual demuestra también el siguiente lema.

LEMA 12.11. *El signo de la integral de superficie de segundo género cambia si se cambia la orientación de la superficie.*

Ejercicios 12.2

Calcule las siguientes integrales de segundo género

1. $\iint_{S^-} x^2y^2z^2\,dx\,dy$

   S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2. $\iint_{S^+} x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$

   S es la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

3. $\iint_{S^+} xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx$

   S es la superficie poliédrica piramidal formada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

4. $\iint_{S^+} y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx$

   S es la parte poliédrica en el primer octante formada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos coordenados.

12.3 El teorema de Gauss-Ostrogradskii

Mostraremos en esta sección uno de los teoremas más importantes del cálculo integral de varias variables, el llamado **teorema de Gauss-Ostrogradskii**. Como la prueba es semejante a la dada para la fórmula de Green, iniciamos definiendo conceptos semejantes. Al igual que en la sección 10.4, los objetos mencionados en esta sección se entenderán suaves, como los campos vectoriales, escalares, las superficies regulares, etcétera.

DEFINICIÓN 12.12. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ una región acotada. V se dice ser una V_y-región si su frontera S (cerrada) puede ser conformada por tres superficies S_1, S_2, S_3 tales que

1. S_1 es la gráfica de una función suave definida en una región orientada Ω_y del plano (x, z), orientada con el normal exterior a V

$$S_1 : \ y = \lambda_1(x, z), \ (x, z) \in \Omega_y$$

2. S_2 es la gráfica de una función suave definida en la misma región Ω_y orientada con el normal exterior

$$S_2 : \ y = \lambda_2(x, z), \ (x, z) \in \Omega_y$$

donde $\lambda_1(x, z) \leq \lambda_2(x, z)$ para todo $(x, z) \in \Omega_y$.

3. S_3 es una superficie cilíndrica con generatriz en dirección del eje y, cuyo normal exterior es ortogonal al eje y.

Imponemos además que la frontera S sea una superficie poliédrica y de la forma

$$S^+ = S_1^+ + S_2^+ + S_3^+$$

donde la unión se hace en las fronteras orientadas de las componentes S_1^+, S_2^+ y S_3^+ (véase la figura 12.5).

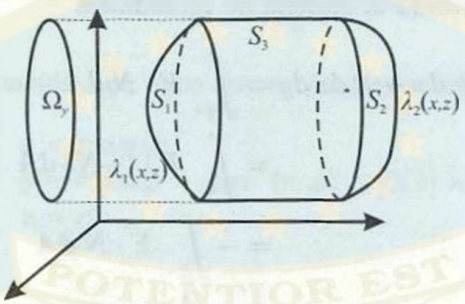


Figura 12.5. Región del tipo V_y.

Es fácil observar que de acuerdo a la orientación del normal exterior de S^+. las fronteras de S_1^+ y S_2^+ tienen orientaciones inversas como puede verse en la figura 12.5.

De forma análoga se definen una región del tipo V_x y una región del tipo V_z.

EJEMPLO 12.13. Una bola cerrada en $\mathbb{R}^3$ es una región que es del tipo V_x, V_y y V_z.

En efecto, sin pérdida de generalidad, la bola cerrada V tiene centro en $(0, 0, 0)$ y radio R y está definida por

$$V = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$$

cuya frontera es la esfera de radio R y centro en $(0, 0, 0)$ dada por

$$S^+ = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}$$

Para ver que V es una V_y-región, consideremos la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

y despejamos a la variable y :

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$

obteniendo las superficies que son las gráficas de las funciones

$$S_1 : \ y = \ \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$

$$S_2 : \ y = -\sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$

definidas en la región $\Omega_y = \left\{(x, z) \mid x^2 + z^2 \leq R^2\right\}$.

La otra superficie S_3 (la cual es cilíndrica y paralela al eje y) se obtiene como la superficie degenerada en el círculo

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

contenida en el plano (x, z). La figura 12.6 ilustra esta situación.

De igual forma se demuestra que la bola cerrada V es tanto una V_x-región, como una V_z-región. ▷

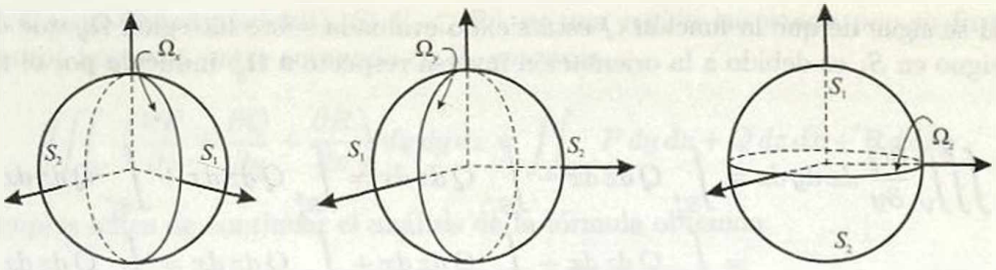


Figura 12.6. Ejemplo de una V_x, V_y, V_z-región.

EJEMPLO 12.14. El toro de revolución sólido obtenido en la sección 11.1 es otro ejemplo de una región de $\mathbb{R}^3$ que es del tipo V_x, V_y y V_z.

◁ Se invita al lector a verificar esta afirmación. ▷

Para una región V del tipo V_x, V_y y V_z y un campo vectorial suave actuando en V se tiene el siguiente resultado.

LEMA 12.15 (fórmula de Gauss-Ostrogradskii). *Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ una región del tipo V_x, V_y y V_z, y sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial suave actuando en la región V. Si S^+ es la frontera orientada en V con el normal exterior, entonces se cumple la fórmula*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

◁ Ya que V es una V_y-región, podemos descomponer su frontera poliédrica orientada S^+ como

$$S^+ = S_1^+ + S_2^+ + S_3^+$$

donde S_1 y S_2 son las gráficas de funciones λ_1 y λ_2 definidas en una región orientada Ω_y del plano (x, z), y donde las fronteras de S_1 y S_2 están orientadas en sentidos contrarios sobre S^+, como se indica en la figura 12.6. Además que $\lambda_1(x, z) \leq \lambda_2(x, z)$ en Ω_y.

Por otro lado, la superficie S_3 es cilíndrica con generatriz en dirección del eje y y por lo tanto el normal que orienta es ortogonal al eje y.

Consideremos los campos vectoriales actuando en V definidos por

$$F_P = (P, 0, 0)$$
$$F_Q = (0, Q, 0)$$
$$F_R = (0, 0, R)$$

esto es, $F = F_P + F_Q + F_R$.

Hagamos actuar el campo $F_Q = (0, Q, 0)$ en la V_y-región V. Entonces, en S_3^+ el normal n es ortogonal a F_Q, de donde el flujo de F_Q a lo largo de S_3^+ es

$$\iint_{S_3^+} Q(x, y, z)\,dx\,dz = \int_{S_3^+} F \cdot N\,dA = 0$$

Por otro lado, por el teorema fundamental del cálculo, y de la definición del conjunto V

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in \Omega_y,\ \lambda_1(x, z) \leq y \leq \lambda_2(x, z)\}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz &= \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\,dz\,dx = \iint_{\Omega_y^+} \left[\int_{\lambda_1(x,z)}^{\lambda_2(x,z)} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy\right] dz\,dx \\
&= \iint_{\Omega_y^+} [Q(x, \lambda_2(x, z), z) - Q(x, \lambda_1(x, z), z)]\,dz\,dx \\
&= \iint_{\Omega_y^+} Q\,(x, \lambda_2(x, z), z)\,dz\,dx - \iint_{\Omega_y^+} Q\,(x, \lambda_1(x, z), z)\,dz\,dx \\
&= \int_{S_2^+} Q\,dz\,dx - \int_{S_1^-} Q\,dz\,dx
\end{aligned}$$

La última igualdad se sigue de que la función Q está siendo evaluada sobre la región Ω_y que define a las superficies S_1 y S_2. Además, el signo en S_1 es debido a la orientación inversa respecto a Ω_y^+ inducida por el normal exterior.

Por lo tanto

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \int_{S_2^+} Q\,dz\,dx - \int_{S_1^-} Q\,dz\,dx = \int_{S_2^+} Q\,dz\,dx + \int_{S_1^+} Q\,dz\,dx$$
$$= \int_{S_1^+} Q\,dz\,dx + \int_{S_2^+} Q\,dz\,dx + \int_{S_3^+} Q\,dz\,dx = \int_{S^+} Q\,dz\,dx$$

en donde se ha utilizado la igualdad

$$\int_{S_3^+} Q\,dz\,dx = 0.$$

De esta manera, sabiendo que V es una V_y-región se tiene que

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \int_{S^+} Q\,dz\,dx$$

De forma análoga, utilizando que V es una región del tipo V_x y V_z, se pueden demostrar las igualdades

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \int_{S^+} P\,dy\,dz$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \int_{S^+} R\,dx\,dy$$

Al realizar la suma de los miembros correspondientes en estas tres últimas igualdades, se tiene el resultado deseado

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \quad \triangleright$$

Consideremos ahora una región $V \subset \mathbb{R}^3$ tal que puede escribirse como la unión de las regiones $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de tal forma que todas son del tipo V_x, V_y y V_z, y que se intersecan apenas por pares V_i, V_j en sus fronteras.

Si $F = (P, Q, R)$ es un campo vectorial actuando en V, S^+ es la frontera orientada de V, y $S_1^+, \ldots, S_k^+$ son las fronteras orientadas respectivas de $V_1, \ldots V_k$, entonces

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{V_1+\cdots+V_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \iiint_{V_i} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$
$$= \iint_{S_1^+ + \cdots + S_k^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$
$$= \iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

donde se utiliza que en la intersección de dos fronteras comunes la orientación se anula, y en cada S_i^+ se cumple el lema 12.15.

Por lo tanto, la fórmula de Gauss-Ostrogradskii es válida para una región V con frontera orientada S que pueda descomponerse en un número finito de regiones que son del tipo V_x, V_y y V_z.

Un resultado más general se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 12.16 (Gauss-Ostrogradskii). *Si $V \subset \mathbb{R}^3$ es una región encerrada por su frontera orientada S^+ y $F = (P, Q, R)$ es un campo vectorial suave actuando en V, entonces*

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz = \iint_{S^+} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy \tag{12.1}$$

Damos algunos ejemplos antes de continuar el análisis de la fórmula obtenida.

EJEMPLO 12.17. Sea V el cubo sólido encerrado por S^+, donde S^+ es la superficie cúbica unitaria obtenido al intersecarse por pares los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Calcule

$$\int_{S^+} x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy$$

utilizando la fórmula de Gauss-Ostrogradskii (12.1).

◁ Claramente, el campo que actúa en V es $F = (P.Q.R)$, donde

$$P(x, y, z) = x,\ Q(x, y, z) = y,\ R(x, y, z) = z$$

mientras que la región V cuya frontera es el cubo, está definida mediante

$$V = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in [0, 1]\}$$

Por el teorema de Gauss-Ostrogradskii (12.16), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{S^+} x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy &= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (1 + 1 + 1)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 3\, dx = 3 \end{aligned}$$

resultado ya obtenido en el ejemplo 12.8. ▷

EJEMPLO 12.18. Sea S^+ la superficie en el primer octante formada por el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ orientada por el normal exterior. Calcule

$$\int_{S^+} y^2 z\, dx\, dy + xz\, dy\, dz + x^2 y\, dz\, dx$$

utilizando la fórmula de Gauss-Ostrogradskii y compare con el ejemplo 12.10.

◁ La región V encerrada por S^+ está ilustrada en la figura 12.4, además de que en coordenadas cilindricas está descrita por

$$V = \left\{ (r, \varphi, z) \,\middle|\, 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le r^2 \right\}$$

Por otro lado, arreglando los términos del integrando, se tiene que el campo vectorial $F = (P, Q, R)$ tiene coordenadas

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= xz \\ Q(x, y, z) &= x^2 y \\ R(x, y, z) &= y^2 z \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial P}{\partial x} = z,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2,\ \frac{\partial R}{\partial x} = y^2$$

Por lo tanto, por la fórmula de Gauus-Ostrogradskii

$$\int_{S^+} y^2\, dx\, dy + xz\, dy\, dz + x^2 y\, dz\, dx = \iiint_V \left(z + x^2 + y^2 \right) dx\, dy\, dz$$

ahora utilizamos la transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas para obtener

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi dz$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}\iiint_V (z + x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{r^2} (z + r^2)\,r dz \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 r^5\,dr \\ &= \frac{3\pi}{4}\int_0^1 r^5\,dr = \frac{\pi}{8} \quad \triangleright\end{aligned}$$

Observamos que el integrando de la integral triple obtenida en el teorema de Gauss-Ostrogradskii 12.16 es la divergencia del campo vectorial $F = (P, Q, R)$ definido en la sección 9.3.

Usando el operador simbólico de Hamilton

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

tal divergencia del campo puede escribirse simbólicamente como el producto escalar $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$.

De esta forma, la integral triple en la fórmula de Gauss-Ostrogradskii 12.1 se puede escribir simbólicamente como

$$\iint_{S^+} F \cdot N\,dA - \iiint_V \nabla \cdot F\,dA = \iiint_V \operatorname{div} F\,dA$$

lo que hace que el teorema 12.16 sea conocido también en la literatura clásica como el **teorema de la divergencia**.

Damos ahora una interpretación física del campo escalar $\operatorname{div} F$ que describe el comportamiento del flujo natural asociado a F, alrededor de un punto p en la región V.

Supongamos que $p \in V$ es un punto arbitrario, y consideremos la bola cerrada de radio ε con centro en p

$$B_\varepsilon = B_\varepsilon(p) = \{x \in V \mid \|x - p\| \leq \varepsilon\}$$

con frontera orientada

$$S_\varepsilon^+ = S_\varepsilon^+(p) = \{x \in V \mid \|x - p\| = \varepsilon\}$$

Para el campo vectorial suave $F = (P, Q, R)$ es válida en $B_\varepsilon \in (p)$ la fórmula de Gauss-Ostrogradskii

$$\iiint_{B_\varepsilon} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{S_\varepsilon^+} F \cdot N\,dA$$

Por el teorema del valor medio para integrales 8.20, existe un punto $p^* \in B_\varepsilon$ tal que

$$\operatorname{div} F(p^*)\,\operatorname{vol}(B_\varepsilon) = \iiint_{B_\varepsilon} \operatorname{div} F$$

lo que nos lleva a la igualdad

$$\operatorname{div} F(p^*)\,\operatorname{vol}(B_\varepsilon) = \iint_{S_\varepsilon}^{+} F \cdot N\,dA$$

lo que implica que

$$\operatorname{div} F(p^*) = \frac{1}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon)} \iint_{S_\varepsilon} F \cdot N\,dA$$

Esto es, la divergencia del campo X en el punto p^* no es otra cosa que la razón del flujo atravesando la frontera S_ε^+ del sólido B_ε, dividido entre el volumen de este sólido.

De la continuidad de la divergencia del campo X, se tiene que

$$\operatorname{div} F(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{div} F(p^*) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon)} \iint_{S_\varepsilon}^{+} F \cdot N\,dA$$

lo que nos indica que la divergencia del campo en el punto *mide los posibles manantiales originados en tal punto para el campo.*

Por ejemplo, si $\operatorname{div} F(p) < 0$, entonces el flujo en el punto p entonces "sale menos cantidad de flujo del que entra", si $\operatorname{div} F = 0$, entonces "entra la misma cantidad de la que sale". Pero si $\operatorname{div} F(p) > 0$, se crea un desagüe, esto es, en el punto "entra mayor cantidad del flujo que lo que sale". La figura 12.7a ilustra el significado físico de la divergencia.

En la misma figura 12.7b podemos observar que si $F = (P, Q, R)$ es un campo vectorial suave en la región V del espacio $\mathbb{R}^3$, de tal manera que en cada punto donde $\operatorname{div} X(p) = 0$, entonces ocurre lo siguiente.



Figura 12.7. Interpretación física de la divergencia.

Si $S^+ = S_1^+ + S_2^+ + S_3^+$ es una superficie poliédrica cerrada orientada por el normal exterior contenida en V, formada por las superficies: S_3^+ que es tubular al campo X (esto es, el campo X es tangente a S_3^+) y tiene dos superficies tapas S_1^+ y S_2^+, entonces para la región $\tilde{V}$ cerrada por S^+, por el teorema de Gauss-Ostrogradskii se tiene que

$$0 = \iiint_{\tilde{V}} \operatorname{div} F = \iint_{S^+} F \cdot N \, dA$$

Pero

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} F \cdot N \, dA &= \iint_{S_1^+} F \cdot N \, dA + \iint_{S_2^+} F \cdot N \, dA \\ &\quad + \iint_{S3^+} F \cdot N \, dA \\ &= \iint_{S_1^+} F \cdot N \, dA + \iint_{S_2^+} F \cdot N \, dA \end{aligned}$$

en virtud que $F \cdot N = 0$ en la superficie tubular S_3^+.

Por lo tanto

$$\iint_{S_1^+} F \cdot N \, dA + \iint_{S_2^+} F \cdot N \, dA = 0$$

lo que implica que

$$\iint_{S_1^+} F \cdot N \, dA = \iint_{S_2^-} F \cdot N \, dA$$

es decir: *Para un campo vectorial f con $\operatorname{div} F \equiv 0$, la cantidad de flujo que entra a S es igual a la cantidad de flujo que sale.* La figura 12.7b describe esta situación.

DEFINICIÓN 12.19. Sea $F = (P, Q, R)$ un campo vectorial suave actuando en la región $V \subset \mathbb{R}^3$. Si $\operatorname{div} F \equiv 0$ en toda la región V, el campo se llamará **tabular** o **solenoidal**.

En otras palabras, un campo solenoidal en el espacio no tiene cúmulos ni desagües dentro de su flujo.

Hasta aquí hemos notado que el teorema 12.16 convierte una integral doble en una triple y viceversa. Damos ahora una aplicación geométrica de ese importante teorema.

Para la región acotada $V \subset \mathbb{R}^3$ con frontera orientada S^+ se tiene, por el Teorema de Gauss-Ostrogradskii que

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(V) = \iiint_V dx\,dy\,dz &= \iiint_V \frac{1}{3}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \\ &= \frac{1}{3}\iint_{S^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen de la región V se calcula mediante la integral doble

$$\text{vol}\,(V) = \frac{1}{3}\iint_{S^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy \tag{12.2}$$

EJEMPLO 12.20. Sea S^+ el cubo obtenido al intersecarse los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ y sea V el sólido encerrado por S^+. Calcule $\text{vol}\,(V)$.

◁ Utilizando la ecuación (12.2) se tiene que

$$\text{vol}\,(V) = \frac{1}{3}\iint_{S^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dz\,dy$$

Pero la integral de superficie del segundo miembro de la igualdad ya ha sido dos veces calculada (una vez en el ejemplo 12.8), obteniendo que

$$\iint_{S^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = 3$$

De esta manera, el volumen del cubo sólido es

$$\text{vol}\,(V) = \frac{1}{3}(3) = 1 \quad \triangleright$$

Ahora hagamos valer el teorema de Gauss-Ostrogradskii para un campo vectorial $\vec{F} = (A, B)$ en el plano $\mathbb{R}^2$, y particularmente en la región orientada Ω^+ con frontera orientada Γ^+

$$\iint_{\Omega^+} \text{div}\,\vec{X} = \int_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot N\,d\ell$$

◁ Si $v = (\dot{x}, \dot{y})$ es el vector tangente unitario de Γ^+, entonces el normal unitario es $N = (\dot{y}, -\dot{x})$, lo que nos lleva a que

$$\int_{\Gamma^+} \vec{F}\cdot N\,d\ell = \int_{\Gamma^+} (A, B)\cdot(\dot{y}, -\dot{x})\,d\ell = \int_{\Gamma^+} (A, B)\cdot(dy, -dx) = \int_{\Gamma^+} A\,dy - B\,dx$$

con lo que se tiene que

$$\iint_{\Omega^+} \text{div}\,\vec{F} = \iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Gamma^+} A dy - B dx$$

De esta manera, si tomamos $B = -P$ y $A = Q$, como las coordenadas asignadas al campo vectorial $F = (P, Q)$ el cual es ortogonal al campo $\vec{F}$, obtenemos

$$\iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(-P)}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Gamma^+} Q\,dy - (-P)\,dx$$

esto es, la fórmula de Green 10.41

$$\iint_{\Omega^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy$$

Así pues, hemos obtenido la fórmula de Green a partir de la fórmula de Gauss-Ostrogradskii (12.1).

Ejercicios 12.3

Calcule la divergencia de los campos vectoriales dados en los ejercicios 1–4.

1. $F(x, y, z) = (x. y, z)$
2. $F(x, y, z)(y^2 + z^2,\ z^2 + x^2,\ x^2 + y^2)$
3. $F(x. y, z) = (x^2yz,\ y^2xz,\ z^2xy)$
4. $F(x, y, z) = \text{grad}\,(x^2 + y^2 + z^2)$

Utilizando la fórmula de Gauss-Ostrogradskii calcule las integrales de superficie de los ejercicios 5–7.

5. $\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$

   S es el poliedro formado por la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ orientada positivamente, junto con el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

6. $\iint_{S^+} xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx$

S es la superficie poliédrica piramidal formada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

7. $\iint_{S^+} y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dz\,dx$

S es la parte poliédrica del primer octante formada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos coordenados.

12.4 El teorema de Stokes

En esta sección demostramos el caso general del teorema de Green 10.41, para cuando el campo vectorial F actúa en una región del espacio el cual contiene a una superficie orientada S^+, el llamado **teorema de Stokes**. Un corolario a este resultado central es el **primer teorema de Cohomología** 10.34 para el caso espacial.

Para el enunciado y la demostración del teorema de Stokes, definimos algunos elementos que simplifican los objetivos.

DEFINICIÓN 12.21. Sea $S^+ \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientable con frontera orientada Γ^+, se dice que S^+ es una **superficie proyectable** si puede escribirse como

1. La gráfica de una función suave
$$x = f_1(y, z)$$
definida en una región orientada Ω_x^+ con frontera, contenida en el plano (y, z), tal que la orientación que induce Ω_x^+ en S bajo f_1 es la misma que tiene S^+.

2. La gráfica de una función suave
$$y = f_2(x, z)$$
definida en una región Ω_y^+ con frontera, contenida en el plano (x, z), tal que la orientación que induce Ω_y^+ bajo f_2 en S es la misma que tiene S^+.

3. La gráfica de una función suave
$$z = f_3(x, y)$$
definida en una región Ω_z^+ con frontera del plano (x, y), que induce una orientación en S que coincide con la de S^+.

Véase la figura 12.8 que ilustra la definición.

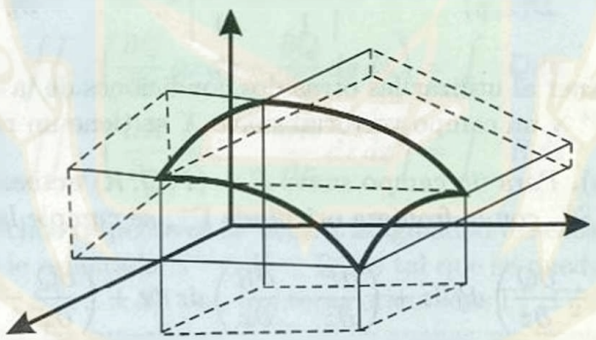


Figura 12.8. Superficie regular orientada proyectable.

EJEMPLO 12.22. Sea S^+ la parte de la esfera orientada por el normal exterior y definida por
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$
situada en el primer octante. Se afirma que S es proyectable.

1. En efecto, S^+ puede escribirse como la gráfica de la función suave
$$x = f_1(y, z) = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$$
definida en la región orientada del plano (y, z)
$$\Omega_x^+ = \left\{(y, z) \,|\, 0 \le y \le R,\, 0 \le z \le \sqrt{R^2 - y^2}\right\}$$
que induce en S^+ la misma orientación que la que tiene.

2. Igualmente, S^+ se puede escribir como la gráfica de la función suave

$$y = f_2(x,z) = \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}$$

definida en la región del plano (x,z)

$$\Omega_y^+ = \left\{(x,z) \,|\, 0 \le y \le R,\ 0 \le x \le \sqrt{R^2 - z^2}\right\}$$

que induce una orientación en S^+ igual a la que ya tiene.

3. Análogamente, S^+ se puede escribir como la gráfica de la función

$$z = f_3(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

definida en la región del plano (x,y)

$$\Omega_z^+ = \left\{(x,y) \,|\, 0 \le x \le R,\ 0 \le y \le \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$$

que induce en S^+ su propia orientación.

La figura 12.8 ilustra este ejemplo. ▷

Tomemos entonces una superficie regular orientable y proyectable S^+ con frontera orientada Γ^+, contenida en una región de $\mathbb{R}^3$.

Ya que S^+ se puede escribir como la gráfica de una función regular

$$z = f_3(x,y)$$

definida en una región orientada Ω_z del plano (x,y), con frontera orientada Γ_z^+, se tiene que sobre la superficie S^+ se cumple la fórmula

$$dz\,dx = \frac{D(f_3,x)}{D(x,y)}\,dx\,dy = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} dx\,dy = -\frac{\partial f_3}{\partial y}\,dx\,dy$$

Fórmulas análogas se pueden obtener al utilizar las otras dos condiciones de la definición de proyectabilidad.

Para una superficie proyectable S^+ y un campo vectorial suave X se tiene un resultado importante.

LEMA 12.23 (fórmula de Stokes). *Para un campo suave $F = (P,Q,R)$ actuando en la región $V \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a la superficie proyectable orientada S^+, con la frontera orientada Γ^+, se cumple la igualdad*

$$\iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

o en notación vectorial abreviada

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} X \cdot N\,dA = \int_{\Gamma^+} F \cdot d\ell \tag{12.3}$$

◁ Claramente, el primer miembro de la ecuación principal en el lema 12.23 puede escribirse como

$$\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right) + \iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz\right) + \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx\right)$$

Primero examinamos el término

$$\iint_{S^+} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right)$$

y utilizamos que S^+ es proyectable y puede escribirse como la gráfica de una función

$$z = f_3(x, y)$$

definida en una región Ω_z^+ del plano (x, y) y orientada por su frontera Γ_z^+.

Si este es el caso, entonces

$$dz\,dx = -\frac{\partial f_3}{\partial y}\,dx\,dy$$

lo que implica que

$$\iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right) = \iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\left(-\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)dx\,dy - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right)$$
$$= -\iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Ya que $(x, y) \in \Omega_z^+$, entonces por la regla de la cadena

$$-\iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = -\iint_{\Omega_z^+}\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, f_3(x, y))\,dx\,dy$$

Por otro lado, utilizando el teorema de Green para la región Ω_z^+ con frontera Γ_z^+, se tiene que

$$-\iint_{\Omega_z^+}\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, f_3(x, y))\,dx\,dy = \iint_{\Omega_z^+} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$
$$= \int_{\Gamma_z^+} P\,dx = \int_{\Gamma_z^+} P(x, y, f_3(x, y))\,dx = \int_{\Gamma^+} P(x, y, z)\,dx$$

pues $f_3(\Gamma_z^+) = \Gamma^+$.

Por lo tanto

$$\iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right) = \int_{\Gamma^+} P\,dx$$

De igual forma, puede demostrarse que se cumplen las igualdades

$$\iint_{S^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz\right) = \int_{\Gamma^+} Q dy$$
$$\iint_{S^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx\right) = \int_{\Gamma^+} R\,dz,$$

y al sumar los lados izquierdos y derechos respectivos se llega a la igualdad deseada. ▷

Supongamos ahora que la superficie orientada $S^+ \subset V \subset \mathbb{R}^3$ es tal que se puede descomponer en la unión $(+)$ de las superficies proyectables orientadas $S_1^+, S_2^+ \ldots, S_k^+$ con fronteras orientadas $\Gamma_1^+, \Gamma_2^+ \ldots, \Gamma_k^+$ respectivamente. Suponemos además que la intersección por pares de las superficies S_i, S_j es en apenas sus fronteras Γ_i^+ y Γ_j^+ donde las orientaciones tienen signos diferentes y para el recuento final se anulan mutuamente, es decir

$$S^+ = S_1^+ + \cdots + S_k^+$$
$$\Gamma^+ = \Gamma_1^+ + \cdots + \Gamma_k^+$$

donde Γ^+ es la frontera orientada de S^+.

Si $F = (P, Q, R)$ es un campo vectorial suave actuando en la región V, se tiene que

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} F \cdot N\,dA = \iint_{S_1^+ + \cdots + S_k^+} \operatorname{rot} F \cdot N\,dA = \sum_{i=1}^{k}\iint_{S_i^+} \operatorname{rot} F \cdot N\,dA$$

Pero como en cada S_i^+ vale la fórmula de Stokes, se tiene entonces que

$$\sum_{i=1}^{k}\iint_{S_i^+} \operatorname{rot} F \cdot N\,dA = \sum_{i=1}^{k}\int_{\Gamma_i^+} F \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma_1^+ + \cdots + \Gamma_k^+} F \cdot d\vec{\ell} = \int_{\Gamma^+} F \cdot d\vec{\ell}$$

Por lo tanto, para una superficie S^+ orientable con frontera que se puede descomponer en un número finito de superficies orientables proyectables, se cumple la fórmula de Stokes

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} F \cdot N \, dA = \int_{\Gamma^+} F \cdot d\vec{\ell}$$

Un resultado más general puede establecerse en el siguiente teorema.

TEOREMA 12.24 (Stokes). *Sea S^+ una superficie orientable con frontera orientada Γ^+, que está contenida en la región $V \subset \mathbb{R}^3$. Si el campo vectorial suave $F = (P, Q, R)$ actúa en V, entonces el flujo de la rotación del campo a través de S^+ es igual a la circulación del campo a través de la frontera Γ^+, es decir*

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} F \cdot N \, dA = \int_{\Gamma^+} F \cdot d\vec{\ell} \tag{12.4}$$

o en coordenadas cartesianas,

$$\iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{12.5}$$

EJEMPLO 12.25. Calcule la integral del campo suave

$$F = (y^2 + z^2,\, x^2 + z^2,\, x^2 + y^2)$$

a lo largo de cualquier curva cerrada simple $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.

◁ Sea Γ^+ la curva orientada y tendamos una superficie S^+ arbitraria sobre esta curva de tal forma que la orientación de S^+ induzca en Γ la misma orientación que tiene.

Por el teorema de Stokes 12.24, se tiene que la integral de línea buscada se calcula mediante la fórmula (12.4), es decir

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} F \cdot N \, dA = \int_{\Gamma^+} F \cdot d\vec{\ell}$$

pero

$$\operatorname{rot} X = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)$$

de donde, en coordenadas, las integrales respectivas se escriben

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma^+} (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz \\ =&2 \iint_{S^+} (y - z)\,dy\,dz + (z - x)\,dz\,dx + (x - y)\,dx\,dy \end{aligned}$$

Y es suficiente con calcular la integral de superficie del lado derecho para completar el cálculo. ▷

EJEMPLO 12.26. Sea Γ^+ el círculo dado por $\{x^2 + y^2 = R^2,\, z = 0\}$ orientado positivamente a la derecha. Calcule

$$\int_{\Gamma^+} x^2 y^3\,dx + dy + z\,dz$$

directamente y mediante la fórmula de Stokes, utilizando para este último efecto a S^+ como la semiesfera superior $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

◁ Primero calculamos directamente. Para ello, parametrizamos a la curva orientada Γ^+ mediante

$$\gamma : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\operatorname{sen} t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

lo que lleva la integral buscada en

$$\int_{\Gamma^+} x^2y^3\,dx + dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} R^2\cos^2 t\, R^3\sin^3 t\,(-R\sin t dt) + R\cos t\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-R^5\cos^2 t\sin^4 t + R\cos t\right) dt = -\frac{\pi R^6}{8}$$

Por otro lado, para el campo vectorial

$$F = (x^2y^3, 1, z)$$

calculamos su rotación,

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = \left(0, 0 - 3x^2y^2\right)$$

para obtener

$$\int_{\Gamma^+} x^2y^3\,dx + dy + z\,dz = \iint_{S^+} -3x^2y^2\,dx\,dy = -3\iint_{S^+} x^2y^2\,dx\,dy$$

Al parametrizar a la superficie S^+ orientada con el normal exterior mediante coordenadas esféricas, tenemos que

$$dx\,dy = -R^2\sin\theta\cos\theta\,d\varphi\,d\theta$$

de donde, por el teorema de Stokes 12.5

$$-3\iint_{S^+} x^2y^2\,dx\,dy$$
$$= -3\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} R^2\cos^2\varphi\sin^2\theta R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\left(-R^2\sin\theta\cos\theta\right)d\varphi\,d\theta$$
$$= 3R^6\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = -\frac{\pi R^6}{8} \quad \triangleright$$

Utilizando la idea de tender una superficie arbitraria S^+ sobre una curva cerrada Γ contenida en una región simplemente conexa $V \subset \mathbb{R}^3$, tenemos que si $F = (P, Q, R)$ es un campo suave con

$$\operatorname{rot} X \equiv 0$$

entonces, por el teorema de Stokes 12.24,

$$\int_{\Gamma^+} F\cdot\vec{d\ell} = \iint_{S^+} \operatorname{rot} X\cdot N\,dA = 0$$

Por lo tanto, para la curva cerrada arbitraria $\Gamma^+ \subset V$ región simplemente conexa que delimita una superficie S^+ sin hoyos, se tiene que

$$\int_{\Gamma^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \equiv 0$$

que indica que el campo vectorial F es conservativo, lo que prueba el **primer teorema de Comohología** 10.34 para el caso espacial.

Finalmente, damos una interpretación física de la rotación de un campo vectorial F actuando en la región V del espacio $\mathbb{R}^3$.

Sea $p \in V$ un punto arbitrario y consideremos en p una superficie pequeña S_ε^+ de diámetro $\varepsilon > 0$, tal que la frontera de S_ε^+ sea el círculo de radio ε con centro en p denotado por Γ_ε^+.

Entonces, por el teorema de Stokes para la superficie orientada S_ε^+ se tiene que

$$\iint_{S_\varepsilon^+} \operatorname{rot} X\cdot N\,dA = \int_{\Gamma_\varepsilon^+} F\cdot\vec{d\ell}$$

Por el teorema del valor medio para integrales dobles 8.20, existe un punto $p^* \in S_\varepsilon^+$ tal que

$$\iint_{S_\varepsilon^+} \operatorname{rot} X \cdot N \, dA = \text{Área}\,(S_\varepsilon^+)\, \operatorname{rot} F(p^*) \cdot N$$

lo que implica que

$$\operatorname{rot} F(p^*) \cdot N = \frac{1}{\text{Área}\,(S_\varepsilon^+)} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} F \cdot d\vec{\ell}$$

De la continuidad de la rotación del campo y del producto escalar, obtenemos que

$$\operatorname{rot} F(p) \cdot N = \lim_{p^* \to p} \operatorname{rot} F(p^*) \cdot N = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\text{Área}\,(S_\varepsilon^+)} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} F \cdot d\vec{\ell}$$

Ya que la integral

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^+} F \cdot d\vec{\ell}$$

nos indica la circulación del campo a lo largo de la curva cerrada Γ_ε^+, entonces la cantidad

$$\operatorname{rot} F(p) \cdot N$$

nos dice como "rotó" infinitesimalmente el campo F cuando actuó en el punto p.

Por esto es que la rotación del campo vectorial F actuando en p nos indica las posibles rotaciones realizadas dentro del flujo natural asociado a F en la región $V \subset \mathbb{R}^3$ donde actúa. En otras palabras, si un objeto puntual se deja llevar por el flujo natural del campo, la rotación de F nos indica cómo rota el objeto durante su trayecto (véase la figura 12.9).

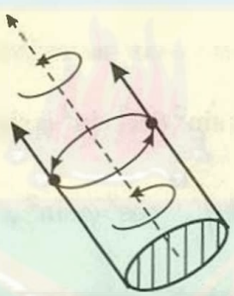


Figura 12.9. Rotación de un campo vectorial.

Ejercicios 12.4

Verifique el teorema de Stokes para cada campo y superficie dados en los ejercicios 1–3.

1. $F(x, y, z) = (z, 2x, 3y)$, donde S^+ está definida por $z = 1 - x^2 - y^2$
2. $f(x, y, z) = \left(x^2 + y, yz, x - z^2\right)$, donde S^+ es la parte del plano $2x + 2y + z = 2$ en el primer cuadrante.
3. $F(x, y, z) = (x, -y, 0)$ donde S^+ es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Usando la fórmula de Stokes, transforme las integrales de los ejercicios 4–6, a lo largo de una curva cerrada Γ que acota cualquier superficie S tendida sobre esta curva.

4. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \left(x^2 - yz\right) dx + \left(y^2 - zx\right) dy + \left(z^2 - xy\right) dz$
5. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} y\, dx + z\, dy + x\, dz$
6. $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \left(y^2 + z^2\right) dx + \left(x^2 + z^2\right) dy + \left(x^2 + y^2\right) dz$
7. Use la fórmula de Stokes para calcular

   $$\int_{\Gamma^+} (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$$

   Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x + y + z = 0$.
8. Usando la fórmula de Stokes calcule

   $$\int_{\Gamma^+} (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$$

   donde Γ es la elipse $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$.
9. Utilice el teorema de Stokes para calcular

   $$\int_{\Gamma^+} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

   si Γ es el triángulo con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ orientado positivamente.

Bibliografía

[1] Anton, H., *Introducción al Álgebra Lineal*, Limusa, 1981.

[2] Arnold, I. V., *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Rubiños-1860, 1995.

[3] Becerril, R., Jardón, D. y Reyes, J. G., *Cálculo en varias variables*, Publicaciones CBS, UAM-I, 2002.

[4] Braun, M., *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*, Iberoamérica, México, 1990.

[5] Doubrovine, B., Novikov, S. y Fomenko, A., *Geometría Moderna. Métodos y aplicaciones* (3 vols.), Editorial URSS, 2000.

[6] Hirsch, M. y Smale, S., *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.

[7] Lima, E. L., *Curso de análise*, Projeto Euclides, IMPA, 1992.

[8] Palmas, O. y Reyes, J. G., *Curso de Geometría Diferencial. Parte 1. Curvas y superficies*, Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, 2008.

[9] Palmas, O. y Reyes, J. G., *Curso de Geometría Diferencial: Parte 2. Geometría intrínseca de las superficies*, Las Prensas de Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.

[10] Reyes, J. G., *Cálculo Diferencial para las Ciencias Naturales*, Trillas, 1996.

[11] Reyes, J. G., *Cálculo Integral para las Ciencias Naturales*, Trillas, 1996.

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR EST
OMNIUM SAPIENTIA
FUNDADA EN 1620
QUITO

Índice analítico

Álgebra lineal, 175
ángulo, 29, 58, 62, 86, 126
área
  de la esfera $\mathbb{S}^2$, 339
  de un paralelogramo 65
  de un triángulo 63
  de una región, 315, 374
  del toro $\mathbb{T}^2$, 338
  forma diferencial de 240
aritmética de límites, 140

Banda de Möbius, 335
base, 66
  canónica, 59
  de un cono, 95
bola, 129

Cambios afines de coordenadas, 97
campo(s)
  conservativo, 277
  de vectores, 272
  de velocidades, 271
  escalar, 156, 267
  gradiente, 272
campo vectorial, 199, 272
  conservativo, 277, 299, 301, 306
  coulombiano, 299
  curva integral de un, 276
  divergencia de un, 279
  flujo de un, 274
  gradiente, 275
  normal, 334
  potencial de un, 299
  rotor de un, 279
cilindro
  circular recto, 94
  exponencial, 94
  sinusoidal, 94
círculo, 108
  máximo, 342
  unitario, 121
conjunto (S)
  abierto, 129, 132
  cerrado, 130
  compacto, 186
  conexo, 132
  de nivel de una función, 135, 136, 154, 267
  disconexo, 132
  frontera de un, 131
  punto de acumulación de un, 139
  simplemente conexo, 305
conmutatividad
  de las segundas parciales mixtas, 172
cono
  circular, 96
  elíptico, 97
  vértice de un, 103
coordenadas
  cambio de, 141, 175, 222, 24
  cartesianas, 47
  cilíndricas, 235
  cogeográficas esféricas, 237
  polares, 137, 222, 232, 254
  pseudoesféricas, 287
curva(s)
  ángulo entre dos, 126
  cúspide, 115
  derivada de una, 111
  diferenciable, 111
  longitud de arco de una, 139
  orientación de una, 124
  parametrización de una, 117
  poligonal, 121
  poligonal orientada, 125
  rapidez de una, 114
  regular, 111
  regular parametrizada, 117
  reparametrización de una, 117
  suave por pedazos, 121
  vector aceleración de una, 127
  vector tangente de una, 117, 122

Desigualdad
  de Schwarz, 59, 63

del triángulo, 59
desplazamiento infinitesimal, 283
determinante(s), 13, 22, 24
cofactor de un, 23
de orden 3, 22
elementos de un, 25
menor de un, 24
paridad en un, 24
difeomorfismo, 219
de clase, 219
global, 221
local, 219
local de clase, 219
diferencial
de volumen, 294
forma, de área, 240
k-ésima , 195
total de segundo orden, 194
total de tercer orden, 195
total de una función, 196
dimensión, 14, 51
dinámica, 273
distancia, 56, 61, 90
entre dos puntos, 61
distribución estacionaria, 286

Ecuación
de Laplace, 163, 286
del calor, 285
diferencial exacta, 309
elipsoide, 97, 193, 319
circular, 97, 98
entrada de una matriz, 14
escalar, 16
producto 56
espacio
de configuración, 119, 320
dimensión de un, 51
euclidiano, 56
tangente, 111, 154
tangente ambiental, 62
vectorial real, 54
estructura algebraica, 52
esfera de dimensión 2, 91

Flujo
de velocidades de un líquido, 349
del campo 274
forma(s) cuadrática(s), 173,
valores propios de una, 175, 176
formas diferenciales, 296, 337
fórmula
de Gauss-Ostrogradskii, 358
de Green, 314
de Leibniz, 146
de Stokes, 366

función(es)
armónica, 286
componente de una, 207
continua, 142, 200
continua en un punto, 142
curvas de nivel de una, 137, 173
de clase C^1, 160
de clase C^r, 161
derivada de una, 211,
derivada direccional de una, 156, 270
derivada parcial de una, 144,
derivadas parciales mixtas de una, 160, 172
diferenciable, 111, 148, 149, 209, 210, 322, 339
diferenciable en un punto, 144
diferenciable en una superficie, 339
diferencial de una, 194, 211
gradiente de una, 146
gráfica de una, 133
implícita, 222, 224
integrable, 240
inversa de una, 219, 231
matriz jacobiana de una, 208
parcial de orden superior de una, 159
polinomio de Taylor de una, 163,
potencial de un campo vectorial, 299
real de variable vectorial, 107, 132, 207
segundas derivadas parciales de una, 160
variación de una, 145, 156
vectorial continua, 142
vectorial suave, 111

Geometría, 51, 53
algebraica, 138, 180

Hélice, 110, 118
hiperboloide
circular, 93
circular de dos hojas, 112
circular de una hoja, 100
de dos hojas, 100, 321, 323, 330, 340
de una hoja, 99
elíptico de una hoja, 99
elíptico de dos hojas, 100
hiperplano, 88

Integral (es)
de línea de primer género, 290
de línea de segundo género, 295
doble, 240
iteradas, 243
orientada en una región, 348
isometría, 343

Jacobiano, 220

Lema(s)
de Fubini, 243

de Sylvester, 175
de la diferencial de área, 253

Masa superficial, 341, 345
Mathematica, 135, 138
matriz(ces), 13
cuadrada, 14
diagonal, 21
diagonalizable, 81
ecuación característica de una, 49, 74
hessiana, 172
identidad, 21
inversa de una, 30, 45, 46
invertible, 30, 45, 46, 79
jacobiana, 208
multiplicación de un escalar por una, 16
nula, 14, 16
operación elemental en una, 41, 42
orden (dimensión) de una, 14
ortogonal, 48
principal de un sistema lineal, 12
producto de, 18
real de dimensión n, 14
semejantes, 43
simétrica, 17, 172
suma de, 15
transpuesta de una, 17
valor propio de una, 49, 74
vector propio de una, 74
método (regla) de Cramer, 13, 32
método de Gauss-Jordan, 39, 42
multiplicadores de Lagrange, 185, 186

Números imaginarios, 75

Operador de Hamilton, 278
orientación, 73, 120
negativa a la derecha, 72
positiva a la derecha, 72, 332

Paraboloide(s), 89
circular, 89, 113, 130, 173, 322
elíptico, 103
hiperbólico, 101, 104, 137, 174, 252, 322
péndulo plano simple, 119
espacio de configuración de un, 119
plano(s)
ángulo entre dos, 86
distancia de un punto a un, 90
ecuación de un, 84, 85
tangente, 154
vector normal a un, 87
polinomio
cuadrático, 164
cúbico, 164
de Taylor, error de un, 163, 164, 165, 167
lineal, 163
problema de Dirichlet, 287
producto
escalar, 56
vectorial, 64
Proyección estereográfica
de $\mathbb{L}^2$, 336
de $\mathbb{S}^2$, 336
punto(s)
aislado, 139
crítico de una función, 161
crítico de una función vectorial, 161
crítico degenerado, 184
crítico no degenerado, 176
de acumulación, 158
frontera, 148, 257
límite (acumulación), 139
regular de una función, 170
silla, 174
silla, separatrices de un, 179
singular de una función, 140

Recta(s)
ecuación paramétrica de una, 83
ecuación vectorial de una, 83
vector director de una, 83
región, 132
sin frontera, 227
regla de la cadena, 150, 212, 214
regla de la mano derecha, 72, 122
Regla de Cramer, 32

Silla de montar, 137
Sistema lineal de ecuaciones, 11
compatible, 34, 41
escalonado, 40
homógeneo, 36, 38
inconsistente, 41
matriz de un, 12
solución biparamétrica de un, 43
solución paramétrica de un, 43
solución trivial, 36, 38
superficie(s)
cilíndrica, 94
compacta, 343
cónica, 95
de revolución, 92, 326
directriz de una, 94
espacio tangente a una, 329
generatriz de una, 95
integral de primer género sobre una, 346
integral de segundo género sobre una, 350
no orientable, 335
ordinaria, 91
orientable, 334
orientación de una, 332

parametrización de una, 329
poliédrica, 328
regular, 317

Tensores antisimétricos, 338
Tensores simétricos, 338
Teorema
de cambio de variable, 254, 263
de diferenciabilidad, 149, 210
de Fubini, 246
de Gauss-Ostrogradskii, 359
de Green, 314
de Lagrange, 187
de la función implícita, 223, 224
de la función inversa local, 219
de la invarianza del dominio, 22
de Pitágoras, 59
de Stokes, 366
de Taylor, 167
de Weierstrass, 186
del desarrollo de un determinante, 24
del determinante de producto de matrices, 28
del valor intermedio, 144
del valor medio para integrales dobles, 250
primero de cohomología, 306, 310, 363
Teoría de singularidades y catástrofes, 184
toro de dimensión 2, 327, 343
transformaciones lineales, 201, 204, 205
traslación de ejes, 102

Valor(es)
crítico de una función, 171
extremo restringido, 186
máximo global de una función, 172
máximo local de una función, 172, 186, 187
mínimo global de una función, 172
mínimo local de una función, 172, 186, 187
vector(es), 53
ángulo entre dos, 62
base canónica de, 64
base de, 70
canónicos, 58
combinación lineal de, 70, 204
dependencia lineal de, 69
de Hamilton, 278
de posición, 53
gradiente, 146
ley del paralelogramo para, 53
linealmente independientes, 68
localizado, 55
marco de, 122
norma de un, 56, 58
normal, 84, 122
ortogonales, 58, 59, 61, 65, 84
paralelos, 55, 64
producto escalar de, 63
producto mixto de, 66
proyección ortogonal de un, 62, 63
resultante, 53
triple producto escalar de, 62, 66
unitario, 60
velocidad, 110
velocidad promedio, 110

La publicación de esta obra la realizó
Editorial Trillas, S. A. de C. V.

División Administrativa, Av. Río Churubusco 385,
Col. Gral. Pedro María Anaya, C. P. 03340, México, D. F.
Tel. 56884233, FAX 56041364

División Comercial, Calzada de la Viga 1132, C. P. 09439
México, D. F. Tel. 56330995, FAX 56330870

Se imprimió en marzo de 2012,
en Impresora Publimex, S. A. de C. V.

AO 75 TW

UNIVERSIDAD CENTRAL DEL ECUADOR
POTENTIOR ESTE OMNIUM
FUNDADA EN 1620
QUITO



SIB - UCE



FECHA DE DEVOLUCIÓN		

513.3 5136754
B389 Becerril Fonseca, Rubén
BG Cálculo diferencial e integral varias variables.

FECHA	NOMBRE
29/11/2018	Dayanna Chisaguano.

513.3 5136754
B389 Becerril Fonseca, Rubén
BG Cálculo diferencial e integral varias variables.

OTRO TÍTULO AFÍN

Cálculo diferencial para las ciencias naturales

J. Guadalupe Reyes Victoria

Este libro fue elaborado expresamente para responder a las necesidades de los científicos que requieren sobre todo aplicar las herramientas de las matemáticas, y no tanto adentrarse en la comprensión formal de esta ciencia. Para iniciar la lectura del libro sólo son necesarios conocimientos elementales de álgebra y de geometría analítica, y algunos prerrequisitos que se incluyen en tres apéndices.

La obra incluye una buena cantidad de ejemplos resueltos, y los suficientes ejercicios que permitirán al estudiante afirmar y aplicar la teoría.

El presente volumen cubre los temas referentes al cálculo diferencial para una variable, y pueden cubrirse en un semestre, o bien, dos trimestres. Un segundo volumen se dedica al cálculo integral.

ESTE LIBRO ES PROPIEDAD DEL SIB-UCE
SU VENTA ES PENADA POR LA LEY

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN VARIAS VARIABLES

Rubén Becerril Fonseca • J. Guadalupe Reyes Victoria

El objetivo de la presente obra es que el estudiante de Ciencias Básicas e Ingeniería comprenda los conceptos modernos de Dinámica y Geometría sin tener que hacer tantas lecturas teóricas, estudiando apenas lo necesario para conocer los fundamentos de esta parte de las ciencias matemáticas.

Los contenidos de este libro se presentan con base en la búsqueda de un equilibrio pedagógico: por una parte, se ofrece una teoría accesible y simple; por otro, la aplicación directa de los temas en aspectos de la vida cotidiana y en otras disciplinas, pensando en la formación del futuro físico, matemático, ingeniero o químico. El lector novicio en estos temas aprenderá los conceptos a medida que avance en la lectura de los capítulos, además de que podrá a prueba lo estudiado en diferentes secciones de ejercicios que se intercalan con cada explicación.

Contenido

Sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes
Geometría de R^2 y R^3
Curvas en R^2 y R^3
Funciones diferenciables de tipo $R^n \longrightarrow R$
Valores extremos de funciones $R^n \rightarrow R$
Funciones diferenciables $R^n \rightarrow R^m$
Sistemas de coordenadas
Integrales múltiples
Campos escalares y vectoriales en una región del espacio R^3
Integrales de línea
Superficies regulares y poliédricas en R^3
Integrales de superficie

Tienda en línea
www.etrillas.com.mx
La mejor forma de comprar

87265